CHƯƠNG 4 – BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Tính chất 1: (*Tính chất bắc cầu*): Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

Tính chất 2: Nếu $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

Tính chất 3: Nếu $a > b$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right. \text{ và } \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right. .$$

Chúng ta có các quy tắc sau:

Quy tắc 1: (*Phép cộng*): Nếu $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.
Chú ý quan trọng: không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

Quy tắc 2: (*Phép nhân*): Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

Quy tắc 3: (*Phép nâng lên luỹ thừa*): Nếu $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Quy tắc 4: (*Phép khai căn*): Nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

2. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta suy ra các tính chất sau:

1. $-|a| \le a \le |a|$ với mọi số thực a.
2. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ với $a \ge 0$ (tương tự $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ với $a > 0$).
3. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$ với $a \ge 0$ (tương tự $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ hoặc $x > a$ với $a > 0$).

Định lí: *Với hai số thực* a, b *tuỳ ý, ta có* $|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$.

3. BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI)

Định lí: *Với hai số không âm* a, b, *ta có*:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \text{ (thường được viết } a + b \ge 2\sqrt{ab}\text{)},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Hệ quả 1: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*

Tức là, với hai số dương a, b có $a + b = S$ không đổi suy ra:

$$2\sqrt{ab} \le S \Leftrightarrow ab \le \frac{S^2}{4} \Rightarrow (ab)_{Max} = \frac{S^2}{4}, \text{ đạt được khi } a = b.$$

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi hình vuông có diện tích lớn nhất.*

<u>Hệ quả 2</u>: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.*

Tức là, với hai số dương a, b có ab = P không đổi suy ra:

$$a + b \geq 2\sqrt{P} \Rightarrow (a + b)_{Min} = 2\sqrt{P},$$ đạt được khi a = b.

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích hình vuông có chu vi nhỏ nhất.*

Mở rộng

1. *Với các số a, b, c không âm, ta luôn có*:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

thường được viết:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hoặc } (a + b + c)^3 \geq 27abc.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

2. *Với* n *số* a_i, $i = \overline{1,n}$ *không âm, ta luôn có*:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_n}_{\text{n số hạng}} \geq n\sqrt[n]{\underbrace{a_1.a_2....a_n}_{\text{n số hạng}}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

4. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI

<u>Định lí</u>: *Cho* a_1, a_2, b_1, b_2 *là những số thực, ta có*:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH

<u>Định lí</u>: *Cho bất phương trình* f(x) < g(x) *với ĐKXĐ* D, h(x) *là một biểu thức xác định với mọi* x *thoả mãn điều kiện* D (h(x) *có thể là hằng số*). *Khi đó, với điều kiện* D, *bất phương trình* f(x) < g(x) *tương đương với mỗi bất phương trình sau*:

a. f(x) + h(x) < g(x) + h(x).

b. f(x).h(x) < g(x).h(x) *nếu* h(x) > 0 *với* $\forall x \in D$.

c. f(x).h(x) > g(x).h(x) *nếu* h(x) < 0 *với* $\forall x \in D$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Với yêu cầu "*Giải và biện luận bất phương trình* $ax + b < 0$" ta sẽ thực hiện như sau:

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$ax < -b. \quad (1)$$

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì:

$(1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0$.

Vậy, ta được:

- Nếu $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Nếu $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a > 0$ thì:

$(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

Trường hợp 3: Nếu $a < 0$ thì:

$(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

Kết luận:

- Với $a > 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty; -\frac{b}{a})$.
- Với $a < 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\frac{b}{a}; +\infty)$.
- Với $a = 0$ và $b < 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \mathbb{R}$.
- Với $a = 0$ và $b \geq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \varnothing$.

☞ ***Chú ý***: 1. Tương tự chúng ta cũng giải và biện luận được các bất phương trình:

$$ax + b > 0,\ ax + b \leq 0,\ ax + b \geq 0$$

2. Để giải một hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

III. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

<u>Định lí</u>: *Với nhị thức bậc nhất* $f(x) = ax + b$, *ta có*:

a. $f(x)$ *cùng dấu với* a *khi* x *lớn hơn nghiệm* $x_0 = -\frac{b}{a}$.

b. $f(x)$ *trái dấu với* a *khi* x *nhỏ hơn nghiệm* $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Bảng tóm tắt dấu của $f(x) = ax + b$:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (tương tự đối với các bất phương trình $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \le 0$, $ax + by + c \ge 0$) ta thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Vẽ đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$.

   Bước 2: Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên (d) và xác định giá trị của:

   $$d_M = ax_0 + by_0 + c,$$

   khi đó:

   a. Nếu $d_M < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

   b. Nếu $d_M > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

2. Để xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ta thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.

   Bước 2: Kết luận: Miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

V. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

<u>Định lí</u>: *Với tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, *ta có*:

a. Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với a, với $\forall x \in \mathbb{R}$, tức là:

$$af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b. Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) cùng dấu với a, với $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{b}{2a}\}$, tức là:

$$af(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a} \text{ và } af(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c. Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm x_1, x_2, giả sử là $x_1 < x_2$. Lúc đó:

- f(x) cùng dấu với a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.
- f(x) trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$.

Trong trường hợp này ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a	

☞ ***Chú ý***: Để giải bất phương trình bậc hai, ta sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng toán 1: Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh bất đẳng thức:

$A > B$

ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: *Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa*. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

- *Hướng 1:* Chứng minh $A - B > 0$.
- *Hướng 2:* Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.
- *Hướng 3:* Xuất phát từ bất đẳng thức đúng.
- *Hướng 4:* Biến đổi vế trái hoặc vế phải.

Phương pháp 2: *Sử dụng tính chất bắc cầu*, tức là chứng minh:

$A > C$ và $C > B$.

Phương pháp 3: *Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.*

Phương pháp 4: *Phương pháp chứng minh phản chứng*, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

Phương pháp 5: *Phương pháp chứng minh quy nạp*, được áp dụng với các bài toán liên hệ với $n \in \mathbb{Z}$ hoặc $n \in \mathbb{N}$.

Phương pháp 6: *Phương pháp vectơ và hình học*, bằng việc sử dụng tính chất:

- Nếu a, b, c là độ ba cạnh của một tam giác thì
  $a + b > c$ và $|a - b| < c$
- Sử dụng định lý hàm số sin và hàm số cosin.
- $|\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u} = k\vec{v}$, $k > 0$ (tức là $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng).
- $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u} = k\vec{v}$ (tức là $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương).

Thí dụ 1. *Hãy so sánh* $\sqrt{2000} + \sqrt{2005}$ và $\sqrt{2002} + \sqrt{2003}$.

✍ *Giải*

Giả sử:

$$\sqrt{2000} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2000} + \sqrt{2005})^2 < (\sqrt{2002} + \sqrt{2003})^2$$

$\Leftrightarrow 2000 + 2005 + 2\sqrt{2000}.\sqrt{2005} < 2002 + 2003 + 2\sqrt{2002}.\sqrt{2003}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2000}.\sqrt{2005} < \sqrt{2002}.\sqrt{2003} \Leftrightarrow 2000.2005 < 2002.2003$

$\Leftrightarrow (2002 - 2)(2003 + 2) < 2002.2003$

$\Leftrightarrow 2002.2003 - 6 < 2002.2003$, luôn đúng.

Vậy, ta được $\sqrt{2000} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thưc hiện yêu cầu trên chúng ta đi thiết lập một bất đẳng thức, rồi bằng các phép biến đổi đại số thông thường chúng ta khẳng định bất đẳng thức đó đúng.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, b, c *luôn có*:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

✍ *Giải*

Ta có ba cách trình bày theo phương pháp 1 (mang tính minh hoạ), như sau:

Cách 1: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2}\right) + \left(\frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Cách 2: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Cách 3: Ta luôn có:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ca \geq 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Cộng theo vế các bất phương trình trong hệ (I), ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua ví dụ trên đã minh hoạ cho các em học sinh thấy được ba hướng chứng minh bất đẳng thức khi sử dụng phương pháp 1 và sau đây ta sẽ minh hoạ bằng một ví dụ cho hướng 4.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *luôn có*:

a. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} < 1.$ b. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 1.$

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

do đó:

$$VT = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \text{đpcm.}$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \text{ với } k \geq 1$$

Do đó:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \text{đpcm.}$$

☞ ***Chú ý***: Với các bất đẳng thức có điều kiện cần khéo léo biến đổi để tận dụng được điều kiện của giả thiết.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng*:

a. *Nếu* $x^2 + y^2 = 1$ *thì* $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

b. *Nếu* $4x - 3y = 15$ *thì* $x^2 + y^2 \geq 9$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \text{ nên } |x + y| \leq \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b. Ta có:

$$4x - 5y = 15 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - 5.$$

Do đó:

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x - 5\right)^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25$$

$$= \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 = \left(\frac{5}{3}x - 4\right)^2 + 9 \geq 9.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x - 4 = 0 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12/5 \\ y = -9/5 \end{cases}.$$

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng, nếu* a, b, c *là độ dài các cạnh của một tam giác thì:*

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

✍ *Giải*

Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì vai trò của a, b, c là như nhau. Do đó, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Khi đó:

$0 \le a - b < c$ nên $(a - b)^2 < c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 + 2ab$.

$0 \le b - c < c$ nên $(b - c)^2 < a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 < a^2 + 2bc$.

$0 \le a - c < b$ nên $(a - c)^2 < b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$.

Từ đó, ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Thí dụ 6. *Chứng minh rằng với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$ *luôn có*:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}.$$

✍ *Giải*

Ta đi chứng minh với mọi x, y luôn có:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \le \frac{x^4+y^4}{2}. \qquad (*)$$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow (x + y)(x^3 + y^3) \le 2(x^4 + y^4) \Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) \le x^4 + y^4$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Khi đó áp dụng (*), ta được:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} = \left[\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2}\right] \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\le \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 7. *Cho* a, b, c *là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với* a *là cạnh huyền. Chứng minh rằng* $a^n \ge b^n + c^n$, *với* $n \in \mathbb{N}$ *và* $n \ge 2$.

✍ *Giải*

Bất đẳng thức đúng với n = 2, bởi khi đó ta được định lý Pitago.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, tức là $a^k \ge b^k + c^k$. (1)

Ta đi chứng minh nó đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$a^{k+1} \geq b^{k+1} + c^{k+1} \quad (2)$$

thật vậy:

$$a^{k+1} = a^k.a \geq (b^k + c^k)a = b^k.a + c^k.a \underset{a>c}{\overset{a>b}{>}} b^{k+1} + c^{k+1}, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 8. *Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *luôn có*:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Ta đi chứng minh bằng phương pháp qui nạp:

- Với n = 1, ta được 1 < 2, đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k tức là:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}.$$

- Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Thật vậy:

$$VT = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Ta sẽ đi chứng minh:

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \Leftrightarrow \sqrt{k+1} + \sqrt{k} < 2\sqrt{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} < \sqrt{k+1} \text{ – đúng.}$$

Vậy, ta luôn có (1).

Thí dụ 9. *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, *luôn có*:

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2.. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Ta có nhận xét:

$$a^2 + a + 1 = \quad + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{u}\,(a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$a^2 - a + 1 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{xét vectơ } \vec{v}\,(\frac{1}{2} - a; \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |(1, \sqrt{3})| = 2.$$

Do đó (1) được viết thành:

$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$, luôn đúng,

và dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\vec{u} = k\vec{v}, k > 0 \Leftrightarrow \frac{a + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a = 0.$$

Dạng toán 2: Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Thí dụ 1. a. *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, b *ta có* $|a \pm b| \geq |a| - |b|$.

b. *Biết rằng* $|a| > 2|b|$. *Chứng minh rằng* $|a| < 2|a - b|$.

Giải

a. Ta có:

$|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|$.

b. Ta biến đổi:

$|a| > 2|b| = 2|a - (a - b)| > 2(|a| - |a - b|) \Leftrightarrow |a| < 2|a - b|$.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng*:

a. *Nếu* $x \geq y \geq 0$ *thì* $\frac{x}{x+1} \geq \frac{y}{y+1}$.

b. *Với hai số* a, b *tuỳ ý, ta có* $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

Giải

a. Với $x \geq y \geq 0$, ta có:

$$\frac{x}{x+1} \geq \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow x(y + 1) \geq y(x + 1) \Leftrightarrow a \geq y \text{ (luôn đúng).}$$

b. Vì $|a - b| \leq |a| + |b|$, áp dụng kết quả câu a), ta có:

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Dạng toán 3: Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức côsi)

Mở rộng

1. Với các số a, b, c không âm, ta luôn có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
   dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.
2. Với n số a_i, $i = \overline{1,n}$ không âm, ta luôn có $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$,
   dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3. Với n số a_i, $i = \overline{1,n}$ dương, ta luôn có:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Công thức mở rộng: Cho n số dương tuỳ ý a_i, $i = \overline{1,n}$ và n số hữu tỉ dương q_i, $i = \overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Khi đó, ta luôn có:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \le \sum_{i=1}^{n} q_i a_i,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh

Gọi M là mẫu số chung của các số hữu tỉ q_i, $i = \overline{1,n}$, khi đó $q_i = \frac{m_i}{M}$, $i = \overline{1,n}$, từ đó theo giả thiết suy ra $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i a_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_i \text{, có M số dương}$$

$$\ge \frac{1}{M}.M\sqrt[M]{\prod_{i=1}^{n} a_i^{m_i}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{m_i}{M}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\underbrace{a_1 = .. = a_1}_{m_1 \text{ số } a_1} = ... = \underbrace{a_n = .. = a_n}_{m_n \text{ số } a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

☞ ***Chú ý***: Công thức trên được mở rộng khi q_i, $i = \overline{1,n}$ là n số thực dương.

Thí dụ 1. *Cho ba số dương* a, b, c. *Chứng minh rằng*:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b) + (b + c) + (c + a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] - 3$$

$$\ge \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong thí dụ trên ta cần sử dụng một vài phép biến đổi để làm xuất hiện những biểu thức mà khi sử dụng bất đẳng thức Côsi chúng sẽ triệt tiêu nhau.

Thí dụ 2. *Cho ba số dương* a, b, c. *Chứng minh rằng*:

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \ge 0.$$

✍ *Giải*

Biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$\frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \ge 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \ge 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}} = 6, \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b = c.$$

☞ ***Chú ý***: Với các bất đẳng thức có điều kiện cần khéo léo biến đổi để tận dụng được điều kiện của giả thiết.

Thí dụ 3. *Cho* $a + b + c + d = 2$. *Chứng minh rằng* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 1$.

✍ *Giải*

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có ngay:

$a^2 + b^2 \ge 2ab.$ (1)

$b^2 + c^2 \ge 2bc.$ (2)

$c^2 + d^2 \ge 2cd.$ (3)

$d^2 + a^2 \ge 2da.$ (4)

$a^2 + c^2 \ge 2ac.$ (5)

$b^2 + d^2 \ge 2bd.$ (6)

Cộng theo vế (1), (2), (3), (4), (5), (6) ta được:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \ge 2(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$

$$= (a + b + c + d)^2 = 2^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 1, \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} a = b = c = d \\ a + b + c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{2}.$$

Thí dụ 4. *Cho* a, b, c *là ba số dương thoả mãn* $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc}$. *Chứng minh rằng* $a + b + c > 2\sqrt{abc}$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách trình bày sau:

Cách 1: Ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow 4\sqrt{abc} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \quad (1)$$

Mặt khác, với ba số dương a, b, c ta có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}. \quad (2)$$

Nhân theo vế (1), (2) ta được:

$$4(a + b + c)\sqrt{abc} \geq 9abc > 8abc \Rightarrow a + b + c > 2\sqrt{abc},$$ đpcm.

Cách 2: Ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a\sqrt{b^2 + c^2} \geq 2a\sqrt{2bc} \Rightarrow 4\sqrt{abc} \geq 2a\sqrt{2bc} \Leftrightarrow 2 \geq a.$$

Chứng minh tương tự ta nhận được $b \leq 2$, $c \leq 2$ và nhận thấy ngay a, b, c không thể đồng thời bằng 2 vì khi đó sẽ vi phạm điều kiện đầu bài.

Khi đó, ta thấy ngay:

$$a(a - 2) + b(b - 2) + c(c - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) > a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc} \Leftrightarrow a + b + c \geq 2\sqrt{abc},$$ đpcm.

