CHƯƠNG 3 – PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐƯỜNG THẲNG

1. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

<u>Định nghĩa 1</u>: *Một vectơ* $\vec{a}$ *khác* $\vec{0}$ *gọi là vectơ chỉ phương* (*viết tắt vtcp*) *của đường thẳng* (d) *nếu giá của* $\vec{a}$ *song song hoặc trùng với* (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của (d).
- Nếu $\vec{a}(a_1; a_2)$ là vtcp của đường thẳng (d) thì với $a_1 \neq 0$ ta gọi $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của đường thẳng (d).
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtcp của nó và một điểm mà nó đi qua.

2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta có kết quả:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình (1) với điều kiện $a_1^2 + a_2^2 > 0$ được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu $a_1 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(0; a_2)$ do đó nó vuông góc với Ox, cắt Ox tại điểm có hoành độ x_0.

2. Nếu $a_2 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1; 0)$ do đó nó vuông góc với Oy, cắt Oy tại điểm có tung độ y_0.

3. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta có kết quả:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Từ đó, đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 2: *Một vectơ* $\vec{n}$ *khác* $\vec{0}$ *gọi là vectơ pháp tuyến* (*viết tắt vtpt*) *của đường thẳng* (d) *nếu giá của* $\vec{n}$ *vuông góc với* (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là vtpt của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của (d).
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtpt của nó và một điểm mà nó đi qua.

5. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ta có kết quả:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A, B) \end{cases} \Leftrightarrow (d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Phương trình tổng quát của đường thẳng:

$(d): Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 > 0$

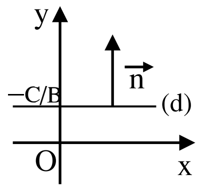
và nó có:

- vtpt $\vec{n}(A; B)$, vtcp $\vec{a}(B; -A)$.
- hệ số góc $k = -\frac{A}{B}$, với $B \neq 0$.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu A = 0, ta được:

$$(d): By + C = 0 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{C}{B}$$

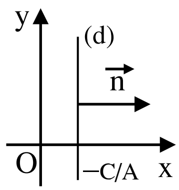


là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(0; B)$ do đó nó vuông góc với Oy, cắt Oy tại điểm có tung độ $-\frac{C}{B}$.

Lưu ý: Bản thân trục Ox có phương trình y = 0.

2. Nếu B = 0, ta được:

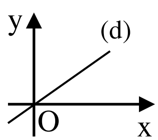
$$(d): Ax + C = 0 \Leftrightarrow (d): x = -\frac{C}{A}$$



là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(A; 0)$ do đó nó vuông góc với Ox, cắt Ox tại điểm có hoành độ $-\frac{C}{A}$.

Lưu ý: Bản thân trục Oy có phương trình x = 0.

3. Nếu C = 0, ta được (d): Ax + By = 0



là đường thẳng có vtpt $\vec{n}(A; B)$ và đi qua gốc toạ độ O.

4. Nếu $A^2 + B^2 = 1$, thì (4) được gọi là *phương trình pháp dạng* của đường thẳng.

Lưu ý: Để đưa phương trình tổng quát của đường thẳng

$$(d): Ax + By + C = 0$$

về phương trình pháp dạng ta chỉ cần chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{A^2 + B^2}$, rồi đặt:

$$A_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ B_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ và } C_0 = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ và } (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), ta có kết quả:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) \,//\, (d_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$.

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2) tại điểm I.

trong trường hợp này mọi đường thẳng đi qua I đều có dạng:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (3)$$

với $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

Phương trình (3) được gọi là *phương trình của chùm đường thẳng*, điểm I gọi là *tâm của chùm.*

Ta thường dùng phương trình của chùm đường thẳng để giải các bài toán dạng: " *Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng đã cho và thoả mãn thêm điều kiện K* " mà không cần tìm toạ độ giao điểm đó.

7. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Gọi $\alpha = g((d_1),(d_2))$, $0 \le \alpha \le 90^0$.

- Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), khi đó:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}. \quad (4)$$

Nhận xét rằng $(d_1) \perp (d_2)$

$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

- Gọi k_1, k_2 theo thứ tự là hệ số góc của (d_1), (d_2) , khi đó:

$$\text{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|. \quad (5)$$

Nhận xét rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

8. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định lý 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(x_M, y_M)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$$(d): Ax + By + C = 0.$$

Khi đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M, (d)) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

☞ ***Chú ý***: Khoảng cách đại số từ $M(x_M, y_M)$ tới đường thẳng (d) được định nghĩa:

$$t_M = \overline{HM} = \frac{Ax_M + By_M + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

9. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Định lý 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Khi đó phương trình hai đường phân giác (Δ_1) và (Δ_2) của các góc tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu (d_1) và (d_2) không vuông góc với nhau thì (d_1) tạo với (d_2) hai góc nhọn và hai góc tù, khi đó ta có thể xác đinh phương trình đường phân giác của góc nhọn hoặc góc tù nhờ kết quả trong bảng sau:

Dấu của $\vec{n}_1.\vec{n}_2$	Phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi (d_1), (d_2) ứng với	Phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi (d_1), (d_2) ứng với
–	$t_1 = t_2$	$t_1 = -t_2$
+	$t_1 = -t_2$	$t_1 = t_2$

trong đó:

- $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ theo thứ tự là vtpt của (d_1), (d_2).
- t_1, t_2 theo thứ tự là khoảng cách đại số từ M(x, y) tới (d_1), (d_2).

II. ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Định lý 1: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) có tâm I(a, b) và bán kính R có phương trình:

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Vậy, ta được:

$$(C): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{Bkính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

☞ ***Chú ý***: Ta có:

- Đường tròn tâm O bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$.
- Đường tròn đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Định lý 2: Trong mặt phẳng Oxy, đường cong (C) có phương trình

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 - c \geq 0 \qquad (2)$$

là phương trình của đường tròn tâm I(a, b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Định lý 3: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(x_0; y_0)$ của đường tròn (C):

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

có phương trình:

$$(d): (x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = R^2. \qquad (5)$$

☞ ***Chú ý***:

1. Phương trình (5) được gọi là *phương trình phân đôi toạ độ* theo quy tắc
   $(x - a)^2 = (x - a).(x - a)$ thay bằng $(x - a).(x_0 - a)$.
   $(y - b)^2 = (y - b)(y - b)$ thay bằng $(y - b)(y_0 - b)$.
2. Nếu (C) có phương trình tổng quát:
   $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c \geq 0$

thì tiếp tuyến (d) có phương trình:

$$(d): x.x_0 + y.y_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

dựa theo quy tắc:

$x^2 = x.x$ thay bằng $x.x_0$.
$y^2 = y.y$ thay bằng $y.y_0$.
$2ax = a(x + x)$ thay bằng $a(x + x_0)$.
$2by = b(y + y)$ thay bằng $a(y + y_0)$.

3. Trong trường hợp tổng quát, đường thẳng (d) tiếp xúc (là tiếp tuyến) với đường tròn (C) có tâm I và bán kính R khi và chỉ khi:
   $d(I, (d)) = R$.

4. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ với } a^2 + b^2 - c \geq 0.$$

Phương tích của điểm $M(x_0, y_0)$ đối với đường tròn (C) được xác định bởi:

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$$

Từ giá trị về dấu của $\mathscr{P}_{M/(O)}$ ta xác định được vị trí của điểm M đối với (C)

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow$ M ở ngoài đường tròn (C).

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} = 0 \Leftrightarrow$ M ở trên đường tròn (C).
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} < 0 \Leftrightarrow$ M ở trong đường tròn (C).

5. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho hai đường tròn không đồng tâm (C_1) và (C_2) có phương trình:

(C_1): $x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$, với $a_1^2 + b_1^2 - c_1 \geq 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$, với $a_2^2 + b_2^2 - c_2 \geq 0$

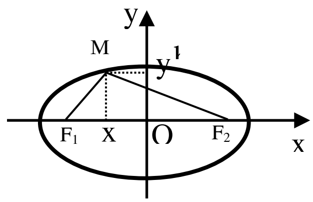
Khi đó tập hợp những điểm có cùng phương tích với hai đường tròn (C_1) và (C_2) là đường thẳng (d), gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình:

(d): $2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - c_1 + c_2 = 0$.

III. ELÍP

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELÍP

Định lý 1: Trong mặt phẳng Oxy, Elíp (E) có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và có tổng hai bán kính qua tiêu ứng với điểm tuỳ ý $M(x; y) \in (E)$ là 2a (a > c) có phương trình:



$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } b^2 = a^2 - c^2.$$

☞ ***Chú ý***: Điểm $M(x, y) \in (E)$ luôn có:

$$F_1M = a + \frac{cx}{a} \text{ và } F_2M = a - \frac{cx}{a}.$$

2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ELÍP

Elíp (E) có phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

được chuyển về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sin t \\ \dfrac{y}{b} = \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow (E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi). \qquad (*)$$

Phương trình (*) được gọi là phương trình tham số dạng lượng giác của Elíp (E).

Ta biết rằng, nếu đặt $z = \tan\frac{t}{2}$ thì:

$$\sin t = \frac{2z}{1+z^2} \text{ và } \cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

do đó (*) có thể được viết dưới dạng:

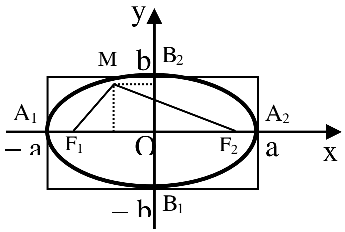
$$(E): \begin{cases} x = \dfrac{2az}{1+z^2} \\ y = \dfrac{b(1-z^2)}{1+z^2} \end{cases}, z \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Phương trình (**) được gọi là phương trình tham số dạng đại số của (E).

3. HÌNH DẠNG CỦA ELÍP

Với Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0.$$



ta xét các tính chất hình học của (E) bằng cách xét các tính chất đại số tương ứng của phương trình trên.

a. Phương trình của (E) có bậc chẵn đối với x và y nên:
- Nếu điểm $M(x; y) \in (E)$ thì các điểm $M_1(-x; y)$, $M_2(-x; -y)$ và $M_3(x; -y)$ cũng thuộc (E).
- (E) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc O làm *tâm đối xứng*.

b. (E) cắt các trục toạ độ tại bốn điểm:
- $(E) \cap Ox = \{A_1, A_2\}$ có toạ độ là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trục lớn* của (E) có độ dài bằng 2a.
- $(E) \cap Oy = \{B_1, B_2\}$ có toạ độ là $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b)$ và đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục nhỏ* của (E) có độ dài bằng 2b.
- Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là bốn đỉnh của Elíp (E)

Lưu ý: Hai tiêu điểm của Elíp (E) luôn ở trên trục lớn.

c. *Hình chữ nhật cơ sở*: hình chữ nhật có các đỉnh là giao điểm của các đường thẳng $x = \pm a$ và các đường thẳng $y = \pm b$ được gọi là hình chữ nhật cơ sở của (E). Vậy Elíp (E) nằm trong hình chữ nhật có tâm đối xứng O, có các kích thước là 2a, 2b.

d. Từ $M(x; y) \in (E)$ ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} \le 1 \\ \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le a \\ |y| \le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases}.$$

4. TÂM SAI CỦA ELÍP

Tâm sai của Elíp là số thực e bằng tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của Elíp.

- Đối với Elíp (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với a > b thì $e = \dfrac{c}{a}$.
- Đối với Elíp (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với a < b thì $e = \dfrac{c}{b}$.

☞ ***Chú ý***:

1. Mọi Elíp đều có tâm sai nhỏ hơn 1.
2. Tâm sai e = 0 suy ra c = 0 ⇔ a = b

   Khi đó:

   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

   Elíp trở thành đường tròn tâm O, bán kính bằng a.

IV. HYPEBOL

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA HYPEBOL

Định lý 1: Trong mặt phẳng Oxy, Hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và có hiệu hai bán kính qua tiêu ứng với điểm tuỳ ý $M(x; y) \in (H)$ là 2a (a > c) có phương trình:

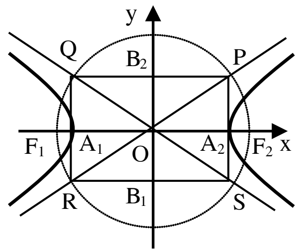
$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } b^2 = c^2 - a^2.$$

☞ ***Chú ý***: Điểm $M(x; y) \in (H)$ luôn có:

a. $F_1M = \frac{cx}{a} + a$ và $F_2M = \frac{cx}{a} - a$ với x > 0.

b. $F_1M = -\frac{cx}{a} - a$ và $F_2M = -\frac{cx}{a} + a$ với x < 0.

