❍ Bài 03

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

I. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Đạo hàm hàm số logarit

$y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

$y = \ln x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$;

$y = \log_a u(x) \longrightarrow y' = \dfrac{u'(x)}{u(x).\ln a}$.

3. Khảo sát hàm số logarit

Tập xác định: của hàm số logarit $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ là $(0; +\infty)$.

Chiều biến thiên: $a > 1$: Hàm số đồng biến.

$0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến.

Tiệm cận: Trục tung Oy là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị: Đồ thị đi qua điểm $M(1;0)$, $N(a;1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$;

$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$;

$y = a^{u(x)} \longrightarrow y' = u'(x).\ln a.a^{u(x)}$.

3. Khảo sát hàm số mũ

Tập xác định: của hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ là $\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $a > 1$: Hàm số luôn đồng biến.

$0 < a < 1$: Hàm số luôn nghịch biến.

Tiệm cận: Trục hoành Ox là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị: Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$, $(1;a)$ và nằm phía trên trục hoành.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 1. (ĐỀ MINH HOẠ 2016 – 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[-1;3]$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-1;3)$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\dfrac{x-1}{x}$.

A. $\mathrm{D}=(0;1)$. **B.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 3. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $\mathrm{D}=(-2;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathrm{D}=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2-\ln(ex)}$.

A. $\mathrm{D}=(1;2)$. **B.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=(0;1)$. **D.** $\mathrm{D}=(0;e]$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\log_2(x+1)-1}$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;1]$. **B.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[1;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(|x-5|+5-x\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathrm{D}=(-\infty;5)$. **D.** $\mathrm{D}=(5;+\infty)$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_3(x-1)^3$.

A. $\mathrm{D}=(1;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(-1;1)$. **C.** $\mathrm{D}=(-\infty;3)$. **D.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m<0$; $m>1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m\le 0$; $m\ge 1$. **D.** $0\le m\le 1$.

Câu 9. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln(1-\log_2 x)$.

A. $\mathrm{D}=(2;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;2)$. **C.** $\mathrm{D}=(0;2)$. **D.** $\mathrm{D}=(-2;2)$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3\left[\log_2(x-1)-1\right]$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\mathrm{D}=(1;2)$.

C. $\mathrm{D}=[0;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 13. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{(x^2+x+1).\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$.

A. $\mathrm{D}=(-2;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[-2;-1]$. **C.** $\mathrm{D}=(-2;-1)$. **D.** $\mathrm{D}=(-2;-1]$.

Câu 14. Tìm điều kiện của x để hàm số $y=\log_{\frac{1}{x}}(1-2x+x^2)$ có nghĩa.

A. $x>0$. **B.** $x\ge 0$. **C.** $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases}$. **D.** $x>1$.

Câu 15. Hàm số nào dưới đây có tập xác định là đoạn $[-1;3]$?

A. $y=\ln(3+2x-x^2)$. **B.** $y=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$.

C. $y=\sqrt{3+2x-x^2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{e\}$.

Câu 17. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{1-3^{x^2-5x+6}}$.

A. $\mathrm{D}=[2;3]$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=[1;6]$. **D.** $\mathrm{D}=(2;3)$.

Câu 18. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x}-\dfrac{9}{4}}$.

A. $\mathrm{D}=[0;3]$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=[1;2]$. **D.** $\mathrm{D}=[-1;2]$.

Câu 19. Đẳng thức $x=3^{\log_3 x}$ có nghĩa khi:

A. $x>0$. **B.** Với mọi x. **C.** $x\ge 0$. **D.** $x>1$.

Câu 20. Cho a là số thực dương khác 1. Tìm điều kiện của x để $x=\log_a a^x$ xảy ra.

A. Với mọi x. **B.** $x>0$. **C.** $x\ge 0$. **D.** $x>1$.

Vấn đề 2. TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y=(2x^2+x-1)^{\frac{2}{3}}$.

A. $y'=\dfrac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+x-1}}$. **B.** $y'=\dfrac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{(2x^2+x-1)^2}}$.

C. $y'=\dfrac{3(4x+1)}{2\sqrt[3]{2x^2+x-1}}$. **D.** $y'=\dfrac{3(4x+1)}{2\sqrt[3]{(2x^2+x-1)^2}}$.

Câu 22. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$.

A. $y'=x.13^{x-1}$. **B.** $y'=13^x.\ln 13$. **C.** $y'=13^x$. **D.** $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2}$.

A. $y'=\dfrac{x.2^{1+x^2}}{\ln 2}$. **B.** $y'=x.2^{1+x^2}.\ln 2$. **C.** $y'=2^x.\ln 2^x$. **D.** $y'=\dfrac{x.2^{1+x}}{\ln 2}$.

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{\sqrt{2x}}$.

A. $y'=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}$. **C.** $y'=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$. **D.** $y'=\sqrt{2x}.e^{\sqrt{2x}}$.

Câu 25. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. B. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$. D. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$.

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $y=3e^{-x}+2017e^{\cos x}$.

A. $y'=-3e^{-x}+2017\sin xe^{\cos x}$. **B.** $y'=-3e^{-x}-2017\sin xe^{\cos x}$.

C. $y'=3e^{-x}-2017\sin xe^{\cos x}$. **D.** $y'=3e^{-x}+2017\sin xe^{\cos x}$.

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^x$ với $x>0$.

A. $y'=x.x^{x-1}$. **B.** $y'=(\ln x+1)x^x$. **C.** $y'=x^x\ln x$. **D.** $y'=\dfrac{x^x}{\ln x}$.

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)=x^{\pi}.\pi^{x}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1)=\pi$. **B.** $f'(1)=\pi^2+\ln\pi$. **C.** $f'(1)=\pi^2+\pi\ln\pi$. **D.** $f'(1)=1$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)=2^x.5^x$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=10$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{\ln 10}$. **D.** $f'(0)=\ln 10$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=5e^{x^2}$. Tính $P=f'(x)-2x.f(x)+\dfrac{1}{5}f(0)-f'(0)$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=2^{x^2+1}$ Tính $T=2^{-x^2-1}.f'(x)-2x\ln 2+2$.

A. $T=-2$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=1$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3+2^x}+\dfrac{1}{3+2^{-x}}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $f'(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2) $f(1)+f(2)+...+f(2017)=2017$.

3) $f(x^2)=\dfrac{1}{3+4^x}+\dfrac{1}{3+4^{-x}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33. Cho $0<a\neq 1+\sqrt{2}$ và các hàm $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $f^2(x)-g^2(x)=1$.

2) $g(2x)=2g(x)f(x)$.

3) $f(g(0))=g(f(0))$.

4) $g'(2x)=g'(x)f(x)-g(x)f'(x)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2017}x$.

A. $y'=\dfrac{\ln 2017}{x}$. **B.** $y'=\dfrac{\log_{2017}e}{x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x.\log 2017}$. **D.** $y'=\dfrac{2017}{x.\ln 2017}$.

Câu 35. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

A. $y'=\dfrac{2}{2x+1}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log 2x$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{2x\ln 10}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$.

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\ln x$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)=\log_3\left(x^2f'(x)\right)$.

A. $g'(x)=\dfrac{1}{x}$. **B.** $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$. **C.** $g'(x)=\dfrac{\ln 3}{x}$. **D.** $g'(x)=\dfrac{x}{\ln 3}$.

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

A. $y'=\dfrac{2^{\ln\left(x^2+1\right)}}{x^2+1}$. **B.** $y'=2^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

C. $y'=\dfrac{2x.2^{\ln\left(x^2+1\right)}.\ln 2}{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{x.2^{\ln\left(x^2+1\right)}}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$.

Câu 40. Hàm số $g(x)=8^{x^2+x+1}.(6x+3).\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây ?

A. $f(x)=2^{x^2+x+1}$. **B.** $f(x)=8^{x^2+x+1}$. **C.** $f(x)=2^{3x^2+3x+1}$. **D.** $f(x)=8^{3x^2+3x+1}$.

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln^2(\ln x)$ tại điểm $x=e$.

A. $y'(e)=e$. **B.** $y'(e)=1$. **C.** $y'(e)=\dfrac{2}{e}$. **D.** $y'(e)=0$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=4\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-4x}$ với $x\ge 4$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(4)-\left[f'(8)\right]^2.\ln 2$.

A. $P=2\ln 2$. **B.** $P=4\ln 2$. **C.** $P=6\ln 2$. **D.** $P=8\ln 2$.

Câu 43. Cho hàm số $y=e^{\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'.\cos x+y.\sin x+y''=0$. **B.** $y'.\sin x+y.\cos x+y''=0$.

C. $y'.\sin x-y''.\cos x+y'=0$. **D.** $y'.\cos x-y.\sin x-y''=0$.

Câu 44. Cho hàm số $y=x.e^{-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(1-x)y'=x.y$. **B.** $x.y'=(1+x)y$.

C. $x.y'=(1-x).y$. **D.** $(1+x).y'=(x-1).y$.

Câu 45. Cho hàm số $y=e^{-x}.\sin x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'+2y''-2y=0$. **B.** $y''+2y'+2y=0$.

C. $y''-2y'-2y=0$. **D.** $y'-2y''+2y=0$.

Câu 46. Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'+2y\ln 2=0$. **B.** $y'+3y\ln 2=0$. **C.** $y'-8y\ln 2=0$. **D.** $y'+8y\ln 2=0$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x.e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $xy=\left(1+x^2\right)y'$. **B.** $x.y'=\left(1+x^2\right).y$.

C. $xy=\left(1-x^2\right).y'$.　　**D.** $xy'=\left(1-x^2\right).y$.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $xy=y'\left(y\ln x+1\right)$.　　**B.** $xy'=y\left(y\ln x-1\right)$.

C. $xy=y\left(y'\ln x-1\right)$.　　**D.** $xy'=y\left(y\ln x+1\right)$.

Câu 49. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right)=e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

A. $M=e$.　　**B.** $M=e^2$.　　**C.** $M=e^3$.　　**D.** $M=e^5$.

Câu 50. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=e^{2-3x}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m+M=1$.　　**B.** $M-m=e$.　　**C.** $M.m=\dfrac{1}{e^2}$.　　**D.** $\dfrac{M}{m}=e^2$.

Câu 51. Tìm tập giá trị T của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ với $x\in\left[1;e^2\right]$.

A. $\mathrm{T}=\left[0;e\right]$.　　**B.** $\mathrm{T}=\left[\dfrac{1}{e};e\right]$.　　**C.** $\mathrm{T}=\left[0;\dfrac{1}{e}\right]$.　　**D.** $\mathrm{T}=\left[-\dfrac{1}{e};e\right]$.

Câu 52. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x}\ln x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1;e\right]$ tại $x=x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left[1;\dfrac{3}{e}\right]$.　　**B.** $x_0\in\left(\dfrac{3}{e};\sqrt{e}\right]$.　　**C.** $x_0\in\left[\sqrt{e};2\right]$.　　**D.** $x_0\in\left(2;e\right]$.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+e^2}\right)$ trên đoạn $\left[0;e\right]$.

A. $m=\dfrac{1}{2}$.　　**B.** $m=1$.

C. $m=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.　　**D.** $m=1-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 54. Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y=x.e^{-x}$.

A. $x_0=e$.　　**B.** $x_0=e^2$.　　**C.** $x_0=1$.　　**D.** $x_0=2$.

Câu 55. Tính giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=xe^x$.

A. $y_{\mathrm{CT}}=\dfrac{1}{e}$.　　**B.** $y_{\mathrm{CT}}=e$.　　**C.** $y_{\mathrm{CT}}=-\dfrac{1}{e}$.　　**D.** $y_{\mathrm{CT}}=-1$.

Vấn đề 3. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 56. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$.　　**B.** $y=\log_{\frac{e}{3}}x$.　　**C.** $y=\log_{\frac{e}{2}}x$.　　**D.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$.

Câu 57. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$.　　**B.** $y=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$.　　**C.** $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.　　**D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Câu 58. Hàm số nào sao đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=2017^x$.　　**B.** $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.　　**C.** $y=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)$.　　**D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$.

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số $y=\log_M x$ với $M=a^2-4$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $2<a<\sqrt{5}$.　　**B.** $a=\sqrt{5}$.