Cách 3: Ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 6\sqrt[36]{a^3b^3c^3} = 6\sqrt{abc}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{abc} + a + b + c \geq 6\sqrt{abc} \Leftrightarrow a + b + c \geq 2\sqrt{abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$a^2 = b^2 = c^2 = a = b = c \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ta luôn có $a + b + c > 2\sqrt{abc}$.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp, để chứng minh bất đẳng thức chúng ta đã sử dụng liên tiếp nhiều lần bất đẳng thức Côsi.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng*:

a. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$, *với mọi* a, b, c, d.

b. $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$, *với mọi* $a, b > 0$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^4 + b^4) + (c^4 + d^4)$$
$$\geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 = 2(a^2b^2 + c^2d^2) \geq 2.2abcd = 4abcd,$$ đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ c^2 = d^2 \\ ab = cd \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c = d \\ a = b = -c = -d \\ a = -b = c = -d \\ a = -b = -c = d \end{array}\right.$$

b. Ta có:

$$1 + \frac{a}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b}\right)^m \ge 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m},$$

$$1 + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \ge 2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m},$$

suy ra:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \ge 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m} + 2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m} \ge 2.\sqrt{2^m.\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.2^m.\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}} = 2^{m+1},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} 1 = \frac{a}{b} \\ 1 = \frac{b}{a} \\ \left(1+\frac{a}{b}\right)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$$

☞ ***Nhận xét***: 1. Ta còn có kết quả tổng quát hơn:

a. Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn:

$$a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m = p\sqrt{a_1a_2...a_n}, \text{ với } 1 \le m, p < 2n.$$

Chứng minh rằng:

$$a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + ... + a_n^{n-m} \ge (2n - p)\sqrt{a_1a_2...a_n}.$$

b. Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn:

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1} = p\sqrt{a_1a_2...a_n}.$$

Chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge \frac{n^2}{p}\sqrt{a_1a_2...a_n}.$$

2. Trong nhiều trường hợp, các em học sinh cần linh hoạt trong việc sử dụng bất đẳng thức Côsi cho nhóm đối tương khác nhau để đạt được mục đích.

Thí dụ 6. a. *Chứng minh rằng nếu* a, b, c *là bốn số không âm thì:*

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$$

b. *Ba số dương có tổng bằng đơn vị. Chứng minh rằng tổng của hai trong ba số đó không bé hơn 16 lần tích của cả ba số đó.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2 = ab + cd + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geq \sqrt{abcd} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \\ ab = cd \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d.$$

b. Gọi a, b, c là ba số dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Ta cần chứng minh $a + b \geq 16abc$.
Ta có:

$1 = (a + b + c)^2 \geq 4(a + b)c \Leftrightarrow a + b \geq 4(a + b)^2c.$ (1)

Mặt khác, ta cũng có $(a + b)^2 \geq 4ab$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b \geq 16abc$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a+b=c \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-c=c \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1/2 \\ a=b=1/4 \end{cases}.$$

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp, các em học sinh cần biết cách kết hợp bất đẳng thức Côsi với các bất đẳng thức khác.

Thí dụ 7. *Giả sử* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên* $n > 1$ *thì*:

$$a^nb(a - b) + b^nc(b - c) + c^na(c - a) \geq 0.$$

✍ *Giải*

Chúng ta chứng minh bất đẳng thức ở đầu bài bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Với $n = 2$, đặt:

  $$2x = b + c - a > 0;\ 2y = a - b + c > 0;\ 2z = a + b - c > 0.$$

  Suy ra $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$

  Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

  $$xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \geq 0.$$

  $$\Leftrightarrow xyz\left[\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-(x+y+z)\right] \geq 0 \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương, ta có:

$$y + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{y\frac{x^2}{y}} = 2x.$$

Tương tự:

$$x + \frac{z^2}{x} \geq 2z \text{ và } z + \frac{y^2}{z} \geq 2y.$$

Từ đó bất đẳng thức (*) được chứng minh, hay bất đẳng thức:

$$a^n b(a - b) + b^n c(b - c) + c^n a(c - a) \geq 0.$$

được chứng minh.

- Giả sử bất đẳng thức đúng tới n. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $c \leq b \leq a$. Theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$b^n c(b - c) \geq -a^n b(a - b) - c^n a(c - a)$$

$$\Rightarrow b^{n+1} c(b - c) \geq -a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a)$$

Do đó:

$$a^{n+1} b(a - b) + b^{n+1} c(b - c) + c^{n+1} a(c - a)$$
$$\geq a^{n+1} b(a - b) - a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a) + c^{n+1} a(c - a)$$
$$= a^n b(a - b)^2 + c^n a(c - a)(c - b) \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với n + 1.

Theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức đã cho đúng với mọi n > 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$a = b = c$ hay ΔABC đều.

Thí dụ 8. *Cho biểu thức* $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, với $ad - bc = 1$.

a. *Chứng minh rằng* $S \geq \sqrt{3}$.

b. *Tính giá trị của tổng* $(a + c)^2 + (b + d)^2$ *khi cho biết* $S = \sqrt{3}$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$(ac + bd)^2 + 1 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$
$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho S, ta được:

$$S \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + ac + bd$$

$$\Leftrightarrow S \geq 2\sqrt{(ac + bd)^2 + 1} + ac + bd. \quad (2)$$

Đặt t = ac + bd, ta thấy ngay hai vế của (2) đều dương, do đó:

$$S^2 \geq (2\sqrt{t^2 + 1} + t)^2 = 4(1 + t^2) + 4t\sqrt{t^2 + 1} + t^2$$
$$= (1 + t^2) + 4t\sqrt{t^2 + 1} + 4t^2 + 3 = (\sqrt{t^2 + 1} + 2t)^2 + 3 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow S \geq \sqrt{3}, \text{ đpcm.}$$

b. Từ kết quả cầu a), ta có:

$$S = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t^2+1} + 2t = 0 \quad (3) \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

Giải (3) bằng phép biến đổi tương đương:

$$\sqrt{t^2+1} = -2t \Leftrightarrow \begin{cases} -2t \geq 0 \\ t^2 + 1 = 4t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow ac + bd = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Như vậy, ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ ac + bd = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó:

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Dạng toán 4: Bất đẳng thức bunhiacôpxki

Mở rộng

1. Với các số thực a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

2. Với hai bộ n số a_i, b_i, $i = \overline{1,n}$, ta luôn có $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum_{i=1}^{n} b_i^2$,

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Với a_1, a_2, ..., a_n là n số tuỳ ý, ta luôn có:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}.$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

Bất đẳng thức này suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpxki áp dụng cho hai bộ n số (1; 1; ...; 1) và (a_1; a_2; ... ; a_n).

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số thực* x, y *luôn có* $(x^3 + y^3)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

Giải

Ta có:

$$VT = (x^3 + y^3)^2 = (x.x^2 + y.y^2)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4), \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{x}{x^2} = \frac{y}{y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y.$$

Mở rộng: *Với các số thực* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, *ta luôn có*:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng*:

a. *Nếu* $x + 3y = 2$ *thì* $x^2 + y^2 \ge \frac{5}{2}$.

b. *Nếu* $2x + 3y = 7$ *thì* $2x^2 + 3y^2 \ge \frac{49}{5}$.

Giải

a. Ta có:

$$2^2 = (x + 3y)^2 \le (1 + 3^3)(x^2 + y^2) = 10(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{2}{10} = \frac{5}{2},$$

dấu "=" xảy ra khi ta có:

$$x:1 = y:3 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x = y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \text{ và } y = \frac{3}{5}.$$

b. Ta có:

$$7^2 = (2x + 3y)^2 = (\sqrt{2}.x\sqrt{2} + \sqrt{3}.y\sqrt{3})^2 \le (2 + 3)(2x^2 + 3y^2) = 5(2x^2 + 3y^2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3y^2 \ge \frac{49}{5},$$

dấu "=" xảy ra khi ta có:

$$x\sqrt{2} : \sqrt{2} = y\sqrt{3} : \sqrt{3} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{7}{5}.$$

Chú ý: Yêu cầu trên còn có thể được phát biểu:

- Với câu a) là "*Trong tất cả các nghệm* (x; y) *của phương trình* $x + 3y = 2$ hãy chỉ ra nghiệm có tổng $x^2 + y^2$ *nhỏ nhất*" hoặc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.
- Với câu b) là "*Trong tất cả các nghệm* (x; y) *của phương trình* $2x + 3y = 7$ *hãy chỉ ra nghiệm có tổng* $2x^2 + 3y^2$ *nhỏ nhất*" hoặc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

Thí dụ 3. *Cho các số không âm* x, y *thoả mãn* $x^3 + y^3 = 2$. *Chứng minh rằng*:

$$x^2 + y^2 \le 2.$$

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x}.\sqrt{x^3} + \sqrt{y}.\sqrt{y^3})^2 \le (x + y)(x^3 + y^3) = 2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^4 \le 4(x + y)^2 = 4(1.x + 1.y)^2 \le 4(1 + 1)(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 \le 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 2, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y^3}} \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Dạng toán 5: Sử dụng bất đẳng thức tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Thí dụ 1. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*:

a. $y = (2x + 1)(2 - 3x)$, với $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$.

b. $y = x(1 - x)^3$, với $0 \le x \le 1$.

✍ *Giải*

a. Với $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3}$ thì $2x + 1 \ge 0$ và $2 - 3x \ge 0$, do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$y = (2x + 1)(2 - 3x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}).\frac{1}{3}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - x)$$

$$\le \frac{1}{6}\left[\frac{(x + \frac{1}{2}) + (\frac{2}{3} - x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{864}.$$

Từ đó suy ra $y_{Max} = \frac{25}{864}$, đạt được khi:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{3}.3x(1 - x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1 - x)(1 - x)(1 - x),$$

rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm 3x và 3 số 1 – x, ta được:

$$y \le \frac{1}{3}.\left[\frac{3x+(1-x)+(1-x)+(1-x)}{4}\right]^4 = \frac{1}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{256},$$

từ đó suy ra $y_{Max} = \frac{27}{256}$, đạt được khi:

$$3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Thí dụ 2. *Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số*:

a. $y = x + \frac{2}{x-1}$ *với* $x > 1$. b. $y = x^2 + \frac{2}{x^3}$, *với* $x > 0$.

✍ *Giải*

a. Vì $x > 1$ nên $x - 1$ và $\frac{2}{x-1}$ là hai số dương. Do đó:

$$y = x + \frac{2}{x-1} = 1 + x - 1 + \frac{2}{x-1} \ge 1 + 2\sqrt{(x-1)\frac{2}{x-1}} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

từ đó, suy ra $y_{Min} = 1 + 2\sqrt{2}$, đạt được khi:

$$x - 1 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{2}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{3}x^2.\frac{1}{3}x^2\frac{1}{3}x^2.\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^3}} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

từ đó, suy ra $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$, đạt được khi:

$$\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow x^5 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{3}.$$

Thí dụ 3. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*:

a. $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ b. $S = 3x + 4y$, *biết* $x^2 + y^2 = 1$.

✍ *Giải*

a. Với $1 \le x \le 4$, ta có:

$$A^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x})^2 = 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)}$$

Ta có:

$$3 \le 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-1)} \le 3 + x - 1 + 4 - x = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} \le A \le \sqrt{6}.$$

Từ đó, suy ra:

- $A_{Max} = \sqrt{6}$, đạt được khi:

$$x - 1 = 4 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

- $A_{Min} = \sqrt{3}$, đạt được khi:

  $(x - 1)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

b. Ta có:

$$S^2 = (3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25 \Leftrightarrow |3x + 4y| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3x + 4y \le 5.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ 9x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ 9x^2 + 16x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ x = \pm\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5},\ y = \dfrac{4}{5} \\ x = -\dfrac{3}{5},\ y = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right..$$

Từ đó, suy ra:

- $S_{Max} = 5$, đạt được khi $x = \dfrac{3}{5}, y = \dfrac{4}{5}$.
- $S_{Min} = 5$, đạt được khi $x = -\dfrac{3}{5}, y = -\dfrac{4}{5}$.

Thí dụ 4. *Hai số dương* x, y *thoả mãn* $3x + 2y = 6xy$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng* $x + y$.

Giải

Nhận xét rằng:

$$3x + 2y = 6xy \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6,$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{x}}.\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{y}}.\sqrt{y}.$$

Do vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, suy ra:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \le (\frac{2}{x} + \frac{3}{y})(x + y) = 6(x + y) \Rightarrow x + y \ge \frac{1}{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $(x + y)_{Min} = \dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{6}$ đạt được khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6 \\ \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}} = \dfrac{\frac{y}{3}}{\frac{3}{y}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{6}}{6},\ y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}.$$

Dạng toán 6: Sử dụng bất đẳng thức giải phương trình, bất phương trình và hệ

Thí dụ 1. *Giải phương trình* $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$.

Giải

Nhận xét rằng:

$$VT = \sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{x-1} \ge 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$VT = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $|4x - 1| + 2|2x - 1| = 1$.

b. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 2$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$|4x - 1| + |2 - 4x| = (4x - 1) + (2 - 4x).$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 1}} \begin{cases} 4x-1 \ge 0 \\ 2-4x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1/4 \\ x \le 1/2 \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$|4x - 1| + |4x - 2| = (4x - 1) - (4x - 2).$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 3}} \begin{cases} 4x-1 \ge 0 \\ 4x-2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1/4 \\ x \le 1/2 \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2} + 1| - |\sqrt{x-2} - 1| = |(\sqrt{x-2} + 1) - (\sqrt{x-2} - 1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{TÝnh chÊt 4}} (\sqrt{x-2} - 1).2 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x \ge 3$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình* $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12} = x^2 + 6x - 1$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)} = x^2 + 6x - 1.$$

Điều kiện:

$$7x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{7}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)} \leq (7x - 4) + (x^2 - x + 3) = x^2 + 6x - 1 = VP.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$7x - 4 = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 7 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1 hoặc x = 7.

Thí dụ 4. *Giải các phương trình sau*:

a. $2x^4 + (1 - 2x)^4 = \dfrac{1}{27}$.

b. $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$.

Giải

a. Biến đổi vế trái của phương trình:

$$2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{3}.3.[\,2x^4 + (1 - 2x)^4] = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)[\,x^4 + x^4 + (1 - 2x)^4]$$

$$\geq \frac{1}{3}[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{9}\{3.[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2$$

$$= \frac{1}{27}\{(1^2 + 1^2 + 1^2)\,[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2$$

$$\geq \frac{1}{27}[x + x + (1 - 2x)]^4 = \frac{1}{27}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2 = (1-2x)^2 \\ x = x = 1 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$.

b. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1.\sqrt{x} + 1.\sqrt{1-x} \leq \sqrt{(1+1)(x+1-x)} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} = 1.\sqrt[4]{x} + 1.\sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{(1+1)(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}.$$

suy ra:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi dấu "=" xảy ra, tức là với $x = \dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 5. *Giải bất phương trình* $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \le 2$.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \ge 2\sqrt[4]{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})} = 2$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình ứng với dấu "=" của bất đẳng thức trên, tức là:

$$\begin{cases}\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\\ \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\sqrt{x^2-1}=1\\ x+\sqrt{x^2-1}=1\end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm x = 1.

Thí dụ 6. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $|3x + 1| \le |2x - 1| + |x + 2|$.

b. $|2x + 3| \ge |3x + 5| - |x + 2|$.

c. $|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < 2x + 1$.

d. $|x + 2| \le |3x - 1| - |2x - 3|$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$|(2x - 1) + (x + 2)| \le |2x - 1| + |x + 2|$ – luôn đúng.

Vậy, bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

b. Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$|(3x + 5) - (x + 2)| \ge |3x + 5| - |x + 2|$ – luôn đúng.

Vậy, bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

c. Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < |(2x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 5x)|$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 5x)(2x + 1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1/2\\ 0<x<5/2\end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2}; +\infty)$.

d. Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$|(3x - 1) - (2x - 3)| \le |3x - 1| - |2x - 3|$$

$$\Leftrightarrow |(3x - 1) - (2x - 3)| = |3x - 1| - |2x - 3|$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)(x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>3/2\end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; -2)\cup(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Thí dụ 7. *Giải bất phương trình* $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2-10x+16} \ge 3 - x$.

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-1} + x - 3 \ge \sqrt{2x^2-10x+16}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$\sqrt{2[(x-1)+(x-3)^2]} \le \sqrt{x-1} + x - 3.$$

Vậy bất phương trình tương đương với dấu "=" xảy ra, tức là

$$\sqrt{x-1} = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm x = 2 và x = 5.

Thí dụ 8. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2 & (1) \\ xy=1 & (2) \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Biến đổi (1) về dạng:

$$4 = (x-y)^2 + (x+y)^2 + 2|x^2 - y^2|$$
$$= 2(x^2 + y^2) + 2|x^2 - y^2| \ge 2(x^2 + y^2) \ge 4xy = 4$$

Vậy, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|x^2-y^2|=0 \\ x=y \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có 2 cặp nghiệm (1; 1) và (–1; –1).

