

○ Bài 05

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khái niệm tiệm cận

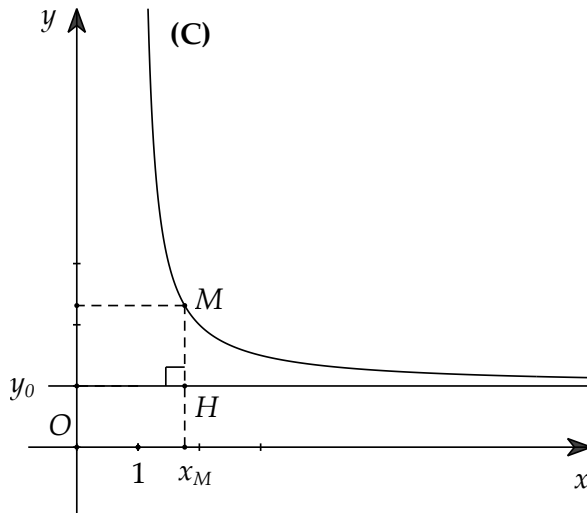
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Điểm $M \in (C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d . Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x| \rightarrow +\infty$ hoặc $|x| \rightarrow x_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng (TCD), tiệm cận ngang (TCN)

a. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$



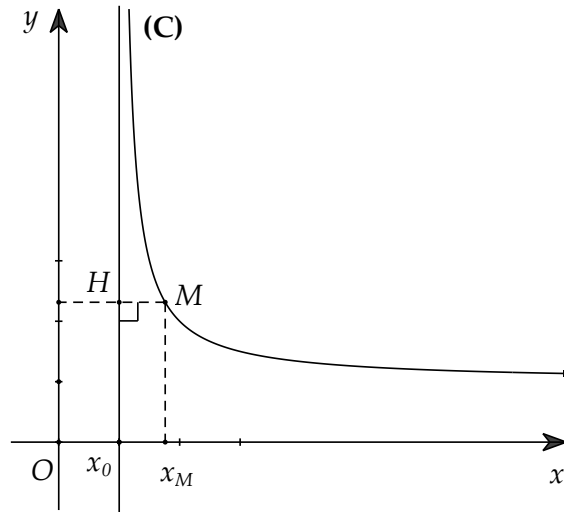
Chú ý :

- Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ thì ta viết chung là $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$.
- Hàm số có TXĐ không phải các dạng sau: $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$ thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

b. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
- D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
- B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
- D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D = (0, +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số hai tiệm cận ngang là các đường $y = -1$ và $y = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$ và đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 2$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 10$.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = (-3; 3) \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -3$ và $x = 3$.
- B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCD là các đường thẳng $x = \pm 1$ và $x = \pm 3$.
- D. Đồ thị hàm số có sáu TCD.

Câu 7. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = x_0$
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		-2
	-2		$-\infty$		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.
- B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	5	$+\infty$	2

Arrows in the original image indicate that as $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$; as $x \rightarrow -1^-$, $y \rightarrow +\infty$; as $x \rightarrow -1^+$, $y \rightarrow -\infty$; and as $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 2$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y = 2$, $y = 5$ và một TCD $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	-1	$-\sqrt{2}$	1	

Arrows in the original image indicate that as $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -1$; as $x \rightarrow -1^-$, $y \rightarrow -\sqrt{2}$; as $x \rightarrow -1^+$, $y \rightarrow -\sqrt{2}$; and as $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 1$.

Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$.
- B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		-	+	0	-
y	2	$-\infty$	$-\infty$	1	$-\infty$

Arrows in the original image indicate that as $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 2$; as $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow -\infty$; as $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow -\infty$; as $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow 1$; as $x \rightarrow 1^+$, $y \rightarrow 1$; and as $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.
- D. Hàm số không có cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -3$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'			-	+
y			2	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 15. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-2}{x+2}$$

- A. $(-2; 2)$.
- B. $(2; 1)$.
- C. $(-2; -2)$.
- D. $(-2; 1)$.