C. $-\sqrt{5}<a<-2$; $2<a<\sqrt{5}$.　　**D.** $a=2$.

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y=\left(a^2-3a+3\right)^x$ đồng biến.

A. $a=1$.

B. $a=2$.

C. $a\in(1;2)$.

D. $a\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{x^3-3x^2+2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 62. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b\frac{3}{4}<\log_b\frac{4}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $0<a<1,\ 0<b<1$.

B. $0<a<1,\ b>1$.

C. $a>1,\ 0<b<1$.

D. $a>1,\ b>1$.

Câu 63. Cho hàm số $y=x-\ln(1+x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số giảm trên $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số tăng trên $(-1;+\infty)$

C. Hàm số giảm trên $(-1;0)$ và tăng trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số tăng trên $(-1;0)$ và giảm trên $(0;+\infty)$.

Câu 64. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=\ln x$ là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

2) Trên khoảng $(1;3)$ hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ nghịch biến.

3) Nếu $M>N>0$ thì $\log_a M>\log_a N$.

4) Nếu $\log_a 3<0$ thì $0<a<1$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 65. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=\log_a x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) Nếu $\log_a\frac{2}{3}<0$ thì $a>1$.

3) $\log_a x^2=2\log_a x$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 66. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y=e^x$ không chẵn cũng không lẻ

B. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=e^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ không chẵn cũng không lẻ.

Câu 67. Cho hàm số $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có đạo hàm $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

B. Hàm số tăng trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

D. Hàm số giảm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 68. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=(-5)^x$ là hàm số mũ.

2) Nếu $\pi^{\alpha}<\pi^{2\alpha}$ thì $\alpha<1$.

3) Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

4) Hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 69. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) $a^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2) Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3) Hàm số $y=e^{2017x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4) Đồ thị hàm số $y=a^x$ nhận trục Ox làm tiệm cận ngang.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

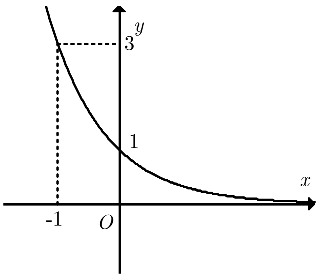
A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 70. Cho $a,\ b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}$. Tính giá trị biểu thức $P=2017^a-2017^b$.

A. $P=0$. **B.** $P=2016$. **C.** $P=2017$. **D.** $P=-1$.

Vấn đề 4. ĐỒ THỊ

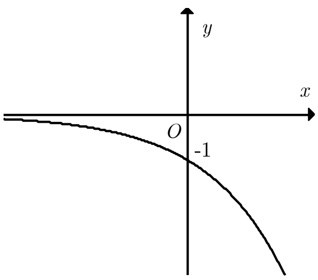
Câu 71. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

C. $y=2^x+\dfrac{5}{2}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

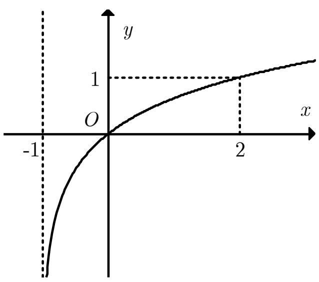
Câu 72. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-2^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

C. $y=2^x$. **D.** $y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

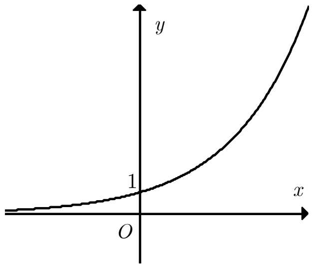
Câu 73. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



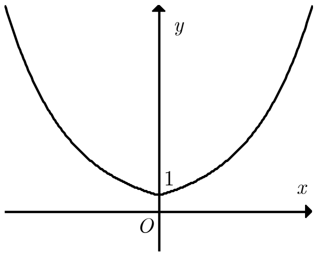
A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=\log_2(x+1)$.

C. $y=\log_3 x+1$. **D.** $y=\log_3(x+1)$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ có đồ thị Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



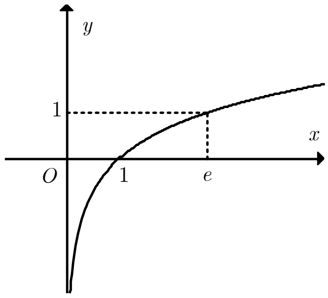
Hình 1



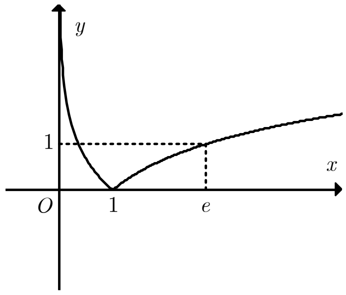
Hình 2

A. $y=\left|\left(\sqrt{2}\right)^x\right|$. **B.** $y=-\left(\sqrt{2}\right)^x$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^{|x|}$. **D.** $y=-\left|\left(\sqrt{2}\right)^x\right|$.

Câu 75. Cho hàm số $y=\ln x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



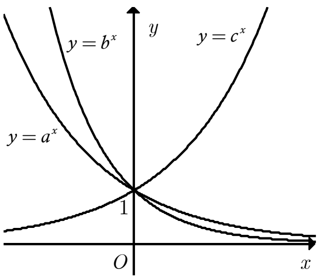
Hình 1



Hình 2

A. $y=\ln|x|$. **B.** $y=|\ln x|$. **C.** $y=|\ln(x+1)|$. **D.** $y=\ln|x+1|$.

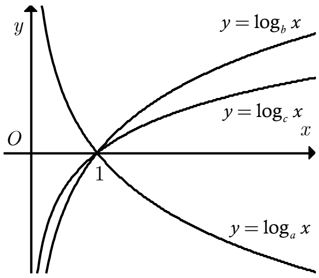
Câu 76. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a>b>c$. **B.** $a<b<c$.

C. $c>a>b$. **D.** $a>c>b$.

Câu 77. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



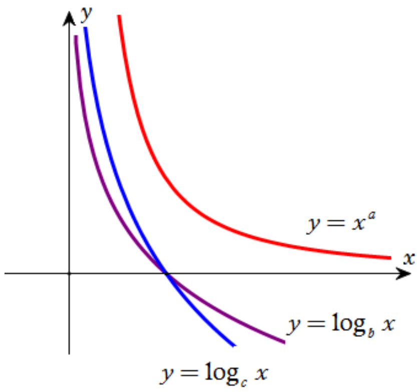
A. $a<c<b$. **B.** $a<b<c$.

C. $b<a<c$. **D.** $b>a>c$.

Câu 78. Cho a là số thực tùy ý và b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ và $y = x^a$, $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$.

C. $a > b > c$. **D.** $a > c > b$.



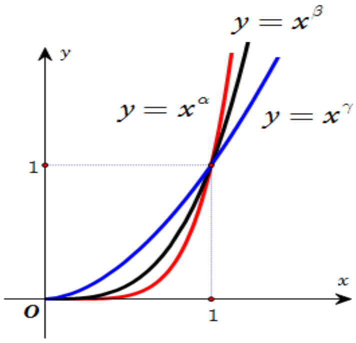
Câu 79. Cho đồ thị của ba hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta, y = x^\gamma$ trên khoảng $(0;+\infty)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\gamma < \beta < \alpha < 0$.

B. $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$.

C. $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

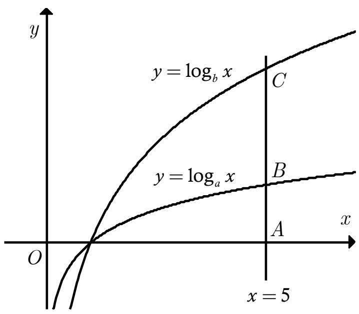
D. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.



Câu 80. Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a = b^2$. **B.** $a^3 = b$.

C. $a = b^3$ **D.** $a = 5b$.



Câu 81. Cho hàm số $y = 5^x$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$.

A. $y = 5^{-x}$. **B.** $y = \log_5 x$. **C.** $y = -\log_5 x$. **D.** $y = -5^{-x}$.

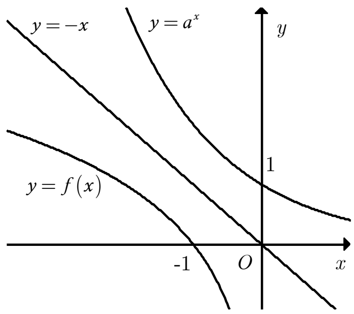
Câu 82. Cho hàm số $y = 3^{\frac{x}{2}}$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$.

A. $y = \log_{\sqrt{3}} x$. **B.** $y = \log_3 x^2$. **C.** $y = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$. **D.** $y = \frac{1}{2}\log_3 x$.

Câu 83. Cho hàm số $y = -\log_2 x$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$.

A. $y = 2^x$. **B.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$. **C.** $y = 2^{-x}$. **D.** $y = 2^{\frac{x}{2}}$.

Câu 84. Biết hai hàm số $y=a^x$ và $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-x$. Tính $f\left(-a^3\right)$.



A. $f\left(-a^3\right)=-a^{-3a}$.

B. $f\left(-a^3\right)=-\dfrac{1}{3}$.

C. $f\left(-a^3\right)=-3$.

D. $f\left(-a^3\right)=-a^{3a}$.

Câu 85. Đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y=2^x$. **C.** $y=\log_2 \sqrt{x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Câu 86. Cho hàm số $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Đồ thị (C) luôn đi qua $M(0;1)$ và $N(1;a)$

B. Đồ thị (C) có tiệm cận $y=0$.

C. Đồ thị (C) luôn nằm phía trên trục hoành.

D. Hàm số luôn đồng biến.

Câu 87. Cho hàm số $y=\log_4|x|$ $(x\neq 0)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng tập xác định.

C. Đồ thị (C) nhận Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị (C) không có đường tiệm cận.

Câu 88. Cho a là số thực dương và khác 1. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

B. Đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục tung.

C. Đồ thị của hai hàm số $y=e^x$ và $y=\ln x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

D. Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng qua đường thẳng $y=-x$

Câu 89. Cho hai hàm số $y=f(x)=\log_a x$ và $y=g(x)=a^x$ $(0<a\neq 1)$. Xét các mệnh đề sau:

1) Đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ luôn cắt nhau tại một điểm.

2) Hàm số $f(x)+g(x)$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

3) Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục Oy làm tiệm cận.

4) Chỉ có đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận.

Hỏi có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}} x$ và $y=\log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a.

A. $a=\sqrt{3}$. **B.** $a=\sqrt[3]{6}$. **C.** $a=\sqrt{6}$ **D.** $a=\sqrt[6]{3}$.

Vấn đề 5. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Câu 91. Cho $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$.

A. $P=2.$ **B.** $P=\dfrac{3}{2}.$ **C.** $P=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $P=-\dfrac{5}{2}.$

Câu 92. Cho số thực x thỏa mãn $\log_2\left[4\log_4\left(8\log_2 x\right)\right]=8$. Tính $\ln x$.

A. $\ln x=2^{125}.\ln 2$. **B.** $\ln x=2^{126}.\ln 2$. **C.** $\ln x=2^{127}.\ln 2$. **D.** $\ln x=2^{128\ln 2}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và biểu thức $P=f(x-1)+f(x-2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P=\dfrac{3}{4}f(x).$ **B.** $P=6f(x).$ **C.** $P=-3f(x).$ **D.** $P=-8f(x).$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=2017^x$. Tính $P=\dfrac{f(x)f(x+1)f(x+2)}{f(3x)}$.

A. $P=2017^x.$ **B.** $P=3.2017.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=2017^3.$

Câu 95. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=2016.$ **B.** $S=1008.$ **C.** $S=1007.$ **D.** $S=2017.$

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=2016.$ **B.** $S=2017.$ **C.** $S=1008.$ **D.** $S=1007.$

Câu 97. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ và góc α tùy ý. Tính $S=f\left(\sin^2\alpha\right)+f\left(\cos^2\alpha\right)$.

A. $S=1.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=3.$ **D.** $S=4^{\sin 2a}.$

Câu 98. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Biết $a+b=3$, tính $S=f(a)+f(b-2)$.

A. $S=1.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=\dfrac{1}{4}.$ **D.** $S=\dfrac{3}{4}.$

Câu 99. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)=\ln 2017-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2017)$.