2. HÌNH DẠNG CỦA HYPEBOL



Với Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ta xét các tính chất hình học của (H) bằng cách xét các tính chất đại số tương ứng của phương trình trên.

c. Phương trình của (H) có bậc chẵn đối với x và y nên:
   - Nếu điểm $M(x; y) \in (H)$ thì các điểm $M_1(-x; y)$, $M_2(-x; -y)$ và $M_3(x; -y)$ cũng thuộc (H).
   - (H) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc O làm *tâm đối xứng*.

d. (H) cắt các trục toạ độ tại hai điểm:
   - $(H) \cap Ox = \{A_1, A_2\}$ có toạ độ là $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trụ c thực* của (H) có độ dài bằng 2a.
   - (H) không cắt Oy, đặt $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b)$ và đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục ảo* của (H) có độ dài bằng 2b.
   - Vậy trục thực của Hyperbol là trục đối xứng cắt Hyperbol, trục ảo là trục đối xứng không cắt Hyperbol.
   - Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là bốn đỉnh của Hypebol (H).

Lưu ý: Hai tiêu điểm của Hypebol (H) luôn ở trên trục thực.

e. *Hình chữ nhật cơ sở*: hình chữ nhật có các đỉnh là giao điểm của các đường thẳng $x = \pm a$ và các đường thẳng $y = \pm b$ được gọi là hình chữ nhật cơ sở của (H).

f. Từ $M(x; y) \in (H)$ suy ra:

$$\frac{x^2}{a^2} \ge 1 \Leftrightarrow |x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -a \end{array}\right. .$$

Như vậy Hyperbol (H) là tập hợp của hai tập con không giao nhau.

- Tập con của (H) chứa những điểm $M(x; y)$ thoả mãn $x \ge a$ gọi là *nhánh bên phải* của Hyperbol.
- Tập con của (H) chứa những điểm $M(x; y)$ thoả mãn $x \le -a$ gọi là *nhánh bên trái* của Hyperbol.
- Hai nhánh này đối xứng nhau qua trục ảo và cả hai đều nhận trục thực làm trục đối xứng.

a. Từ $M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

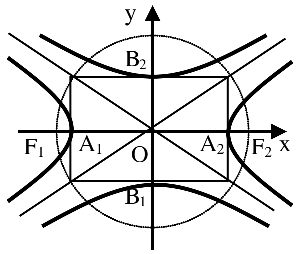
- Khi $x \to +\infty$: (H) có tiệm cận $y = \dfrac{b}{a}x$.
- Khi $x \to -\infty$: (H) có tiệm cận $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Vậy Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận là: $y = \pm \dfrac{b}{a}x$.

b. Cách dựng Hyperbol (H)

- Xác định vị trí các điểm $A_1(-a; 0)$;$A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ trên hệ toạ độ.
- Dựng các đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$ cắt nhau tại P, Q, R, S.
- Hình chữ nhật PQRS có kích thước 2a, 2b gọi là *hình chữ nhật cơ sở* của Hyperbol.
- Kẻ hai đường tiệm cận là hai đương chéo của hình chữ nhật cơ sở.
- Dựa trên hai đỉnh A_1, A_2 và hai đường tiệm cận để vẽ Hyperbol.

3. HYPERBOL LIÊN HỢP



Định nghĩa 3. Hai Hyperbol có phương trình:

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ và } (H_2): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

gọi là hai Hyperbol liên hợp.

☞ ***Chú ý***: Hai Hyperbol liên hợp:

- Có chung các đượng tiệm cận và hình chữ nhật cơ sở.
- Có các tiêu điểm và đỉnh khác nhau.

Trục thực của Hyperbol này là trục ảo của Hyperbol kia và ngược lại.

4. TÂM SAI CỦA HYPEBOL

Tâm sai của Hypebol là số thực e bằng tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của Hypebol.

- Đối với Hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì e = $\frac{c}{a}$.
- Đối với Hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ thì e = $\frac{c}{b}$.

☞ ***Chú ý***: Mọi Hypebol đều có tâm sai lớn hơn 1.

V. PARABOL

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PARABOL

Định lý 1: Trong mặt phẳng Oxy, Parabol (P) có hai tiêu điểm F($\frac{p}{2}$; 0) và đường chuẩn (d): x = $-\frac{p}{2}$ có phương trình (P): $y^2 = 2px$.

☞ ***Chú ý***: Điểm M(x; y) ∈ (P) luôn có FM = x + $\frac{p}{2}$.

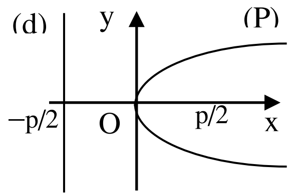
2. HÌNH DẠNG CỦA PARABOL

Với Parabol (P) có phương trình:

(P): $y^2 = 2px$, với p > 0.

Các thuộc tính của (P) gồm:

- Đỉnh O(0; 0),
- Tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$; 0),
- Đường chuẩn (d): x = $-\frac{p}{2}$,
- Parabol, nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên phải Ox.



☞ ***Chú ý***: Ngoài dạng chính tắc $y^2 = 2px$, người ta cung coi các dạng phương trình sau là phương trình chính tắc của Parabol:

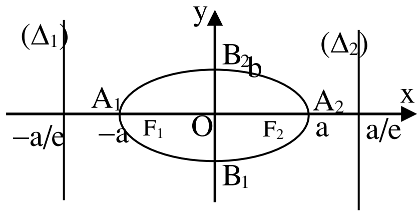
(P): $y^2 = -2px$, (P): $x^2 = \pm 2py$.

VI. BA ĐƯỜNG CÔNÍC

Định nghĩa: Đường chuẩn của Elíp (Hyperbol) ứng với tiêu điểm F_i (i = 1,2) là đường thẳng (Δ_i) (i = 1, 2) vuông góc với trục đối xứng chứa các tiêu điểm nằm về cùng một phía với F_i đối với trục đối xứng còn lại và cách tâm của Elíp (Hyperbol) một đoạn $\frac{a}{e}$ với e là tâm sai và a là độ dài nửa trục lớn (trục thực).

a. Với Elíp (E) có phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với a > b, ta có:

- Ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ là đường chuẩn (Δ_1): $x = -\frac{a}{e}$.
- Ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$ là đường chuẩn (Δ_2): $x = \frac{a}{e}$.

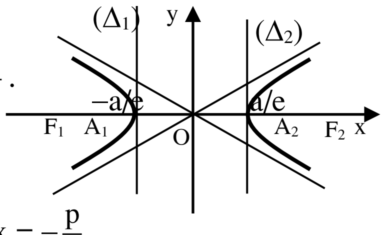


b. Với Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta có:

- Ứng với $F_1(-c; 0)$ là đường chuẩn (Δ_1): $x = -\frac{a}{e}$.
- Ứng với $F_2(c; 0)$ là đường chuẩn (Δ_2): $x = \frac{a}{e}$.



Nhắc lại: Với Parabol (P): $y^2 = 2px$ có đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$.

Đường chuẩn của cả ba đường Conic đều có tình chất chung sau đây:

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để một điểm nằm trên đường Conic là khoảng cách từ điểm đó tới tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai e của đường Conic đó.

Định nghĩa 2: Đường Cônic ($\mathscr{C}$) là tập hợp điểm có tỷ số các khoảng cách từ đó đến một điểm cố định và đến một đường thẳng cố định không đi qua điểm cố định ấy, bằng một hằng số dương e.

Hằng số dương e chính là tâm sai của đường Cônic ($\mathscr{C}$).

- Nếu e < 1 : ($\mathscr{C}$) là Elíp.
- Nếu e = 1 : ($\mathscr{C}$) là Parabol.
- Nếu e > 1 : ($\mathscr{C}$) là Hyperbol.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. ĐƯỜNG THẲNG

<u>Dạng toán 1:</u> Phương trình đường thẳng

Phương pháp thực hiện

Phương trình:

$$Ax + By + C = 0$$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 > 0$.

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Tìm các điểm mà họ (d_m) không đi qua.

Khi đó:

a. Với *câu hỏi 1*, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của họ (d_m), khi đó:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \ \forall m$$

Bước 2: Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0 $\Rightarrow (x_0, y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

b. Với *câu hỏi 2*, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $M(x, y)$ là điểm mà họ (d_m) không đi qua, khi đó:

$$Ax + By + C = 0 \text{ vô nghiệm } m$$

Bước 2: Thiết lập điều kiện vô nghiệm $\Rightarrow (x, y)$.

Ở đây cần nhớ lại:

- Phương trình $am + b = 0$ vô nghiệm m $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.
- Phương trình $am^2 + bm + c = 0$ $(a \neq 0)$ vô nghiệm m $\Leftrightarrow \Delta_m < 0$.
- Phương trình $a\cos m + b\sin m = c$ vô nghiệm m $\Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 1. *Tìm điều kiện của* m *để phương trình sau là phương trình đường thẳng*:

$$mx + (m^2 - 2m)y - 3 = 0.$$

✍ *Giải*

Phương trình trên là phương trình của đường thẳng khi và chỉ khi:

$$A^2 + B^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m^2 - 2m)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2(m^2 - 4m + 5)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy, với $m \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình của đường thẳng.

Thí dụ 2. *Cho phương trình* $mx + (m - 2)y - m = 0.$ (1)

a. *Chứng minh rằng với mọi* m *phương trình* (1) *là phương trình của một đường thẳng, gọi là họ* (d_m).

b. *Tìm điểm cố định mà họ* (d_m) *luôn đi qua*.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$A^2 + B^2 = m^2 + (m - 2)^2 = 2m^2 - 4m + 4 = 2(m - 1)^2 + 2 > 0, \forall m.$$

Vậy với mọi m phương trình đã cho là phương trình của một đường thẳng.

b. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow mx_0 + (m - 2)y_0 - m = 0, \forall m \Leftrightarrow m(x_0 + y_0 - 1) - 2y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1; 0)$.

Thí dụ 3. *Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ đường thẳng* (d_m): $(m + 1)x - y + m^2 - m = 0$.

✍ *Giải*

Gọi M(x; y) là điểm mà họ (d_m) không đi qua

$\Leftrightarrow (m + 1)x - y + m^2 - m = 0$ vô nghiệm m

$\Leftrightarrow m^2 + m(x - 1) + x - y = 0$ vô nghiệm m

$\Leftrightarrow \Delta_m < 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4(x - y) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4y + 1 < 0$.

Vậy, tập hợp các điểm M(x; y) thoả mãn $x^2 - 6x + 4y + 1 < 0$ không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ (d_m).

Dạng toán 2: Lập phương trình đường thẳng

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng các kết quả:

1. Đường thẳng đi qua hai điểm:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Lưu ý:

- Nếu $M_1(a, 0)$ và $M_2(0, b)$ với $a, b \neq 0$ thì phương trình (M_1M_2) được xác định bằng phương trình đoạn chắn (M_1M_2): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ luôn có dạng:

$$(d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \text{ với } A^2 + B^2 > 0.$$

2. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$$\text{hoặc } (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(a_1, a_2)$ luôn có dạng:

$$(d): a_2x - a_1y + \underline{C} = 0.$$

3. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtpt:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A, B) \end{cases} \Leftrightarrow (d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtpt $\vec{n}(n_1, n_2)$ luôn có dạng:

$$(d): n_1x + n_2y + \underline{C} = 0.$$

4. Đường thẳng đi qua một điểm và biết hệ số góc k:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{hsg } k \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = k(x - x_0) + y_0.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc k luôn có dạng:

(d): y = kx + <u>m</u> = 0.

5. Đường thẳng (d)//(Δ): Ax + By + C = 0 có phương trình:

   (d): Ax + By + <u>D</u> = 0.

6. Đường thẳng (d)⊥(Δ): Ax + By + C = 0 có phương trình:

   (d): Bx − Ay + <u>D</u> = 0.

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng

a. Phương trình chùm đường thẳng.
b. Phương pháp quỹ tích để xác phương trình đường thẳng.

Thí dụ 1. *Lập phương trình tham số của đường thẳng* (d) *trong mỗi trường hợp sau*:

a. (d) *đi qua điểm* M(2, 1) *và có* vtcp $\vec{a}(3, 4)$.
b. (d) *đi qua điểm* M(−2, 3) *và có* vtpt $\vec{n}(5, 1)$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(2,1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(3,4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

b. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(-2,3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(-2,3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(1,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Thí dụ 2. *Lập phương trình tổng quát của đường thẳng* (d) *trong mỗi trường hợp sau*:

a. (d) *đi qua điểm* M(−5, −8) *và có hệ số* góc k= −3.
b. (d) *đi qua hai điểm* A(2, 1) *và* B(−4, 5).
c. (d) *đi qua điểm* M(4, 0) *và điểm* N(0, −1).