Thí dụ 9. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} + \sqrt{y^2-x} = 2 \\ x^2+y^2-x-y=2 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Kí hiệu hai phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Xét (1), sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

$$2 = \sqrt{x^2-y} + \sqrt{y^2-x} \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\le} \sqrt{(1+1)(x^2-y+y^2-x)} \overset{(2)}{=} 2$$

Vậy (1) tương đương với:

$$\sqrt{x^2-y} = \sqrt{y^2-x} \Leftrightarrow x^2 - y = y^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-x-1 \end{array}\right..$$

▪ Với x = y, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + x^2 - x - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

▪ Với y = −x − 1, hệ có dạng:

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + (-x-1)^2 - x - (-x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 0 \text{ và } y_3 = -1 \\ x_4 = -1 \text{ và } y_4 = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có 4 cặp nghiệm.

Thí dụ 10. *Giải hệ bất phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1-x} \le \sqrt{x} \\ 2\sqrt{xy - x} + \sqrt{x} = 1 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $0 \le x \le 1$; $y \ge 1$.

Từ bất phương trình thứ nhất của hệ, ta biến đổi:

$$\sqrt{1-x} \le \sqrt{x} - \sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \le \sqrt{x}(1 - \sqrt{y}). \qquad (*)$$

Nhận xét rằng VT ≤ 0 và VT ≥ 0 do đó (*) tương đương với:

VT = VP = 0 ⇔ x = y = 1 thoả mãn phương trình thứ hai của hệ.

Vây, hệ có nghiệm x = y = 1.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Dạng toán 1: Các bài toán mở đầu về bất phương trình

Thí dụ 1. *Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm*:

a. $x^2 + \sqrt{x+8} \le -3$.

b. $\sqrt{1 + 2(x-3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \frac{3}{2}$.

c. $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > 1$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$VT = x^2 + \sqrt{x+8} \ge 0, \forall x \ge -8; \qquad VP = -3 < 0, \forall x.$$

Suy ra, tập xác định D = ∅.

Vậy, bất phương trình vô nghiệm.

b. Ta có:

$$\sqrt{1+2(x-3)^2} \geq 1 \text{ và } \sqrt{5-4x+x^2} \geq 1, \forall x.$$

$$\Rightarrow VT = \sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} \geq 2, \forall x.$$

Lại có:

$$VP = \frac{3}{2} < 2, \forall x \Rightarrow VT > VP, \forall x.$$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm.

c. Ta có:

$$1 + x^2 < 7 + x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{7+x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} < 0.$$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm.

Dạng toán 2: Hai bất phương trình tương đương

Thí dụ 1. *Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?*

a. $x^2 - 2 > x$ và $x^2 > x + 2$. b. $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ và $x < 1$.

Giải

a. Với bất phương trình:

$$x^2 - 2 > x$$

cộng 2 vào hai vế của bất phương trình, ta được:

$$x^2 - 2 + 2 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 > x + 2.$$

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, số 0 là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

Thí dụ 2. Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương?

a. $4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$.

b. $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x + 1)\sqrt{x-1} \geq x(2x + 1)$.

Giải

a. Ta có:

- $-4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$. Tập nghiệm: $T_1 = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.
- $4x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$. Tập nghiệm: $T_2 = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

Ta thấy $T_1 = T_2$.

Vậy, hai bất phương trình tương đương.

b. Ta có:

- $\sqrt{x-1} \ge x$ có tập xác định $x \ge 1$ (1)
- Với $x \ge 1 \Rightarrow 2x + 1 > 0$ (2)

Nhân cả hai vế của (1) với (2), ta được:

$(2x + 1)\sqrt{x-1} \ge x(2x + 1)$.

Vậy, hai bất phương trình tương đương.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Dạng toán 1: Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Thí dụ 1. *Giải và biện luận bất phương trình*:

$$(m^2 + m + 1)x + 3m > (m^2 + 2)x + 5m - 1.$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$(m - 1)x > 2m - 1$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, ta được:

  $0 > -1$, luôn đúng $\Rightarrow$ Bất phương trình có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.
- Với $m > 1$, ta được:

  $x > \dfrac{2m-1}{m-1} \Rightarrow$ Bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(\dfrac{2m-1}{m-1}; +\infty\right)$.
- Với $m < 1$, ta được:

  $x < \dfrac{2m-1}{m-1} \Rightarrow$ Bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; \dfrac{2m-1}{m-1}\right)$.

Thí dụ 2. *Tìm* m *để bất phương trình sau vô nghiệm*:

$$m^2x + 1 \ge m + (3m - 2)x$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$(m^2 - 3m + 2)x \ge m - 1$. (1)

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy, không có giá trị nào của m thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 2: Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Phương pháp áp dụng

Để giải và biện luận hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \le 0 \\ a_2x + b_2 \le 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập bảng xét dấu chung cho a_1 và a_2.

Bước 2: Xét các trường hợp riêng biệt nhận được từ bước 1. Thông thường ta có được các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 > 0$ và $a_2 > 0$.

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{b_1}{a_1} \\ x \le -\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow x \le \text{Min}[-\frac{b_1}{a_1}; -\frac{b_2}{a_2}] \text{ là nghiệm của hệ.}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_1 < 0$ và $a_2 < 0$.

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{b_1}{a_1} \\ x \ge -\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow x \le \text{Max}[-\frac{b_1}{a_1}; -\frac{b_2}{a_2}] \text{ là nghiệm của hệ.}$$

Trường hợp 3: Nếu $a_1 > 0$ và $a_2 < 0$.

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{b_1}{a_1} \\ x \ge -\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm điều kiện là $-\frac{b_2}{a_2} \le -\frac{b_1}{a_1}$.

Khi đó, nghiệm của hệ là $-\frac{b_2}{a_2} \le x \le -\frac{b_1}{a_1}$.

Trường hợp 4: Nếu $a_1 = 0 \vee a_2 = 0$.

Khi đó, thay trực tiếp giá trị của tham số vào hệ (I).

Thí dụ 1. *Giải các hệ bất phương trình*:

a. $\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3} \ge 4 - x \\ \dfrac{6-5x}{13} < 3x + 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} (1-x)^2 > 5 + 3x + x^2 \\ (x+2)^3 < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Ta có biến đổi:

$$\begin{cases} 8x \ge 10 \\ 47x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5/4 \\ x > -7/44 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{4}.$$

Vậy, hệ phương trình có tập nghiệm $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$..

b. Ta có biến đổi:

$$\begin{cases} 1 - 2x + x^2 > 5 + 3x + x^2 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < -4 \\ 19x < -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4/5 \\ x < -13/19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}.$$

Vậy, hệ phương trình có tập nghiệm $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$..

Thí dụ 2. *Giải và biện luận hệ bất phương trình*:

$$\begin{cases} mx - 1 > 0 \\ (3m-2)x - m > 0 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Ta đi giải đồng thời hai bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu của m và 3m – 2:

m	$-\infty$		0		2/3		$+\infty$
m		–	0	+		+	
3m – 2		–		–	0	+	

Xét 5 trường hợp:

Trường hợp 1. Với m < 0 thì hệ có dạng:

$$\begin{cases} x < 1/m \\ x < \dfrac{m}{3m-2} \end{cases} \Rightarrow x < \text{Min}\{\frac{1}{m}, \frac{m}{3m-2}\} = \frac{1}{m} \text{ vì với } m < 0 \text{ thì } \frac{m}{3m-2} > 0.$$

Trường hợp 2. Với m = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} -1 > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 3. Với $0 < m < \frac{2}{3}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x > 1/m \\ x < \dfrac{m}{3m-2} \end{cases} \text{ vô nghiệm do } \frac{1}{m} > 0 \text{ và } \frac{m}{3m-2} < 0.$$

Trường hợp 4. Với $m = \frac{2}{3}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x > 3/2 \\ -2/3 > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 5. Với $m > \frac{2}{3}$ thì hệ có dạng:

$$\begin{cases} x > 1/m \\ x > \dfrac{m}{3m-2} \end{cases} \Rightarrow x > \text{Max}\{\frac{1}{m}, \frac{m}{3m-2}\}.$$

Kết luận:

- Với $m < 0$ hệ có nghiệm là $x < \frac{1}{m}$.
- Với $0 \le m \le \frac{2}{3}$ hệ vô nghiệm.
- Với $m > \frac{2}{3}$ hệ có nghiệm là $x > \text{Max}\{\frac{1}{m}, \frac{m}{3m-2}\}$.

☞ ***Chú ý***: Nếu a_1 hoặc a_2 luôn khác 0 (giải sử $a_1 \neq 0$). Khi đó thực chất bài toán được chuyển về việc giải biện luận bất phương trình còn lại với điều kiện K.

Thí dụ 3. *Với giá trị nào của* m *thì hệ bất phương trình sau có nghiệm*:

a. $\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ m + x > 1 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\dfrac{m+2}{3} \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$-\frac{m+2}{3} > 1 \Leftrightarrow m + 2 < -3 \Leftrightarrow m < -5.$$

Vậy, với $m < -5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ m + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x > 1 - m \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vậy, với $m > -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 4. *Tìm các giá trị của* m *để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm*:

a. $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 \ge 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \le 8 \end{cases}$.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4/3 \\ x \le \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{m+5}{2} \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3m + 15 \le 8 \Leftrightarrow m \le -\frac{7}{3}.$$

Vậy, với $m \le -\frac{7}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 8/13 \\ x \ge \dfrac{2m-8}{5} \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{2m-8}{5} > \frac{8}{3} \Leftrightarrow 26m - 104 > 40 \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}.$$

Vậy, với $m > \frac{72}{13}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Với giá trị nào của* m *thì hệ sau có nghiệm duy nhất*:

$$\begin{cases} 2x + 1 - m \le 0 \\ mx + 2m - 1 \le 0 \end{cases}.$$

Giải

Kí hiệu các bất phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

- Giải (1): Ta có:

  $(1) \Leftrightarrow x \le \dfrac{m-1}{2}$.

- Giải (2), viết lại bất phương trình (2) dưới dạng:

  $mx \le 1 - 2m$. (3)

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$, ta có:

(3) $\Leftrightarrow 0x \le 1$ luôn đúng.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x$.

Khi đó nghiệm của hệ là $x \le -\frac{1}{2}$, và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 2: Nếu m > 0, ta có:

$$(3) \Leftrightarrow x \le \frac{1-2m}{m}.$$

Khi đó nghiệm của hệ là $x \le \text{Min}\{\frac{m-1}{2}, \frac{1-2m}{m}\}$ và nghiệm là không duy nhất.

Trường hợp 3: Nếu m < 0, ta có:

$$(3) \Leftrightarrow x \ge \frac{1-2m}{m}.$$

Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2} = \frac{1-2m}{m} \Leftrightarrow m^2 + 3m - 2 = 0 \overset{m<0}{\Leftrightarrow} m = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy, hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

☞ ***Chú ý***: Nếu hệ có dạng:

$$-a \le f(x) \le a. \qquad \text{(I)}$$

ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ |f(x)| \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ f^2(x) \le a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ [f(x)-a][f(x)+a] \le 0 \quad (*) \end{cases}$$

và trong nhiều trường hợp việc giải biện luận (*) đơn giản hơn so với việc giải biện luận đơn lẻ từ (I). Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Thí dụ 6. *Giải và biện luận bất phương trình kép*:

$$-1 \le \frac{x+m}{mx+1} \le 1. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

- Với m = 0 thì $(1) \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
- Với $m \ne 0$ thì điều kiện $x \ne -\frac{1}{m}$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\left|\frac{x+m}{mx+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+m}{mx+1}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+m}{mx+1}-1\right)\left(\frac{x+m}{mx+1}+1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m^2)(x^2-1) \le 0. \qquad (2)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

- Với m = 1.

  $(2) \Leftrightarrow 0x \le 0$ (luôn đúng).

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $x \ne -1$.

- Với $m = -1$.

  $(2) \Leftrightarrow 0x \leq 0$ (luôn đúng).

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $x \neq 1$.

Trường hợp 2: Nếu $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1, \text{ (luôn thoả mãn } x \neq -\frac{1}{m}\text{)}.$$

Trường hợp 3: Nếu $1 - m^2 < 0 \Leftrightarrow |m| > 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1, \text{ (luôn thoả mãn } x \neq -\frac{1}{m}\text{)}.$$

Kết luận:

- Với $m = 1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq -1$.
- Với $m = -1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq 1$.
- Với $|m| < 1$, bất phương trình có nghiệm là $|x| \leq 1$.
- Với $|m| > 1$, bất phương trình có nghiệm là $|x| \geq 1$.

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Dạng toán 1: Xét dấu các biểu thức

Thí dụ 1. *Lập bảng xét dấu các biểu thức*:

a. $f(x) = x(x-2)^2(3-x)$. b. $f(x) = \dfrac{x(x-3)^3}{(x-5)(1-x)}$.

Giải

a. Ta có bảng sau:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

b. Ta có bảng sau:

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-3)^2$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-5$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dạng toán 2: Giải bất phương trình tích hoặc chứa ẩn ở mẫu

Phương pháp áp dụng

1. Để giải các bất phương trình dạng:

$$P(x) > 0,\ P(x) < 0,\ P(x) \ge 0,\ P(x) \le 0,$$

trong đó $P(x) = (a_1x + b_1)\ldots(a_nx + b_n)$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các nghiệm $x_1, \ldots, x_n$ của các nhị thức $a_1x + b, \ldots, a_nx + b$.

Bước 2: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần (giả sử $x_k < \ldots < x_l$), từ đó lập bảng xét dấu dạng:

x	$-\infty$ $\quad x_k \quad \ldots \quad x_l \quad$ $+\infty$
$a_1x + b_1$	
…	
$a_nx + b_n$	
P(x)	

Bước 3: Dựa vào kết quả bảng xét dấu suy ra nghiệm cho bất phương trình.

2. Để giải các bất phương trình dạng:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \le 0,$$

trong đó P(x) và Q(x) là tích những nhị thức bậc nhất được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các nghiệm $x_1, \ldots, x_n$ của các phương trình $P(x) = 0$ và $Q(x) = 0$.

Bước 2: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần (giả sử $x_k < \ldots < x_l$), từ đó lập bảng xét dấu cho phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Với lưu ý rằng trên hàng cuối tại những điểm $Q(x) = 0$ ta sử dụng kí hiệu || để chỉ ra rằng tại đó bất phương trình không xác định.

Bước 3: Dựa vào kết quả bảng xét dấu suy ra nghiệm cho bất phương trình.

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình*:

a. $\dfrac{3}{1-x} \ge \dfrac{5}{2x+1}$. $\qquad$ b. $\dfrac{(2x-1)(2-x)}{x^2-4x+3} < 0.$

Giải

a. Ta có biến đổi:

$$\frac{3}{1-x} \ge \frac{5}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{3(2x+1) - 5(1-x)}{(1-x)(2x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)} \ge 0.$$

Lập bảng xét dấu, ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right).$$

b. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{(2x-1)(2-x)}{(x-1)(x-3)} < 0. \qquad (1)$$

Ta có:

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; \quad 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2;$$

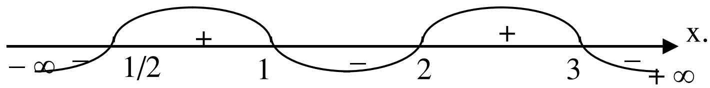
$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; \qquad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Lập bảng xét dấu của (1):

x	$-\infty$		1/2		1		2		3		$+\infty$
$2x - 1$			0	+		+		+		+	
$3 - x$		+		+		+	0	–		–	
$x - 1$		–		–	0	+		+		+	
$x - 4$		–		–		–		–	0	+	
VT		–	0		||	–	0		||	–	

Vậy, bất phương trình có tập hợp nghiệm là: $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

☞ ***Chú ý***: Có thể giải bất phương trình trên bằng phương pháp sau đây gọi là phương pháp chia khoảng. Chia trục Ox thành các khoảng:



Thí dụ 2. *Xác định* m *sao cho các bất phương trình sau tương đương*:

$$(m + 1)x - m - 3 > 0 \textit{ và } (m - 1)x - m - 2 > 0 \qquad .$$

✍ *Giải*

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$(m + 1)x > m + 3 \qquad (1)$$

$$(m - 1)x > m + 2 \qquad (2)$$

Trường hợp 1: Nếu $m = -1$.

$(1) \Leftrightarrow 0.x > -2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 2: Nếu $m = 1$.

$(1) \Leftrightarrow x > 2$.

$(2) \Leftrightarrow 0.x > 3 \Leftrightarrow$ vô nghiệm.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 3: Nếu $m \neq \pm 1$ thì để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m+3}{m+1} = \dfrac{m+2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow m = -5.$$

Vậy, với $m = -5$, hai bất phương trình tương đương với nhau.