A. $S=\dfrac{4035}{2018}.$ **B.** $S=2017.$ **C.** $S=\dfrac{2016}{2017}.$ **D.** $S=\dfrac{2017}{2018}.$

Câu 101. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=25$. **C.** $S_{\min}=33$. **D.** $S_{\min}=17$.

Câu 102. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}a+b\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=2a+4b-3$.

A. $P_{\max}=\sqrt{10}$. **B.** $P_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $P_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $P_{\max}=2\sqrt{10}$.

Câu 103. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a\geq b>1$. Biết rằng $P=\dfrac{1}{\log_{(ab)}a}+\sqrt{\log_a\dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $k\in(-1;0)$. **C.** $k\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $k\in(2;3)$.

Câu 104. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Xét các số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)+3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=13$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Câu 105. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a\geq b^2$ và $b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+\log_b\dfrac{a}{b}$.

A. $P_{\min}=\dfrac{1}{3}$. **B.** $P_{\min}=1$. **C.** $P_{\min}=3$. **D.** $P_{\min}=9$.

Câu 106. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$. Biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ đạt giá trị khỏ nhất khi:

A. $a=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $a^3=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Câu 107. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a>1>b>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^2b\right)+\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $P_{\max}=1+2\sqrt{3}$. **B.** $P_{\max}=-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\max}=-2$. **D.** $P_{\max}=1-2\sqrt{3}$.

Câu 108. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{3\log_x y}+\dfrac{12}{y^{\frac{1}{\ln x}}}$ với $0<x\neq 1$ và $y>0$.

A. $P_{\min}=8\sqrt{3}$. **B.** $P_{\min}=e^2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=8\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=4\sqrt{6}$.

Câu 109. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\geq\ln\left(x^2+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=6$. **B.** $P_{\min}=2\sqrt{2}+3$. **C.** $P_{\min}=2+3\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Câu 110. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

❍ Bài 03

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

I. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Đạo hàm hàm số logarit

$$y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x};$$

$$y = \log_a u(x) \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x).\ln a}.$$

3. Khảo sát hàm số logarit

Tập xác định: của hàm số logarit $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ là $(0; +\infty)$.

Chiều biến thiên: $a > 1$: Hàm số đồng biến.

$0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến.

Tiệm cận: Trục tung Oy là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị: Đồ thị đi qua điểm $M(1;0)$, $N(a;1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a;$$

$$y = e^x \longrightarrow y' = e^x;$$

$$y = a^{u(x)} \longrightarrow y' = u'(x).\ln a.a^{u(x)}.$$

3. Khảo sát hàm số mũ

Tập xác định: của hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ là $\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $a > 1$: Hàm số luôn đồng biến.

$0 < a < 1$: Hàm số luôn nghịch biến.

Tiệm cận: Trục hoành Ox là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị: Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$, $(1;a)$ và nằm phía trên trục hoành.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 1. (ĐỀ MINH HOẠ 2016 – 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[-1;3]$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-1;3)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\dfrac{x-1}{x}$.

A. $\mathrm{D}=(0;1)$. **B.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 3. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $\mathrm{D}=(-2;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathrm{D}=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+2}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2-\ln(ex)}$.

A. $\mathrm{D}=(1;2)$. **B.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=(0;1)$. **D.** $\mathrm{D}=(0;e]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} ex>0 \\ 2-\ln(ex)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ ex\le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\le e \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le e$. **Chọn D.**

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\log_2(x+1)-1}$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;1]$. **B.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[1;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ \log_2(x+1)\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x+1\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$. **Chọn C.**

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(|x-5|+5-x\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathrm{D}=(-\infty;5)$. **D.** $\mathrm{D}=(5;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow |x-5|+5-x>0$

$\Leftrightarrow |x-5|>x-5 \Leftrightarrow x-5<0 \Leftrightarrow x<5$. **Chọn C.** Chú ý: $|A|>A \Leftrightarrow A<0$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_3(x-1)^3$.

A. $\mathrm{D}=(1;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(-1;1)$. **C.** $\mathrm{D}=(-\infty;3)$. **D.** $\mathrm{D}=(1;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3 \longrightarrow \mathrm{D}=(1;3)$. **Chọn A.**

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m<0$; $m>1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m\le 0$; $m\ge 1$. **D.** $0\le m\le 1$.

Lời giải. Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2mx+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'=m^2-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$. **Chọn B.**

Câu 9. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải. Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'=1+m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0$. **Chọn B.**

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(1-\log_2 x\right)$.

A. $\mathrm{D}=(2;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;2)$. **C.** $\mathrm{D}=(0;2)$. **D.** $\mathrm{D}=(-2;2)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1-\log_2 x>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<2$. **Chọn C.**

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3\left[\log_2(x-1)-1\right]$.

A. $\mathrm{D}=(-\infty;3)$. **B.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ \log_2(x-1)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$. **Chọn B.**

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\mathrm{D}=(1;2)$.

C. $\mathrm{D}=[0;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$. **Chọn B.**

Câu 13. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\left(x^2+x+1\right).\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$.

A. $\mathrm{D}=(-2;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[-2;-1]$. **C.** $\mathrm{D}=(-2;-1)$. **D.** $\mathrm{D}=(-2;-1]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ \left(x^2+x+1\right).\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x+2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le -1$. **Chọn D.**

Câu 14. Tìm điều kiện của x để hàm số $y=\log_{\frac{1}{x}}\left(1-2x+x^2\right)$ có nghĩa.

A. $x>0$. **B.** $x\ge 0$. **C.** $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases}$. **D.** $x>1$.

Lời giải. Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+x^2>0 \\ \dfrac{1}{x}>0 \\ \dfrac{1}{x}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 15. Hàm số nào dưới đây có tập xác định là đoạn $[-1;3]$?

A. $y=\ln\left(3+2x-x^2\right)$. **B.** $y=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$.

C. $y=\sqrt{3+2x-x^2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Lời giải. ● Hàm số $y=\ln\left(3+2x-x^2\right)$ và hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ xác định khi $3+2x-x^2>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0 \Leftrightarrow -1<x<3$: không phù hợp.

● Hàm số $y=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$ xác định khi $3+2x-x^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 3 \end{cases}$.

Hàm số này có tập xác định là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$: không phù hợp.

● Hàm số $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ xác định khi $3+2x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$: thỏa mãn.

Chọn C.

Câu 16. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{e\}$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$. **Chọn A.**

Câu 17. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{1-3^{x^2-5x+6}}$.

A. $\mathrm{D}=[2;3]$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=[1;6]$. **D.** $\mathrm{D}=(2;3)$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-3^{x^2-5x+6}\geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}\leq 1$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6\leq 0 \Leftrightarrow 2\leq x\leq 3$. **Chọn A.**

Câu 18. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x}-\dfrac{9}{4}}$.

A. $\mathrm{D}=[0;3]$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=[1;2]$. **D.** $\mathrm{D}=[-1;2]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x}\geq \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x}\geq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x\leq -2$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$. **Chọn C.**

Câu 19. Đẳng thức $x=3^{\log_3 x}$ có nghĩa khi:

A. $x>0$. **B.** Với mọi x. **C.** $x\geq 0$. **D.** $x>1$.

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

Lôgarit cơ số 3 hai vế của $x=3^{\log_3 x}$, ta được $\log_3 x=\log_3\left(3^{\log_3 x}\right)$

$\Leftrightarrow \log_3 x=\log_3 x.\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 x=\log_3 x$: luôn đúng $\forall x>0$. **Chọn A.**

Câu 20. Cho a là số thực dương khác 1. Tìm điều kiện của x để $x=\log_a a^x$ xảy ra.

A. Với mọi x. **B.** $x>0$. **C.** $x\geq 0$. **D.** $x>1$.

Lời giải. Đặt $N=a^x>0 \longrightarrow x=\log_a N$ (với $0<a\neq 1$).

Khi đó $x=\log_a a^x \Leftrightarrow \log_a N=\log_a a^x \Leftrightarrow N=a^x \Leftrightarrow a^x=a^x$: luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Vấn đề 2. TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(2x^2+x-1\right)^{\frac{2}{3}}$.

A. $y'=\dfrac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+x-1}}$. **B.** $y'=\dfrac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+x-1\right)^2}}$.

C. $y'=\dfrac{3(4x+1)}{2\sqrt[3]{2x^2+x-1}}$. **D.** $y'=\dfrac{3(4x+1)}{2\sqrt[3]{\left(2x^2+x-1\right)^2}}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$, ta có $y'=\dfrac{2}{3}.\left(2x^2+x-1\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(2x^2+x-1\right)'$

$=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2+x-1}}.(4x+1)=\dfrac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+x-1}}$. **Chọn A.**

Câu 22. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$.

A. $y'=x.13^{x-1}$. **B.** $y'=13^x.\ln 13$. **C.** $y'=13^x$. **D.** $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$, ta có $y'=\left(13^x\right)'=13^x.\ln 13$. **Chọn B.**

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2}$.

A. $y'=\dfrac{x.2^{1+x^2}}{\ln 2}$. **B.** $y'=x.2^{1+x^2}.\ln 2$. **C.** $y'=2^x.\ln 2^x$. **D.** $y'=\dfrac{x.2^{1+x}}{\ln 2}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$, ta có $y'=\left(x^2\right)'.2^{x^2}.\ln 2$

$=2x.2^{x^2}.\ln 2=x.2^{1+x^2}.\ln 2$. **Chọn B.**

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{\sqrt{2x}}$.

A. $y'=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}$. **C.** $y'=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$. **D.** $y'=\sqrt{2x}.e^{\sqrt{2x}}$.

Lời giải. Ta có $y'=\left(\sqrt{2x}\right)'.e^{\sqrt{2x}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2x}}.e^{\sqrt{2x}}=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$. **Chọn C.**

Câu 25. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$.

Lời giải. Ta có $y'=\left(\dfrac{x+1}{4^x}\right)'=\dfrac{(x+1)'.4^x-(x+1).\left(4^x\right)'}{\left(4^x\right)^2}$

$=\dfrac{4^x-(x+1).4^x.\ln 4}{\left(4^x\right)^2}=\dfrac{1-(x+1).\ln 4}{4^x}\xrightarrow[4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}]{\ln 4=2.\ln 2}y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. **Chọn A.**

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $y=3e^{-x}+2017e^{\cos x}$.

A. $y' = -3e^{-x} + 2017\sin xe^{\cos x}$. **B.** $y' = -3e^{-x} - 2017\sin xe^{\cos x}$.

C. $y' = 3e^{-x} - 2017\sin xe^{\cos x}$. **D.** $y' = 3e^{-x} + 2017\sin xe^{\cos x}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x} \\ e^{\cos x} = \left(\cos x\right)' e^{\cos x} = -\sin x.e^{\cos x} \end{cases} \to y' = -3e^{-x} - 2017.\sin x.e^{\cos x}$.

Chọn B.

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^x$ với $x > 0$.

A. $y' = x.x^{x-1}$. **B.** $y' = (\ln x + 1)x^x$. **C.** $y' = x^x \ln x$. **D.** $y' = \dfrac{x^x}{\ln x}$.

Lời giải. Viết lại $y = x^x = e^{x\ln x}$.

Suy ra $y' = (x\ln x)'e^{x\ln x} = (\ln x + 1).e^{x\ln x} = (\ln x + 1)x^x$. **Chọn B.**

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^\pi.\pi^x$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \pi$. **B.** $f'(1) = \pi^2 + \ln\pi$. **C.** $f'(1) = \pi^2 + \pi\ln\pi$. **D.** $f'(1) = 1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \left(x^\pi\right)'.\pi^x + x^\pi.\left(\pi^x\right)' = \pi.x^{\pi-1}.\pi^x + x^\pi.\pi^x.\ln\pi$

Suy ra $f'(1) = \pi^2 + \pi\ln\pi$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = 2^x.5^x$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 10$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = \dfrac{1}{\ln 10}$. **D.** $f'(0) = \ln 10$.

Lời giải. Viết lại $f(x) = 2^x.5^x = 10^x$. Suy ra $f'(x) = \left(10^x\right)' = 10^x.\ln 10$.

Vậy $f'(0) = 10^0.\ln 10 = 1.\ln 10 = \ln 10$. **Chọn D.**

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = 5e^{x^2}$. Tính $P = f'(x) - 2x.f(x) + \dfrac{1}{5}f(0) - f'(0)$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 4$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 10x.e^{x^2}$. Do đó $f'(0) = 0$ và $f(0) = 5$.