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(-5,-8) \\ \text{hsg } k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = -3(x+5) - 8 \Leftrightarrow (d): 3x + y + 23 = 0.$$

b. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2,1) \\ \text{Qua } B(-4,5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow (d): 2x + 3y - 7 = 0.$$

c. Sử dụng phương trình đoạn chắn ta có:

$$(MN): \begin{cases} \text{Qua } M(4,0) \\ \text{Qua } N(0,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (MN): \frac{x}{4} + \frac{y}{-1} = 1 \Leftrightarrow (MN): x - 4y - 4 = 0.$$

☞ ***Chú ý***: Với câu b) chúng ta cũng có thể tìm được phương trình tổng quát của đường thẳng (d) bằng việc sử dụng phương trình tham số hoặc từ vtcp $\overrightarrow{AB}(-6, 4)$ suy ra vtpt $\vec{n}(2, 3)$ của đường thẳng (d).

Thí dụ 3. *Cho* ΔABC*, biết* A(1, 4), B(3, −1), C(6, 2).

a. *Lập phương trình tổng quát các đường thẳng* AB, BC, CA.

b. *Lập phương trình tổng quát của đường cao* AH *và trung tuyến* AM.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua } A(1,4) \\ \text{Qua } B(3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{-1-4} \Leftrightarrow (AB): 5x+2y-13=0.$$

Tương tự, ta nhân được (BC): x − y − 4=0 và (CA): 2x+5y − 22=0.

b. Ta lần lượt có:

$$(AH): \begin{cases} \text{Qua } A \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow (AH): \begin{cases} \text{Qua } A(1,4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AH): x - 1 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow (AH): x + y - 5 = 0.$$

$$(AM): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } M \text{ là trung diểm } BC \end{cases} \Leftrightarrow (AM): \begin{cases} \text{Qua } A(1,4) \\ \text{Qua } M(9/2,1/2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AM): \frac{x-1}{\frac{9}{2}-1} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}-4} \Leftrightarrow (AM): x + y - 5 = 0.$$

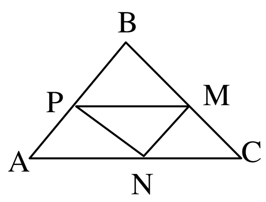
Thí dụ 4. *Cho* ΔABC*, biết trung điểm các cạnh là* M(2; 1), N(5; 3), P(3; −4).

a. *Lập phương trình các cạnh của* ΔABC.

b. *Lập phương trình các đường trung trực của* ΔABC.

✍ *Giải*

a. Ta có:



- Phương trình cạnh AB được xác định bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } P \\ AB // MN \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} \text{qua } P(3;-4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(3;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AB): \frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{2} \Leftrightarrow (AB): 2x - 3y - 18 = 0.$$

Tương tự (BC), (AC).

b. Gọi các đường trung trực kẻ từ M, N, P theo thứ tự là (d_M), (d_N), (d_P).

- Phương trình (d_M) được xác định bởi:

$$(d_M): \begin{cases} \text{qua } M \\ (d_M) \perp \overrightarrow{PN} \end{cases} \Leftrightarrow (d_M): \begin{cases} \text{qua } M(2;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{PN}(2;7) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (d_M): 2(x - 2) + 7(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (d_M): 2x + 7y - 11 = 0.$

Tương tự (d_N), (d_P).

Thí dụ 5. *Lập phương trình đường thẳng* (d_1) *đối xứng với đường thẳng* (d) *qua* (Δ), biết:

$$(d): x + 2y - 13 = 0 \text{ và } (\Delta): 2x - y - 1 = 0.$$

✍ *Giải*

Với mỗi đểm $M(x, y) \in (d_1) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ sao cho:

$$\begin{cases} \text{trung điểm I của } MM_0 \text{ thuộc } (\Delta) \\ MM_0 \perp (\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{x + x_0}{2} - \dfrac{y + y_0}{2} - 1 = 0 \\ 1.(x - x_0) + 2.(y - y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{5}(4x + 3y - 1) \\ y_0 = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y + 2) \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$\frac{1}{5}(4x + 3y - 1) + \frac{2}{5}(-3x + 4y + 2) - 13 = 0 \Leftrightarrow 2x - 11y + 62 = 0.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Thí dụ 6. *Thiết lập phương trình các đường phân giác của các góc trong của* ΔABC *có ba cạnh được tạo bởi các phương trình* :

$$3x - 4y = 0,\ 4x - 3y = 0,\ 5x + 12y - 63 = 0.$$

✍ *Giải*

Giả sử ba phương trình trên của các cạnh AB, BC, AC.

a. Phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$: Trước tiên:

- Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 0).$$

- Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 5x + 12y - 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3; 4).$$

Gọi (d_A) là đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$ của ΔABC.

Khi đó, điểm $M(x, y) \in (d_A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M và B cùng phía với (AC)} \\ \text{M và C cùng phía với (AB)} \\ d(M, (AB)) = d(M, (AC)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x + 12y - 63)(-63) > 0 \\ (3x - 4y)(3.3 - 4.4) > 0 \\ \dfrac{|5x + 12y - 63|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \dfrac{|3x - 4y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 12y - 63 < 0 \\ 3x - 4y < 0 \\ 5(5x + 12y - 63) = 13(3x - 4y) \end{cases} \Leftrightarrow 14x - 112y + 315 = 0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d_A).

Tương tự: Với phương trình dường phân giác trong của góc $\widehat{B}, \widehat{C}$.

Thí dụ 7. *Cho điểm* M(2; 1). *Đường thẳng* (d) *luôn đi qua* M *cắt* Ox, Oy *theo thứ tự tại* A(a; 0), B(0; b) *với* a, b > 0. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *sao cho*:

a. *Diện tích* ΔOAB *nhỏ nhất*. b. OA + OB *nhỏ nhất*.

c. $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ *nhỏ nhất*.

✍ *Giải*

Từ giả thiết, ta được (d): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Vì M∈(d) nên $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. (1)

a. Ta có, diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{ab}{2}.$$

Từ (1) suy ra

$$1 = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 2 \Leftrightarrow S \geq 1.$$

Vậy $S_{Min} = 1$, đạt được khi:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d): x + 2y − 4 = 0.

b. Từ (1), ta được :

$$a = \frac{2b}{b-1} \Rightarrow \text{điều kiện } b > 1.$$

Khi đó:

$$OA + OB = \frac{2b}{b-1} + b = \frac{2}{b-1} + b + 2$$

$$= \frac{2}{b-1} + b - 1 + 3 \geq 2\sqrt{\frac{2}{b-1}.(b-1)} + 3 = 2\sqrt{2} + 3.$$

Vậy $(OA + OB)_{Min} = 2\sqrt{2} + 3$, đạt được khi:

$$\frac{2}{b-1} = b - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \\ b = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đường thẳng

$$(d): (1 + \sqrt{2})x + (2 + \sqrt{2})y - 5 - 3\sqrt{2} = 0.$$

c. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$(2^2 + 1^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{5}.$$

Vậy $\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}\right)_{Min} = \frac{1}{5}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 5 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d): $2x + y - 5 = 0$.

<u>Dạng toán 3:</u> Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp thực hiện

Nếu hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình tổng quát:

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1), (d_2), ta sử dụng kết quả:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) \,//\, (d_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$.

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2).

Các trường hợp khác thì bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), khi đó số nghiệm của hệ phương trình cho phép kết luận về vị trí tương đối của hai đường thẳng.

<u>Thí dụ 1.</u> *Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *sau đây*:

a. $(d_1): 4x - 10y + 1 = 0$ và $(d_2): x + y + 2 = 0$.

b. $(d_1): 12x - 6y + 10 = 0$ và $(d_2): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

c. $(d_1): 8x + 10y - 12 = 0$ và $(d_2): \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi phương trình của (d_1) và (d_2), ta có :

$$\begin{cases} 4x - 10y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ và } y = -\frac{1}{2} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{M(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\}.$$

Cách 2: Nhận xét rằng $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1} \Rightarrow$ (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) và (d_1), ta được:

$12(5 + t) - 6(3 + 2t) + 10 = 0 \Leftrightarrow 52 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, ta kết luận (d_1) // (d_2).

c. Bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) và (d_1), ta được:

$8(-6 + 5t) + 10(6 - 4t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, luôn đúng.

Vậy, ta kết luận (d_1) $\equiv$ (d_2).

Thí dụ 2. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \begin{cases} x = -2t_1 \\ y = -3t_1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 1 + 3t_2 \\ y = 3 + 6t_2 \end{cases}, t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

a. *Xác định giao điểm của* (d_1) *và* (d_2).

b. *Tính cosin góc nhọn tạo bởi* (d_1) *và* (d_2).

✍ *Giải*

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} -2t_1 = 1 + 3t_2 \\ -3t_1 = 3 + 6t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}.$$

Vậy (d_1) cắt (d_2) tại A(–2, –3).

b. Gọi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có $\vec{a}_1(-2, -3)$, $\vec{a}_2(1, 2)$.

Khi đó, cosin góc nhọn α tạo bởi (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|-2.1 - 3.2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}.\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{65}}.$$

☞ ***Chú ý***: Việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng có phương trình tổng quát sẽ gợi ý cho chúng ta giải bài toán:

" *Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F = (A_1x + B_1y + C_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2)^2 \text{ "}$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hai đường thẳng

(d_1): $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và (d_2): $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Bước 2: Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2). Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Xác định các giá trị của D, D_x, D_y.

Bước 3: Biện luận:

a. Nếu $D \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó minF = 0, đạt được khi

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ và } y = \frac{D_y}{D}.$$

b. Nếu $D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Khi đó $(d_1) \equiv (d_2)$ do đó minF = 0, đạt được tại $\forall M(x, y) \in (d_1)$.

c. Nếu

$$\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Khi đó thì $(d_1) // (d_2)$ do đó đặt $t = A_1x + B_1y + C_1$, ta được:

$$F = t^2 + (kt + m)^2 = (k^2 + 1)t^2 + 2mkt + m^2 \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Vậy $\min F = -\frac{\Delta}{4a}$, đạt được khi $t = -\frac{mk}{k^2+1}$.

Thí dụ 3. *Hãy biện luận theo a giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$F = (2x + y - 2)^2 + (4x + ay - 1)^2.$$

Giải

Xét hai đường thẳng (d_1): $2x + y - 2 = 0$ và (d_2): $4x + ay - 1 = 0$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).
Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + ay = 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 2a - 4,\ D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1,\ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 2a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$.

  Hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{2a-1}{2a-4}$ và $y = \frac{-3}{a-2}$ $\Rightarrow (d_1)$ cắt (d_2) do đó minF = 0

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

  Với a = 2, suy ra $D_x = 3 \neq 0$, hệ vô nghiệm.
  Khi đó $(d_1) // (d_2)$ do đó $F = (2x + y - 2)^2 + (4x + 2y - 1)^2$.
  Đặt $t = 2x + y - 2$, ta được $F = t^2 + (t + 3)^2 = 2t^2 + 6t + 9 = 2(x + \frac{3}{2}) + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$.

Vậy $\min F = \frac{9}{2}$, đạt được khi:

$$t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x + y - 2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x + 2y - 1 = 0.$$

Kết luận:

- Với $a \neq 2$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = \frac{2a-1}{2a-4}$ và $y = \frac{-3}{a-2}$.
- Với $a = 2$, $\min F = \frac{9}{2}$, đạt được khi x, y thoả mãn $4x + 2y - 1 = 0$.

<u>Dạng toán 4:</u> Điểm và đường thẳng

Phương pháp thực hiện

Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tận dụng phương trình đường thẳng (d) cho trước.

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tham số :

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Bước 1: Lấy điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + a_1t, y_0 + a_2t)$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K xác định t.

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tổng quát:

$$(d): Ax + By + C = 0, \text{ với } A^2 + B^2 > 0.$$

Bước 1: Lấy điểm $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$Ax_M + By_M + C = 0.$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K thiết lập thêm một phương trình cho x_M và y_M. Từ đó tìm được toạ độ của M.

Lưu ý: Khi đó cũng có thể chuyển phương trình (d) về dạng tham số để sử dụng cách 1.

Hướng 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Tìm điểm M *thuộc* (d) *và cách điểm* A(0, 1) *một khoảng bằng* 5.