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$

- A. 2.
- B. 3.
- C. 0.
- D. 1.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$, $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2}$. B. $y = \frac{|x| - 2}{x + 1}$. C. $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$. D. $y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2 + 3x - 4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x - \sqrt{x-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 28. Gọi n , d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của

đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $n = d = 1$. B. $n = 0; d = 1$. C. $n = 1; d = 2$. D. $n = 0; d = 2$.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Gọi d, n lần lượt là số tiệm cận đứng và tiệm

cận ngang của đồ thị hàm số. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $n + d = 1$. B. $n + d = 2$. C. $n + d = 3$. D. $n + d = 4$.

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^4-4x^2+4}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận đứng.
 D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x = 1$.

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+2x+3} - x$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 41. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2m^2x - 5}{x + 3}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 0$.

Câu 43. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S = m^2 + n^2 - 2$.

- A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = -1$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$. B. $m = 1, m = 2$. C. $m = 0, m = 1$. D. $m = 1$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 - 2mx + 4}$ có ba đường tiệm cận.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.
 C. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2ax + a}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. B. $a = 0, a = 3$. C. $a = 1, a = 2$. D. $a = \pm 2$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + m}$ có đúng một tiệm cận ngang và đúng một tiệm cận đứng.

- A. $m < 4$. B. $m > 4$. C. $m = 4, m = -12$. D. $m \neq 4$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

- A. $m = -12$. B. $m > 4$. C. $m = -12, m > 4$. D. $m \neq 4$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2021.

Câu 50. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
 B. $m < 0$. C. $m = 0$. D. $m > 0$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}}$ có đúng một tiệm cận ngang.

- A. $m = 0, m = 1$. B. $m \geq 0$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + 2(m-1)x + m^2}}$ với m là tham số thực và $m > \frac{1}{2}$. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{mx^4 + 3}}$ có đường tiệm cận ngang.

- A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 54. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

- A. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2; 5)$. B. $M(4; 3)$ hoặc $M(-2; 1)$.
C. $M(4; 3)$ hoặc $M(2; 5)$. D. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2; 1)$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ (C) với m là tham số thực. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất đó bằng 2.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2, m = 0$. D. $m = 1$.

○ Bài 05

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khái niệm tiệm cận

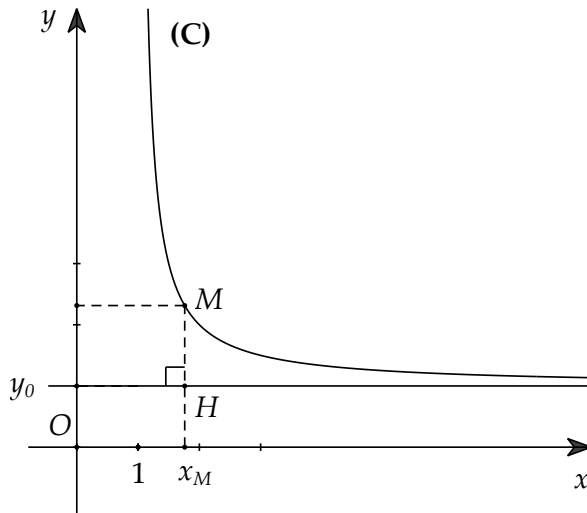
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Điểm $M \in (C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d . Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x| \rightarrow +\infty$ hoặc $|x| \rightarrow x_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng (TCD), tiệm cận ngang (TCN)

a. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$



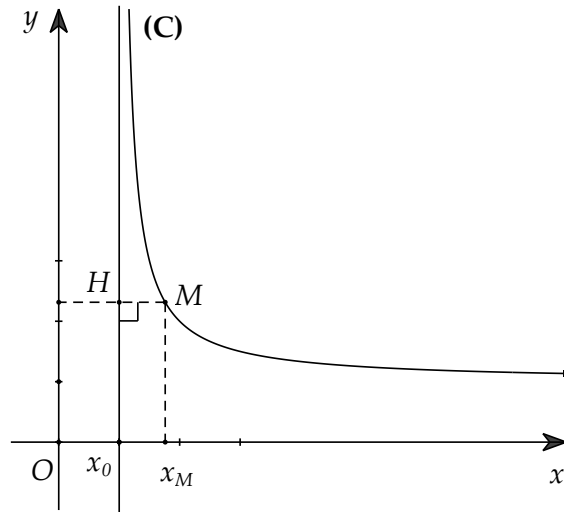
Chú ý :

- Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ thì ta viết chung là $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$.
- Hàm số có TXĐ không phải các dạng sau: $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$ thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

b. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 1. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
- D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

Câu 2. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Đáp án B sai vì chọn hàm $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \leq -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \geq 1 \end{cases}$.

Vậy ta chỉ có đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

- B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
- D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D = (0, +\infty)$.

Câu 3. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD. **Chọn B.**

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số hai tiệm cận ngang là các đường $y = -1$ và $y = 1$.

Câu 4. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD. **Chọn C.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$ và đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 2$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 10$.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Câu 5. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 10 \longrightarrow x = 0$ không phải là TCD. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = (-3; 3) \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; & \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -3$ và $x = 3$.
- B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCD là các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCD là các đường thẳng $x = \pm 1$ và $x = \pm 3$.
- D. Đồ thị hàm số có sáu TCD.

Câu 6. Chọn C.

Câu 7. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = x_0$

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Câu 7. A sai vì chỉ cần một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ tồn tại thì đã suy ra được tiệm cận ngang là $y = 1$.

B sai, ví dụ hàm số $y = \sqrt{x^3 - 1}$ không xác định tại $x = -2$ nhưng $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ không tiến đến vô cùng nên $x = -2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

C sai vì chỉ cần tồn tại một trong bốn giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

D đúng vì chỉ có hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.
- B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 8. Từ bảng biến thiên, ta có :

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD. } \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \end{cases} \longrightarrow y = -2 \text{ là TCN.}$$

Chọn D.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	5	$+\infty$	2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y = 2, y = 5$ và một TCD $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Câu 9. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCĐ.}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \longrightarrow y = 5 \text{ là TCN}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \longrightarrow y = 2 \text{ là TCN. Chọn C.}$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	-1	$-\sqrt{2}$	1

Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$?

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$.
- B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$, tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 10. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \sqrt{2} \neq \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCĐ.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1 \text{ là TCN}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \longrightarrow y = 1 \text{ là TCN. Chọn A.}$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	2	$-\infty$	1	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.
- D. Hàm số không có cực trị.

Câu 11. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét như sau:

A đúng vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \longrightarrow x = 0 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$

B sai vì tại $x = 0$ hàm số không xác định.

C sai vì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 trên khoảng $(0; +\infty)$ mà không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D sai vì đạo hàm y' đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua điểm $x = 1 \longrightarrow x = 1 \text{ là điểm cực đại của hàm số.}$

Chọn A.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -3$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 12. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \rightarrow y = 0$ là TCN;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = +\infty \end{cases} \rightarrow x = -3$ là TCD;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty \end{cases} \rightarrow x = 3$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Do đó D sai. **Chọn D.**

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 13. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \rightarrow y = 0$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \rightarrow x = -2$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \rightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'			-	+
y		$+\infty$		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang;
- $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -2$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 15. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-2}{x+2}.$$

- A. $(-2;2)$. B. $(2;1)$. C. $(-2;-2)$. D. $(-2;1)$.

Câu 15. TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có TCĐ: $x = -2$ và TCN: $y = 1$.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-2;1)$. **Chọn D.**

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}.$$

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 16. Xét phương trình $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow -4} y = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+1}{x+4} = \infty \rightarrow x = -4$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 4} y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8} \rightarrow x = 4$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 17. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 17. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = +\infty \longrightarrow x = 3$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = -\infty \longrightarrow x = -3$ TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Câu 18. Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ nên không có TCD. Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng. **Chọn A.**

(Thật vậy; hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCD)

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \\ \frac{2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \longrightarrow y = 2$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$, $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Câu 20. TXĐ: $D = \mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = -3 \longrightarrow y = -3$ là TCN; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{|x|+1} = 3 \longrightarrow y = 3$ là TCN.