Vậy $P = f'(x) - 2xf(x) + \dfrac{1}{5}f(0) - f'(0) = 10xe^{x^2} - 2x.5e^{x^2} + \dfrac{1}{5}.5 - 0 = 1$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+1}$ Tính $T = 2^{-x^2-1}.f'(x) - 2x\ln 2 + 2$.

A. $T = -2$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \left(x^2+1\right)'.2^{x^2+1}.\ln 2 = 2x.\ln 2.2^{x^2+1}$.

Vậy $T = 2^{-x^2-1}.2x\ln 2.2^{x^2+1} - 2x\ln 2 + 2 = 2x\ln 2 - 2x\ln 2 + 2 = 2$. **Chọn B.**

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3+2^x} + \dfrac{1}{3+2^{-x}}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2) $f(1) + f(2) + ... + f(2017) = 2017$.

3) $f\left(x^2\right) = \dfrac{1}{3+4^x} + \dfrac{1}{3+4^{-x}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có

- $f'(x) = \dfrac{-2^x\ln 2}{\left(3+2^x\right)^2} + \dfrac{2^{-x}\ln 2}{\left(3+2^{-x}\right)^2}$. Tại $x = 0$ ta có $f'(x) = 0$ nên khẳng định 1 sai.
- $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x} + 6}{\left(3+2^x\right)\left(3+2^{-x}\right)} = \dfrac{2^x + 2^{-x} + 6}{3.\left(2^x + 2^{-x}\right) + 10} < 1 \longrightarrow f(1) + f(2) + ... + f(2017) < 2017$

nên khẳng định 2 sai.

• $f(x^2)=\dfrac{1}{3+2^{x^2}}+\dfrac{1}{3+2^{-x^2}}\neq\dfrac{1}{3+4^x}+\dfrac{1}{3+4^{-x}}$ với $x=1$ chẳng hạn nên khẳng định 3 sai.

Do đó không có khẳng định nào đúng. **Chọn A.**

Câu 33. Cho $0<a\neq 1+\sqrt{2}$ và các hàm $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $f^2(x)-g^2(x)=1$.

2) $g(2x)=2g(x)f(x)$.

3) $f(g(0))=g(f(0))$.

4) $g'(2x)=g'(x)f(x)-g(x)f'(x)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có

• $f^2(x)-g^2(x)=\left(\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2=1\longrightarrow$ khẳng đinh 1 đúng.

• $g(2x)=\dfrac{a^{2x}-a^{-2x}}{2}=\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^x+a^{-x})}{2}=2.\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}.\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=2g(x).f(x)\longrightarrow$ khẳng đinh 2 đúng.

• $\begin{cases} f(g(0))=f(0)=1. \\ g(f(0))=g(1)=\dfrac{a-\frac{1}{a}}{2}=\dfrac{a^2-1}{2a} \end{cases}\longrightarrow f(g(0))\neq g(f(0))\longrightarrow$ khẳng định 3 sai.

• Do $g(2x)=2g(x)f(x)$, lấy đạo hàm hai vế (để ý là $[g(u)]'=u'g'(u)$), ta có:

$[g(2x)]'=2[g'(x)f(x)+g(x)f'(x)]\Leftrightarrow 2g'(2x)=2[g'(x)f(x)+g(x)f'(x)]$

$\Leftrightarrow g'(2x)=g'(x)f(x)+g(x)f'(x)\rightarrow$ khẳng định 4 sai.

Vậy có 2 khẳng định đúng. **Chọn C.**

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2017}x$.

A. $y'=\dfrac{\ln 2017}{x}$. **B.** $y'=\dfrac{\log_{2017}e}{x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x.\log 2017}$. **D.** $y'=\dfrac{2017}{x.\ln 2017}$.

Lời giải. Áp dụng $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x.\ln a}$, ta được $y'=\dfrac{1}{x.\ln 2017}=\dfrac{\log_{2017}e}{x}$. **Chọn B.**

Câu 35. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

A. $y'=\dfrac{2}{2x+1}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải. Áp dụng $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$, ta được $y'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1).\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1).\ln 2}$. **Chọn C.**

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log 2x$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{2x\ln 10}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$.

Lời giải. Viết lại $y=\log 2x=\dfrac{\ln 2x}{\ln 10}=\dfrac{1}{\ln 10}.\ln 2x$.

Suy ra $y'=\dfrac{1}{\ln 10}.(\ln 2x)'=\dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{(2x)'}{2x}=\dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **Chọn B.**

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, ta được $y'=\dfrac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}}$.

Mà $\left(1+\sqrt{x+1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\longrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. **Chọn A.**

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\ln x$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)=\log_3\left(x^2f'(x)\right)$.

A. $g'(x)=\dfrac{1}{x}$. **B.** $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$. **C.** $g'(x)=\dfrac{\ln 3}{x}$. **D.** $g'(x)=\dfrac{x}{\ln 3}$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}\longrightarrow g(x)=\log_3\left(x^2.f'(x)\right)=\log_3\left(x^2.\dfrac{1}{x}\right)=\log_3 x$.

Suy ra $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$. **Chọn B.**

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

A. $y'=\dfrac{2^{\ln\left(x^2+1\right)}}{x^2+1}$. **B.** $y'=2^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

C. $y'=\dfrac{2x.2^{\ln\left(x^2+1\right)}.\ln 2}{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{x.2^{\ln\left(x^2+1\right)}}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$.

Lời giải. Ta có $y'=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]'.2^{\ln\left(x^2+1\right)}.\ln 2=\dfrac{2x}{x^2+1}.2^{\ln\left(x^2+1\right)}.\ln 2$. **Chọn C.**

Câu 40. Hàm số $g(x)=8^{x^2+x+1}.(6x+3).\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây ?

A. $f(x)=2^{x^2+x+1}$. **B.** $f(x)=8^{x^2+x+1}$. **C.** $f(x)=2^{3x^2+3x+1}$. **D.** $f(x)=8^{3x^2+3x+1}$.

Lời giải. Thử đạo hàm lần lượt từng hàm số ở các đáp án và được đáp án đúng là B.

Thật vây: Ta có $\left(8^{x^2+x+1}\right)'=\left(x^2+x+1\right)'.8^{x^2+x+1}.\ln 8$

$=(2x+1).8^{x^2+x+1}.3\ln 2=8^{x^2+x+1}.(6x+3).\ln 2$.**Chọn B.**

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln^2(\ln x)$ tại điểm $x=e$.

A. $y'(e)=e$. **B.** $y'(e)=1$. **C.** $y'(e)=\dfrac{2}{e}$. **D.** $y'(e)=0$.

Lời giải. Nhận thấy có dạng $u^\alpha\longrightarrow\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ với $u=\ln(\ln x)$.

Áp dụng, ta được $y'=2.\ln(\ln x).\left[\ln(\ln x)\right]'$. (1)

Tính $\left[\ln(\ln x)\right]'$. Nhận thấy có dạng $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ với $u=\ln x$.

Áp dụng, ta được $\left[\ln(\ln x)\right]'=\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $y'=\dfrac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}\longrightarrow y'(e)=\dfrac{2\ln(\ln e)}{e.\ln e}=\dfrac{2.\ln 1}{e.\ln e}=0$. **Chọn D.**

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=4\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-4x}$ với $x\ge 4$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(4)-\left[f'(8)\right]^2.\ln 2$.

A. $P=2\ln 2$. **B.** $P=4\ln 2$. **C.** $P=6\ln 2$. **D.** $P=8\ln 2$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=4.\dfrac{\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x}}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$.

Khi đó $f'(8)=\sqrt{2}$ và $f(4)=4\ln 2$.

Vậy $P=f(4)-\left[f'(8)\right]^2.\ln 2=4\ln 2-\left(\sqrt{2}\right)^2.\ln 2=2.\ln 2$. **Chọn A.**

Câu 43. Cho hàm số $y=e^{\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'.\cos x+y.\sin x+y''=0$. **B.** $y'.\sin x+y.\cos x+y''=0$.

C. $y'.\sin x-y''.\cos x+y'=0$. **D.** $y'.\cos x-y.\sin x-y''=0$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} y'=-\sin x.e^{\cos x} \\ y''=\sin^2 x.e^{\cos x}-\cos x.e^{\cos x} \end{cases}$. Thay lần lượt vào các đáp án thì ta được đáp án B đúng. Thật vậy: Ta có $y'.\sin x+y.\cos x+y''$

$=-\sin x.e^{\cos x}.\sin x+e^{\cos x}.\cos x+\sin^2 x.e^{\cos x}-\cos x.e^{\cos x}=0$. **Chọn B.**

Câu 44. Cho hàm số $y=x.e^{-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(1-x)y'=x.y$. **B.** $x.y'=(1+x)y$.

C. $x.y'=(1-x).y$. **D.** $(1+x).y'=(x-1).y$.

Lời giải. Ta có $y'=e^{-x}-x.e^{-x}=(1-x)e^{-x}$

Nhân hai vế cho x, ta được $x.y'=x.(1-x).e^{-x}=(1-x).y$. **Chọn C.**

Câu 45. Cho hàm số $y=e^{-x}.\sin x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'+2y''-2y=0$. **B.** $y''+2y'+2y=0$.

C. $y''-2y'-2y=0$. **D.** $y'-2y''+2y=0$.

Lời giải. Ta có $y'=-e^{-x}.\sin x+e^{-x}.\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$.

Lại có $y''=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-x}.\cos x$

Ta thấy $y''+2y'+2y=-2e^{-x}.\cos x+2e^{-x}(\cos x-\sin x)+2e^{-x}.\sin x=0$. **Chọn B.**

Câu 46. Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'+2y\ln 2=0$. **B.** $y'+3y\ln 2=0$. **C.** $y'-8y\ln 2=0$. **D.** $y'+8y\ln 2=0$.

Lời giải. Ta có $y'=2016.\left(x\ln\dfrac{1}{8}\right)'.e^{x.\ln\frac{1}{8}}=2016.\ln\dfrac{1}{8}.e^{x.\ln\frac{1}{8}}=\ln\dfrac{1}{8}.y=-3\ln 2.y$.

Suy ra $y'+3\ln 2.y=0$. **Chọn B.**

Câu 47. Cho hàm số $y=x.e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $xy=\left(1+x^2\right)y'$. **B.** $x.y'=\left(1+x^2\right).y$.

C. $xy=\left(1-x^2\right).y'$. **D.** $xy'=\left(1-x^2\right).y$.

Lời giải. Ta có $y'=e^{-\frac{x^2}{2}}+x.\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Nhân hai vế cho x, ta được $x.y'=x\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(1-x^2\right)y$. **Chọn D.**

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $xy=y'(y\ln x+1)$. **B.** $xy'=y(y\ln x-1)$.

C. $xy = y(y'\ln x - 1)$. **D.** $xy' = y(y\ln x + 1)$.

Lời giải. Ta có $y' = -\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{(1+x+\ln x)^2} = -\dfrac{x+1}{x(1+x+\ln x)^2}$

Suy ra $xy' = -\dfrac{(1+x+\ln x)-\ln x}{(1+x+\ln x)^2} = -\dfrac{1}{1+x+\ln x} + \dfrac{\ln x}{(1+x+\ln x)^2} = -y + \ln x.y^2$

$\Leftrightarrow xy' = y(y\ln x - 1)$. **Chọn B.**

Câu 49. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $M = e$. **B.** $M = e^2$. **C.** $M = e^3$. **D.** $M = e^5$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Đạo hàm $f'(x) = (3x^2-3)e^{x^3-3x+1} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = e^3 \\ f(1) = e \\ f(2) = e^5 \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = e^5$. **Chọn D.**

Câu 50. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0;2]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m + M = 1$. **B.** $M - m = e$. **C.** $M.m = \dfrac{1}{e^2}$. **D.** $\dfrac{M}{m} = e^2$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Đạo hàm $f'(x) = -3e^{2-3x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[0;2]$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = e^2 \\ \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{e^4} \end{cases} \longrightarrow m = \dfrac{1}{e^4},\ M = e^2 \longrightarrow M.m = \dfrac{1}{e^2}$. **Chọn C.**

Câu 51. Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ với $x \in [1;e^2]$.