Dạng toán 3: Dấu nhị thức trên một miền

Phương pháp áp dụng

Với f(x) = ax + b ta lưu ý các kết quả quan trọng sau:

1. $f(x) \ge 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$ và $f(x) \le 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \le 0 \end{cases}$.
2. $f(x) \ge 0, \forall x \ge \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ f(\alpha) \ge 0 \end{cases}$ và $f(x) \le 0, \forall x \ge \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0 \\ f(\alpha) \le 0 \end{cases}$.
3. $f(x) \ge 0, \forall x \le \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0 \\ f(\alpha) \ge 0 \end{cases}$ và $f(x) \le 0, \forall x \le \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ f(\alpha) \le 0 \end{cases}$.
4. $f(x) \ge 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \ge 0 \\ f(\beta) \ge 0 \end{cases}$ và $f(x) \le 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \le 0 \\ f(\beta) \le 0 \end{cases}$

Thí dụ 1. *Cho bất phương trình* $(m + 1)x - m + 2 > 0$.

Tìm m *để bất phương trình:*

a. *Nghiệm đúng với mọi* x.
b. *Nghiệm đúng với mọi* $x \ge 2$.
c. *Nghiệm đúng với mọi* $x < 1$.
d. *Nghiệm đúng với mọi* $x \in [1; 3]$.

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$f(x) = (m + 1)x - m + 2 > 0. \qquad (1)$$

a. Để (1) có nghiệm đúng với mọi x:

$$\begin{cases} m + 1 = 0 \\ -m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy, với $m = -1$ bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

b. Để (1) có nghiệm đúng với mọi $x \ge 2$:

$$\begin{cases} m + 1 \ge 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \ge 0 \\ m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge -1.$$

Vậy, với $m \ge -1$ bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \ge 2$.

c. Để (1) có nghiệm đúng với mọi $x < 1$:

$$\begin{cases} m + 1 \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \le 0 \\ 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$$

Vậy, với $m \ge -1$ bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x < 1$.

d. Để (1) có nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$:

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{5}{3}.$$

Vậy, với $m > -\frac{5}{3}$ bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$.

Dạng toán 4: Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp áp dụng

Việc sử dụng dấu nhị thức bậc nhất để giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối được gọi là *phương pháp chia khoảng*. Với các phương trình, bất phương trình dạng:

$$P(x) = 0,\ P(x) > 0,\ P(x) < 0,\ P(x) \ge 0,\ P(x) \le 0,$$

trong đó $P(x) = k_1|A_1| + k_2|A_2| + \ldots + k_n|A_n|$ và dấu của các A_i, $i = \overline{1,n}$ được xác định thông qua dấu của những nhị thức bậc nhất, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình, bất phương trình.

Bước 2: Lập bảng xét dấu các biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối A_i, $i = \overline{1,n}$ từ đó chia trục số thành những khoảng sao cho trong mỗi khoảng đó các biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối chỉ nhận một dấu xác định.

Bước 3: Giải (hoặc biện luận) phương trình, bất phương trình trên mỗi khoảng đã chia.

Bước 4: Kết luận.

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình*:

a. $|2x - 5| \le x + 1$. b. $|2x - 4| \ge x + 1$.

✍ *Giải*

a. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ -(x+1) \le 2x-5 \le x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \dfrac{4}{3} \le x \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \le x \le 6.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\dfrac{4}{3} \le x \le 6$.

b. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-4 \ge x+1 \\ 2x-4 \le -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le 1 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm thuộc $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$$

$$\text{hoặc } \left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f^2(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(chia khoảng).}$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f^2(x) < g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{(chia khoảng).}$$

Thí dụ 2. *Giải phương trình*:

a. $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6} \ge 3$. b. $\dfrac{3}{|x-4|-1} = |x+3|$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>0 \\ \dfrac{1}{x-3} \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ \dfrac{1}{3-x} \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{10-3x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ \dfrac{3x-8}{3-x} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 < x \le \frac{10}{3}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $3 < x \le \dfrac{10}{3}$.

b. Điều kiện:

$$|x-4| - 1 \ne 0 \Leftrightarrow |x-4| \ne 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \ne 1 \\ x-4 \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 5 \\ x \ne 3 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x + 3$ và $x - 4$:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	

Trường hợp 1: Với $x \le -3$, phương trình có dạng:

$$\frac{3}{-x+4-1} = -x-3 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = -x-3 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{3} \text{ (l)} \\ x = -2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Với $-3 < x < 4$, phương trình có dạng:

$$\frac{3}{-x+4-1} = x+3 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = x+3 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Trường hợp 3: Với $x \ge 4$, phương trình có dạng:

$$\frac{3}{x-4-1} = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{19}\ (l) \\ x = 1 + \sqrt{19} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là $x = -2\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{6}$ và $x = 1 + \sqrt{19}$.

☞ ***Chú ý***: Nhiều bài toán dựa trên điều kiện có nghĩa của phương trình ta khử được dấu trị tuyệt đối. Xét ví dụ sau:

Thí dụ 3. *Giải bất phương trình*:

$$\sqrt{x^2 - |x|} < x. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - |x| < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

Thí dụ 4. *Giải và biện luận bất phương trình* $|2x - 1| \ge x + m$.

✍ *Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 \ge x + m \\ 2x - 1 \le -(x + m) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge m + 1 \\ x \le \dfrac{1-m}{3} \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: Nếu $m + 1 \le \frac{1-m}{3} \Leftrightarrow m \le -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình có nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: Nếu $m + 1 > \frac{1-m}{3} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$

Bất phương trình có nghiệm là $(-\infty; \frac{1-m}{3}) \cup (m + 1; +\infty)$.

§5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Dạng toán 1: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Thí dụ 1. *Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau*:

a. $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$. b. $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Ta có:

$$-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x) \Leftrightarrow x + 2y - 4 < 0 \quad (1)$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

- Vẽ đường thẳng Δ: $x + 2y - 4 = 0$.
- Thay O(0; 0) vào (1), ta có: nửa mặt phẳng bờ Δ chứa O là tập nghiệm của bất đẳng thức ban đầu.

b. Ta có:

$$3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3 \Leftrightarrow x - 2y + 4 > 0 \quad (2)$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

- Vẽ đường thẳng Δ: $x - 2y + 4 = 0$.
- Thay O(0; 0) vào (2), ta có: nửa mặt phẳng bờ Δ chứa O là tập nghiệm của bất đẳng thức ban đầu.

Dạng toán 2: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Thí dụ 1. *Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:*

a. $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Kí hiệu các bất phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2) và (3), ta thực hiện theo các bước sau:

- Vẽ chung trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy các đường thẳng (Δ_1): $x - 2y = 0$; (Δ_2): $x + 2y + 2 = 0$ và (Δ_1): $y - x = 0$.
- Miền nghiệm của (1) là nửa mặt phẳng bờ (Δ_1) chứa A(0; 1).
- Miền nghiệm của (2) là nửa mặt phẳng bờ (Δ_2) chứa O(0; 0).
- Miền nghiệm của (3) là nửa mặt phẳng bờ (Δ_3) chứa O(0; 0).

Tóm lại, miền nghiệm của hệ là miền không gạch chéo.

b. Kí hiệu các bất phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2) và (3), ta thực hiện theo các bước sau:

- Vẽ chung trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy các đường thẳng (Δ_1): $2x + 3y - 6 = 0$; (Δ_2): $x = 0$ và (Δ_3): $2x - 3y - 1 = 0$.
- Miền nghiệm của (1) là nửa mặt phẳng bờ (Δ_1) chứa O(0; 0).
- Miền nghiệm của (2) là nửa mặt phẳng bờ Oy không chứa A(–1; 0).
- Miền nghiệm của (3) là nửa mặt phẳng bờ (Δ_3) chứa O(0; 0).

Tóm lại, miền nghiệm của hệ là miền không gạch chéo, kể cả đoạn nối hai điểm $(0; -\frac{1}{3})$ và (0; 2).

<u>Dạng toán 3:</u> Bài toán tìm phương án tối ưu

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Sử dụng hai ẩn phụ x, y để:

- Thiết lập các điều kiện cho bài toán, từ đó nhận được một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (gọi là (I)).
- Hàm tối ưu $F = f(x, y)$.

Bước 2: Xác định miền đa giác $A_1A_2...A_n$ thoả mãn hệ (I).

Bước 3: Tính các giá trị $F_1, F_2, ..., F_n$ của hàm F tại các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$.

Bước 4: Khi đó:

- $F_{max} = \max\{ F_1, F_2, ..., F_n \}$. $F_{min} = \min\{ F_1, F_2, ..., F_n \}$.

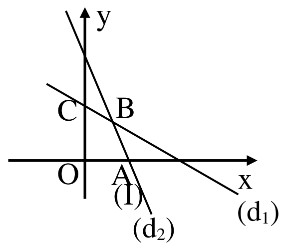
<u>Thí dụ 1.</u> *Một xưởng sản xuất hai loại hàng. Mỗi sản phẩm loại* I *cần* 2l *nguyên liệu và* 30h, *đem lại lợi nhuận là* 4000đ *cho mỗi đơn vị. Mỗi sản phẩm loại* II *cần* 4l *nguyên liệu và* 15h, *đem lại lợi nhuận là* 3000đ *cho mỗi đơn vị. Xưởng có* 200l *nguyên liệu và* 1200h *làm việc. Hỏi sản xuất mỗi loại hàng bao nhiêu để mức lợi nhuận cao nhất.*

✍ *Giải*

Với hai ẩn x, y được thiết lập như sau:

- x là số hàng loại I phải sản xuất.
- y là số hàng loại II phải sản xuất.

Ta có các điều kiện sau:



$$\begin{cases} 2x + 4y \le 200 \\ 30x + 15y \le 1200 \\ x \ge 0, x \text{ nguyên} \\ y \ge 0, y \text{ nguyên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \le 100 & (1) \\ 2x + y \le 80 & (2) \\ x \ge 0, x \text{ nguyên} & (3) \\ y \ge 0, y \text{ nguyên} & (4) \end{cases}$$

Và khi đó, mức lợi nhuận thu được là $F = 4000x + 3000y$.

Để giải (I) ta lần lượt vẽ các đường thẳng:

- (d_1): $x + 2y - 100 = 0$ và nhận thấy miền nghiệm của (1) là phần mặt phẳng (kể cả bờ (d_1)) ở phía dưới đường thẳng (d_1).
- (d_2): $2x + y - 80 = 0$ và nhận thấy miền nghiệm của (2) là phần mặt phẳng (kể cả bờ (d_2)) ở phía dưới đường thẳng (d_2).
- Miền nghiệm của (3) là phần mặt ở phía bên phải trục Oy.
- Miền nghiệm của (4) là phần mặt ở phía trên trục Ox.

Vậy, nghiệm của hệ (I) là phần mặt phẳng trong tứ giác OABC (kể các các cạnh).

Ta có:

$A(40; 0) \Rightarrow F_A = 160000$; $B(20, 40) \Rightarrow F_B = 200000$;

$C(0; 50) \Rightarrow F_C = 150000$; $O(0, 0) \Rightarrow F_O = 0$.

Khi đó:

$F_{Max} = \max\{ F_A, F_B, F_C, F_O\} = 200000$,

đạt được khi $x = 20$ và $y = 40$.

Vậy, để mức lợi nhuận cao nhất cần sản xuất 20 hàng loại I và 40 hàng loại II.

Thí dụ 2. *Có ba nhóm máy* A, B, C *dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm* I *và* II. *Để sản xuất một đơn vị các sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau*:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm loại I *lãi* 3000 *đồng, một đơn vị sản phẩm loại* II *lãi* 5000 *đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất để cho tổng tiền lãi cao nhất.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Gọi x, y là số đơn vị sản phẩm thuộc loại I và loại II (x, y nguyên dương).

Theo đề bài, ta có:

$2x + 2y \le 10 \Leftrightarrow x + y \le 5$ (1)

$2y \le 4 \Leftrightarrow y \le 2$ (2)

$2x + 4y \le 12 \Leftrightarrow x + 2y \le 6$ (3)

$x \ge 0$ (4)

$y \ge 0$ (5)

Giải hệ 5 bất phương trình trên, ta được miền nghiệm của hệ là hình tứ giác OABCD có đỉnh O(0; 0), A(0; 2), B(2; 2), C(3; 0), D(5; 0).

Suy ra, $3x + 5y$ có giá trị:

- 10 tại đỉnh A(0; 2).
- 16 tại đỉnh B(2; –2).
- 17 tại đỉnh C(4; 1).
- 15 tại đỉnh D(5; 0).

Do đó, ta được $3x + 5y$ lớn nhất khi $x = 4$ và $y = 1$.

Vậy, tổng số tiền lãi cao nhất là 17000 đồng.

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Dạng toán 1: Xét dấu các biểu thức

Thí dụ 1. *Xét dấu các biểu thức*:

a. $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$. b. $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$.

c. $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$.

Giải

a. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$1/3$		$5/4$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		+	0	–		–	0	+	
$4x-5$		–		–	0	+		+	
$f(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

Vậy, ta được:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{5}{4}$ hoặc $x > 3$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = \frac{5}{4}$ hoặc $x = 3$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ hoặc $\frac{5}{4} < x < 3$.

b. Ta có $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) = x(3x - 4)(2x^2 - x - 1)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-1/2$		0		1		$4/3$		$+\infty$
x		–		–	0	+		+		+	
$3x-4$		–		–		–		–	0	+	
$2x^2-x-1$		+	0	–		–	0	+		+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Vậy, ta được:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ hoặc $0 < x < 1$ hoặc $x > \frac{4}{3}$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \frac{4}{3}$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$ hoặc $1 < x < \frac{4}{3}$.

c. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-9/2$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2-1$		+		+	0	–	0	+	
$8x^2+x-3$		–		–		–		–	
$2x+9$		–	0	+		+		+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

Vậy, ta được:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{9}{2}$ hoặc $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$ hoặc $x = \pm\frac{1}{2}$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{2}$ hoặc $x > \frac{1}{2}$.

Thí dụ 2. *Xét dấu biểu thức* $f(x) = mx^2 - 2(m-2)x + m - 3$.

Giải

a. Ta xét ba khả năng của m

Khả năng 1: Với m = 0, suy ra:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		3/4		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	

Khả năng 2: Với m > 0 ta có:

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m.$$

Khi đó, ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$, suy ra:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \text{ và } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$, suy ra:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m} \text{ và } x_2 = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}.$$

Khi đó, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	$-$	0	+	

Trường hợp 3: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$, suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khả năng 3: Với m < 0 thì $\Delta' > 4$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
f(x)		$-$	0	+	0	$-$	

Dạng toán 1: Giải bất phương trình bậc hai

Thí dụ 1. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $3x^2 - x - 2 \le 0$. b. $x^2 - 9x + 14 > 0$.

Giải

a Ta có ngay:

$$3x^2 - x - 2 \le 0 \underset{x_1=1 \text{ và } x_2=-\frac{2}{3}}{\overset{3x^2-x-2=0 \text{ có 2 nghiệm}}{\Leftrightarrow}} -\frac{2}{3} \le x \le 1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-\frac{2}{3}; 1]$.

b Ta có ngay:

$$x^2 - 9x + 14 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 7 \\ x < 2 \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là T = $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$.

Thí dụ 2. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $-2x^2 + x + 1 \le 0$.
b. $-x^2 + 6x - 14 > 0$.
c. $4x^2 - 12x + 10 < 0$.
d. $x^2 + 2x + 1 \le 0$.

✍ *Giải*

a Ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$2x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1/2 \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là T = $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

☞ ***Lưu ý***: Như vậy, để tránh nhầm lẫn ta luôn chuyển bất phương trình về dạng có hệ số a dương.

b Ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x^2 - 6x + 14 > 0 \overset{\Delta'=-5<0}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là T = $\mathbb{R}$.

c Ta có:

$\Delta' = 36 - 40 = -4 < 0 \Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là T = $\varnothing$.

d Ta có biến đổi:

$$(x + 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là T = $\{-1\}$.

☞ ***Chú ý***: Với bài toán "*Giải và biện luận bất phương trình bậc hai*" ta thực hiện như sau:

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu a = 0 (nếu có).

Trường hợp 2: Nếu a ≠ 0, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính Δ (hoặc Δ') rồi lập bảng xét dấu chung cho a và Δ (hoặc Δ').

Bước 2: Dựa vào bảng ta xét các trường hợp xảy ra.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 3. *Giải và biện luận các bất phương trình*:

a. $x^2 + 2x + 6m > 0$.
b. $12x^2 + 2(m + 3)x + m \le 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có $\Delta' = 1 - 6m$. Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{6}$.

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\} \Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Trường hợp 3: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$.

Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = -1 - \sqrt{1-6m} \text{ và } x_2 = -1 + \sqrt{1-6m}.$$

Dễ thấy, $x_1 < x_2$ do đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

$\Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Kết luận:

- Với $m > \frac{1}{6}$, nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m = \frac{1}{6}$, nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- Với $m < \frac{1}{6}$, nghiệm của bất phương trình là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Cách 2: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(x + 1)^2 > 1 - 6m.$$

Khi đó:

- Với $1 - 6m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{6}$, nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $1 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$, bất phương trình có dạng:

  $$(x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1.$$

  Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- Với $1 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$, bất phương trình có dạng:

  $$|x+1| > \sqrt{1-6m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 > \sqrt{1-6m} \\ x+1 < -\sqrt{1-6m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1+\sqrt{1-6m} \\ x < -1-\sqrt{1-6m} \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $\left(-\infty; -1-\sqrt{1-6m}\right) \cup \left(-1+\sqrt{1-6m}; +\infty\right)$.

b. Với $f(x) = 12x^2 + 2(m + 3)x + m$, ta có $a = 12$ và $\Delta' = (m - 3)^2 \geq 0$.

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 3$, suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, nghiệm của bất phương trình là $x = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 3$, suy ra:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \text{ và } x_2 = -\frac{m}{6}.$$

Xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m < 3$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-1/2$		$-m/6$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\frac{1}{2}; -\frac{m}{6})$.

Khả năng 2: Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m > 3$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-m/6$		$-1/2$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\frac{m}{6}; -\frac{1}{2})$.

Kết luận:

- Với $m = 3$, bất phương trình có tập nghiệm $T = \{-\frac{1}{2}\}$.
- Với $m < 3$, bất phương trình có tập nghiệm $T = (-\frac{1}{2}; -\frac{m}{6})$.
- Với $m > 3$, bất phương trình có tập nghiệm $T = (-\frac{m}{6}; -\frac{1}{2})$.

Thí dụ 4. *Giải và biện luận bất phương trình*:

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0. \quad (1)$$

Giải

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -4x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{4}.$$

Trường hợp 2: Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Ta có:

$a = m - 1$, $\Delta' = (m + 1)^2 - 3(m - 2)(m - 1) = -2m^2 + 11m - 5$.

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$		$1/2$		1		5		$+\infty$
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

- Với $m < 1/2$, ta có:

  $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

- Với $m = 1/2$, ta có:

  $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

- Với $1/2 < m < 1$, ta có $a < 0$ và $\Delta' > 0$.

  Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{m-1}$ & $x_2 = \dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{m-1}$.

  Trường hợp này $a < 0$ nên $x_2 < x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  $\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x_2 \le x \le x_1$.

- Với $1 < m < 5$, ta có $a > 0$ và $\Delta' > 0$.

  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

  Trường hợp này $a > 0$ nên $x_2 > x_1$ do đó:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  $\Rightarrow$ nghiệm của (1) là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

- Với $m = 5$, ta có:

  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \forall x \ne 3/2 \\ f(x) = 0 \text{ khi } x = 3/2 \end{cases} \Rightarrow$ nghiệm của (1) là $\forall x \ne \dfrac{3}{2}$.

- Với $m > 5$, ta có:

  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận:

- Với $m \le 1/2$, thì (1) vô nghiệm.
- Với $1/2 < m < 1$, nghiệm của (1) là $x_2 \le x \le x_1$.
- Với $1 < m < 5$, nghiệm của (1) là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.
- Với $m = 5$, nghiệm của (1) là $\forall x \ne \dfrac{3}{2}$.
- Với $m > 5$, thì (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thí dụ 5. *Cho phương trình*:

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0. \quad (1)$$

Tìm các giá trị của tham số m *để phương trình*:

a. *Vô nghiệm.* b. *Có nghiệm.*

c, *Có đúng một nghiệm.* d. *Có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

$(1) \Leftrightarrow 0.x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó:

a. Để (1) vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm khi $m < 1$ hoặc $m > 3$.

b. Để (1) có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi $1 \leq m \leq 3$.

c. Để (1) có đúng một nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = 3.$$

Vậy, bất phương trình có đúng một nghiệm khi $m \in \{1, 2, 3\}$.

d. Để (1) có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy, bất phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (1; 3)\backslash\{2\}$.

Thí dụ 6. *Cho phương trình*:

$$x^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Tìm các giá trị của tham số m *để phương trình*:

1. *Vô nghiệm.*
2. *Có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thoả mãn*:

   a. x_1, x_2 *trái dấu.* b. x_1, x_2 *cùng dấu.*

   c. x_1, x_2 *dương.* d. x_1, x_2 *không dương.*

✍ *Giải*

1. Để (1) vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - m + 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm khi $0 < m < 3$.

2. Ta lần lượt:

a. Để (1) có hai nghiệm trái dấu điều kiện là:

$$a.f(0) < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy, với $m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (1) có hai nghiệm cùng dấu điều kiện là:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 3m > 0\\ m - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m > 3\\ m < 0\end{array}\right.\\ m > 1\end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Vậy, với m > 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để (1) có hai nghiệm phân biệt dương ($0 < x_1 < x_2$) điều kiện là:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 3m > 0\\ m - 1 > 0\\ 1 - m > 0\end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Lưu ý***: Nếu biết nhận xét rằng S và P trái dấu thì khẳng định ngay vô nghiệm.

d. Để (1) có hai nghiệm phân biệt không dương ($x_1 < x_2 \le 0$) điều kiện là:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P \ge 0\\ S < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 3m > 0\\ m - 1 \ge 0\\ 1 - m < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m > 3 \text{ hoặc } m < 0\\ m \ge 1\\ m > 1\end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Vậy, với m > 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Dạng toán 2:</u> Giải bất phương trình tích hoặc chứa ẩn ở mẫu

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải các bất phương trình sau*:

a. $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} < 0.$ b. $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} > \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}.$ c. $\dfrac{x^3 - 9x}{2 - x} > 0.$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Từ đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$x^2 - 6x+8$		+		+	0	–	0	+	
$x - 1$		–	0	+		+		+	
VT		–	||	+	0	–	0	+	

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 4)$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \frac{x(x^2 - 9)}{2 - x}.$$

Ta có:

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$, $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Từ đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		0		2		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in (-3; 0) \cup (2; 3)$.

☞ ***Chú ý***: Với các yêu cầu trên, kể từ các thí dụ sau chúng ta bỏ qua bảng xét dấu (học sinh làm ra nháp).

Thí dụ 2. *Giải các bất phương trình sau*:

a. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 > 0$. b. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} > \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ và nhận thấy $x = -2$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, do đó biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(x + 2)(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{2-x}{x^2(x+1)} > \frac{1-2x}{x^2(x-3)} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{2-x}{x+1} > \frac{1-2x}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x+7)(x-1)}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-7		-1		0		1		3		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy, nghiệm của bất phương trình là:

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty).$$

Dạng toán 3: Dấu tam thức trên một miền

Phương pháp áp dụng

Cho tam thức:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

chúng ta có các kết quả sau:

1. $f(x) > 0$, với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$; $f(x) < 0$, với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
2. Trong trường hợp $\Delta > 0$ (tức phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$) thì:

$$a.f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (x_1; x_2).$$

$$a.f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 \\ \alpha > x_2 \end{array}\right., \text{ tức là } \left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \end{array}\right..$$

Thí dụ 1. *Cho tam thức*:

$$f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1.$$

Xác định m *để*:

a. $f(x) > 0$ *với* $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f(x) \le 0$ *trên một đoạn có độ dài bằng* $\sqrt{3}$.

c. $f(x) < 0$ *trên khoảng* (0; 2).

Giải

a. Để $f(x) \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (m+2)^2 - 8m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy, với $1 < m < 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để $f(x) \le 0$ trên một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{3}$ điều kiện là phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{3}$, tức là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 3 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 4.$$

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để $f(x) < 0$ trên khoảng (0; 2) điều kiện là phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < 2 < x_2$, tức là:

$$\begin{cases} a.f(0) < 0 \\ a.f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 1 < 0 \\ 6m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{8}.$$

Vậy, với $m > -\frac{1}{8}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Với các yêu cầu trong thí dụ trên, ta có phát biểu khác như sau:

a. Câu a) được chuyển thành:
   - "*Tìm* m *để bất phương trình* $x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 > 0$ *nghiệm đúng với mọi* x".
   - "*Tìm* m *để bất phương trình* $x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 \le 0$ *vô nghiệm*".

b. Câu b) được chuyển thành:
   - "*Tìm* m *để bất phương trình* $x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 \le 0$ *có tập nghiệm* T *có độ dài bằng* $\sqrt{3}$".

c. Câu c) được chuyển thành "*Tìm các giá trị của* m *để bất phương trình* $x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 < 0$ *nghiệm đúng với mọi* $x \in (0; 2)$".

Thí dụ 2. *Cho tam thức*:

$$f(x) = -x^2 + 4(m + 1)x + 1 - m^2.$$

Xác định m *để*:

a. $f(x) \le 0$ *với* $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f(x) > 0$ *trên một đoạn có độ dài bằng* 4.

c. $f(x) > 0$ *trên khoảng* (0; 1).

Giải

a. Để $f(x) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ điều kiện là:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ 4(m+1)^2 - 1 + m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5m^2 + 8m + 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le -\frac{3}{5}.$$

Vậy, với $-1 \le m \le -\frac{3}{5}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để $f(x) > 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 4 điều kiện là phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 4$, tức là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \sqrt{\Delta} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 3 \Leftrightarrow 5m^2 + 8m + 3 = 16 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{13}{5}.$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{13}{5}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để $f(x) > 0$ trên khoảng (0; 1) điều kiện là phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < 1 < x_2$, tức là:

$$\begin{cases} a.f(0) < 0 \\ a.f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\left(1 - m^2\right) < 0 \\ -1\left(-1 + 4m + 4 + 1 - m^2\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ m^2 - 4m - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} < m < 1.$$

Vậy, với $2 - 2\sqrt{2} < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. *Tìm* m *để bất phương trình sau có nghiệm*:

$$(m + 2)x^2 - 2mx - m + 2 < 0. \qquad (1)$$

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 4x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Bất phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Bất phương trình đã cho cũng có nghiệm (vì lúc đó tam thức ở vế trái luôn âm hoặc chỉ dương trên một khoảng hữu hạn).

Trường hợp 3: Với $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$. (*)

Khi đó, để bất phương trình đã cho có nghiệm thì tam thức ở vế trái phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} m > \sqrt{2} \\ -2 < m < -\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, với $|m| > \sqrt{2}$ thì bất phương trình có nghiệm.

Cách 2: Ta đi xét bài toán ngược là "*Tìm điều kiện để bất phương trình vô nghiệm*", tức là tìm điều kiện để:

$$(m + 2)x^2 - 2mx - m + 2 \geq 0 \text{ với mọi } x. \quad (2)$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Rightarrow \text{ không thoả mãn.}$$

Trường hợp 2: Với $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Khi đó, để (2) nghiệm đúng với mọi x điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ m^2 + (m-2)(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ m^2 - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \leq \sqrt{2}.$$

Vậy, với $|m| \leq \sqrt{2}$ thoả mãn (2), từ đó suy ra với $|m| > \sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng nội dung (2) đã được trình bày trong nội dung của dạng toán này.

Thí dụ 4. *Cho phương trình*:

$$x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0. \quad (1)$$

Xác định các giá trị của m để phương trình có:

a. Hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < 2 < x_2$.
b. Đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 2).
c. Hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng (0; 2).

✍ *Giải*

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < 2 < x_2$ điều kiện là:

$$\begin{cases} a.f(0) < 0 \\ a.f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 3 < 0 \\ 1 < 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình có đúng môt nghiệm thuộc khoảng (0; 2) điều kiện là (1) có:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Nghiệm kép thuộc } (0; 2) \\ x_1 \leq 0 < x_2 < 2 \\ 0 < x_1 < 2 \leq x_2 \end{array}\right. .$$

Ta lần lượt:

- Để (1) có nghiệm kép thuộc (0; 2) điều kiện là:

$$\begin{cases}\Delta' = 0\\ -\dfrac{b}{2a} \in (0;\, 2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4m + 3 > 0\\ 0 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m > 3\\ m < 1\end{array}\right.\\ 0 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1. \qquad (*)$$

- Để (1) có nghiệm thoả mãn $x_1 \le 0 < x_2 < 2$ hoặc $0 < x_1 < 2 \le x_2$, suy ra:

$$f(0).f(2) \le 0 \;(4m - 3).1 \le 0 \Leftrightarrow m \le \frac{3}{4}. \qquad (**)$$

Thử lại: với $m = \dfrac{3}{4}$, phương trình (1) có dạng:

$$2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{3}{2} - \text{thoả mãn điều kiện.}$$

Kết hợp (*) và (**) suy ra với $m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng (0; 2) điều kiện là:

$$0 < x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ af(0) > 0\\ af(2) > 0\\ 0 < \dfrac{S}{2} < 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4m + 3 > 0\\ 4m - 3 > 0\\ 1 > 0\\ 0 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m < 1.$$

Vậy, với $\dfrac{3}{4} < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Giải hệ bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp áp dụng

Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

Thí dụ 1. *Giải hệ bất phương trình*:

$$\begin{cases}4x + 3 > 0\\ 2x^2 + 5x + 3 \le 0\end{cases}.$$

✍ *Giải*

Hệ bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x > -\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{3}{2} \le x \le -1\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x \le -1.$$

Vậy, tập nghiệm của hệ bất phương trình là $T = (-\dfrac{4}{3};\, -1]$.

Thí dụ 2. *Xác định* m *sao cho với mọi* x *ta đều có*:

$$9 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 6. \qquad (*)$$

Giải

Vì $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x$, nên ta biến đổi tương đương về dạng:

$$\begin{cases} 12x^2 - (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 + (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}.$$

Khi đó, để (*) đúng với mọi x điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 4.3.12 < 0 \\ (m+6)^2 - 4.3.12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 21 \\ -18 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Vậy, với $-3 < m < 6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. *Tìm* m *để hệ sau có nghiệm duy nhất*:

$$\begin{cases} x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - m = 0 & (1) \\ x^2 - 3x + 2 < 0 & (2) \end{cases}.$$

Giải

Giải (2) ta được $1 < x < 2$.

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 5m + 6$.

Hệ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm thuộc (1; 2), ta xét:

- (1) có nghiệm kép thuộc (1; 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} \in (1,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 = 0 \\ 1 < \dfrac{4m-1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ 3 < 4m < 5 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

- (1) có nghiệm thoả mãn $x_1 = 1 < x_2 < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ S - 1 \in (1,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 5m + 2 = 0 \\ 1 < 4m - 1 - 1 < 2 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

- (1) có nghiệm thoả mãn $1 < x_1 < 2 = x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ S - 2 \in (1,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 9m + 6 = 0 \\ 1 < 4m - 1 - 2 < 2 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

- (1) có đúng một nghiệm thuộc (1, 2)

$$\Leftrightarrow f(1).f(2) < 0 \Leftrightarrow (3m^2 - 5m + 2)(3m^2 - 9m + 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{2}{3} < m < 2 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (\frac{2}{3}; 2) \backslash \{1\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Từ việc nhận thấy $\Delta_{(1)}$ là một số chính phương nên có thể thực hiện ví dụ theo cách:

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = m\\ x = 3m-1\end{array}\right.\\ 1 < x < 2\end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Từ đó, hệ ban đầu có nghiệm duy nhất:

$$\Leftrightarrow \text{(I) có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 < m < 2\\ \left[\begin{array}{l}f(3m-1) \ge 0\\ 3m-1 = m\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}1 < 3m-1 < 2\\ \left[\begin{array}{l}f(m) \ge 0\\ m = 3m-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}m \ne 1\\ \dfrac{2}{3} < m < 2\end{cases}.$$

Thí dụ 4. *Cho hệ bất phương trình*:

$$\begin{cases}x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0 & (1)\\ x^2 + 2(m-1)x - 2m + 1 = 0 & (2)\end{cases}.$$

a. *Tìm* m *để hệ có hai nghiệm âm.*
b. *Tìm* m *để hệ có nghiệm duy nhất.*

✍ *Giải*

Trước tiên:

- Biến đổi (1) về dạng:

  $(x - 2)(x^2 - x - 12) < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4)(x + 3) < 0$

  $\Leftrightarrow x \in T = (-3; 2) \cup (4; +\infty)$.

- Biến đổi (2) về dạng:

  $(x - 1)(x + 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = 1 - 2m$.

a. Ta thấy ngay hệ không thể có hai nghiệm âm.
b. Để hệ có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$x_2 \notin T \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 - 2m \le -3\\ 2 \le 1 - 2m \le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \ge 2\\ -\dfrac{3}{2} \le m \le -\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Thí dụ 5. *Tìm* m *để hệ bất phương trình sau có nghiệm*:

$$\begin{cases}x^2 - 3x - 10 \le 0\\ mx + m - 2 > 0\end{cases}.$$

✍ *Giải*

Kí hiệu các bất phương trình trong hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Giải (1) ta được $-5 \le x \le 2$.