✍ *Giải*

Vì M huộc (d) nên M(2 + 2t, 3 + t). Khi đó:

$$5 = AM = \sqrt{(2+2t)^2 + (2+t)^2} \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1 \text{ và } t_2 = -\frac{17}{5}.$$

- Với $t_1 = 1$, suy ra điểm $M_1(4, 4)$.
- Với $t_2 = -\frac{17}{5}$, suy ra điểm $M_2(-\frac{24}{5}, -\frac{2}{5})$.

Vậy, tồn tại hai điểm $M_1(4, 4)$ và $M_2(-\frac{24}{5}, -\frac{2}{5})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): x - 2y + 15 = 0.$$

Tìm trên đường thẳng điểm $M(x_M, y_M)$ *sao cho* $x_M^2 + y_M^2$ *nhỏ nhất*.

✍ *Giải*

Cách 1: Vì $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$x_M - 2y_M + 15 = 0 \Leftrightarrow x_M = 2y_M - 15,$$

khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2y_M - 15)^2 + y_M^2 = 5y_M^2 - 60y_M + 225$$
$$= 5(y_M - 6)^2 + 45 \ge 45.$$

Vậy, ta được $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$$y_M = 6 \Rightarrow M(-3, 6).$$

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 15 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(2t - 15, t)$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2t - 15)^2 + t^2 = 5t^2 - 60t + 225 = 5(t - 6)^2 + 45 \ge 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$$t = 6 \Rightarrow M(-3, 6).$$

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxli

Ta có:

$$x_M - 2y_M + 15 = 0 \Leftrightarrow 15 = 2y_M - x_M \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\le} \sqrt{(4+1)(y_M^2 + x_M^2)}$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 \ge 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$$y_M = -2x_M \overset{(d)}{\Rightarrow} M(-3, 6).$$

Thí dụ 3. *Cho hai điểm* $A(1; 2)$, $B(2; 5)$ *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): x - 2y - 2 = 0.$$

Tìm trên đường thẳng (d) *điểm* M *sao cho*:

a. $(MA + MB)$ *nhỏ nhất*.

b. $|MA - MB|$ *lớn nhất*

✍ *Giải*

a. Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

Vì $M \in (d)$ nên $M(2t + 2\ ;\ t)$. Khi đó ta có:

$$MA + MB = \sqrt{(2t+1)^2 + (t-2)^2} + \sqrt{4t^2 + (t-5)^2}$$
$$= \sqrt{5t^2 + 5} + \sqrt{5t^2 - 10t + 25} = \sqrt{5}\left[\sqrt{t^2+1} + \sqrt{(t-1)^2 + 4}\right]$$

Xét các điểm $A_1(0; -1)$; $B_1(1; 2)$ và $M_1(t; 0)$.
Khi đó:

$$MA + MB = \sqrt{5}\,(M_1A_1 + M_1B_1).$$

Vì M_1 chạy trên trục hoành và A_1, B_1 nằm về hai phía của Ox nên

$$(MA + MB)_{min} \Leftrightarrow (M_1A_1 + M_1B_1)_{min} \Leftrightarrow M_1 = (A_1B_1) \cap Ox$$
$$\Leftrightarrow M_1\left(\frac{1}{3}; 0\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

b. Tương tự câu a) ta có:

$$|MA - MB| = \sqrt{(2t+1)^2 + (t-2)^2} + \sqrt{4t^2 + (t-5)^2}$$
$$= \sqrt{5t^2 + 5} + \sqrt{5t^2 - 10t + 25} = \sqrt{5}\left[\sqrt{t^2+1} + \sqrt{(t-1)^2 + 4}\right]$$

Xét các điểm $A_2(0; 1)$; $B_2(1; 2)$ và $M_2(t; 0)$.

Khi đó:

$$|MA - MB| = \sqrt{5}\,|M_2A_2 - M_2B_2|.$$

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$$|MA - MB|_{max} \Leftrightarrow |M_2A_2 - M_2B_2|_{max} \Leftrightarrow M_2 = (A_2B_2) \cap Ox$$
$$\Leftrightarrow M_2(-1, 0) \Leftrightarrow M(0; -1).$$

§2. ĐƯỜNG TRÒN

<u>Dạng toán 1:</u> Phương trình đường tròn

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
(1)

Bước 2: Để (1) là phương trình đường tròn điều kiện là:

$a^2 + b^2 - c \geq 0.$

Bước 3: Khi đó (C) có thuộc tính:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a;b) \\ \text{Bkính } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau*:

a. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

b. $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$.

✍ *Giải*

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

suy ra tâm I(1, 1) và bán kính R = 2.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = 1$$

suy ra tâm $I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ và bán kính R = 1.

Thí dụ 2. *Cho họ đường cong*:

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng với mọi* m *luôn có* (C_m) *là phương trình của một đường tròn*.

b. *Tìm tập hợp tâm các đường tròn* (C_m).

c. *Tìm đường tròn có bán kính nhỏ nhất trong họ* (C_m).

d. *Tìm các điểm cố định mà mọi đường tròn của họ* (C_m) *đều đi qua*.

e. *Chứng minh rằng* (C_m) *luôn cắt* Oy *tại* 2 *điểm phân biệt*.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 - c = m^2 + (m + 1)^2 - 2m + 1 = 2m^2 + 2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với ∀m phương trình đã cho là phương trình của một đường tròn, có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I_m(m, m+1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{2m^2 + 2} \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$I_m: \begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Khử m từ hệ (I), ta được: $x - y + 1 = 0$.

Vậy, tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $x - y + 1 = 0$.

c. Ta có:

$$R^2 = 2m^2 + 2 \ge 2$$

Vậy $R_{min} = \sqrt{2}$, đạt được khi m = 0

Vậy trong họ (C_m) đường tròn (C_0) có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$.

d. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m), ta được:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2(m + 1)y_0 + 2m - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (-2x_0 - 2y_0 + 2)m + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0 - 2y_0 + 2 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 - x_0 \\ x_0^2 + (1 - x_0)^2 - 2(1 - x_0) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 - x_0 \\ x_0 = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1,0) \\ M_2(-1,2) \end{array}\right.$$

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định M_1, M_2.

e. Xét hệ phương trình tạo bởi (C_m) và Oy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\Delta'_{(1)} = (m + 1)^2 - 2m + 1 = m^2 + 2 > 0, \forall m$$

do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $y_{1,2} = \pm\sqrt{m^2 + 2}$, tức là (C_m) luôn cắt Oy tại 2 điểm phân biệt $A(0, \sqrt{m^2 + 2})$ và $B(0, -\sqrt{m^2 + 2})$.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đã được biết khái niệm phương tích của một điểm đối với đường tròn, khi đó chọn điểm $C(0, 1) \in Oy$ và

$$\mathscr{P}_{C/(C)} = 1 - 2(m + 1) + 2m - 1 = -2 < 0 \Leftrightarrow C \text{ ở trong đường tròn } (C)$$

Vậy (C_m) luôn cắt Oy tại 2 điểm phân biệt.

Thí dụ 3. *Cho họ đường cong có phương trình*:

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2x - 4my + 4m = 0. \qquad (1)$$

a. *Tìm* m *để* (C_m) *là một họ đường tròn.*

b. *Chứng minh rằng các đường tròn của họ* (C_m) *luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 - c = 1 + 4m^2 - 4m = (2m - 1)^2 \ge 0, \forall m.$$

Vậy, với mọi giá trị của m phương trình (1) là phương trình của một đường tròn, có tâm $I_m(1, 2m)$ và bán kính $R = |2m - 1|$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Với m_1 và m_2 bất kỳ ($m_1 \neq m_2$), xét hệ phương trình tạo bởi (C_{m_1}), (C_{m_2}):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4m_1y + 4m_1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 4m_2y + 4m_2 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Lấy (1) − (2) ⇒ y = 1, thay vào (1), ta được:

$$x^2 - 2x + 1 = 0. \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm kép $x_0 = 1$ ∀m.

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(1; 1).

Cách 2: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4my + 4m = 0$, ∀m

$\Leftrightarrow 4m(-y + 1) + x^2 + y^2 - 2x = 0$, ∀m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M(1; -1).$$

Nhận xét rằng tâm I_m của họ (C_m) luôn thuộc đường thẳng (d) cố định đi qua điểm M cố định.

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(1; 1).

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy để "*Chứng minh rằng các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.*"
ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với m_1 và m_2 bất kỳ ($m_1 \neq m_2$), xét
(C_{m_1}) có tâm I_1 và bán kính R_1.
(C_{m_2}) có tâm I_2 và bán kính R_2.

Bước 2: Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} I_1I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| \end{array}\right.$$

Bước 3: Kết luận: các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định $M(x_0; y_0)$ là nghiệm kép của (*).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm điểm cố định $M(x_0, y_0)$ mà mọi đường tròn của họ (C_m) luôn đi qua.

Bước 2: Nhận xét rằng: tâm I_m của họ (C_m) luôn thuộc đường thẳng (d) cố định đi qua M.

Bước 3: Kết luận: các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định $M(x_0; y_0)$.

2. Nếu sử dụng cách 2 chúng ta cũng có thể trả lời được câu hỏi " *Các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng (Δ) cố định tại một điểm cố định* "

Thật vậy khi đó (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với đường thẳng (d).

Dạng toán 2: Lập phương trình đường tròn thoả mãn điều kiện cho trước

Phương pháp thực hiện

Gọi (C) là đường tròn thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

- Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c, điều kiện $a^2 + b^2 - c \geq 0$.
- Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, R, điều kiện $R \geq 0$.

☞ ***Chú ý***:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác phương trình đường tròn.

Thí dụ 1. *Lập phương trình đường tròn* (C) *trong các trường hợp sau*:

a. (C) *có tâm* $I(-2, 3)$ *và đi qua điểm* $M(2, -3)$.

b. (C) *có tâm* $I(-1, 2)$ *và tiếp xúc với* (d): $x - 2y + 7 = 0$.

c. (C) *có đường kính* AB *với* $A(1, 1)$ *và* $B(7, 5)$.

✍ *Giải*

a. Vì M thuộc (C) nên:

$$R = IM = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{52}.$$

Khi đó, đường tròn (C) với tâm $I(-2, 3)$ và bán kính $R = \sqrt{52}$ có phương trình:

$$(C): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52.$$

b. Vì (C) tiếp xúc với (d) nên:

$$R = d(I, (d)) = \frac{|1.(-1) - 2.2 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Khi đó, đường tròn (C) với tâm $I(-1, 2)$ và bán kính $R = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ có phương trình:

$$(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}.$$

c. Đường tròn (C) có đường kính AB, suy ra:

- Tâm I là trung điểm AB nên $I(4, 3)$.
- Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(7-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{13}$.

Từ đó, suy ra phương trình của đường tròn (C) có dạng:

$$(C): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13.$$

☞ ***Chú ý***: Để lập lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C (đường tròn ngoại tiếp ΔABC) ta cân nhắc lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tổng quát, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c \ge 0$. (1)

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thuộc (C), ta được hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c.

Thay a, b, c vào (1) ta được phương trình của (C).

Hướng 2: Dựa trên dạng đặc biệt của ΔABC, tức là:

1. Nếu ΔABC vuông tại A, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I la trung điểm BC} \\ R = \dfrac{BC}{2} \end{cases}.$$

2. Nếu ΔABC đều, cạnh bằng a, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I la trong tam } \Delta ABC \\ R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Lập phương trình đường tròn* (C) *đi qua ba điểm* A, B, C, *biết* A(1, 2), B(5, 2) *và* C(1, −3).

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c \ge 0$.

Điểm A, B, C∈(C), ta được:

$$\begin{cases} 2a + 4b - c = 5 \\ 10a + 4b - c = 29 \\ 2a - 6b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1/2 \\ c = -1 \end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

Cách 2: Nhận xét rằng AB ⊥ AC ⇔ ΔABC vuông tại A.

Do đó:

$$(C): \begin{cases} \text{tam I la trung diem BC} \\ R = \dfrac{BC}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C): \begin{cases} \text{tam I}(3, -\dfrac{1}{2}) \\ R = \dfrac{\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C): (x-3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}.$$

Thí dụ 3. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I(5, 6) và tiếp xúc với đường thẳng (d): $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{3}$.

✍ *Giải*

Ta có thể giải bằng hai cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Đường tròn (C) có:

$$(C): \begin{cases} \text{tam } I(5,6) \\ \text{bkinh } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = R^2. \quad (1)$$

Thay x, y từ phương trình tham số của (d) vào (C), ta được:

$$25t^2 - 60t + 45 - R^2 = 0. \quad (2)$$

(C) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow R^2 = 9 \text{ (khi đó ta được } t = \frac{6}{5}\text{)}$$

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 9$.