A. $\mathrm{T} = [0;e]$. **B.** $\mathrm{T} = \left[\dfrac{1}{e};e\right]$. **C.** $\mathrm{T} = \left[0;\dfrac{1}{e}\right]$. **D.** $\mathrm{T} = \left[-\dfrac{1}{e};e\right]$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;e^2]$.

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \in [1;e^2]$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(e) = \dfrac{1}{e} \\ f(e^2) = \dfrac{2}{e^2} \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{x\in[1;e^2]} f(x) = 0,\ \max\limits_{x\in[1;e^2]} f(x) = \dfrac{1}{e} \longrightarrow \mathrm{T} = \left[0;\dfrac{1}{e}\right]$. **Chọn C.**

Câu 52. Biết rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;e]$ tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left[1;\dfrac{3}{e}\right]$. **B.** $x_0 \in \left(\dfrac{3}{e};\sqrt{e}\right)$. **C.** $x_0 \in [\sqrt{e};2]$. **D.** $x_0 \in (2;e]$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;e]$.

Đạo hàm $f'(x) = (\sqrt{x})'.\ln x + \sqrt{x}.(\ln x)' = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+2=0 \Leftrightarrow \ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2}=\frac{1}{e^2} \notin [1;e]$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(e)=\sqrt{e} \end{cases} \longrightarrow$ GTLN của hàm số bằng $\sqrt{e}$, đạt tại $x=e$. **Chọn D.**

Nhận xét. Ta có $f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}>0,\ \forall x\in[1;e] \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1;e]$.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+e^2}\right)$ trên đoạn $[0;e]$.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$.

C. $m=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $m=1-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;e]$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+e^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+e^2}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+e^2}}}{x+\sqrt{x^2+e^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+e^2}}>0, \forall x\in[0;e]$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $[0;e] \longrightarrow \min\limits_{[0;e]} f(x)=f(0)=1$. **Chọn B.**

Câu 54. Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y=x.e^{-x}$.

A. $x_0=e$. **B.** $x_0=e^2$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=2$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=e^{-x}+x.\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}(1-x) \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x=1$. **Chọn C.**

Câu 55. Tính giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=xe^x$.

A. $y_{\text{CT}}=\frac{1}{e}$. **B.** $y_{\text{CT}}=e$. **C.** $y_{\text{CT}}=-\frac{1}{e}$. **D.** $y_{\text{CT}}=-1$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=e^x+xe^x=e^x(1+x) \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}}=y(-1)=-\frac{1}{e}$. **Chọn C.**

Vấn đề 3. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 56. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$. **B.** $y=\log_{\frac{e}{3}} x$. **C.** $y=\log_{\frac{e}{2}} x$. **D.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}} x$.

Lời giải. Áp dụng lý thuyết

"Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$".

Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y=\log_{\frac{e}{2}} x$ đồng biến vì cơ số $a=\frac{e}{2}>1$. **Chọn C.**

Câu 57. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$. **D.** $y=\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$.

Lời giải. Áp dụng lý thuyết

"Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$".

Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^x$ đồng biến vì cơ số $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}>1$.

Chọn B.

Câu 58. Hàm số nào sao đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=2017^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)$. **D.** $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$.

Lời giải. Hàm số $y=2017^x$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; cơ số $2017>1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ có TXĐ: $\mathrm{D}=(0;+\infty)\longrightarrow$ không thỏa mãn.

Hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln\sqrt{2}}$ nên hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)$ đồng biến khi $x>0$, nghịch biến khi $x<0$. Do đó C sai.

Hàm số $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; cơ số $\frac{\pi}{4}<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số $y=\log_M x$ với $M=a^2-4$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $2<a<\sqrt{5}$. **B.** $a=\sqrt{5}$.

C. $-\sqrt{5}<a<-2$; $2<a<\sqrt{5}$. **D.** $a=2$.

Lời giải. Hàm số đã cho nghịch biến khi cơ số $0<M<1$ hay $0<a^2-4<1$

$\Leftrightarrow 4<a^2<5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<a<\sqrt{5}\\-\sqrt{5}<a<-2\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y=\left(a^2-3a+3\right)^x$ đồng biến.

A. $a=1$. **B.** $a=2$.

C. $a\in(1;2)$. **D.** $a\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số đồng biến khi $a^2-3a+3>1\Leftrightarrow a^2-3a+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<1\\a>2\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 61. Cho hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{x^3-3x^2+2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải. Viết lại $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{x^3-3x^2+2}\right)=\left(x^3-3x^2+2\right)\log_{\frac{1}{2}}3=-\left(x^3-3x^2+2\right).\log_2 3$.

Nếu để ý thấy thì đây là hàm bậc ba thuần túy và có đạo hàm

$$y'=-\left(3x^2-6x\right).\log_2 3=-3x(x-2).\log_2 3\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. **Chọn D.**

Câu 62. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$. **B.** $0 < a < 1,\ b > 1$.

C. $a > 1,\ 0 < b < 1$. **D.** $a > 1,\ b > 1$.

Lời giải. Ta có $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, mà $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Suy ra hàm đặc trưng $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Tượng tự có $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$.

Suy ra hàm đặc trưng $y = \log_b x$ đồng biến nên $b > 1$.

Vậy $0 < a < 1$ và $b > 1$. **Chọn B.**

Câu 63. Cho hàm số $y = x - \ln(1+x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số giảm trên $(-1;+\infty)$.

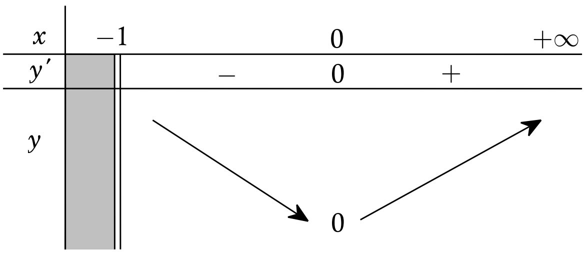
B. Hàm số tăng trên $(-1;+\infty)$

C. Hàm số giảm trên $(-1;0)$ và tăng trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số tăng trên $(-1;0)$ và giảm trên $(0;+\infty)$.

Lời giải. TXĐ: $D = (-1;+\infty)$. Đạo hàm $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số giảm trên $(-1;0)$ và tăng trên $(0;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 64. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y = \ln x$ là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

2) Trên khoảng $(1;3)$ hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến.

3) Nếu $M > N > 0$ thì $\log_a M > \log_a N$.

4) Nếu $\log_a 3 < 0$ thì $0 < a < 1$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. ● Vì cơ số $e > 1 \longrightarrow y = \ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó 1) sai.

● Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có cơ số $a = \frac{1}{2} \in (0;1)$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Do đó 2) đúng.

● Nếu cơ số $a \in (0;1)$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến. Vì vậy với $M > N > 0$, suy ra $\log_a M < \log_a N$. Do đó 3) sai.

● Ta có $\log_a 3 < 0 \Leftrightarrow \log_a 3 < \log_a 1 \longrightarrow 0 < a < 1$. Do đó 4) đúng.

Vậy có 2) và 4) đúng. **Chọn B.**

Câu 65. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=\log_a x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) Nếu $\log_a \frac{2}{3}<0$ thì $a>1$.

3) $\log_a x^2=2\log_a x$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải. ● Hàm số $y=\log_a x$ xác định trên $(0;+\infty)$. Do đó 1) sai.

● Ta có $\log_a \frac{2}{3}<0 \Leftrightarrow \log_a \frac{2}{3}<\log_a 1 \longrightarrow a>1$. Do đó 2) đúng.

● Ta có $\log_a x^2=2\log_a |x|$. Do đó 3) sai.

Vậy chỉ có 2) đúng. **Chọn A.**

Câu 66. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y=e^x$ không chẵn cũng không lẻ

B. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=e^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ không chẵn cũng không lẻ.

Lời giải. ● Ta có $f(-x)=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$. Do đó A đúng.

● $f(x)=e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R};\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Do đó C đúng.

● Xét hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Ta có $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Rõ ràng $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $y(-x)+y(x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]=\ln 1=0$

hay $y(-x)=-y(x)$.

Suy ra hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ. Do đó đáp án D sai. **Chọn D.**

Câu 67. Cho hàm số $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có đạo hàm $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

B. Hàm số tăng trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

D. Hàm số giảm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số có tập xác định là $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Suy ra C đúng.

Đạo hàm $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x.\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Do đó A đúng.

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $\begin{cases}\sqrt{1+x^2}>1\\ 1-x<1\end{cases}\Rightarrow \sqrt{1+x^2}>1-x$ hay $x+\sqrt{1+x^2}>1$.

Suy ra $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Do đó B đúng, D sai. **Chọn D.**

Câu 68. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) Hàm số $y=(-5)^x$ là hàm số mũ.

2) Nếu $\pi^\alpha<\pi^{2\alpha}$ thì $\alpha<1$.

3) Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

4) Hàm số $y=a^x$ có tập giá trị là $(0;+\infty)$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Hàm số $y=(-5)^x$ không phải là hàm số mũ vì cơ số $-5<0$. Do đó 1) sai.

Vì cơ số $\pi>1$ nên từ $\pi^\alpha<\pi^{2\alpha}\Rightarrow\alpha<2\alpha\Leftrightarrow 0<\alpha$. Do đó 2) sai.

Hàm số $y=a^x$ xác định với mọi x. Do đó 3) đúng.

Vì $a^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ nên hàm $y=a^x$ có TGT là $(0;+\infty)$. Do đó 4) đúng.

Vậy có 3) và 4) đúng. **Chọn B.**

Câu 69. Cho a là một số thực dương khác 1 và các mệnh đề sau:

1) $a^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2) Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3) Hàm số $y=e^{2017x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4) Đồ thị hàm số $y=a^x$ nhận trục Ox làm tiệm cận ngang.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Rõ ràng 1) đúng theo định nghĩa.

Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó 2) sai.

Vì cơ số $e>1$ nên hàm số $y=e^{2017x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó 3) đúng.

Rõ ràng 4) đúng theo định nghĩa SGK.

Vậy có 1), 3) & 4) đúng. **Chọn C.**

Câu 70. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}$. Tính giá trị biểu thức $P=2017^a-2017^b$.

A. $P=0$. **B.** $P=2016$. **C.** $P=2017$. **D.** $P=-1$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}\longleftrightarrow(a-b)(2^a+2^b)=a.2^b-b.2^a$.

$\longleftrightarrow a.2^a+a.2^b-b.2^a-b.2^b=a.2^b-b.2^a\Leftrightarrow a.2^a=b.2^b.\qquad(*)$

Xét hàm số $f(x)=x.2^x$ với $x>0$, có $f'(x)=2^x+x.2^x.\ln 2=2^x(1+x.\ln 2)>0; \forall x>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

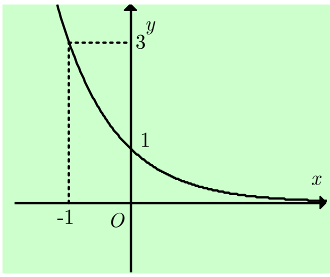
Nhận thấy $(*)\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Rightarrow a=b.$

Khi $a=b$ thì $2017^a-2017^b=2017^a-2017^a=0$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Chọn $a=b=1$ thỏa điều kiện. Khi đó $P=2017^1-2017^1=0$.

Vấn đề 4. ĐỒ THỊ

Câu 71. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



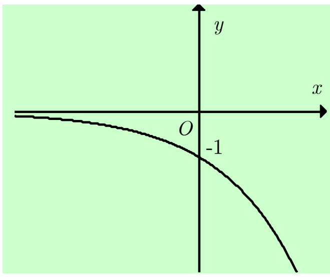
A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x}$. **B.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

C. $y=2^{x}+\frac{5}{2}$. **D.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$.

Lời giải. Dựa vào hình dáng đồ thị từ trái sang phải ta thấy: x tăng nhưng y giảm. Suy ra hàm số tương ứng của đồ thị là hàm nghịch biến. Loại A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $\left(-1;3\right)$ nên chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 72. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



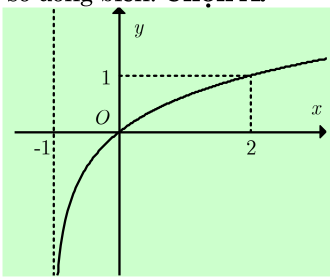
A. $y=-2^{x}$. **B.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

C. $y=2^{x}$. **D.** $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

Lời giải. Đồ thị nằm phía dưới trục hoành. Loại B, C.