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m < 0$ thì nghiệm của (2) là $x < \frac{2-m}{m}$.

Khi đó, điều kiện để hệ có nghiệm là:

$$-5 \le \frac{2-m}{m} \overset{m<0}{\Leftrightarrow} -5m \ge 2 - m \Leftrightarrow m \le -\frac{1}{2}.$$

Trường hợp 2: Nếu $m = 0$ thì (2) có dạng $-2 > 0$, mâu thuẫn.

Trường hợp 3: Nếu $m > 0$ thì nghiệm của (2) là $x > \frac{2-m}{m}$.

Khi đó, điều kiện để hệ có nghiệm là:

$$\frac{2-m}{m} \le 2 \overset{m<0}{\Leftrightarrow} 2 - m \le 2m \Leftrightarrow m \ge \frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m \le -\frac{1}{2}$ hoặc $m \ge \frac{2}{3}$ hệ có nghiệm.

Dạng toán 5: Sử dụng dấu tam thức bậc hai chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 1. *Cho* $b > c > d$. *Chứng minh rằng với mọi* a *ta luôn có*:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd). \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (a + b + c + d)^2 - 8(ac + bd) > 0$$

Viết lại vế trái của bất đẳng thức trên dưới dạng một tam thức bậc hai theo biến số a:

$$f(a) = a^2 + 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd.$$

Ta có:

$$\Delta' = (b - 3c + d)^2 - [(b + c + d)^2 - 8bd] = 8(b - c)(d - c).$$

Vì $b > c > d \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(a) > 0$ với mọi a.

Thí dụ 2. *Cho* ABC *là một tam giác bất kỳ. Chứng minh rằng với mọi số* x *ta đều có* $1 + \frac{1}{2}x^2 \ge \cos A + x(\cos B + \cos C)$.

Giải

Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2 - 2\cos A \ge 0. \qquad (1)$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2 - 2\cos A$, ta có:

$$\Delta' = (\cos B + \cos C)^2 - (2 - 2\cos A) = 4\cos^2\frac{B+C}{2}.\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{A}{2}\left[\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right] \le 0.$$

Vậy, ta được $f(x) \ge 0, \forall x$, do đó (1) luôn đúng.

§ 7. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

Dạng toán 1: Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Thí dụ 1. *Giải phương trình* $|x^2 - x| + |2x - 4| = 3$. (1)

✍ *Giải*

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - x$ và $2x - 4$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	–	|	+	|	+	
$2x - 4$		–	|	–	|	–	0	+	

Trường hợp 1: Với $x \le 0$ hoặc $1 \le x \le 2$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \text{ (loại).}$$

Trường hợp 2: Với $0 < x < 1$, phương trình có dạng:

$$-(x^2 - x) - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \overset{0<x<1}{\Leftrightarrow} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 3: Với $x \ge 2$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x + 2x - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \overset{x\ge 2}{\Leftrightarrow} x = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và $x = \frac{\sqrt{29}-1}{2}$.

Thí dụ 2. *Giải bất phương trình* $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \ge 1$. (1)

✍ *Giải*

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - 4x$ và $x - 5$:

x	$-\infty$		0		4		5		$+\infty$
$x^2 - 4x$		+	0	–	0	+	|	+	
$x - 5$		–	|	–	|	–	0	+	

Trường hợp 1: Với $x \le 0$ hoặc $4 \le x \le 5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 5} \ge 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2: Với $0 < x < 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + 3}{x^2 - x + 5} \ge 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2.$$

Trường hợp 3: Với x > 5

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 5} \geq 1 \Leftrightarrow 5x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{5} \text{ loại.}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; -\frac{2}{3}) \cup [\frac{1}{2} ; 2]$

Thí dụ 3. *Giải bất phương trình* $|x - 5| - x^2 + 7x - 9 \geq 0$. (1)

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 14 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq x \leq 4 + \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{5} \leq x < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $3 - \sqrt{5} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}$.

☞ ***Chú ý***: Bài toán trên có thể giải bằng định nghĩa, như sau:

$$(1) \Leftrightarrow |x - 5| \geq x^2 - 7x + 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 \geq x^2 - 7x + 9 \\ x - 5 \leq -x^2 + 7x - 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 14 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 4 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 + \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 3 + \sqrt{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}.$$

Thí dụ 4. *Giải bất phương trình*:

$$|x^2 - 4x + 2| - \frac{3}{|x^2 - 4x + 2| - 2} \leq 0.$$

✍ *Giải*

Đặt $t = |x^2 - 4x + 2|$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t - \frac{3}{t-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 2} \leq 0 \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 < t \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 4x + 2| > 2 \\ |x^2 - 4x + 2| \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 > 2 \\ x^2 - 4x + 2 < -2 \end{array}\right. \\ -3 \leq x^2 - 4x + 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 2 + \sqrt{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $(4, 2 + \sqrt{5}]$.

Thí dụ 5. *Giải bất phương trình*:

$$|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < 2x + 1. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$|2x^2 - 3x + 1| - |2x^2 - 5x| < |(2x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 5x)|$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 5x)(2x + 1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1/2 \\ 0 < x < 5/2 \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$.

Thí dụ 6. *Cho bất phương trình*:

$$(2x - 1)^2 - 3|2x - 1| + m \le 0. \qquad (1)$$

a. *Giải bất phương trình với* m = 2.

b. *Tìm* m *để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn* [1; 2].

✍ *Giải*

Đặt t = |2x − 1|, điều kiện t ≥ 0.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - 3t + m \le 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$t^2 - 3t + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2 \Leftrightarrow 1 \le |2x - 1| \le 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le 2x - 1 \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 1 \ge 1 \\ 2x - 1 \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 2 bất phương trình có tập nghiệm là $[-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; \frac{3}{2}]$.

b. Với 1 ≤ x ≤ 2, ta được:

$$1 \le 2x - 1 \le 3 \Rightarrow 1 \le |2x - 1| \le 3 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3.$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn [1; 2] điều kiện là phương trình f(t) = 0 có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1 \le 1 < 3 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) \le 0 \\ af(3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + m \le 0 \\ m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0.$$

Vậy, với m ≤ 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 7. *Cho bất phương trình*:

$$2|x| + |1 - x^2| \le m(x^2 + 1). \qquad (1)$$

a. *Giải bất phương trình với* m = 2.

b. *Tìm* m *để bất phương trình vô nghiệm.*

✍ *Giải*

Chia hai vế của bất phương trình cho $x^2 + 1 \neq 0$, ta được:

$$\frac{2|x|}{x^2+1} + \frac{|1-x^2|}{x^2+1} \le m \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| + \left|\frac{1-x^2}{x^2+1}\right| \le m.$$

Đặt $x = \tan\frac{t}{2}$, với $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$.

Khi đó bất phương trình được biến đổi tiếp về dạng:

$|\sin t| + |\cos t| \le m.$ (2)

a. Với m = 2, ta có nhận xét ngay (2) luôn đúng.
Vậy, với m = 2 bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Để bất phương trình vô nghiệm:
$m < \text{Min}(|\sin t| + |\cos t|) = 1.$
Vậy, với m < 1 bất phương trình vô nghiệm.

Dạng toán 2: Phương trình, bất phương trình chứa căn

Thí dụ 1. *Giải bất phương trình* $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$ (1)

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} 1-4x^2 \ge 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 0 < x \le \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Cách 1: Thực hiện phép nhân liên hợp, ta biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{1-4x^2})(1+\sqrt{1-4x^2})}{x} < 3(1+\sqrt{1-4x^2})$$

$$\Leftrightarrow 4x < 3 + 3\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2} > 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-3<0 \\ 1-4x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-3 \ge 0 \\ 9(1-4x^2) > (4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3/4 \\ |x| < 1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3/4 \\ 9(1-4x^2) > (4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\xleftrightarrow{x\neq 0} x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0. \frac{1}{2}].$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$.

Cách 2: Xét hai trường hợp dựa trên điều kiện.

- Với $-\frac{1}{2} \le x < 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} < 1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 0 \\ 1-4x^2 < (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $-\frac{1}{2} \le x < 0$.

- Với $0 < x \le \frac{1}{2}$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} > 1-3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-3x < 0 \\ 1-4x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-3x \ge 0 \\ 1-4x^2 > (1-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1/3 \\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1/3 \\ 13x^2 - 6x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ 0 < x \le \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$.

Thí dụ 2. *Giải bất phương trình* $(x-1)\sqrt{2x-1} \le 3(x-1)$.

Giải

Điều kiện:

$$2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \ge 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2+1)$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1]t \le 3[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1] \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + 3 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-1)(t-3) \le 0$$

$\Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x-1} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ thoả mãn (*).

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 5$.

Chú ý: Ta không thể bình phương hai vế của bất phương trình ban đầu vì chưa khẳng định được dấu của hai vế.

Hoàn toàn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương để thực hiện thí dụ trên, cụ thể:

$$(x-1)(\sqrt{2x-1} - 3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ \sqrt{2x-1}-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\ \sqrt{2x-1}-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ \sqrt{2x-1}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ \sqrt{2x-1}\ge 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ 0\le 2x-1\le 9\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ 2x-1\ge 9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x\le 5.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 5$.

Thí dụ 3. *Giải bất phương trình* $x + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}$. (1)

✍ *Giải*

Điều kiện:

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |x| > 2$. (*)

Trường hợp 1: Với $x < -2$ thì bất phương trình vô nghiệm (do vế trái âm).

Trường hợp 2: Với $x > 2$ thì bình phương 2 vế phương trình (1) ta được:

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2-4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-4} + 4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45. \quad (2)$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>5\\ t<-9\end{array}\right. \Rightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2>20\\ x^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|>\sqrt{20}\\ |x|<\sqrt{5}\end{array}\right..$$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$(-\infty; -\sqrt{20}) \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{20}; +\infty)$.

☞ ***Chú ý***: Nhiều bất phương trình ở dạng ban đầu không thấy có dấu hiệu cho phép lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ khi đó thông thường bằng một vài phép biến đổi tương đương ta sẽ thấy sự xuất hiện của ẩn phụ.

Thí dụ 4. *Giải bất phương trình* $\sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x-1}$. (1)

✍ *Giải*

Điều kiện $x \ge 0$. (*)

Ta có:

$$(1) \xleftrightarrow{x>0 \to 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > (1+\sqrt[3]{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2 \Leftrightarrow x - 1 - (\sqrt[3]{x-1})^2 - 2\sqrt[3]{x-1} > 0. \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 2) > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) > 0 \xleftrightarrow{t+1>0} t(t-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 > 8 \\ x-1 < 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Hãy so sánh* $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{a+6}$, *với* $a \ge 0$.

Giải

Giả sử:

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} \le \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4})^2 \le (\sqrt{a} + \sqrt{a+6})^2$$
$$\Leftrightarrow a + 2 + a + 4 + 2\sqrt{a+2}.\sqrt{a+4} \le a + a + 6 + 2\sqrt{a}.\sqrt{a+6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a+2}.\sqrt{a+4} \le \sqrt{a}.\sqrt{a+6}$$
$$\Leftrightarrow (a+2)(a+4) \le a(a+6) \Leftrightarrow a^2 + 6a + 8 \le a^2 + 6a \Leftrightarrow 8 \le 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy, ta được $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} \ge \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$ $(a \ge 0)$.

Ví dụ 2: *Cho* $a, b, c \ge 0$. *Chứng minh rằng* $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a + b + c)$.

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta nhận xét rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}(b^4 + c^4) + \frac{1}{2}(c^4 + a^4) \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$
$$= \frac{1}{2}a^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}b^2(c^2 + a^2) + \frac{1}{2}c^2(a^2 + b^2)$$
$$\ge a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a + b + c).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3: *Cho* $a, b, c \in (0; 1)$, *chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:*

$$a(1-b) > \frac{1}{4},\ \ b(1-c) > \frac{1}{4},\ \ c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Giải

Giả sử trái lại cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó nhân theo vế ba bất đẳng thức ta được:

$$a(1-b).b(1-c).c(1-a) > \frac{1}{64} \Leftrightarrow a(1-a).b(1-b).c(1-c) > \frac{1}{64}. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - (a + \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4},$$

tương tự $b(1-b) \le \frac{1}{4}$ và $c(1-c) \le \frac{1}{4}$, do đó:

$$a(1-a).b(1-b).c(1-c) \le \frac{1}{64}$$, tức là (*) sai.

Ví dụ 4: *Giả sử* a, b, c *là ba số dương sao cho*:

$$ax + b(1-x) > cx(1-x)$$

với mọi giá trị của x. *Chứng minh rằng khi đó, với mọi giá trị của* x *ta cũng có*:

$$ax + c(1-x) > bx(1-x) \text{ và } bx + c(1-x) > ax(1-x).$$

✍ *Giải*

Đặt:

$$f(x) = ax + b(1-x) - cx(1-x) = cx^2 + (a-b-c)x + b,$$
$$g(x) = ax + c(1-x) - bx(1-x) = bx^2 + (a-b-c)x + c,$$
$$hx) = bx + c(1-x) - ax(1-x) = ax^2 + (b-a-c)x + c.$$

Nhận xét rằng f(x), g(x), h(x) có cùng biệt số $\Delta = (b-a-c)^2 - 4ac$.

Vì $f(x) > 0, \forall x$, nên $\Delta < 0$, từ đó suy ra $g(x) > 0$ và $h(x) > 0$ với $\forall x$.

Ví dụ 5: *Cho các số thực* x, y, z > 0. *Chứng minh bất đẳng thức*:

$$16xyz(x+y+z) \le 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)xy + yz(x+y+z) + xz^2 + zx^2$$

Vì x, y, z > 0 nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 8 số dương:

3 số $\frac{1}{3}xy(x+y+z)$, 3 số $\frac{1}{3}yz(x+y+z)$, xz^2 và zx^2,

ta được:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8\sqrt[8]{\frac{(xyz)^2(x+y+z)^6}{3^6}} = 8\sqrt[4]{\frac{(xyz)^3(x+y+z)^3}{27}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4} \ge 16xyz(x+y+z), \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{3}xy(x+y+z) = \frac{1}{3}yz(x+y+z) = xz^2 = zx^2 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ví dụ 6: *Cho các số dương* a, b, c *thỏa mãn* abc = 1. *Chứng minh rằng*:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \ge \frac{3}{4}.$$

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3(1+b)(1+c)}{(1+b)(1+c)64}} = \frac{3a}{4}$$

Tương tự:

$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \frac{3b}{4};$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3c}{4}.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{3}{4} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Vì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$, do đó:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 7: *Chứng minh rằng*:

$$\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$$

trong đó a, b, c *là các số thực dương thỏa mãn* $a + b + c = 6$.

✍ *Giải*

Đặt $A = \left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right)$, ta có:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) + \left(\frac{1}{a^3b^3}+\frac{1}{b^3c^3}+\frac{1}{a^3c^3}\right) + \frac{1}{a^3b^3c^3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{abc}; \qquad \frac{1}{a^3b^3}+\frac{1}{b^3c^3}+\frac{1}{a^3c^3} \geq \frac{3}{a^2b^2c^2}.$$

Thay vào A, ta được:

$$A \geq 1 + \frac{3}{abc} + \frac{3}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^3b^3c^3} = \left(1+\frac{1}{abc}\right)^3.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức cô — si, ta có:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8, \text{ hay } \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{8}.$$

Suy ra:

$$A \ge \left(1+\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 2.

Ví dụ 8: *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác*, p *là một nửa chu vi. Chứng minh rằng*:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}.$$

Giải

Ta có:

$$(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2 = (1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c})^2$$

$$\le (1^2 + 1^2 + 1^2)(p-a+p-b+p-c) = 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Ta đi chứng minh $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$ bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

$$\Leftrightarrow p < p-a+p-b+p-c+2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$, luôn đúng.

Ví dụ 9: *Cho* a, b, c, p, q *là 5 số dương tuỳ ý. Chứng minh rằng*:

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \ge \frac{3}{p+q}. \quad (1)$$

Giải

Để ý rằng:

$$a = \sqrt{\frac{a}{pb+qc}}.\sqrt{a(pb+qc)}, \qquad b = \sqrt{\frac{b}{pc+qa}}.\sqrt{b(pc+qa)},$$

$$c = \sqrt{\frac{c}{pa+qb}}.\sqrt{c(pa+qb)}.$$

Gọi S là vế trái của bất đẳng thức (1). Ta có:

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{pb+qc}}.\sqrt{a(pb+qc)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b}{pc+qa}}.\sqrt{b(pc+qa)} + \sqrt{\frac{c}{pa+qb}}.\sqrt{c(pa+qb)}\right)^2$$

$$\leq S.[a(pb + qc) + b(pc + qa) + c(pa + qb)]$$
$$= S(p + q)(ab + bc + ca). \qquad (2)$$

Mặt khác $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, bởi:

$$3(ab + bc + ca) = (ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)$$
$$\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2.$$

Với kết quả đó từ (2) ta suy ra:

$$(a + b + c)^2 \leq S(p + q).\frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow S \geq \frac{3}{p+q},$$

vì $a + b + c > 0$, $p + q > 0$.