Cách 2: Chuyển phương trình của (d) về dạng tổng quát, ta được:

(d): $3x - 4y - 6 = 0$.

Gọi R là bán kính đường tròn (C). (C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi:

$$R = d(I, (d)) = \frac{|3.5 - 4.6 - 6|}{\sqrt{9 + 16}} = 3.$$

Vậy, phương trình đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 9$.

Thí dụ 4. *Lập phương trình đường tròn* (C) *tiếp xúc với các trục toạ độ và đi qua điểm* M(2, 1).

✍ *Giải*

Giả sử đường tròn (C) có tâm I(a, b) và bán kính R. Đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox, Oy

$$\Leftrightarrow |a| = |b| = R.$$

Trường hợp 1: Nếu a = b thì:

(C): $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$.

Điểm M $\in$ (C) suy ra:

$$(2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right..$$

- Với a = 1, suy ra b = 1, R = 1, ta được (C_1): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
- Với a = 5, suy ra b = 5, R = 5, ta được (C_2): $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Trường hợp 2: Nếu a = –b thì:

(C): $(x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$.

Điểm M $\in$ (C) suy ra:

$(2 - a)^2 + (1 + a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1) và (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Nếu giả thiết cho (C) tiếp xúc với (d): Ax + By + C = 0 tại điểm $M(x_0, y_0)$, ta có được các điều kiện sau:

a. Tâm I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(A, B) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}, t \in R$$

$\Rightarrow I(x_0 + At, y_0 + Bt)$

b. (C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi IM = R.

<u>Thí dụ 5.</u> *Lập phương trình đường tròn* (C) *tiếp xúc với đường thẳng* (d): x − y − 2 = 0 *tại điểm* M(3; 1) *và tâm* I *thuộc đường thẳng* (d_1): 2x − y − 2 = 0.

✍ *Giải*

Vì (C) tiếp xúc với (d) tại điểm M, suy ra tâm I của (C) thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M(3,1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1,1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): x + y - 4 = 0.$$

Khi đó I = (d_1) ∩ (Δ), toạ độ điểm I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2, 2).$$

(C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi IM = R ⇔ $R^2 = IM^2 = 2$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

<u>Dạng toán 3:</u> Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và đường tròn.

Phương pháp thực hiện

1. Để xét vị trí tương đối của điểm với đường tròn, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với đường tròn (C) là $\mathscr{P}_{M/(C)}$.

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} < 0$ ⇔ M nằm trong đường tròn.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} = 0$ ⇔ M nằm trên đường tròn.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(C)} > 0$ ⇔ M nằm ngoài đường tròn.

☞ ***Chú ý***: Ta có các kết quả sau:

- Nếu M nằm trong (C) ⇒ không tồn tại tiếp tuyến của (C) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.
- Nếu M nằm trên (C) ⇒ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (C) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi toạ độ).
- Nếu M nằm ngoài (C) ⇒ tồn tại hai tiếp tuyến của (C) đi qua M.

2. Để xét vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách h từ I tới (d), rồi so sánh với bán kính R của đường tròn, ta được:

- Nếu $h > R \Leftrightarrow (d)\cap(C) = \{\varnothing\}$.
- Nếu $h = R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với (C).
- Nếu $h < R \Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (C).

3. Để xét vị trí tương đối của hai đường tròn, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách I_1I_2 (I_1, I_2 là hai tâm của hai đường tròn), rồi so sánh với tổng và hiệu hai bán kính R_1, R_2 của hai đường tròn, ta được:

- Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và nồng nhau.
- Nếu $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.
- Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Phương pháp này thường được sử dụng để xác định số nghiệm của bài toán tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C_1) và (C_2), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2).

Nhận xét quan trọng:

1. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(m)x - 2b(m)x + c(m) = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(m)x - 2b(m)x + c(m) \geq 0 \\ Ax + By + C \geq 0 \end{cases}.$$

2. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1(m)x - 2b_1(m)x + c_1(m) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2(m)x - 2b_2(m)x + c_2(m) = 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1(m)x - 2b_1(m)x + c_1(m) \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2(m)x - 2b_2(m)x + c_2(m) \leq 0 \end{cases}$$

Thí dụ 1. *Cho điểm* M(6; 2) *và đường tròn* (C) *có phương trình*:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) *qua* M *cắt* (C) *tại hai điểm phân biệt* A, B *sao cho*:

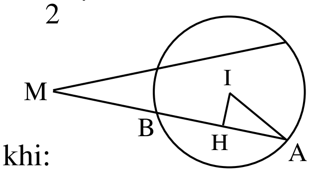
a. $AB = \sqrt{2}$.   b. $AB = 2$.

✍ *Giải*

Đường tròn (C) có tâm I(1; 1) và bán kính R = 1.

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Đường thẳng (d) đi qua M có dạng:

$$(d): A(x - 6) + B(y - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (d): Ax + By - 6A - 2B = 0.$$

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài khi và chỉ khi:

$$d(I, (d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|A + B - 6A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 50A^2 + 10AB + B^2 = 0. \quad (1)$$

Giải phương trình (1) bằng cách đặt $t = \frac{A}{B}$ ta tìm được mối liên hệ giữa A và B.

Từ đó, thấy tồn tại hai đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Vì (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho:

$$AB = 2 = 2R$$

$$\Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} \text{qua } M(6;2) \\ \text{qua tam } I(1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{6-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow (d): x - 5y + 4 = 0.$$

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng* (d) *và đường tròn* (C) *có phương trình*:

$$(d): x + y - 1 = 0 \text{ và } (C): x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

a. *Chứng tỏ rằng* (d) *cắt* (C) *tại hai điểm phân biệt* A, B.

b. *Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm* A, B *và tiếp xúc với đường thẳng* (Δ): $2x - y - 2 = 0$.

✍ *Giải*

a. Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) và bán kính R = 1.

Ta có:

$$d(O, (d)) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R$$

Vậy (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Đường tròn (S) đi qua các giao điểm của (d) và (C), có dạng

$$(S): x^2 + y^2 - 1 + m(x + y - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + mx + my - 1 - m = 0 \quad (1)$$

suy ra tâm $I(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2})$.

(S) tiếp xúc với (Δ)

$$\Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|\,2(-\frac{m}{2}) + \frac{m}{2} - 2\,|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{\frac{m^2}{2} + m + 1} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Thay $m = -\frac{2}{3}$ vào (1) ta được (S): $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0$.

Thí dụ 3. *Cho hai đường tròn*

(C_1): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$,

(C_2): $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$.

a. *Chứng minh rằng hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *cắt nhau.*

b. *Viết phương trình đường tròn qua giao điểm của* (C_1), (C_2) *và qua điểm* M(3, 0).

Giải

a. Ta có :

- Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1, -2)$ và bán kính $R_1 = 3$.
- Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1, 1)$ và bán kính $R_2 = 4$.

Ta có:

$$I_1I_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13},$$

$$|R_1 - R_2| = 0 < I_1I_2 < 2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)\cap(C_2) = \{A, B\}.$$

b. Đường tròn (S) đi qua các giao điểm của (C_1) và (C_2), có dạng:

$$(S): \lambda(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14) + \mu(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (S): (\lambda+\mu)x^2 + (\lambda+\mu)y^2 - 2(\mu-\lambda)x - 2(\lambda-2\mu)y - 14\lambda - 4\mu = 0 \quad (1)$$

Điểm $M(3, 0) \in (S)$

$$9(\lambda + \mu) - 3(\mu - \lambda) - 14\lambda - 4\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$$

Thay $\lambda = \mu$ vào (1) ta được (S): $x^2 + y^2 + y - 9 = 0$.

Thí dụ 4. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + ay - a = 0 \end{cases}$$

a. *Tìm* a *để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.*

b. *Gọi* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *là các nghiệm của hệ đã cho. Chứng minh rằng* $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$.

Giải

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (1) \\ x + ay - a = 0 & (2) \end{cases}$$

- Phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I(\frac{1}{2}, 0)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.
- Phương trình (2) là đường thẳng (d).

a. Vậy hệ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1 + a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}.$$

b. Với $0 < a < \frac{4}{3}$, $(d) \cap (C) = \{A, B\}$ có toạ độ là $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Ta có:

$AB \le 2R \Leftrightarrow AB^2 \le 4R^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$, đpcm.

Dạng toán 4: Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) (tâm I(a, b) bán kính R) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp thực hiện

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa trên điều kiện K ta giả sử được đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $Ax + By + C = 0$.

Bước 2: (d) là tiếp tuyến của (C)

$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R$.

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

☞ ***Chú ý***: Điều kiện K thường gặp:

1. Tiếp tuyến đi qua điểm M cho trước, khi đó:

   a. Nếu $M(x_0, y_0) \in (C)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(C)} = 0$), ta có ngay:

   $$(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IM}(x_0 - a, y_0 - b) \end{cases}$$

   $\Leftrightarrow (d): (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

   $\Leftrightarrow (d): (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$ − *Phân đôi toạ độ*.

   b. Nếu $M(x_0, y_0) \notin (C)$ (tức là $\mathscr{P}_{M/(C)} \neq 0$), ta giả sử:

   (d): $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$ (d): $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$, khi đó:

   (d): $Ax + By + \underline{D} = 0$.

3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$, khi đó:

   (d): $Bx - Ay + \underline{D} = 0$.

4. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng k, khi đó:

$$(d): y = kx + \underline{m} \Leftrightarrow (d): kx - y + \underline{m} = 0.$$

5. Tiếp tuyến có tạo với đường thẳng (Δ) một góc α, khi đó ta linh hoạt sử dụng một trong hai công thức:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$, với $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d), (Δ).

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$$, với k_1, k_2 theo thứ tự là hsg của (d), (Δ)

Cách 2: *Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi toạ độ để giải.*

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$x.x_0 + y.y_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0. \quad (1)$$

$$(\text{hoặc } (x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = R^2).$$

Điểm $M \in (C)$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0 \quad (2)$$

$$(\text{hoặc } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2)$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K của giả thiết, ta thiết lập thêm một phương trình theo x_0, y_0 (3)

Bước 3: Giải hệ tạo bởi (2), (3) ta được toạ độ tiếp điểm $M(x_0, y_0)$, từ đó thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến cần xác định.

Thí dụ 1. *Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn* (C) *đi qua* M, *biết*:

a. (C): $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ *và* $M(2, 3)$.

b. (C): $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ *và* $M(-4, -6)$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$P_{M/(C)} = 0 \Leftrightarrow M \in (C).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M có dạng:

$$(d): (x - 3)(2 - 3) + (y - 1)(3 - 1) = 9 \Leftrightarrow (d): x - 2y + 8 = 0.$$

b. Nhận xét rằng:

$$P_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow M \text{ ở ngoài } (C).$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1, 4)$, bán kính $R = 5$.

Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$$(d): A(x + 4) + B(y + 6) = 0 \Leftrightarrow (d): Ax + By + 4A + 6B = 0.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|A + 4B + 4A + 6B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |A + 2B| = \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow 3B^2 + 4AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -4A/3 \end{array}\right..$$

- Với B = 0, ta được tiếp tuyến

  (d_1): A(x + 4) = 0 ⇔ (d_1): x + 4 = 0.

- Với $B = -\dfrac{4A}{3}$, ta được tiếp tuyến

  $$(d_2): A(x + 4) - \frac{4A}{3}(y + 6) = 0 \Leftrightarrow (d_2): 3x - 4y - 12 = 0.$$

Vậy qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C).

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): x.x_0 + y.y_0 - (x + x_0) - 4(y + y_0) - 8 = 0. \quad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0) \in (C)$ nên:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 8y_0 - 8 = 0. \quad (2)$$

Điểm $A(-4, -6) \in (d)$

$$\Leftrightarrow -4x_0 - 6y_0 - (-4 + x_0) - 4(-6 + y_0) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 + 2y_0 - 4 = 0. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = -4 \ \& \ y_0 = 4 \\ x_0 = 4 \ \& \ y_0 = 0 \end{array}\right..$$

- Với $M_1(-4, 4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): x + 4 = 0.
- Với $M_2(4, 0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): 3x − 4y − 12 = 0.

☞ ***Chú ý***: Như vậy nếu sử dụng cách 2 ta có thể trả lời được các hỏi:

a. Qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C).

b. Toạ độ các tiếp điểm là $M_1(-4, 4)$, $M_2(4, 0)$.

c. Phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm được suy ra từ (3), tức là:

   (M_1M_2): x + 2y − 4 = 0.

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng* (Δ) *và đường tròn* (C) *có phương trình*:

$$(\Delta): 3x - 4y + 12 = 0. \quad (C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0.$$

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) *vuông góc với* (Δ).