Lấy đối xứng đồ thị qua trục hoành ta được đồ thị của một hàm số đồng biến. **Chọn A.**

Câu 73. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



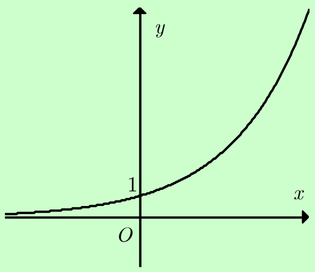
A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=\log_2\left(x+1\right)$.

C. $y=\log_3 x+1$. **D.** $y=\log_3\left(x+1\right)$.

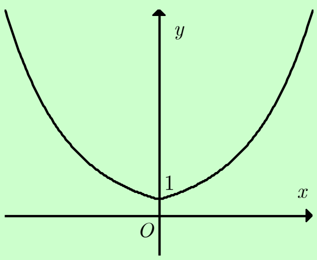
Lời giải. Dựa vào đồ thị thấy có tiệm cận đứng $x=-1$. Loại đáp án A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $\left(2;1\right)$ nên chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hàm số $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$ có đồ thị Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

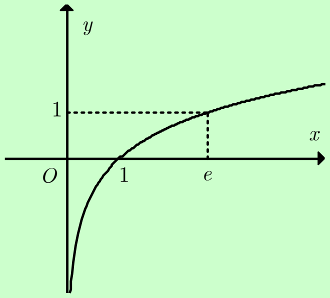


Hình 2

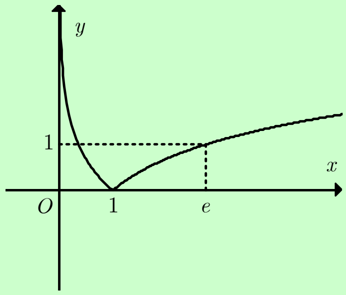
A. $y=\left|\left(\sqrt{2}\right)^{x}\right|$. **B.** $y=-\left(\sqrt{2}\right)^{x}$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^{|x|}$. **D.** $y=-\left|\left(\sqrt{2}\right)^{x}\right|$.

Lời giải. Từ đồ thị ta thấy: Đồ thị Hình 2 có được là lấy đối xứng đồ thị Hình 1 (phần $x \geq 0$) qua trục Oy. Do đó hàm số của đồ thị Hình 2 là hàm số chẵn. **Chọn C.**

Câu 75. Cho hàm số $y = \ln x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \ln|x|$. **B.** $y = |\ln x|$. **C.** $y = |\ln(x+1)|$. **D.** $y = \ln|x+1|$.

Lời giải. Đồ thị Hình 2 được suy ra từ đồ thị Hình 1 bằng cách:

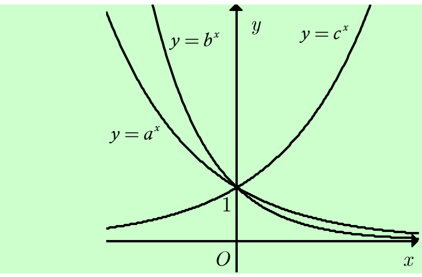
● Giữ nguyên phần $y \geq 0$.

● Lấy đối xứng qua Ox phần $y < 0$. **Chọn B.**

Câu 76. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > b > c$. **B.** $a < b < c$.

C. $c > a > b$. **D.** $a > c > b$.

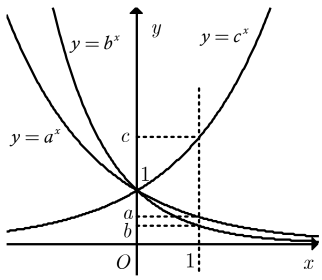


Lời giải. Ta thấy hàm $y = c^x$ có đồ thị từ trái sang phải theo hướng đi lên nên là hàm đồng biến $\longrightarrow c > 1$. Còn hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ là những hàm nghịch biến $\longrightarrow a,\ b < 1$. Từ đó loại được các đáp án A, D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy tại cùng một giá trị $x_0 < 0$ thì đồ thị hàm số $y = b^x$ nằm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ hay $\begin{cases} x < 0 \\ b^x > a^x \end{cases} \longrightarrow b < a$. Ví dụ $\begin{cases} x = -1 \\ b^{-1} > a^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a} \end{cases} \to b < a$.

Vậy $c > a > b$. **Chọn C.**

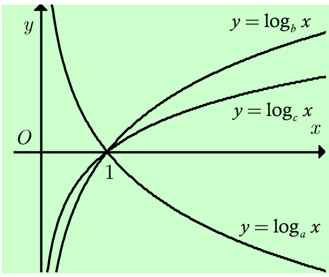
Cách trắc nghiệm. Kẻ đường thẳng $x = 1$ cắt đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ lần lượt tại các điểm có tung độ $y = a,\ y = b,\ y = c$. Dựa vào đồ thị ta thấy ngay $c > a > b$.



Câu 77. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$.

C. $b < a < c$. **D.** $b > a > c$.

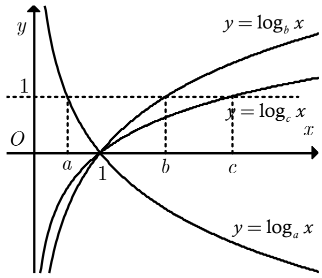


Lời giải. Ta thấy hàm $y=\log_a x$ có đồ thị từ trái sang phải theo hướng đi xuống nên là hàm nghịch biến $\longrightarrow 0<a<1$. Còn hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ là những hàm đồng biến $\longrightarrow b,\ c>1$. Từ đó loại được các đáp án C, D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy tại cùng một giá trị $x_0>1$ thì đồ thị hàm số $y=\log_b x$ nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_c x$ hay $\begin{cases} x>1 \\ \log_b x>\log_c x \end{cases} \longrightarrow b<c$.

Vậy $a<b<c$. **Chọn B.**

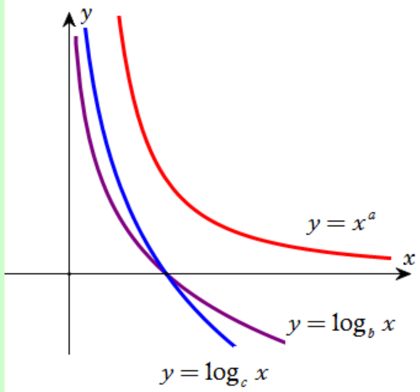
Cách trắc nghiệm. Kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ $x=a,\ x=b,\ x=c$. Dựa vào đồ thị ta thấy ngay $a<b<c$.



Câu 78. Cho a là số thực tùy ý và $b,\ c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ và $y=x^a,\ x>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a<c<b$. **B.** $a<b<c$.

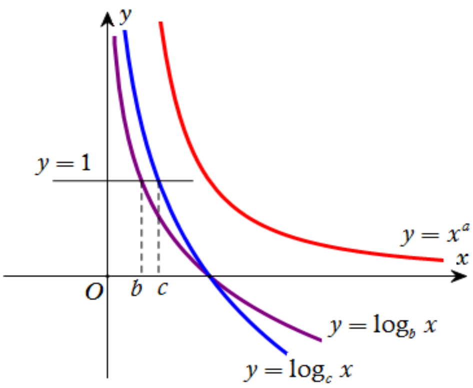
C. $a>b>c$. **D.** $a>c>b$.



Lời giải. Nhận thấy hàm số $y=x^a$ nghịch biến $\longrightarrow a<0$. Do đó ta loại ngay đáp án C & D (vì $b,\ c$ là các số thực dương khác 1).

Kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị của hai hàm số $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt tại điểm có hoành độ là $x=b$ và $x=c$ như hình vẽ. Dựa vào hình vẽ ta thấy $0<b<c$.

Vậy $a<b<c$. **Chọn B.**



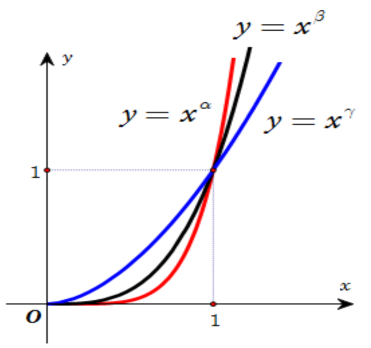
Câu 79. Cho đồ thị của ba hàm số $y=x^{\alpha}, y=x^{\beta}, y=x^{\gamma}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\gamma<\beta<\alpha<0$.

B. $0<\gamma<\beta<\alpha<1$.

C. $1<\gamma<\beta<\alpha$.

D. $0<\alpha<\beta<\gamma<1$.

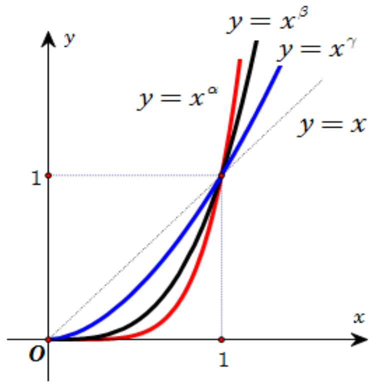


Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có

- Với $0<x<1$ thì
$$x^{\alpha}<x^{\beta}<x^{\gamma}<x^{1}\longrightarrow \alpha>\beta>\gamma>1.$$
- Với $x>1$ thì
$$x^{1}<x^{\gamma}<x^{\beta}<x^{\alpha}\longrightarrow 1<\gamma<\beta<\alpha.$$

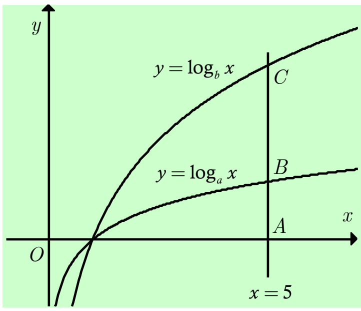
Vậy với mọi $x>0$, ta có $\alpha>\beta>\gamma>1$. **Chọn C.**

Nhận xét. Ở đây là so sánh thêm với đường $y=x=x^{1}$.



Câu 80. Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A,\ B$ và C. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a=b^2$. **B.** $a^3=b$.
C. $a=b^3$ **D.** $a=5b$.



Lời giải. Theo giả thiết, ta có $A(5;0),\ B(5;\log_a 5),\ C(5;\log_b 5)$.

Do $CB=2AB\longrightarrow \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BA}\leftrightarrow \log_a 5-\log_b 5=2.(-\log_a 5)$

$\longleftrightarrow 3\log_a 5=\log_b 5\longleftrightarrow \log_a 5=\dfrac{1}{3}\log_b 5\longleftrightarrow \log_a 5=\log_{b^3} 5\longrightarrow a=b^3.$ **Chọn C.**

Câu 81. Cho hàm số $y=5^x$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y=x$.

A. $y=5^{-x}$. **B.** $y=\log_5 x$. **C.** $y=-\log_5 x$. **D.** $y=-5^{-x}$.

Lời giải. Dựa vào lý thuyết "Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$". **Chọn B.**

Câu 82. Cho hàm số $y=3^{\frac{x}{2}}$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y=x$.

A. $y=\log_{\sqrt{3}} x$. **B.** $y=\log_3 x^2$. **C.** $y=\log_3\left(\dfrac{x}{2}\right)$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}\log_3 x$.

Lời giải. Trước tiên ta đưa hàm số về dạng chuẩn: $y=3^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Dựa vào lý thuyết "Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y=x$". **Chọn A.**

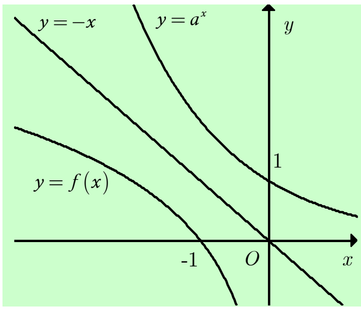
Câu 83. Cho hàm số $y=-\log_2 x$ có đồ thị (C). Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng $y=x$.