Ví dụ 10: *Cho* a, b, c *là ba số khác* 0. *Chứng minh rằng*:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2.$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right). \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \sqrt[3]{\left|\frac{abc}{abc}\right|} = 1,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

suy ra:

$$\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

từ đó (*) được biến đổi:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c (*Đề nghị bạn đọc tự chứng minh*).

Ví dụ 11: *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*:

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$$

trong đó, các số dương a, b, c *thỏa mãn điều kiện* $a + b + c \leq \frac{3}{2}$.

✍ *Giải*

Đặt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=x;\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=y;\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=z \text{ với x, y, z dương.}$$

Ta có:

$$P=(3+x)(3+y)(3+z)=27+9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+xyz.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba hoặc hai số dương, ta có:

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2},$$

$$xyz=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\ge \frac{2}{\sqrt{ab}}.\frac{2}{\sqrt{bc}}.\frac{2}{\sqrt{ca}}=\frac{8}{abc}. \qquad (1)$$

$$\frac{3}{2}\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\frac{1}{8} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $xyz\ge 64$

Từ đó, ta có:

$$P\ge 27+27\sqrt[3]{xyz}+9\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz=(3+\sqrt[3]{xyz})^2\ge(3+\sqrt[3]{64})^3=343.$$

Vậy, $\min P=343$ đạt được khi:

$$\begin{cases}a+b+c=3/2\\a=b=c\\abc=1/8\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 12: *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*:

$$T=\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

trong đó a, b, c *là các số thực khác* 0.

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(b+c)^2\le 2(b^2+c^2),\ (a+b)^2\le 2(a^2+b^2),\ (c+a)^2\le 2(c^2+a^2).$$

Ta có:

$$T\ge\frac{a^2}{a^2+2(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+2(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+2(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow T+3\ge\left(\frac{a^2}{a^2+2(b+c)^2}+1\right)+\left(\frac{b^2}{b^2+2(c+a)^2}+1\right)+\left(\frac{c^2}{c^2+2(a+b)^2}+1\right)$$

$$=\frac{2}{5}.5(a^2+b^2+c^2)\times$$

$$\times\left(\frac{a^2}{a^2+2(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+2(a+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+2(a+b)^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các bộ ba số dương m, n, p và $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ ta được:

$$(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \geq 3\sqrt[3]{mnp}.3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} = 9.$$

$$\Rightarrow T + 3 \geq \frac{2}{5}.9 \Leftrightarrow T \geq \frac{3}{5}.$$

Vậy $T_{Min} = \frac{3}{5}$ đạt được khi a = b = c.

Ví dụ 13: *Tìm các giá trị của tham số* m *để phương trình sau vô nghiệm*:

$$(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0. \quad (1)$$

Giải

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

$$(1) \Leftrightarrow 0.x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}.$$

Trường hợp 2: Nếu $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Khi đó, để (1) vô nghiệm điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 2m^2 + 5m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < -1.$$

Vậy, bất phương trình (2) vô nghiệm khi $-\frac{3}{2} < m < -1$.

Ví dụ 14: *Tìm* m *để phương trình sau có nghiệm*:

$$x^2 + (x + 1)^2 = \frac{m}{x^2 + x + 1}.$$

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{m}{x^2 + x + 1}. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 + x + \frac{1}{4}$, điều kiện $t \geq 0$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2t + \frac{1}{2} = \frac{m}{t + \frac{3}{4}} \Leftrightarrow \left(2t + \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{3}{4}\right) = m \Leftrightarrow (4t + 1)(4t + 3) = 8m$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 16t^2 + 16t + 3 - 8m = 0. \quad (2)$$

Phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có một nghiệm lớn hơn bằng } 0\\(2)\text{ có hai nghiệm lớn hơn bằng } 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P \le 0\\ \begin{cases}\Delta \ge 0\\ P \ge 0\\ S \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{4}.$$

Vậy, với $m \ge \frac{3}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 15: *Cho bất phương trình*:

$$x^2 + 4x + 3 + m \le 0.$$

Với giá trị nào của m *thì*:

a. *Bất phương trình vô nghiệm.*
b. *Bất phương trình có đúng một nghiệm.*
c. *Bất phương trình có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng* 2.

✍ *Giải*

a. Bất phương trình vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy, với $m > 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để bất phương trình có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2 thì tam thức ở vế trái của bất phương trình phải có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - m > 0\\ \sqrt{1-m} = 2\end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy, với $m = -3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 16: *Tìm* m *để bất phương trình*:

$$x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m \le 0 \qquad (1)$$

với $\forall x \in [0; 1]$.

✍ *Giải*

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m$.

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 \le 1 < 2 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}af(0) \le 0\\ af(1) \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 + 2m \le 0\\ m^2 - 1 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$$

Vậy, với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Bài toán trên có thể được giải bằng phép biến đổi tương đương sau:

$$x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m \le 0 \Leftrightarrow (x - m - 1)^2 \le 1$$

$$\Leftrightarrow (x - m - 2)(x - m) \le 0 \Leftrightarrow m \le x \le m + 2.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [0; 1]$

$$\Leftrightarrow m \le 0 < 1 \le m + 2 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$$

Ví dụ 17: *Với giá trị nào của* m *thì bất phương trình sau có nghiệm*:

$$(m - 2)x^2 - 2mx - m - 2 < 0 \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow -4x - 4 < 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Bất phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$

Bất phương trình đã cho cũng có nghiệm (vì lúc đó tam thức ở vế trái luôn âm hoặc chỉ dương trên một khoảng hữu hạn).

Trường hợp 3: Với $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$. (*)

Khi đó để bất phương trình đã cho có nghiệm thì tam thức ở vế trái phải có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m + 2)(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \text{ luôn đúng do } (*)$$

Vậy, với mọi m bất phương trình luôn có nghiệm.

Chú ý:

1. Ta có thể giải bài toán bằng cách tìm điều kiện để bất phương trình vô nghiệm. Tức là tìm điều kiện để:

   $$(m - 2)x^2 - 2mx - m - 2 \ge 0 \text{ với mọi } x.$$

2. Những giá trị m còn lại sẽ làm cho bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 18: *Giải và biện luận phương trình sau theo* a, b:

$$\sqrt{2(x^2 - x\sqrt{x^2 - a^2}) - a^2} + \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 - a^2}) - a^2} = |x + b| + |x - b|.$$

Từ đó trả lời câu hỏi khi nào phương trình nhận mọi x *làm nghiệm.*

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$\sqrt{2(x^2 - x\sqrt{x^2 - a^2}) - a^2} + \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 - a^2}) - a^2} =$$

$$= \sqrt{(x - \sqrt{x^2 - a^2})^2} + \sqrt{(x + \sqrt{x^2 - a^2})^2}$$

$$= |x - \sqrt{x^2 - a^2}| + |x + \sqrt{x^2 - a^2}|.$$

Điều kiện $x^2 \ge a^2$.

Nhận xét rằng:

$$(x - \sqrt{x^2 - a^2}).(x + \sqrt{x^2 - a^2}) = a^2 \geq 0,$$

nên sử dụng tính chất (2) cho VT, ta biến đổi được phương trình về dạng:

$$|x - \sqrt{x^2 - a^2} + x + \sqrt{x^2 - a^2}| = |x + b| + |x - b|$$

$$\Leftrightarrow |2x| = |x + b| + |x - b| \Leftrightarrow |(x + b) + (x - b)| = |x + b| + |x - b|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 2}} (x + b)(x - b) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq b^2.$$

Vậy, phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ x^2 \geq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \geq b^2 \\ x^2 \geq a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \leq b^2 \\ x^2 \geq b^2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Kết luận:

- Khi $a = b = 0$, phương trình có nghiệm với mọi x.
- Khi $|a| \geq |b|$, phương trình có nghiệm $|x| \geq |a|$.
- Khi $|a| \leq |b|$, phương trình có nghiệm $|x| \geq |b|$.

Ví dụ 19: *Giải phương trình*:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt[3]{1 + x^3} + \sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[4]{1 + x^4} + \sqrt[4]{1 - x^4} = 6.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $|x| \leq 1$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1.(1 + x^2)} \leq \frac{1}{2}(1 + 1 + x^2) = \frac{2 + x^2}{2},$$

$$\sqrt{1 - x^2} \leq \frac{2 - x^2}{2}, \qquad \sqrt[3]{1 + x^3} \leq \frac{3 + x^3}{3}, \qquad \sqrt[3]{1 - x^3} \leq \frac{3 - x^3}{3},$$

$$\sqrt[4]{1 + x^4} \leq \frac{4 + x^4}{4}, \qquad \sqrt[4]{1 - x^4} \leq \frac{4 - x^4}{4}.$$

suy ra:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt[3]{1 + x^3} + \sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[4]{1 + x^4} + \sqrt[4]{1 - x^4} \leq 6$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi dấu " = " xảy ra, tức là với $x = 0$.

Ví dụ 20: *Giải phương trình sau*:

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x+\sqrt{2-x^2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được:

$$+\begin{cases} x+\sqrt{2-x^2}=1.x+1.\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{\left[1^2+1^2\right]\left[x^2+\left(2-x^2\right)\right]}=2\\ \dfrac{1}{x}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=1.x+1.\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}\le\sqrt{\left[1^2+1^2\right]\left[\dfrac{1}{x^2}+\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x+\sqrt{2-x^2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\le 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2-x^2}\\ \dfrac{1}{x}=\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là x = 1.

Ví dụ 21: *Giải bất phương trình* $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}x+1\right|<\sqrt{2}+\sqrt{3}$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}x+1\right|<\sqrt{2}+\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left|(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-1\right|\le\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right|\le 5+2\sqrt{6}\Leftrightarrow\left|x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right|\le 5+2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow-(5+2\sqrt{6})\le x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\le 5+2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow-5-2\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\le x\le 5+2\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình:

$$S=[-5-2\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3};\ 5+2\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}].$$

Ví dụ 22: *Giải bất phương trình* $|2x^2-3x+1|-|2x^2-5x|<2x+1$.

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$|2x^2-3x+1|-|2x^2-5x|<|(2x^2-3x+1)-(2x^2-5x)|$$

$$\Leftrightarrow(2x^2-5x)(2x+1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1/2\\ 0<x<5/2\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2};+\infty)$.

Ví dụ 23: *Giải và biện luận bất phương trình* $|ax + b| \le a$.

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} a \ge 0 \\ -a \le ax + b \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ -a - b \le ax \le a - b \quad (*) \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Nếu a = 0 thì bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu a > 0 thì bất phương trình (*) có nghiệm là:

$$\frac{-a-b}{a} \le x \le \frac{a-b}{a}.$$

Kết luận:

- Với a = 0, bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với a > 0, bất phương trình có nghiệm $(\frac{-a-b}{a}; \frac{a-b}{a})$.
- Với a < 0, bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 24: *Giải và biện luận theo tham số* m *bất phương trình*:

$$|x^2 - x| < |x^2 - m|. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |(x^2 - x) - (m - x)| > |x^2 - x| - |m - x|$$

$$\Leftrightarrow (m - x)(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - m) > 0. \qquad (2)$$

- Với m < 0 thì:

  $(2) \Leftrightarrow x > m.$
- Với m = 0 thì:

  $(2) \Leftrightarrow x > 0.$
- Với m > 0 thì:

  $$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > m \\ -\sqrt{m} < x < \sqrt{m} \end{array}\right.$$

Kết luận.

- Khi m < 0, bất phương trình có nghiệm x > m.
- Khi m = 0, bất phương trình có nghiệm x > 0.
- Khi m > 0, bất phương trình có nghiệm $(-\sqrt{m}; \sqrt{m}) \cup (m; +\infty)$.

Chú ý: Bài toán trên có thể giải như sau:

$$(1) \Leftrightarrow |(x^2 - m) + (m - x)| < |x^2 - m| + |m - x|$$

$$\Leftrightarrow (m - x)(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 - m) > 0$$

Ví dụ 25: *Hãy xác định tất cả các giá trị của* a, b *sao cho mọi nghiệm của bất phương trình* $|2x - a + 1| \le b + 1$ *cũng là nghiệm của bất phương trình* $|x - b - 1| \le 3b - 2$.

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} b+1\ge 0 \\ 3b-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow b \ge \frac{2}{3}.$$

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{a-b-2}{2} \le x \le \frac{a+b}{2}; \qquad (1)$$

$$3 - 2b \le x \le 4b - 1. \qquad (2)$$

Trường hợp 1: Để (1) và (2) cùng vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-b-2}{2} > \dfrac{a+b}{2} \\ 4b-1 > 3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < -1 \\ b > \dfrac{2}{3} \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 4: Để (1) và (2) có cùng tập nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-b-2}{2} = 3-2b \\ \dfrac{a+b}{2} = 4b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=8 \\ a-7b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}.$$

Vậy, với a = 5 và b = 1 thì hai bất phương trình tương đương.

Ví dụ 26: *Xác định* m *sao cho hai bất phương trình sau tương đương*:

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

✍ *Giải*

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$(m - 1)x > m - 3, \qquad (1)$$

$$(m + 1)x > m - 2. \qquad (2)$$

Ta đi xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m = 1 thì:

(1) $\Leftrightarrow 0x > -2$, luôn đúng; (2) $\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 2: Nếu m = −1 thì:

(1) $\Leftrightarrow x < 2$; (2) $\Leftrightarrow 0x > -3$, luôn đúng.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 3: Nếu $m \ne \pm 1$ thì:

Khi đó, để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m-3}{m-1} = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ m^2-2m-3 = m^2-3m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy, với m = 5, hai bất phương trình tương đương với nhau.

Ví dụ 27: *Giải phương trình*:

$$|2x - 6| + |x - 1| = 3x - 7. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{khi } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{khi } x < 3 \end{cases}.$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Như vậy, ta phải xét phương trình trên ba tập $(-\infty, 1)$; $[1, 3]$; $(3, +\infty)$ và lập bảng sau:

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$\lvert 2x - 6\rvert$	$6 - 2x$		$6 - 2x$	0	$2x - 6$	
$\lvert x - 1\rvert$	$1 - x$	0	$x - 1$		$x - 1$	
VT	$7 - 3x$		$5 - x$		$3x - 7$	

Từ đó, ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \in (-\infty, 1)$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 7 - 3x = 3x - 7 \Leftrightarrow 6x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ loại.}$$

Trường hợp 2: Nếu $x \in [1, 3]$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 5 - x = 3x - 7 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3 \text{ thoả mãn.}$$

Trường hợp 3: Nếu $x \in (3, +\infty)$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 7 = 3x - 7 \text{ luôn đúng.}$$

Do đó, mọi x thuộc khoảng $(3, +\infty)$ đều là nghiệm của (1).

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $T = \{3\} \cup (3, +\infty) = [3, +\infty)$.

Ví dụ 28: *Cho hàm số*:

$$y = \frac{\sqrt{(m-1)x + m}}{\sqrt{mx + 2} - 1} \text{ với } 0 < m \neq 1.$$

a. *Tìm miền xác định của hàm số khi* $m = 2$.

b. *Tìm tất cả các giá trị của tham số* m *để hàm số xác định với* $\forall x \geq 1$.

✍ *Giải*

Điều kiện để hàm số có nghĩa:

$$\begin{cases} (m-1)x + m \geq 0 \\ mx + 2 \geq 0 \\ \sqrt{mx + 2} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x + m \geq 0 & (1) \\ mx + 2 \geq 0 & (2) \\ mx \neq -1 & (3) \end{cases}. \qquad (\text{I})$$

a. *Đáp số* $D = [-1; +\infty) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

b. Hàm số xác định với mọi $x \geq 1$ khi (1), (2) và (3) đồng thời thoả mãn với mọi $x \geq 1$.

Ta có:

- $g(x) = (m-1)x + m \geq 0\ \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ 2m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$
- $h(x) = mx + 2 \geq 0\ \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ h(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$
- Do đó (1), (2) đồng thời thoả mãn với $\forall x \geq 1$ khi $m \geq 1$, khi đó
  $q(x) = mx \geq 1 \Rightarrow$ (3) đúng.

Vậy, với $m \geq 1$ hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

Ví dụ 29: *Tìm điều kiện của* m *để mọi nghiệm của bất phương trình*:

$$x^2 + (m-1)x - m \leq 0 \qquad (1)$$

đều là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2mx + 3 \leq 0$. (2)

✍ *Giải*

Trước tiên, để (2) có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta'_{(2)} \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{3}$$

khi đó (2) có nghiệm là $m - \sqrt{m^2-3} \leq x \leq m + \sqrt{m^2-3}$.