✍ *Giải*

Đường tròn (C) có tâm I(1, 3), bán kính R = 1.

Ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Tiếp tuyến (d)⊥(Δ) có phương trình:

(d) : 4x + 3y + c = 0.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.3 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = -18 \\ c_2 = -8 \end{array}\right..$$

- Với $c_1 = -18$, ta được tiếp tuyến (d_1): 4x + 3y − 18 = 0.

- Với $c_2 = -8$, ta được tiếp tuyến (d_2): $4x + 3y - 8 = 0$.

Vậy tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): x.x_0 + y.y_0 - (x + x_0) - 3(y + y_0) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (d): (x_0 - 1)x + (y_0 - 3)y - x_0 - 3y_0 + 9 = 0 \quad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0) \in (C)$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 9 = 0. \quad (2)$$

Đường thẳng $(d)\perp(\Delta)$ khi và chỉ khi:

$$3.(x_0 - 1) - 4(y_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - 4y_0 + 9 = 0. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{9}{5} \ \& \ y_0 = \dfrac{18}{5} \\ x_0 = \dfrac{1}{5} \ \& \ y_0 = \dfrac{12}{5} \end{array}\right.$$

- Với $M_1(\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $4x + 3y - 18 = 0$.
- Với $M_2(\frac{1}{5}, \frac{12}{5})$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $4x + 3y - 8 = 0$.

Vậy tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 5: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (C_1) và (C_2)

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d): $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2>0$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Bước 2: Thiết lập điều kiện tiếp xúc của (d) với (C_1) và (C_2)

$$d(I_1, (d)) = R_1 \ \& \ d(I_2, (d)) = R_2.$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến chung (d).

Thí dụ 1. *Cho hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *có phương trình*:

$$(C_1): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, \ (C_2): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên.

✍ *Giải*

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1, 1)$ và bán kính $R_1 = 1$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2, -1)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Giả sử tiếp tuyến chung (d) có phương trình:

$$(d): Ax + By + C = 0, \text{ với } A^2 + B^2 > 0 \quad (1)$$

Ta có (d) tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1,(d)) = R_1 \\ d(I_2,(d)) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \\ \dfrac{|2A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A+B+C| = \sqrt{A^2+B^2} \\ |2A-B+C| = 2|A+B+C| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A+B+C| = \sqrt{A^2+B^2} \\ \left[\begin{array}{l} C = -3B \\ C = -\dfrac{1}{3}(4A+B) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} C = -3B \\ |A+B-3B| = \sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \\ \begin{cases} C = -\dfrac{1}{3}(4A+B) \\ |A+B-\dfrac{1}{3}(4A+B)| = \sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = -3B \,\&\, B = 0 \\ C = -3B \,\&\, A = \dfrac{3B}{4} \end{array}\right.$$

Khi đó ta được hai tiếp tuyến chung:

(d_1): $Ax = 0 \Leftrightarrow (d_1)$: $x = 0$,

(d_2): $\dfrac{3B}{4}x + By - 3B = 0 \Leftrightarrow (d_2)$: $3x + 4y - 12 = 0$,

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến chung (d_1), (d_2) của (C_1) và (C_2).

Thí dụ 2. *Cho hai đường tròn* (C) *và* (C_m) *có phương trình*:

$$(C): x^2 + y^2 = 1,\ (C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my = 5.$$

a. *Chứng minh rằng có 2 đường tròn* (C_{m1}), (C_{m2}) *tiếp xúc với đường tròn* (C) *ứng với 2 giá trị* m_1, m_2 *của* m.

b. *Xác định phương trình đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn* (C_{m1}), (C_{m2}).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) và bán kính R = 1.
- Đường tròn (C_m) có tâm $I_m(m+1,\ -2m)$ và bán kính $R_m = \sqrt{5m^2+2m+6}$.

Nhận xét rằng: (C) và (C_m) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} OI_m = R + R_m \\ OI_m = |R - R_m| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -1 \\ m_2 = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

b. Tiếp tuyến chung của (C_{-1}) và $(C_{3/5})$ là

(d_1): $2x + y + 3\sqrt{5} - 2 = 0$ và (d_2): $2x + y - 3\sqrt{5} - 2 = 0$.

Dạng toán 6: Điểm và đường tròn

Phương pháp thực hiện

Để tìm điểm M thuộc đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ thoả mãn điều kiện K, ta thực hiện theo các bước :

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$, suy ra:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0.

Thí dụ 1. *Cho điểm* F(4, –2) *và đường tròn* (C) *có phương trình*:

$$(C): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5, (\Delta): x - y - 2 = 0.$$

a. *Tìm các điểm có toạ độ nguyên thuộc* (C).

b. *Tìm trên* (C) *điểm* E *sao cho* ΔOEF *vuông*.

✍ *Giải*

a. Xét phương trình đường tròn (C) với ẩn y là:

$$y^2 - 4y + x^2 - 6x + 8 = 0$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 + 6x - 8 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \le x \le 3 + \sqrt{5}.$$

Suy ra các điểm $M(x, y) \in (C)$ có hoành độ nguyên là: 1, 2, 3, 4, 5, ta có:

x	1	2	3	4
y	$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right.$	$y \notin Z$	$\left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Vậy tồn tại 6 điểm $M_1(1, 3)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(2, 4)$, $M_4(2, 0)$, $M_5(4, 4)$, $M_6(4, 0)$ thuộc (C).

b. ΔOEF vuông gồm các khả năng sau:

Khả năng 1: ΔOEF vuông tại O ⇔ $E = (d_O) \cap (C)$, với (d_O) là đường thẳng qua O và vuông góc với OF. Ta có :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{vtpt } \overrightarrow{OF}(4,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): 2x - y = 0.$$

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(2,4) \\ E_2(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) \end{array}\right..$$

Khả năng 2: ΔOEF vuông tại F ⇔ $E = (d_F) \cap (C)$, với (d_F) là đường thẳng qua F và vuông góc với OF. Ta có :

$$(d): \begin{cases} \text{qua } F(4-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{OF}(4,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): 2x - y - 10 = 0.$$

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ 2x-y-10=0\end{cases}$$ vô nghiệm.

Khả năng 3: ΔOEF vuông tại E $\Leftrightarrow$ E = $(C_1)\cap(C)$, với (C_1) là đường tròn đường kính OF.

Ta có :

(C_1): $(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

Khi đó toạ độ điểm E là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ (x-2)^2+(y+1)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5\\ x+3y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E_3(4,0)\\ E_4(1,1)\end{array}\right..$$

Thí dụ 2. *Cho hai đường tròn* (C) *và* (C_m) *có phương trình*:

$$(C): x^2+y^2=1,\ \ (C_m): x^2+y^2-2mx-2y+m^2=0.$$

a. *Xác định* m *để* (C) *và* (C_m) *tiếp xúc ngoài với nhau.*

b. *Với* m *tìm được ở câu* a), *hãy xác định vị trí của điểm* A $\in$ (C) *và* B $\in$ (C_m) *để diện tích* ΔOAB *lớn nhất và trong trường hợp đó, tính diện tích hình ấy.*

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường tròn (C) có tâm O(0, 0) và bán kính R = 1.
- Đường tròn (C_m) có tâm I_m(m; 1) và bán kính R_m = 1.

a. Để (C) và (C_m) tiếp xúc ngoài với nhau điều kiện là:

$$OI_m = R + R_m \Leftrightarrow \sqrt{m^2+1} = 2 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

b. Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|.\sin\widehat{AOB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|.\sin\widehat{AOB}.$$

Từ đó, suy ra diện tích ΔOAB lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\text{OB lớn nhất}\\ \sin\widehat{AOB}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}O, B, I_m \text{ thẳng hàng}\\ OA\perp OB\end{cases}.$$

Bạn đọc giải tiếp lần lượt với $m = \pm\sqrt{3}$.

Thí dụ 3. *Cho đường tròn* (C) *có phương trình* :

$$(C): x^2+y^2-4x-6y+5=0.$$

a. *Tìm các điểm có toạ độ nguyên thuộc* (C).

b. *Xác định toạ độ các đỉnh* B, C *của* ΔABC *đều nội tiếp trong đường tròn* (C), *biết điểm* A(4; 5).

✍ *Giải*

a. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Xét phương trình đường tròn (C) với ẩn y và tìm x để phương trình có nghiệm, từ đó suy ra hoành độ nguyên – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Cách 2: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}, \alpha \in [0, 2\pi).$$

Khi đó điểm $M \in (C) \Rightarrow M(2 + 2\sqrt{2}\sin\alpha, 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha)$

Suy ra các giá trị góc α để x, y đều nguyên là: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Ta được $M_1(0, 1)$, $M_2(0, 5)$, $M_3(4, 1)$, $M_4(4, 5)$.

b. Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua tâm I của đường tròn (C)

$\Rightarrow$ toạ độ điểm $A_1(0; 1)$.

Đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } A_1(0;1) \\ \text{Bán kính } R = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): x^2 + (y-1)^2 = 8.$$

Khi đó: $(C) \cap (C_1) = \{B, C\}$, toạ độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) \\ C(1-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \end{cases}.$$

§3. ELÍP

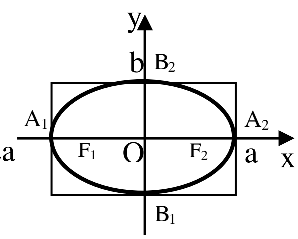
Dạng toán 1: Các định các thuộc tính của Elíp (E)

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Elíp (E) về dạng chính tắc

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Bước 2: Xét các khả năng:

Khả năng 1: Nếu a > b, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Ox, độ dài bằng 2a chứa hai tiêu điểm

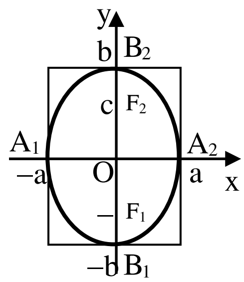
  $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ với $c^2 = a^2 - b^2$.

- (E) có trục nhỏ thuộc Oy với độ dài bằng 2b.

- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

Khả năng 2: Nếu a < b, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Oy, độ dài bằng 2b chứa hai tiêu điểm
  $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ với $c^2 = b^2 - a^2$.
- (E) có trục nhỏ thuộc Ox với độ dài bằng 2a.
- Tâm sai $e = \dfrac{c}{b}$.



☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp phương trình của (E) có dạng:

$$(E): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(E): \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

từ đó, chỉ ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục Oxy.

Thí dụ 1. *Xác định độ dài các trục, toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của các elíp có phương trình sau*:

a. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.   b. $4x^2 + 9y^2 = 1$.   c. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay a = 5 và b = 3, suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Từ đó:
- Trục lớn thuộc Ox có độ dài bằng 10 chứa hai tiêu điểm $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.
- Trục nhỏ thuộc Oy có độ dài bằng 6.
- Toạ độ 4 đỉnh $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/9} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{3} \text{ và } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Từ đó:
- Trục lớn thuộc Ox có độ dài bằng 1 chứa hai tiêu điểm $F_1(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0)$.
- Trục nhỏ thuộc Oy có độ dài bằng $\frac{2}{3}$.
- Toạ độ 4 đỉnh $A_1(-\frac{1}{2}, 0)$, $A_2(\frac{1}{2}, 0)$, $B_1(0, -\frac{1}{3})$, $B_2(0, \frac{1}{3})$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a = 3,\ b = 2 \text{ và } c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{5}.$$

Từ đó:

- Trục lớn thuộc Ox có độ dài bằng 6 chứa hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$.
- Trục nhỏ thuộc Oy có độ dài bằng 4.
- Toạ độ 4 đỉnh $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$.

Thí dụ 2. *Xác định các đường cong sau*:

a. (E): $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ b. (E): $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$, $t\in[\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

Giải

a. Biến đổi phương trình của (E) về dạng:

$$(E): \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = \frac{4}{9}(9-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow (E): \begin{cases} y \ge 0 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}.$$

Vậy, đồ thị của (E) là phần ở phía trên Ox của đồ thị Elíp $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$.

b. Biến đổi phương trình của (E) về dạng:

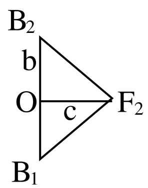
$$(E): \begin{cases} \sin t = \frac{x}{4} \\ \cos t = \frac{y}{2} \end{cases} \underset{t\in[\frac{\pi}{2},2\pi)}{\overset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{\Leftrightarrow}} (E): \begin{cases} \text{x và y không dồng thời dương} \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}.$$

Vậy, đồ thị của (E) là đồ thị của Elíp $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} = 1$ bỏ đi phần đồ thị ở góc phần tư thứ nhất.