A. $y=2^x$. **B.** $y=2^{\frac{1}{x}}$. **C.** $y=2^{-x}$. **D.** $y=2^{\frac{x}{2}}$.

Lời giải. Trước tiên ta đưa hàm số về dạng chuẩn: $y=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Suy ra hàm số cần tìm là $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$. **Chọn C.**

Câu 84. Biết hai hàm số $y=a^x$ và $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-x$. Tính $f(-a^3)$.



A. $f(-a^3)=-a^{-3a}$.

B. $f(-a^3)=-\dfrac{1}{3}$.

C. $f(-a^3)=-3$.

D. $f(-a^3)=-a^{3a}$.

Lời giải. Giả sử $M(x_M;y_M)$ là điểm thuộc hàm số $y=a^x$; $N(x_0;y_0)$ là điểm đối xứng của M qua đường thẳng $y=-x$.

Gọi I là trung điểm của $MN \longrightarrow I\left(\dfrac{x_M+x_0}{2};\dfrac{y_M+y_0}{2}\right)$.

Vì M, N đối xứng nhau qua $d \longrightarrow \begin{cases} I\in d \\ \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{n_d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y_M+y_0}{2}=-\dfrac{x_M+x_0}{2} \\ \dfrac{x_M-x_0}{1}=\dfrac{y_M-y_0}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-y_M \\ y_0=-x_M \end{cases}$.

Ta có $M(x_M;y_M)\in$ đồ thị $y=a^x$ nên $y_M=a^{x_M}$.

Do đó $x_0=-y_M=-a^{x_M}=-a^{-y_0} \longrightarrow -y_0=\log_a(-x_0) \Leftrightarrow y_0=-\log_a(-x_0)$. Điều này chứng tỏ điểm N thuộc đồ thị hàm số $f(x)=-\log_a(-x)$.

Khi đó $f(-a^3)=-\log_a a^3=-3$. **Chọn C.**

Cách 2. Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=a^x$ qua Oy là được đồ thị hàm số $y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua Oy là được đồ thị hàm số $y=f(-x)$.

Theo giả thiết, ta có đồ thị hai hàm số $y=a^x$ và $y=f(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=-x$ nên suy ra đồ thị của hai hàm số $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ và $y=f(-x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. (1)

Theo lý thuyết (SGK) thì đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(-x)=\log_{\frac{1}{a}} x \xrightarrow{x=a^3} f(-a^3)=\log_{\frac{1}{a}} a^3=-3$.

Câu 85. Đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y=2^x$. **C.** $y=\log_2 \sqrt{x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải. Dựa vào lý thuyết "Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y=-f(x)$". Do đó đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ đối xứng qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y=-\log_2 x$.

Chưa thấy đáp án nên ta biến đổi: $y=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$. **Chọn A.**

Câu 86. Cho hàm số $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Đồ thị (C) luôn đi qua $M(0;1)$ và $N(1;a)$

B. Đồ thị (C) có tiệm cận $y=0$.

C. Đồ thị (C) luôn nằm phía trên trục hoành.

D. Hàm số luôn đồng biến.

Lời giải. Với $x=0 \Rightarrow y=a^0=1$ và $x=1 \Rightarrow y=a^1=a$. Do đó A đúng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nếu $0<a<1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nếu $a>1$. Suy ra $y=0$ là tiệm cận ngang. Do đó B đúng.

Vì $a^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó C đúng.

Hàm số $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó D sai. **Chọn D.**

Câu 87. Cho hàm số $y=\log_4|x|$ $(x\neq 0)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng tập xác định.

C. Đồ thị (C) nhận Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị (C) không có đường tiệm cận.

Lời giải. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Do đó A sai.

Với $x>0$, ta có $y=\log_4 x \longrightarrow y$ đồng biến.

Với $x<0$, ta có $y=\log_4(-x) \longrightarrow y'=\dfrac{-1}{(-x)\ln 4}<0, \forall x<0 \longrightarrow y$ nghịch biến.

Do đó B sai.

Ta có $\begin{cases}\forall x\in\mathrm{D}\Rightarrow(-x)\in\mathrm{D}\\ y(-x)=\log_4|-x|=\log_4|x|=y(x)\end{cases} \Rightarrow$ hàm số $y=\log_4|x|$ chẵn trên tập xác định nên nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó C đúng. **Chọn C.**

Đáp án D sai. Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}\log_4|x|=\lim\limits_{x\to0^-}\log_4|x|=-\infty$. Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Câu 88. Cho a là số thực dương và khác 1. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục hoành.

B. Đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục tung.

C. Đồ thị của hai hàm số $y=e^x$ và $y=\ln x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

D. Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=-x$

Lời giải. ● Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục tung. Do đó A sai.

● Đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ đối xứng nhau qua trục hoành. Do đó B sai.

● Dựa vào lý thuyết "Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường $y=x$". Do đó C đúng. **Chọn C.**

● Đồ thị của hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Do đó D sai.

Câu 89. Cho hai hàm số $y=f(x)=\log_a x$ và $y=g(x)=a^x$ $(0<a\neq 1)$. Xét các mệnh đề sau:

1) Đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ luôn cắt nhau tại một điểm.

2) Hàm số $f(x)+g(x)$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

3) Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục Oy làm tiệm cận.

4) Chỉ có đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận.

Hỏi có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Chọn $a=2$ chẳng hạn, khi đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến. Mà hai hàm cùng đồng biến thì không kết luận được số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ vì nó có thể vô nghiệm, hoặc có một nghiệm, hoặc có hai nghiệm,….Do đó 1) sai.

Tổng của hai hàm đồng biến là hàm đồng biến, tổng của hai hàm nghịch biến là hàm nghịch biến. Do đó 2) đúng.

Dựa vào lý thuyết, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ nhận trục Oy làm tiệm cận đứng. Do đó 3) đúng.

Đồ thị hàm số $y=a^x$ nhận trục Ox làm tiệm cận ngang. Do đó 4) sai.

Vậy có các mệnh đề 2) và 3) đúng. **Chọn B.**

Câu 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}} x$ và $y=\log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a.

A. $a=\sqrt{3}$. **B.** $a=\sqrt[3]{6}$. **C.** $a=\sqrt{6}$ **D.** $a=\sqrt[6]{3}$.

Lời giải. Do $AB \parallel Ox \longrightarrow A, B$ nằm trên đường thẳng $y=m$ $(m\neq 0)$.

Lại có A, B lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}} x$.

Từ đó suy ra $A\left(a^m;m\right)$, $B\left(a^{\frac{m}{2}};m\right)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $x_C=x_B=a^{\frac{m}{2}}$.

Lại có C nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_{\sqrt[3]{a}} x$, suy ra $C\left(a^{\frac{m}{2}};\dfrac{3m}{2}\right)$.

Theo đề bài $S_{ABCD}=36 \longrightarrow \begin{cases} AB=6 \\ BC=6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \left|a^m-a^{\frac{m}{2}}\right|=6 \\ \left|\dfrac{3m}{2}-m\right|=6 \end{cases}$

$\longleftrightarrow \begin{cases} m=-12 \\ a=\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}<1 \text{ (loại)} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m=12 \\ a=\sqrt[6]{3} \end{cases}$. **Chọn D.**

Vấn đề 5. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Câu 91. Cho $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$.

A. $P=2$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Đặt $t=3^x+3^{-x}\longrightarrow t^2=9^x+9^{-x}+2=25\longleftrightarrow t=\pm 5$.

Vì $3^x+3^{-x}>0$ nên $t>0$. Do đó ta chọn $t=5$ hay $3^x+3^{-x}=5$.

Thay $3^x+3^{-x}=5$ vào P, ta được $P=\dfrac{5+5}{1-5}=-\dfrac{5}{2}$. **Chọn D.**

Câu 92. Cho số thực x thỏa mãn $\log_2\left[4\log_4\left(8\log_2 x\right)\right]=8$. Tính $\ln x$.

A. $\ln x=2^{125}.\ln 2$. **B.** $\ln x=2^{126}.\ln 2$. **C.** $\ln x=2^{127}.\ln 2$. **D.** $\ln x=2^{128\ln 2}$.

Lời giải. Ta có $\log_2\left[4\log_4\left(8\log_2 x\right)\right]=8\longrightarrow 4\log_4\left(8\log_2 x\right)=2^8$

$\longrightarrow \log_4\left(8\log_2 x\right)=64\longrightarrow 8\log_2 x=4^{64}\longrightarrow \log_2 x=2^{125}$

$\longrightarrow x=2^{\left(2^{125}\right)}\longrightarrow \ln x=\ln 2^{\left(2^{125}\right)}=2^{125}\ln 2$. **Chọn A.**

Câu 93. Cho hàm số $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ và biểu thức $P=f(x-1)+f(x-2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P=\dfrac{3}{4}f(x)$. **B.** $P=6f(x)$. **C.** $P=-3f(x)$. **D.** $P=-8f(x)$.

Lời giải. Ta có $P=f(x-1)+f(x-2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$

$=2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=6\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=6f(x)$. **Chọn B.**

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=2017^x$. Tính $P=\dfrac{f(x)f(x+1)f(x+2)}{f(3x)}$.

A. $P=2017^x$. **B.** $P=3.2017$. **C.** $P=3$. **D.** $P=2017^3$.

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{f(x)f(x+1)f(x+2)}{f(3x)}=\dfrac{2017^x.2017^{x+1}.2017^{x+2}}{2017^{3x}}$

$=\dfrac{2017^{3x+3}}{2017^{3x}}=2017^3$. **Chọn D.**

Câu 95. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=2016$. **B.** $S=1008$. **C.** $S=1007$. **D.** $S=2017$.

Lời giải. Sử dụng tính chất "Nếu $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=1$". Thật vậy:

- $f(a)=\dfrac{4^a}{4^a+2}=\dfrac{2.4^a}{2.4^a+4}$.
- $a+b=1\longrightarrow b=1-a$. Do đó $f(b)=f(1-a)=\dfrac{4^{1-a}}{4^{1-a}+2}=\dfrac{\frac{4}{4^a}}{\frac{4}{4^a}+2}=\dfrac{4}{4+2.4^a}$.

Suy ra $f(a)+f(b)=\dfrac{2.4^a}{2.4^a+4}+\dfrac{4}{4+2.4^a}=1$.

Áp dụng: Ta có $\dfrac{1}{2017}+\dfrac{2016}{2017}=1$ nên $f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)=1$.

Vậy $S=\left[f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2017}\right)+f\left(\frac{2015}{2017}\right)\right]+\ldots+\left[f\left(\frac{1008}{2017}\right)+f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right]$

$=1+1+\ldots+1=1008$. **Chọn B.**

Bài toán tổng quát: Nếu $f(x)=\dfrac{M^x}{M^x+\sqrt{M}}$ $(M>0)$ thì $f(x)+f(1-x)=1$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tính tổng $S=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=2016$. **B.** $S=2017$. **C.** $S=1008$. **D.** $S=1007$.

Lời giải. Ta có

$S=\left[f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2017}\right)+f\left(\frac{2015}{2017}\right)\right]+\ldots+\left[f\left(\frac{1008}{2017}\right)+f\left(\frac{1009}{2017}\right)\right]$

$=1+1+\ldots+1=1008$. **Chọn C.**

Câu 97. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ và góc α tùy ý. Tính $S=f\left(\sin^2\alpha\right)+f\left(\cos^2\alpha\right)$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=4^{\sin 2a}$.

Lời giải. Do $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $S=f\left(\sin^2\alpha\right)+f\left(\cos^2\alpha\right).=1$. **Chọn A.**

Câu 98. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Biết $a+b=3$, tính $S=f(a)+f(b-2)$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\dfrac{1}{4}$. **D.** $S=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải. Ta có $a+(b-2)=a+b-2=3-2=1\longrightarrow f(a)+f(b-2)=1$. **Chọn A.**

Câu 99. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Xét hàm số $g(t)=e^t-et,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $g'(t)=e^t-e\longrightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(t)\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=1$.

Ta có $g(x+y)=e^{x+y}-e(x+y)\ge 0\Leftrightarrow e^{x+y}\ge e(x+y)$.

Kết hợp với giải thiết $e^{x+y}\le e(x+y)$, suy ra $e^{x+y}=e(x+y)\Leftrightarrow x+y=1$.

Chọn một bộ $x=y=\dfrac{1}{2}$ theo giả thiết, có $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow 2.\dfrac{3}{3+m^2}=1\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu. **Chọn C.**

Câu 100. Cho hàm số $f(x)=\ln 2017-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2017)$.