Mặt khác:

$$x^2 + (m-1)x - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -m \end{array}\right..$$

Do đó, để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) điều kiện là:

$$\begin{cases} m - \sqrt{m^2-3} \leq 1 \leq m + \sqrt{m^2-3} \\ m - \sqrt{m^2-3} \leq -m \leq m + \sqrt{m^2-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |1-m| \leq \sqrt{m^2-3} \\ |-2m| \leq \sqrt{m^2-3} \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 30: *Tìm* m *để bất phương trình*:

$$x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 \qquad (1)$$

nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$.

✍ *Hướng dẫn*

Cách 1: Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2$.

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$ điều kiện là:

phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) \leq 0 \\ af(2) \leq 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Biến đổi:

$$x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq m^2 \Leftrightarrow 1 - |m| \leq x \leq 1 + |m|.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$ điều kiện là:

$$1 - |m| \leq 1 < 2 \leq 1 + |m|.$$

Ví dụ 31: *Tìm* m *để bất phương trình có nghiệm*:

$$x^2 + 2|x - m| + m^2 + m \le 1. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Đặt $t = x - m$.

Bất phương trình có dạng:

$$t^2 + 2(|t| + mt) + 2m^2 + m - 1 \le 0. \qquad (2)$$

a. Với $t \ge 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2(m+1)t + 2m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (3)$$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất một nghiệm $t \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm $t \ge 0$ ($0 \le t_1 \le t_2$ hoặc $t_1 \le 0 \le t_2$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \\ P \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (m+1)^2 - 2m^2 - m + 1 \ge 0 \\ 2m^2 + m - 1 \ge 0 \\ -m - 1 \ge 0 \end{cases} \\ 2m^2 + m - 1 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le m \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1/2 \\ m \le -1 \end{array}\right. \\ m \le -1 \end{cases} \\ -1 \le m \le 1/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{1}{2}.$$

b. Với $t \le 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow g(t) = t^2 + 2(m-1)t + 2m^2 + m - 1 \le 0 \qquad (3)$$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất một nghiệm $t \le 0$

$\Leftrightarrow$ $g(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm $t \le 0$ ($t_1 \le t_2 \le 0$ hoặc $t_1 \le 0 \le t_2$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \le 0 \end{cases} \\ P \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (m-1)^2 - 2m^2 - m + 1 \ge 0 \\ 2m^2 + m - 1 \ge 0 \\ -m + 1 \le 0 \end{cases} \\ 2m^2 + m - 1 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{1}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi $-1 \le m \le \frac{1}{2}$.

Ví dụ 32: *Giải và biện luận bất phương trình sau theo* m:

$$2|x - m| < -x^2 + 2mx - 2. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Đặt $t = |x - m|$, điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$2t < m^2 - t^2 - 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - m^2 + 2 < 0. \qquad (2)$$

Ta có $\Delta' = a^2 - 1$ nên xét các trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow |m| \le 1$.

Khi đó (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$.

Khi đó (2) có nghiệm $-1 - \sqrt{m^2-1} < t < -1 + \sqrt{m^2-1}$.

Do vậy, để (2) có nghiệm với $t \ge 0$ thì điều kiện là:

$$-1 + \sqrt{m^2-1} > 0 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}.$$

Khi đó nghiệm của (2) là:

$$0 \le t < -1 + \sqrt{m^2-1} \Leftrightarrow |x - m| < -1 + \sqrt{m^2-1}$$

$$\Leftrightarrow m + 1 - \sqrt{m^2-1} < x < m - 1 + \sqrt{m^2-1}.$$

Kết luận:

- Với $|m| \le \sqrt{2}$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $|m| > \sqrt{2}$, bất phương trình có nghiệm $(m + 1 - \sqrt{m^2-1}; m - 1 + \sqrt{m^2-1})$.

Ví dụ 33: *Cho bất phương trình*:

$$(x + 1)(x + 3) \le m\sqrt{x^2+4x+5}. \quad (1)$$

a. *Giải bất phương trình với* $m = -1$.

b. *Tìm* m *để bất phương trình nghiệm đúng với mọi* $x \in [-2; -2 + \sqrt{3}]$.

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(x^2 + 4x + 3) - m\sqrt{x^2+4x+5} \le 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 5) - m\sqrt{x^2+4x+5} - 2 \le 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+4x+5}$, điều kiện $t \ge 1$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - mt - 2 < 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -1$, bất phương trình có dạng:

$$t^2 + t - 2 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+5} \le 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy, với $m = -1$ bất phương trình có nghiệm $x = -2$.

b. Ta có:

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$$

suy ra với $x \in [-2; -2 + \sqrt{3}]$, ta được:

$$(-2 + 2)^2 + 1 \le x^2 + 4x + 5 \le (-2 + \sqrt{3} + 2)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x^2 + 4x + 5 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x^2+4x+5} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le t \le 2.$$

Vậy, bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -2 + \sqrt{3}]$

$\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [1; 2]$

$\Leftrightarrow f(t) = 0$ có nghiệm thoả mãn $t_1 \le 1 < 2 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f(1) \le 0 \\ a.f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 \le 0 \\ 2 - 2m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$$

Vậy, với $m \ge 1$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -2 + \sqrt{3}]$.

Ví dụ 34: *Tìm* m *để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi* $x \in [-2; 4]$:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2 - 2x + m.$$

✍ *Giải*

Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \in [-2; 4] \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của bất phương trình (1), khi đó:

$$3 \le m - 1 \Leftrightarrow m \ge 4.$$

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 4]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \ge 4$, khi đó:

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$VT = \sqrt{(2+x)(4-x)} \le \frac{(2+x)+(4-x)}{2} = 3.$$

- Biến đổi vế phải về dạng:

$$VP = x^2 - 2x + m = (x-1)^2 + m - 1 \ge 3.$$

Suy ra:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2 - 2x + m.$$

Vậy, với $m \ge 4$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 4]$.

Ví dụ 35: *Giải bất phương trình* $x^2 + 4x \ge (x+4)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$.

✍ *Giải*

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$, điều kiện $t \ge 0$. Bất phương trình có dạng:

$$f(x) = x^2 - (t-4)x - 4t \ge 0. \qquad (1)$$

Coi vế trái là một tam thức bậc 2 theo x, ta có:

$$\Delta = (t-4)^2 + 16t = (t+4)^2$$

khi đó $f(x) = 0$ có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = t \end{array}\right.$$

tức là (1) được biến đổi về dạng:

$$(x+4)(x-t) \ge 0 \Leftrightarrow (x+4)(x - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x + 4} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 4 \le 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x + 4} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -4 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 4} \le x \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -4 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x + 4} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge 0 \\ 0 \le x^2 - 2x + 4 \le x^2 \end{cases} \\ x \le -4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -4 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 36: *Giải bất phương trình* $x^2 - 1 \le 2x\sqrt{x^2+2x}$.

✍ *Giải*

Đặt t = $\sqrt{x^2+2x}$, điều kiện $t \ge 0$.

Bất phương trình có dạng:

$$f(x) = x^2 - 2tx - 1 \le 0. \qquad (1)$$

Coi vế trái là một tam thức bậc 2 theo x, ta có:

$$\Delta' = t^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

khi đó f(x) = 0 có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = t - x - 1 \\ x = t + x + 1 \end{array}\right.$$

tức là (1) được biến đổi về dạng:

$$(x - t - x - 1)(x - t + x + 1) \le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x} + 1)(\sqrt{x^2+2x} - 2x - 1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} \le 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 0 \le x^2+2x \le (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x^2+2x \ge 0 \\ 3x^2+2x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \ge 0$.

Ví dụ 37: *Với giá trị nào của* m *thì hệ bất phương trình sau có nghiệm*:

$$\begin{cases} mx - 2 > x + 1 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} (m-1)x > 3 \\ x < -\dfrac{m+2}{3} \end{cases}. \qquad (I)$$

Xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{m-1} \\ x < -\dfrac{m+2}{3} \end{cases} \Rightarrow x < \text{Min}\{\dfrac{3}{m-1}, -\dfrac{m+2}{3}\}$$, tức là, hệ có nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu m = 1 thì:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x > 3 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Trường hợp 3: Nếu m > 1 thì:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{m-1} \\ x < -\dfrac{m+2}{3} \end{cases} \text{ vô nghiệm do } -\frac{m+2}{3} < 0 < \frac{3}{m-1}.$$

Vậy, với m < 1 hệ bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 38: *Tìm* m *để hệ sau có nghiệm* 1 *nghiệm âm và* 1 *nghiệm dương*:

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0 & (1) \\ x^2 - (m^2-1)x + 3m - 1 = 0 & (2) \end{cases}.$$

✍ *Hướng dẫn*: Biến đổi (1) về dạng:

$$(x-1)(x^2-x-6) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$$

Từ đó, để hệ sau có nghiệm 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương điều kiện là:

(2) có hai nghiệm thoả mãn $x_1 < -2 < 1 < x_2 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} af(-2) < 0 \\ af(1) < 0 \\ af(3) > 0 \end{cases}$.

Ví dụ 39: *Tìm* m *để hệ có nghiệm duy nhất*:

$$\begin{cases} x^2 + (2m+1)x + m^2 + m - 2 = 0 & (1) \\ x^4 - 5x^2 + 4 < 0 & (2) \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Giải (2) bằng cách đặt $t = x^2$, điều kiện $t \ge 0$. Khi đó, (2) có dạng:

$$t^2 - 5t + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) (ký hiệu VT = f(x)) có đúng một nghiệm thuộc $X_2 = (-2; -1) \cup (1; 2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-2)f(-1) < 0 \\ f(1)f(2) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-2)f(-1) \ge 0 \\ f(1)f(2) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 3 \\ -4 < m < -3 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (-4; -3) \cup (2; 3)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

✍ ***Chú ý***: Nếu nhận xét rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m - 2$ và $x_2 = -m + 1$ (khoảng cách giữa hai nghiệm bằng 3) thì yêu cầu bài toán là:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -m - 2 \in (1; 2) \\ x_2 = -m + 1 \in (-2; -1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < m < -3 \\ 2 < m < 3 \end{array}\right..$$

Ví dụ 40: *Tìm* m *để hệ có nghiệm duy nhất*:

$$\begin{cases} x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0 \\ x^2 - 2mx + 2m > 0 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện cần: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} (x_0-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x_0-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(2m-x_0)-m] + m^2 + m - 2 = 0 \\ [(2m-x_0)-m]^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}.$$

Tức là $2m - x_0$ cũng là nghiệm của hê, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$x_0 = 2m - x_0 \Leftrightarrow x_0 = m$. (*)

Khi đó, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ -m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với m = 1, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 1 hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 41: *Tìm* m *để hệ bất phương trình sau có nghiệm*:

$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 \end{cases}.$$

Giải

Kí hiệu các bất phương trình trong hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-2)(x-m) < 0 \\ (x+7)(x+m) < 0 \end{cases}.$$

Dễ thấy m = 2 hoặc m = 7 hệ vô nghiệm

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m > 7, ta có:

$X_1 = (2; m)$ và $X_2 = (-m; -7) \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu 2 < m < 7, ta có:

$X_1 = (2; m)$ và $X_2 = (-7; -m) \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp 3: Nếu m < 2, ta có:

$X_1 = (m ; 2)$ và $X_2 = (-7; -m)$

Hệ có nghiệm khi $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow m < -m \Leftrightarrow m < 0$.

Ví dụ 42: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ |x + 3y - 3| - |3x + y - 3| = 2|x + y| & (2) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Giải

Biến đổi (2) về dạng:

$$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| - |3x + y - 3| = |(x + 3y - 3) - (3x + y - 3)|$$

$$\Leftrightarrow (3x + y - 3)(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x + y - 3 \geq 0 \;\&\; x + y \geq 0 & (3) \\ 3x + y - 3 \leq 0 \;\&\; x + y \leq 0 & (4) \end{array}\right.$$

- Với (3), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| - (3x + y - 3) = 2(x + y) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| = 5x + 3y - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3y - 3 = 5x + 3y - 3 \\ x + 3y - 3 = -5x - 3y + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right..$$

- Với x = 0, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\&\; y = 1 \\ x = 0 \;\&\; y = -1 \;\; (l) \end{array}\right..$$

- Với x + y = 1, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\&\; y = 1 \\ x = 1 \;\&\; y = 0 \end{array}\right..$$

- Với (4), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| + (3x + y - 3) = -2(x + y) \Leftrightarrow |x + 3y - 3| = -5x - 3y + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3y - 3 = 5x + 3y - 3 \\ x + 3y - 3 = -5x - 3y + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 1 \;(l) \end{array}\right..$$

- Với x = 0, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\&\; y = 1 \;(l) \\ x = 0 \;\&\; y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có ba cặp nghiệm (0; 1), (1; 0), (0; −1).

Ví dụ 43: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} \\ \left|x + \dfrac{1}{y}\right| + \left|\dfrac{10}{3} - x + y\right| = \dfrac{10}{3} + y + \dfrac{1}{y} \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Ký hiệu hai phương trình của hệ là (1) và (2).

Biến đổi (2) về dạng:

$$|x + \frac{1}{y}| + |\frac{10}{3} - x + y| = (x + \frac{1}{y}) + (\frac{10}{3} - x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} \geq 0 & (3) \\ \frac{10}{3} - x + y \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3y^2 + 10y + 3}{3y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y > 0 \\ -3 \leq y \leq -1/3 \end{array}\right..$$

a. Với $y > 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 = \frac{82}{9} - y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < y \leq \frac{\sqrt{82}}{3}.$$

- Với $x \geq 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \text{ thoả mãn (3) và (4).}$$

- Với $x < 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \text{ thoả mãn (4).}$$

Khi đó, để thoả mãn (3) ta phải có:

$$-\sqrt{\frac{82}{9} - y^2} + \frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \geq \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \geq \frac{82}{9} - y^2 \Leftrightarrow 9y^4 - 82y^2 + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 \geq 9 \\ y^2 \leq \frac{1}{9} \end{array}\right. \xleftrightarrow{0<y<\frac{\sqrt{82}}{3}} \left[\begin{array}{l} 3 \leq y \leq \frac{\sqrt{82}}{3} \\ 0 < y \leq \frac{1}{3} \end{array}\right..$$

b. Từ (3) và (4) suy ra:

$$-\frac{1}{y} \leq x \leq \frac{10}{3} + y \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \leq x^2 \leq (\frac{10}{3} + y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + y^2 \leq x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \leq (\frac{10}{3} + y)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^4 - 82y^2 + 9 \leq 0 \\ 3y^2 + 10y + 3 \geq 0 \end{cases} \xleftrightarrow{-3\leq y\leq -\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{l} y = -3 \xrightarrow{(1)} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \xrightarrow{(1)} x = 3 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là:

$$(\frac{1}{3}; -3), (3; -\frac{1}{3}), \begin{cases} x = \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \\ 3 \leq y \leq \frac{\sqrt{82}}{3} \text{ hoặc } 0 < y \leq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 44: *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Đặt:

$\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$, điều kiện $S, P \geq 0$ và $S^2 - 4P \geq 0$.

Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{[(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}]^2 - 2xy} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2} + \sqrt{2}P = 8\sqrt{2} \\ S = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{P^2 - 32P + 128} = 8 - P$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - P \geq 0 \\ P^2 - 32P + 128 = (8 - P)^2 \end{cases} \Leftrightarrow P = 4.$$

Vậy, ta được:

$$\begin{cases} S = 4 \\ P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = 4.$$

Vậy, hệ có nghiệm $x = y = 4$.

☞ ***Chú ý***: Nhiều hệ ở dạng ban đầu chưa thấy sự xuất hiện ẩn phụ, trong trường hợp này ta cần sự dụng một vài phép biến đổi phù hợp.

Ví dụ 45: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x \end{cases} \Leftrightarrow -x \leq y \leq x, \text{ suy ra } x \geq 0.$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ \dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}(x-y)^2=128\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ (x+y)^2+(x-y)^2=256\end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases}u=\sqrt{x+y}\\ v=\sqrt{x-y}\end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0.$$

Ta được:

$$\begin{cases}u+v=4\\ u^4+v^4=256\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\ uv(uv-32)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\ \left[\begin{array}{l}uv=0\\ uv=32\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\ uv=32\end{cases} \text{(I)} \qquad \text{hoặc} \quad \begin{cases}u+v=4\\ uv=0\end{cases} \quad \text{(II)}$$

- Giải (I): vô nghiệm.
- Giải (II):

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=4 \ \& \ v=0\\ u=0 \ \& \ v=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}=4\\ \sqrt{x-y}=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}=0\\ \sqrt{x-y}=4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=8\\ x=8 \text{ và } y=-8\end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (8; 8) và (8; –8).