Thí dụ 3. *Tìm tâm sai của* Elíp *biết*:

a. *Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc* 60^0.
b. *Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc* 60^0.
c. *Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 2 lần tiêu cự.*
d. *Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng hai lần tiêu cự.*

Giải



a. Từ giả thiết, ta có:

$$\tan 30^0 = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c.\tan 30^0$$

suy ra:

$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2}{c^2\tan^2 30^0 + c^2} = \frac{1}{\tan^2 30^0+1} = \cos^2 30^0$$

$\Leftrightarrow e = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Từ giả thiết, ta có $\cot 30^0 = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c.\cot 30^0$

suy ra:

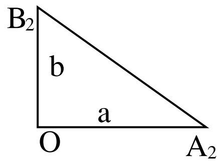
$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{c^2\cot^2 30^0 + c^2} = \frac{1}{\cot^2 30^0 + 1} = \sin^2 30^0$$

$$\Leftrightarrow e = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

c. Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{2a}{e} = 4c \Leftrightarrow \frac{2a}{e} = 4ae \Leftrightarrow e^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d. Từ giả thiết, ta có:



$$A_2B_2 = 4c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 4c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 + b^2 = 16c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{15c^2}{2}$$

suy ra:

$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{\frac{15c^2}{2} + c^2} = \frac{2}{17} \Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Dạng toán 2: Lập phương trình của Elíp (E).

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Elíp

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Nếu biết hai tiêu điểm $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ và độ dài trục lớn bằng 2a thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (E)$.

Bước 2: Chuyển $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1)

thành biểu thức giải tích nhờ:

$$MF_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad (2)$$

$$MF_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (3)$$

Bước 3: Suy ra

$$MF_1 - MF_2 = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2}$$

$$= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) - 2x(x_1 - x_2) - 2y(y_1 - y_2)}{2a} \quad (4)$$

Bước 4: Lấy (1) + (4) ta được MF_1, rồi thay vào (2) ta sẽ được phương trình của (E).

☞ ***Chú ý***:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác phương trình Elíp hoặc chứng minh tập hợp điểm là Elíp.

Thí dụ 1. *Lập phương trình chính tắc của elíp, biết*:

a. *Độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là* 8 *và* 6.

b. *Độ dài trục lớn bằng* 10 *và tiêu cự bằng* 6.

c. *Trục lớn thuộc* Oy *có độ dài trục lớn bằng* 26 *và tâm sai* $e = \frac{12}{13}$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay a = 4 và b = 3, suy ra phương trình của elíp $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b. Ta có ngay a = 5 và c = 3, suy ra $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$ nên phương trình của elíp $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c. Từ giải thiết ta giả sử Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a<b.$$

- Độ dài trục lớn bằng 26 ⇔ 2b = 26 ⇔ b = 13.
- Tâm sai $e = \frac{12}{13} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{13^2 - a^2}}{13} \Leftrightarrow a^2 = = 25$.

Vậy Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

Thí dụ 2. *Lập phương trình chính tắc của elíp, biết*:

a. *Elíp đi qua các điểm* M(0, 3) *và* $N(3, -\frac{12}{5})$.

b. *Elíp có một tiêu điểm* $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ *và điểm* $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *nằm trên elíp.*

✍ *Giải*

a. Giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Vì M $\in$ (E) $\Leftrightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 9$.
- Vì $N(3, -\frac{12}{5}) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25.9} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 25$.

Vậy, Elíp (E) có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b. Giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Vì (E) có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ nên :

$$c = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 3. \quad (1)$$

- Vì $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in (E) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1. \quad (2)$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1) và (2) ta được $a^2 = 4$ và $b^2 = 1$, suy ra:

$$(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Thí dụ 3. *Cho điểm* A(3, 3) *và đường tròn* (C) *có phương trình*:

$$(C_1): (x + 1)^2 + y^2 = 16 \text{ và } (C_2): (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Gọi M *là tâm đường tròn* (C) *di động tiếp xúc với* (C_1), (C_2). *Tìm quỹ tích điểm* M, *biết*:

a. (C) *tiếp xúc trong với* (C_1) *và tiếp xúc ngoài với* (C_2).

b. (C) *tiếp xúc trong với cả* (C_1) *và* (C_2).

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Xét đường tròn (C_1), (C_2), ta được:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tam } O_1(-1;0) \\ \text{Bkinh } R_1 = 4 \end{cases} \text{ và } (C_2): \begin{cases} \text{Tam } O_2(1;0) \\ \text{Bkinh } R_2 = 1 \end{cases}.$$

a. Giả sử M(x, y) là tâm và R là bán kính đường tròn (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2), ta được:

$$\begin{cases} R_1 - R = MO_1 \\ R_2 + R = MO_2 \end{cases} \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2 = 5.$$

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) nhận O_1, O_2 làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng 5.

- Xác định phương trình của Elíp (E): Vì O_1, O_2 thuộc Ox và đối xứng qua O nên phương trình của (E) có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0 < b < a.$$

trong đó:

$$2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2},$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{25}{4} - \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{25/4}+\frac{y^2}{21/4}=1$.

b. Giả sử M(x, y) là tâm và R là bán kính đường tròn (C) tiếp xúc trong với cả (C_1) và (C_2), ta được:

$$\begin{cases} R_1 - R = MO_1 \\ R - R_2 = MO_2 \end{cases} \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 - R_2 = 3$$

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) nhận O_1, O_2 làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng 3.

- Xác định phương trình của Elíp (E)

Vì O_1, O_2 thuộc Ox và đối xứng qua O nên phương trình của (E) có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0 < b < a.$$

trong đó:

$$2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2},$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{9}{4} - \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{9/4}+\frac{y^2}{5/4}=1$.

<u>Dạng toán 3:</u> Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và elíp.

Phương pháp thực hiện

1. Để xác định vị trí tương đối của điểm $M(x_M, y_M)$ với Elíp (E):

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với Elíp (E) là:

$$\mathscr{P}_{M/(E)} = \frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}.$$

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)} < 1 \Leftrightarrow$ M nằm trong Elíp.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)} = 1 \Leftrightarrow$ M nằm trên Elíp.
- Nếu $\mathscr{P}_{M/(E)} > 1 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài Elíp.

☞ ***Chú ý***:

1. Ta có các kết quả sau:
   - Nếu M nằm trong (E) $\Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến của (E) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.
   - Nếu M nằm trên (E) $\Rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (E) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi toạ độ).
   - Nếu M nằm ngoài (E) $\Rightarrow$ tồn tại hai tiếp tuyến của (E) đi qua M.
2. Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (E).
3. Với hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1.$$

Nếu $(E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$ thì

a. ABCD là hình chữ nhật.

b. Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là đường tròn (C) tâm O bán kính R = OA có phương trình:

$$(C): x^2 + y^2 = \frac{a_1^2a_2^2(b_1^2 - b_2^2) + b_1^2b_2^2(a_2^2 - a_1^2)}{a_2^2b_1^2 - a_1^2b_2^2}.$$

Thí dụ 1. *Cho điểm* M(1, 1) *và Elíp* (E) *có phương trình*:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a. *Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua* M *luôn cắt* (E) *tại hai điểm phân biệt*.

b. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *và cắt Elíp trên tại hai điểm* A, B *sao cho* MA = MB.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\mathscr{P}_{M/(E)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} < 1 \Leftrightarrow \text{M nằm trong Elíp}$$

do đó mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b. Nhận xét rằng đường thẳng (d) không thể song song với Oy, do đó giả sử (d) có hệ số góc k, ta được:

$$y = k(x - 1) + 1 \Leftrightarrow (d): y = kx - k + 1. \quad (1)$$

Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = kx - k + 1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(kx - k + 1)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 - 18k(k - 1)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{18k(k-1)}{4+9k^2} \\ x_A . x_B = \dfrac{9k^2 - 18k - 27}{4+9k^2} \end{cases}.$$

Theo giả thiết MA = MB

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{18k(k-1)}{4+9k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Thay $k = -\dfrac{4}{9}$ vào (1), ta được đường thẳng (d): $4x + 9y - 13 = 0$.

Thí dụ 2. *Xét vị trí tương đối của đường thẳng* (d) *và Elíp* (E) , *biết*:

a. (d): $x - y - 3 = 0$ *và* (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

b. (d): $2x + y - 5 = 0$ *và* (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

c. (d): $2x - y = 0$ *và* (E): $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

✍ *Giải*

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d):

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y^2 + 6y + 5 = 0 \qquad (*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d)$\cap$(E) = $\{\varnothing\}$.

b. Xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d):

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 25x^2 - 40x + 64 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$$

Vậy (d) tiếp xúc với (E) tại điểm $M(\dfrac{8}{5}, \dfrac{9}{5})$.

c. Xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d):

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1,2) \\ M_2(-1,-2) \end{array}\right..$$

Vậy, ta được (d)$\cap$(E) = $\{M_1, M_2\}$.

Thí dụ 3. *Cho điểm* M(1; $-\frac{1}{2}$) *và Elíp* (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *cắt* (E) *tại hai điểm phân biệt* A, B *sao cho*:

a. M *là trung điểm* AB. b. AB = $\sqrt{20}$.

Từ đó, lập phương trình đường tròn đường kính AB *trong mỗi trường hợp.*

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng đường thẳng (d) không thể song song với Oy, do đó giả sử (d) có hệ số góc k, ta được:

$$y = k(x-1) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d): 2y = 2kx - 2k - 1. \quad (1)$$

Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+4y^2=8 \\ 2y=2kx-2k-1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2kx - 2k - 1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (1 + 4k^2)x^2 - 4k(2k + 1)x + 4k^2 + 4k - 7 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{4k(2k+1)}{1+4k^2} \\ x_A.x_B=\dfrac{4k^2+4k-7}{1+4k^2} \end{cases}.$$

Theo giả thiết MA = MB

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{4k(2k+1)}{1+4k^2} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Thay k = $\frac{1}{2}$ vào (1), ta được phương trình đường thẳng (d): $x - y - 2 = 0$.

b. Vô nghiệm do AB lớn hơn độ dài trục chính.

☞ ***Chú ý***: Với câu a) ta có thể sử dụng cách giải khác như sau:

Lấy A(x_0, y_0) ∈ (E), và vì B đối xứng với A qua M nên B($2 - x_0$; $-1 - y_0$). Khi đó:

$$\begin{cases} x_0^2+4y_0^2=8 \\ x_0-y_0=2 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ của A, B.}$$

Lập phương trình đường thẳng qua A và B.

Thí dụ 4. *Cho* 2 *Elíp* (E_1) *và* (E_2) *có phương trình*:

$$(E_1): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$$

a. *Chứng minh rằng* (E_1) ∩ (E_2) = {A, B, C, D} *và* ABCD *là hình chữ nhật.*

b. *Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật* ABCD.

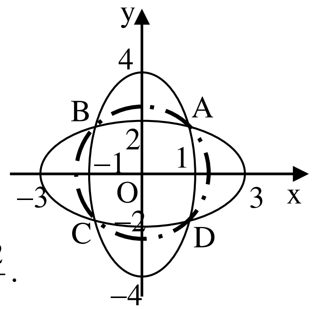
✍ *Giải*

a. Từ hình vẽ suy ra ngay $(E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$

Nhận xét rằng A, B, C, D đối xứng qua O và

AB//CD//Ox, AD//BC//Oy

$\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.



b. Hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn (C) tâm O bán kính R = OA.

Toạ độ điểm $A(x_A, y_A)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 + 16y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 = \dfrac{432}{55} \\ y_A^2 = \dfrac{28}{55} \end{cases} \Rightarrow R^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{92}{11}.$$

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có phương trình:

$$(C): x^2 + y^2 = \frac{92}{11}.$$

Dạng toán 4: Điểm và elíp

Phương pháp thực hiện

Với Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Bước 2: Điểm $M \in (E) \Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t)$.

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

☞ ***Chú ý***: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

$$F_1M = a + \frac{cx_0}{a} \text{ và } F_2M = a - \frac{cx_0}{a}.$$

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Elíp với một đường khác ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

Thí dụ 1. *Cho* Elíp (E): $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Tìm các điểm M *thuộc* Elíp (E) *sao cho*:

a. *Có toạ độ nguyên thuộc* (E).
b. *Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất* .

✍ *Giải*

Điểm $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$. (1)

a. Nhận xét rằng nếu điểm $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow M_1(-x_0, y_0)$, $M_2(-x_0, -y_0)$ và $M_3(x_0, -y_0)$ cũng thuộc (E). Do vậy ta chỉ cần xác định các điểm M_0 có toạ độ nguyên dương.