Chọn C.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 21. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN.

Xét phương trình $x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 2$ là TCD;

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - |x| - 2} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -2 \text{ là TCD.}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận. **Chọn D.**

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2}$. B. $y = \frac{|x| - 2}{x + 1}$. C. $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 1}$. D. $y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$.

Câu 22. A. Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$;

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x| + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-1 + \frac{2}{x}} = 1$. Vậy A. sai.

B. Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$;

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$. Vậy B đúng.

Chọn B. (C và D có thể loại trừ vì TXĐ không chứa $-\infty$ và $+\infty$)

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 23. TXĐ: $D = \mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 \longrightarrow y = 1 \text{ là TCN};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 \longrightarrow y = -1 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng hai tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 24. Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 24. Ta có $4x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ TXĐ của hàm số $D = \mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}$ là TCN;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = -\frac{1}{2} \longrightarrow y = -\frac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 25. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 25. TXĐ: $D = (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Ta có:

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1 \text{ là TCD};$
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}} = -\infty \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \longrightarrow y = 0 \text{ Là TCN.}$

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 26. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 26. TXĐ $D = [7;+\infty)$.

Vì $x^2+3x-4 \neq 0, \forall x \in D$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn C.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 27. TXĐ: $D = [1;+\infty)$.

Do đó ta chỉ xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{3} \longrightarrow y = \frac{2}{3}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một TCN. **Chọn A.**

Câu 28. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $n = d = 1$. B. $n = 0; d = 1$. C. $n = 1; d = 2$. D. $n = 0; d = 2$.

Câu 28. TXĐ: $D = (0;1) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét phương trình $(x-1)\sqrt{x} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 0 \text{ là TCD};$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy $n = 0$; $d = 2$. **Chọn D.**

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 29. TXĐ: $D = (-3; 3) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = 0 \longrightarrow x = -3$ không là TCD;

• $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}} = +\infty \longrightarrow x = 3$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 30. TXĐ: $D = (-4; 4) \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = -4$ là TCD;

• $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}} \right) = -\infty \longrightarrow x = 4$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

Câu 31. TXĐ: $D = [-1; 0) \cup (0; 1] \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 0$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 32. TXĐ: $D = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \setminus \{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 33. TXĐ: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \end{cases} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 34. TXĐ: $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y = -1$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(-x-1)}{\sqrt{(-x-1)(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}} = 0 \longrightarrow x = -1$ không là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCD.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Gọi d, n lần lượt là số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $n+d=1$. B. $n+d=2$. C. $n+d=3$. D. $n+d=4$.

Câu 35. Để căn thức có nghĩa khi $2x^2-1 \geq 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Xét $\sqrt{2x^2-1}-1=0 \iff \sqrt{2x^2-1}=1 \iff 2x^2-1=1 \iff x = \pm 1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Do đó tập xác định của hàm số: $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có

- $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \infty \longrightarrow x = -1$ là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1$ không là TCD;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN.

Vậy $d=1, n=2 \longrightarrow n+d=3$. **Chọn C.**

Câu 36. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 36. Ta có $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 1} = \frac{|x+1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > -1, x \neq 1 \\ -\frac{1}{x-1} & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

- Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x^2 - 1} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- B. Đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x = 1$.

Câu 37. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} y = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = \sqrt{2}$ là TCĐ;
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -\sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. **Chọn B.**

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 6.

Câu 38. TXĐ: $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \longrightarrow y = 1$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty \longrightarrow x = -\sqrt{2}$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -1$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ;
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} y = +\infty \longrightarrow x = \sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số đã cho có tất cả năm đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 39. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = -\frac{3}{4} \longrightarrow x = 1$ không là TCĐ.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1 \text{ là TCD.}$$

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 40. Ta có:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \end{cases}$$

Vậy đồ thị có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^-} \frac{mx - 1}{2x + m} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^+} \frac{mx - 1}{2x + m} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -\frac{m}{2} \text{ là TCD.}$$

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$. **Chọn A.**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2m^2x - 5}{x + 3}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 0$.