A. $S=\dfrac{4035}{2018}$. **B.** $S=2017$. **C.** $S=\dfrac{2016}{2017}$. **D.** $S=\dfrac{2017}{2018}$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=-\dfrac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}}=-\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Khi đó $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2017)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2017+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2017+1}=\frac{2017}{2018}$. **Chọn D.**

Câu 101. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 30$. **B.** $S_{\min} = 25$. **C.** $S_{\min} = 33$. **D.** $S_{\min} = 17$.

Lời giải. Điều kiện $x > 0$.

Phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 > 20a$.

Phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 > 20a$.

Ta có $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0 \xrightarrow{t=\ln x} at^2 + bt + 5 = 0.$ (1)

$5\log^2 x + b\log x + a = 0 \xrightarrow{u=\log x} 5u^2 + bu + a = 0.$ (2)

Với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x, một nghiệm u thì có một nghiệm x.

Ta có $\begin{cases} x_1.x_2 = e^{t_1}.e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}} \\ x_3.x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}$, kết hợp giả thiết $x_1x_2 > x_3x_4 \longrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$\longrightarrow -\dfrac{b}{a} > -\dfrac{b}{5}\ln 10 \Leftrightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}^+} a \geq 3$.

Suy ra $b^2 > 20a \geq 60 \xrightarrow{b\in\mathbb{Z}^+} b \geq 8$.

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2.3 + 3.8 = 30$, suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được khi $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 102. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2} a + b \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$.

A. $P_{\max} = \sqrt{10}.$ **B.** $P_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}.$ **C.** $P_{\max} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}.$ **D.** $P_{\max} = 2\sqrt{10}.$

Lời giải.

Do $a^2 + b^2 > 1$ nên $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1 \Leftrightarrow a + b \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2}.$ (1)

Ta có $a + 2b = \left[\left(a - \dfrac{1}{2}\right) + 2\left(b - \dfrac{1}{2}\right)\right] + \dfrac{3}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có

$$\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq \left(1^2 + 2^2\right)\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right] \leq 5.\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Do đó $\left(a - \dfrac{1}{2}\right) + 2\left(b - \dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{\sqrt{10}}{2} \longrightarrow a + 2b \leq \dfrac{\sqrt{10}}{2} + \dfrac{3}{2} \longrightarrow P = 2a + 4b - 3 \leq \sqrt{10}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \dfrac{5+\sqrt{10}}{10}$; $b = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{10}$. **Chọn A.**

Cách 2. Ta thấy (1) là hình tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $P = 2a + 4b - 3 \Leftrightarrow \Delta : 2a + 4b - 3 - P = 0$. Xem đây là phương trình đường thẳng.

Để đường thẳng và hình tròn có điểm chung $\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - 3 - P\right|}{\sqrt{4+16}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |P| \leq \sqrt{10} \longrightarrow P \leq \sqrt{10}.$$

Câu 103. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \ge b > 1$. Biết rằng $P = \dfrac{1}{\log_{(ab)} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $k \in (-1; 0)$. **C.** $k \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$. **D.** $k \in (2; 3)$.

Lời giải. Ta có $P = \dfrac{1}{\log_{(ab)} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}} = \log_a (ab) + \sqrt{1 - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$

Khi $b = a^k \longrightarrow P = 1 + k + \sqrt{1-k}$.

Đặt $t = \sqrt{1-k}$ $(k \le 1)$, ta được $P = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} \le \dfrac{9}{4}$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \longrightarrow k = \dfrac{3}{4} \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 2^k$. Khi đó $P = \dfrac{1}{\log_{2.2^k} 2} + \sqrt{\log_2 \dfrac{2}{2^k}}$.

Sử dụng MODE7 khảo sát hàm $f(X) = \dfrac{1}{\log_{2.2^X} 2} + \sqrt{\log_2 \dfrac{2}{2^X}}$ với $\begin{cases} \text{Start} = -1 \\ \text{End} = 3 \\ \text{Step} = 0,2 \end{cases}$.

Dựa vào bảng giá trị dễ dàng thấy được $k \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ thì $f(X)$ lớn nhất.

Câu 104. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}} (a^2) + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 19$. **B.** $P_{\min} = 13$. **C.** $P_{\min} = 14$. **D.** $P_{\min} = 15$.

Lời giải. Ta có $P = \log^2_{\frac{a}{b}} (a^2) + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b}\right)$

$= 4\left[\log_{\frac{a}{b}} \left(\dfrac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b}\right) = 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b}\right)$.

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$). Khi đó $P = 4(1+t)^2 + \dfrac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \dfrac{3}{t} + 4$.

Xét hàm $f(t) = 4t^2 + 8t + \dfrac{3}{t} + 4$ trên $(0; +\infty)$, ta được $P = f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 15$. **Chọn D.**

Cách CASIO. Cho $b = 1,1$ và coi a là X.

Dùng MODE 7 khảo sát $f(X) = \left(\log_{\frac{X}{1,1}} (X^2)\right)^2 + 3\log_{1,1} \left(\dfrac{X}{1,1}\right)$ với $\begin{cases} \text{Start} = 1,1 \\ \text{End} = 3 \\ \text{Step} = 0,1 \end{cases}$

Quan sát bảng giá trị, ta thấy $f(X)$ nhỏ nhất bằng 15 khi $X = 1,3$.

Câu 105. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \ge b^2$ và $b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + \log_b \dfrac{a}{b}$.

A. $P_{\min} = \dfrac{1}{3}$. **B.** $P_{\min} = 1$. **C.** $P_{\min} = 3$. **D.** $P_{\min} = 9$.

Lời giải. Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$. Ta có $P = \dfrac{1}{1 - \log_a b} + \dfrac{1 - \log_a b}{\log_a b}$.

Đặt $t = \log_a b > 0$. Do $a \ge b^2 \longrightarrow \log_b a \ge \log_b b^2 = 2 \longrightarrow t = \log_a b \le \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=\frac{1}{1-t}+\frac{1-t}{t}=f(t)$.

Khảo sát hàm $f(t)$ trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, ta được $P=f(t)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=3$. **Chọn C.**

Cách 2. $P=\frac{1}{1-t}+\frac{1-t}{t}=\frac{1-t+t}{1-t}+\frac{1-t}{t}=1+\frac{t}{1-t}+\frac{1-t}{t}\overset{\text{Cosi}}{\geq}1+2=3.$

Cách CASIO. Cho $a=4$ khi đó $1<b\leq\sqrt{4}$.

Dùng MODE 7 khảo sát $f(X)=\log_{\frac{4}{X}}4+\log_X\left(\frac{4}{X}\right)$ với Start $=1{,}1$, End $=2$, Step $=0{,}1$.

Quan sát bảng giá trị, ta thấy $f(X)$ nhỏ nhất bằng 3 khi $X=2$.

Câu 106. Xét các số thực $a,\ b$ thỏa mãn điều kiện $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$. Biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị khỏ nhất khi:

A. $a=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $a^3=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải. Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases}a>1\\b>1\end{cases}$.

Ta có $P=\frac{1}{1-\log_a b}+4(\log_b a-1)=\frac{1}{1-\log_a b}+\frac{4}{\log_a b}-4$.

Đặt $t=\log_a b>0$. Do $\sqrt{a}\leq b<a\longrightarrow\log_a\sqrt{a}\leq\log_a b<\log_a a\longrightarrow\frac{1}{2}\leq t<1$.

Khi đó $P=\frac{1}{1-t}+\frac{4}{t}-4=f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $t=\frac{2}{3}$.

Với $t=\frac{2}{3}\longrightarrow\log_a b=\frac{2}{3}\leftrightarrow a^2=b^3$. **Chọn B.**

Cách 2. $P=\frac{1}{1-t}+\frac{4}{t}-4=\frac{1-t+t}{1-t}+\frac{4(1-t)+4t}{t}-4=1+\frac{t}{1-t}+\frac{4(1-t)}{t}\geq1+2.2=5.$

Cách trắc nghiệm. Dễ dàng nhận thấy đáp án C & D không thỏa mãn điều kiện.
Thử đáp án A với $a=b^2$, ta được $P=\log_b b^2+2\log_{\sqrt{b}}b=2+4=6$.

Thử đáp án B với $a^2=b^3$, ta được $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)=\log_{\frac{a^2}{b^2}}a^2+\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$

$=\log_b b^3+\log_{\sqrt{b}}b=3+2=5$.

So sánh hai đáp án, ta thấy ứng đáp án B thì P có giá trị nhỏ hơn.

Câu 107. Xét các số thực $a,\ b$ thỏa mãn $a>1>b>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^2b\right)+\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $P_{\max}=1+2\sqrt{3}$. **B.** $P_{\max}=-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\max}=-2$. **D.** $P_{\max}=1-2\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $P=\log_{a^2}a^2b+\log_{\sqrt{b}}a^3=\frac{\log_a a^2b}{\log_a a^2}+\frac{\log_a a^3}{\log_a\sqrt{b}}=\frac{\log_a b+2}{2}+\frac{6}{\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b$. Do $a>1>b>0\longrightarrow\log_a b<\log_a 1=0\longrightarrow t<0$.

Khi đó $P=\frac{t+2}{2}+\frac{6}{t}=\frac{t}{2}+\frac{6}{t}+1=1-\left(-\frac{t}{2}-\frac{6}{t}\right)\overset{\text{Cauchy}}{\leq}1-2\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Cách CASIO. Cho $b=\frac{1}{4}$ khi đó $P=\log_{a^2}\left(\frac{a^2}{4}\right)-\log_2 a^3$.

Dùng MODE 7 khảo sát $f(X)=\log_{X^2}\left(\frac{X^2}{4}\right)-\log_2 X^3$ với $\begin{cases}\text{Start}=1,1\\ \text{End}=5\\ \text{Step}=0,3\end{cases}$.

Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ và so sánh với các đáp án ta **chọn D.**

Câu 108. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{3\log_x y}+\frac{12}{y^{\frac{1}{\ln x}}}$ với $0<x\neq 1$ và $y>0$.

A. $P_{\min}=8\sqrt{3}$. **B.** $P_{\min}=e^2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=8\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=4\sqrt{6}$.

Lời giải. Ta có $y^{\frac{1}{\ln x}}=y^{\log_x e}=e^{\log_x y}$. (ở đây là sử dụng $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$)

Suy ta $P=e^{3\log_x y}+\frac{12}{e^{\log_x y}}\xrightarrow{t=e^{\log_x y}}P=t^3+\frac{12}{t}$, $t>0$.

Xét hàm $f(t)=t^3+\frac{12}{t}$ trên $(0;+\infty)$, ta được $P=f(t)\geq f\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 109. Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\geq \ln\left(x^2+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=6$. **B.** $P_{\min}=2\sqrt{2}+3$. **C.** $P_{\min}=2+3\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $\ln x+\ln y\geq \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow \ln(xy)\geq \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\geq x^2+y$.

- Nếu $0<x\leq 1$ thì $y\geq xy\geq x^2+y\Leftrightarrow 0\geq x^2$: mâu thuẫn.
- Nếu $x>1$ thì $xy\geq x^2+y\Leftrightarrow y(x-1)\geq x^2\Leftrightarrow y\geq\frac{x^2}{x-1}$. Vậy $P=x+y\geq x+\frac{x^2}{x-1}$.

Xét $f(x)=x+\frac{x^2}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$, ta được $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+3$. **Chọn B.**

Câu 110. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải. Điều kiện: $x>0$, $y>0$, $xy<1$.

Ta có $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow 1+\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-3$

$\Leftrightarrow \log_3\frac{3-3xy}{x+2y}=3xy-3+x+2y\Leftrightarrow \log_3(3-3xy)+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y.$ (*)

Xét hàm $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $(*)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\longrightarrow y=\frac{3-x}{3x+2}\longrightarrow P=x+\frac{3-x}{3x+2}$.

Xét $f(x)=x+\frac{3-x}{3x+2}$ trên $(0;3)$, ta được $\min\limits_{(0;3)} f(x)=f\left(\frac{-2+\sqrt{11}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$. **Chọn D.**

Nhận xét. Do $y=\frac{3-x}{3x+2}$, mà $y>0\longrightarrow x<3$. Kết hợp giả thiết ta có $x\in(0;3)$.