Câu 42. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2m^2x - 5}{x + 3} = 2m^2 \longrightarrow y = 2m^2$ là TCN.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow 2m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$. **Chọn C.**

Câu 43. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S = m^2 + n^2 - 2$.

- A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = -1$.

Câu 43. Ta có:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m - 2n - 3)x + 5}{x - m - n} = m - 2n - 3 \longrightarrow y = m - 2n - 3 \text{ là TCN;}$$

$$\bullet \left| \lim_{x \rightarrow (n+m)^+} y \right| = +\infty \longrightarrow x = m + n \text{ là TCD.}$$

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} m+n=0 \\ m-2n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \longrightarrow S = m^2 + n^2 - 2 = 0$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$. B. $m = 1, m = 2$. C. $m = 0, m = 1$. D. $m = 1$.

Câu 44. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{(x-m)(2x+2m-3) + 2m(m-1)}{x-m} = 2x + 2m - 3 + \frac{2m(m-1)}{x-m}.$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giới hạn $\lim_{x \rightarrow m^\pm} y$ tồn tại hữu hạn

$$\Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=0 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Cách 2. (Chỉ áp dụng cho mẫu thức là bậc nhất)

Ycbt \Leftrightarrow Phương trình $2x^2 - 3x + m = 0$ có một nghiệm là $x = m$

$$\longrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có ba đường tiệm cận.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.
 C. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 45. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó ycbt \Leftrightarrow phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-1)^2 - 2m \cdot (-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2ax + a}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. B. $a = 0, a = 3$. C. $a = 1, a = 2$. D. $a = \pm 2$.

Câu 46. Ycbt $\Leftrightarrow 3x^2 - 2ax + a = 0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=3 \end{cases}$.

Chọn B.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$ có đúng một tiệm cận ngang và đúng một tiệm cận đứng.

- A. $m < 4$. B. $m > 4$. C. $m = 4, m = -12$. D. $m \neq 4$.

Câu 47. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2 - 4x + m} = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Ycbt \Leftrightarrow phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt

$$\text{trong đó có một nghiệm bằng } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m = 0 \\ \Delta' = 4 - m > 0 \\ [(-2)^2 - 4(-2) + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -12 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 - 4x + m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

- A. $m = -12$. B. $m > 4$. C. $m = -12, m > 4$. D. $m \neq 4$.

Câu 48. Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2 - 4x + m} = 0 \rightarrow y = 0$ là TCN với mọi m .

Do đó để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$. **Chọn B.**

Nhận xét. Bạn đọc dễ nhầm lẫn mà xét thêm trường hợp mẫu thức $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm $x = -2 \rightarrow m = -12$. Điều này là sai, vì với $m = -12$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{x-6}$. Đồ thị này vẫn còn TCD là $x = 6$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2021.

Câu 49. Ycbt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq -12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \in [-2017; 2017]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2017; \dots; 0; 1; 2; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 50. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang.

- A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
B. $m < 0$. C. $m = 0$. D. $m > 0$.

Câu 50. Khi $m > 0$, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN.

Với $m = 0$ suy $y = \frac{x+1}{1} \rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m < 0$ thì hàm số có TXĐ là một đoạn nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}}$ có đúng một tiệm cận ngang.

A. $m = 0, m = 1$. B. $m \geq 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Câu 51. Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1+\sqrt{m}}$ với $m \geq 0$;

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}}$ với $m \geq 0, m \neq 1$.

Nếu $m = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2+4}-x)}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1\right)}{4} = -\infty$,

suy ra hàm số chỉ có đúng một TCN là $y = \frac{1}{2}$ (do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}$ khi $m = 1$). Do đó giá trị

$m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{m}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}} \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0, m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}}$ với m là tham số thực và $m > \frac{1}{2}$. Hỏi

đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 52. Khi $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = 1 \rightarrow y = 1$ là TCN;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = -1 \rightarrow y = -1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \geq 0$.

Câu 53. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới

hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ tồn tại hữu hạn. Ta có:

• Với $m = 0 \rightarrow y = \frac{x^2+2}{\sqrt{3}}$. Khi đó $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \end{cases}$ suy ra đồ thị không có TCN.

• Với $m < 0$, khi đó hàm số có TXĐ: $D = \left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}; \sqrt[4]{-\frac{3}{m}}\right)$ nên ta không xét trường hợp $x \rightarrow +\infty$ hay $x \rightarrow -\infty$ được. Do đó hàm số không có tiệm cận ngang.

• Với $m > 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{m+\frac{3}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$

$\rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN. **Chọn C.**

$$\text{Hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0, c \neq 0).$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, suy ra $M\left(x_0; y_0 = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có **TCD** $\Delta_1: x + \frac{d}{c} = 0$; **TCN** $\Delta_2: y - \frac{a}{c} = 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1 = d[M, \Delta_1] = \left| x_0 + \frac{d}{c} \right| = \left| \frac{cx_0+d}{c} \right| \\ d_2 = d[M, \Delta_2] = \left| y_0 - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)} \right| \end{cases}$$

$d_1 = kd_2$	$\left \frac{cx_0+d}{c} \right = k \left \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)} \right \longrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$
$d_1 \cdot d_2$	$d_1 \cdot d_2 = \left \frac{ad-bc}{c^2} \right = p = \text{const}$
$d_1 + d_2 \longrightarrow \min$	$d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{\left \frac{ad-bc}{c^2} \right } = 2\sqrt{p}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi $\left \frac{cx_0+d}{c} \right = \left \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)} \right$</p> $\longleftrightarrow (cx_0+d)^2 = ad-bc \longleftrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$
Điểm $M(x_0; y_0)$ có hoành độ thỏa $x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$	<ul style="list-style-type: none"> • Có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận ngắn nhất $2\sqrt{p}$. • Khoảng cách đến tâm đối xứng nhỏ nhất $\sqrt{2p}$.

Câu 54. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

- A. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2; 5)$. B. $M(4; 3)$ hoặc $M(-2; 1)$.
- C. $M(4; 3)$ hoặc $M(2; 5)$. D. $M\left(-4; \frac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2; 1)$.

Câu 54. Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$ với $a \neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Đường tiệm cận đứng $d: x = 1$; đường tiệm cận ngang $d': y = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ycbt} &\Leftrightarrow d[M, d] = 3d[M, d'] \Leftrightarrow |a-1| = 3 \left| \frac{2a+1}{a-1} - 2 \right| \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4; 3) \\ M(-2; 1) \end{cases}. \text{ Chọn B.} \end{aligned}$$

Áp dụng công thức giải nhanh. $\left| \frac{cx_0+d}{c} \right| = k \left| \frac{ad-bc}{c(cx_0+d)} \right| \longrightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$

với $c = 1, d = -1, k = 3, p = \left| \frac{ad-bc}{c^2} \right| = 3$. Suy ra $x_0 = 1 \pm 3$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ (C) với m là tham số thực. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất đó bằng 2.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2, m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 55. Áp dụng công thức giải nhanh.

Điểm $M \left(x_0; y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} \right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Đồ thị hàm số có TCĐ $\Delta_1 : x + \frac{d}{c} = 0$; TCN $\Delta_2 : y - \frac{a}{c} = 0$.

Ta có $\begin{cases} d_1 = d[M, \Delta_1] = \left| x_0 + \frac{d}{c} \right| = \left| \frac{cx_0 + d}{c} \right| \\ d_2 = d[M, \Delta_2] = \left| y_0 - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{ad - bc}{c(cx_0 + d)} \right| \end{cases}$. Khi đó $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{\frac{|ad - bc|}{c^2}}$.

Áp dụng: Ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{|ad - bc|}{c^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|ad - bc|}{c^2} = 1 \Leftrightarrow |1 + m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$. **Chọn C.**