Xét phương trình (1) với ẩn y_0 :

$(1) \Leftrightarrow y_0^2 = 8 - 4x_0^2$.

Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow 8 - 4x_0^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x_0 \le \sqrt{2} \Rightarrow x_0 = 1$ và $y_0 = 2 \Rightarrow M_0(1, 2) \in (E)$.

Từ M_0 suy ra các điểm $M_1(-1, 2)$, $M_2(-1, -2)$ và $M_3(1, -2)$ cũng thuộc (E).

Vậy (E) có 4 điểm M_0, M_1, M_2, M_3 có toạ độ nguyên.

b. Ta có:

$$(x_0 + y_0)^2 = \left(\sqrt{2}.\frac{x_0}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}.\frac{y_0}{\sqrt{8}}\right)^2 \le (2 + 8)\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8}\right) = 10$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x_0 + y_0 \le \sqrt{10}.$$

dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0/\sqrt{2}}{y_0/\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \\ \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{y_0^2}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{y_0^2}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_4\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}, \dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right) \\ M_5\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}, -\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right) \end{cases}.$$

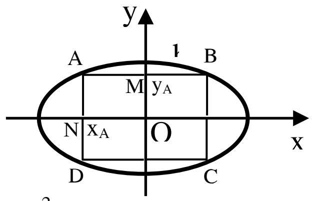
Vậy, ta được:

- $(x_0 + y_0)_{Max} = \sqrt{10}$, đạt được tại M_4.
- $(x_0 + y_0)_{Min} = -\sqrt{10}$, đạt được tại M_5.

Thí dụ 2. *Cho* Elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Từ điểm* $A \in (E)$ *có toạ độ dương, dựng hình chữ nhật* ABCD *nội tiếp trong* (E) *có các cạnh song song với các trục toạ độ. Xác định toạ độ của* A *để hình chữ nhật* ABCD *có diện tích lớn nhất.*

✍ *Giải*

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:



Cách 1: Giả sử $A(x_A, y_A) \in (E)$ với $x_A, y_A > 0$, suy ra:

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1.$$

Khi đó:

$$S_{ABCD} = S_{OMAN} = 4x_0y_0 = 2ab.2\frac{x_A}{a}.\frac{y_A}{b} \le 2ab.\ \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 2ab.$$

Vậy $S_{max} = 2ab$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A^2}{a^2} + \dfrac{y_A^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_A}{a} = \dfrac{y_A}{b} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Cách 2: Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a.\sin t \\ y = b.\cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Điểm $A \in (E)$ và thuộc góc phần tư thứ nhất $\Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t), t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó:

$$S_{ABCD} = S_{OMAN} = 4x_0y_0 = 4a.\sin t.b.\cos t = 2ab\sin 2t \le 2ab.$$

Vậy, ta được $S_{max} = 2ab$, đạt được khi:

$$\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

§4. HYPEBOL

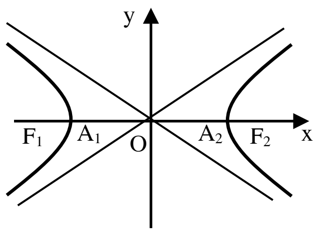
<u>Dạng toán 1:</u> Xác định các thuộc tính của Hypebol (H)

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Hypebol (H) về dạng chính tắc

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$



Bước 2: Xét các khả năng:

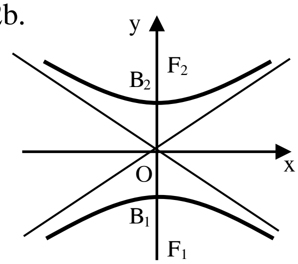
Khả năng 1: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta được:

- (H) có trục thực thuộc Ox, độ dài bằng 2a chứa hai tiêu điểm

  $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Oy với độ dài bằng 2b.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.



Khả năng 2: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ta được:

- (H) có trục thực thuộc Oy, độ dài bằng 2b chứa hai tiêu điểm

  $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Ox với độ dài bằng 2a.
- Tâm sai $e = \frac{c}{b}$.

Thí dụ 1. *Cho Hyperbol* (H): $9x^2 - 16y^2 = 144$.

a. *Chuyển phương trình của* (H) *về dạng chính tắc. Tìm toạ độ các đỉnh, toạ độ các tiêu điểm, tính tâm sai, các đường tiệm cận của* (H).

b. *Viết phương trình Hyperbol* (H_1) *liên hợp của* (H). *Tìm các thuộc tính của* (H_1).

c. *Viết phương trình chính tắc của Elíp* (E) *có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của* (H) *và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của* (H).

✍ *Giải*

a. Đưa phương trình Hyperbol về dạng

$$(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 3 \text{ và } c = 5.$$

Từ đó:

- Tâm O(0, 0).
- Toạ độ các đỉnh $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$.
- Toạ độ các tiêu điểm $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.
- Tâm sai $e = \frac{5}{4}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận là $y = \pm\frac{3}{4}x$.

b. Phương trình Hyperbol (H_1) liên hợp của (H) có dạng:

$$(H_1): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$$

Các thuộc tính của (H_1) và phương trình tham số của (H_1) bạn dọc tự làm

c. Giả sử phương trình chính tắc của Elíp có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b. \qquad (1)$$

- Tiêu cự c = 5 $\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5^2$ (2)
- P(4, 3) là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H). Để Elíp (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H)

$$\Leftrightarrow P(4, 3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2 + 16b^2 - a^2.b^2 = 0 \qquad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $a^2 = 40$, $b^2 = 15$.

Vậy phương trình chính tắc (E): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$.

Thí dụ 2. *Chuyển phương trình Hypebol* (H): $x^2 - 4y^2 = -1$ *về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình.*

Giải

Đưa phương trình Hyperbol về dạng:

$$(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1/4} = -1 \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2} \text{ và } c = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó:

- Tâm O(0, 0).
- Toạ độ các đỉnh $B_1(0, -\frac{1}{2})$, $B_2(0, \frac{1}{2})$.
- Toạ độ các tiêu điểm $F'_1(0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$, $F'_2(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$.
- Tâm sai $e = \sqrt{5}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận là $y = \pm\frac{1}{2}x$.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp phương trình của (H) có dạng:

$$(H): \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = \pm 1.$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với I(α, β) thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(H): \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (H) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (H) trong hệ trục Oxy.

Thí dụ 3. *Cho Hyperbol* (H) *có phương trình*:

$$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 16y + 11 = 0.$$

a. *Đưa Hyperbol* (H) *về dạng chính tắc*.
b. *Xác định toạ độ tâm, tiêu điểm F1*, F_2, *các đỉnh* A_1, A_2 *và các đường tiệm cận của (*H).

✍ *Giải*

Chuyển phương trình của (H) về dạng:

$$(H): \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = -1$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với I(1, 2) thành hệ trục IXY, với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(H): \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = -1.$$

Khi đó trong hệ trục IXY, (H) có các thuộc tính:

- Tâm I.
- Trục thực thuộc IY có độ dài bằng 2 chứa 2 tiêu điểm
  $F_1(0, -\sqrt{5})$, $F_2(0, \sqrt{5})$.
- Trục ảo thuộc IX có độ dài bằng 4.
- Tâm sai e = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận: $X = \pm\frac{1}{2}Y$.

Do đó trong hệ trục Oxy, (H) có các thuộc tính:

- Tâm I(1, 2).
- (H) có trục thực // Ox có độ dài 2 chứa 2 tiêu điểm
  $F_1(1, -\sqrt{5} + 2)$, $F_2(1, \sqrt{5} + 2)$
- Trục ảo // Ox có độ dài bằng 4.
- Tâm sai e = $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận:

$$x - 1 = \pm\frac{1}{2}(y - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d_1): 2x - y = 0 \\ (d_1): 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right..$$

Dạng toán 2: Lập phương trình của Hypebol (H)

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Hypebol

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

☞ ***Chú ý***:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác phương trình Hypebol hoặc chứng minh tập hợp điểm là Hypebol, trong trường hợp này này chúng ta thường thực hiện theo hai bước sau:

   Bước 1: Chứng minh tập hợp điểm là Hypebol (H) bằng việc chỉ ra hai điểm cố định A, B và M thoả mãn $|MA - MB| = 2a$ − không đổi.

   Bước 2: Lập phương trình chính tắc của Hypebol (H) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục thực bằng 2a.

Thí dụ 1. *Cho ba điểm* $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ *và điểm* $A(2, 0)$.

a. *Lập phương trình Hyperbol* (H) *đi qua* A *và có tiêu điểm* F_1, F_2.

b. *Tìm toạ độ điểm* M *trên* (H) *sao cho* $MF_2 = 2MF_1$.

✍ *Giải*

a. Vì hai tiêu điểm F_1 và F_2 thuộc Ox và đối xứng qua Oy nên Hypebol (H) có dạng:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

- Tiêu cự $c = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4^2$ (2)
- Điểm $A(2, 0) \in (H) \Leftrightarrow a^2 = 4$ (3)
- Từ (2), (3) suy ra $a^2 = 4$, $b^2 = 12$.

Vậy phương trình (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

b. Giả sử $M(x_0, y_0) \in (H)$ sao cho $MF_2 = 2MF_1$, ta có:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \Rightarrow MF_1 = 2a \Leftrightarrow MF_1^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow [(-4 - x_0)^2 + y_0^2] = 4.16 \Leftrightarrow [(4 + x_0)^2 + y_0^2] = 64 \qquad (4)$$

Mặt khác $M(x_0, y_0) \in (H)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{12} = 1 \qquad (5)$$

Giải hệ tạo bởi (4), (5), ta được $M_1(-3, -\sqrt{15})$, $M_2(-3, \sqrt{15})$.

Thí dụ 2. *Lập phương trình chính tắc và vẽ hình của Hyperbol biết*:

a. *Đi qua điểm* M(2, 2) *và mỗi đường tiệm cận tạo với* Ox *một góc* 60^0.

b. *Đi qua điểm* N($\sqrt{2}$, 2) *và hai đường tiệm cận có phương trình* $y = \pm 2x$.

c. *Hai trục trùng với trục toạ độ và đi qua* 2 *điểm* A($\sqrt{6}$, –1) *và* B(4, $\sqrt{6}$).

✍ *Giải* – Bạn đọc tự vẽ hình

a. Hyperbol (H) có " *mỗi đường tiệm cận tạo với trục hoành một góc* 30^0 ". Không mất tính tổng quát ta giả sử Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \qquad (1)$$

- Điểm $M(2, 2) \in (H) \Leftrightarrow 4b^2 - 4a^2 = \pm a^2b^2$. (2)
- Tiệm cận của (H) tạo với trục hoành một góc 30^0

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \tan 60^0 \Leftrightarrow b = a\sqrt{3} \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được $a^2 = \frac{8}{3}$ và $b^2 = 8$.

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol (H): $\frac{x^2}{8/3} - \frac{y^2}{8} = 1$.

b. Giả sử Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \qquad (1)$$

- Điểm $N(\sqrt{2}, 2) \in (H) \Leftrightarrow 2b^2 - 4a^2 = \pm a^2b^2$. (2)
- Hai đường tiệm cận có phương trình $y = \pm 2x$, suy ra:

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = 2a. \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được $a^2 = 1$ và $b^2 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

c. Giả sử Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \qquad (1)$$

- Điểm $A(\sqrt{6}, -1) \in (H) \Leftrightarrow 6b^2 - a^2 = \pm a^2b^2$. (2)
- Điểm $B(4, \sqrt{6}) \in (H) \Leftrightarrow 16b^2 - 6a^2 = \pm a^2b^2$. (3)

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được $a^2 = 4$ và $b^2 = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của Hypebol (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Thí dụ 3. *Cho đường tròn* (C): $x^2 + y^2 = 9$. *Tiếp tuyến của* (C) *tại* M *cắt* Ox *tại* N. *Trên đường thẳng vuông góc với* Ox *tại* N *lấy điểm* P *sao cho* PN = $\sqrt{3}$ MN *với* k > 0. *Lập phương trình quỹ tích các điểm* P *khi* M *di động trên* (C).

✍ *Giải*

Giả sử P(x, y), ta có:

$N(x, 0)$, $PN^2 = y^2$ và $MN^2 = ON^2 - OM^2 = x^2 - 9$.

Khi đó:

$$PN = \sqrt{3}\,MN \Leftrightarrow PN^2 = 3MN^2 \Leftrightarrow y^2 = 3(x^2 - 9) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1.$$

Vậy quỹ tích các điểm M thuộc Hypebol (H)có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1.$$

Dạng toán 3: Xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, Elíp và Hypebol

Phương pháp thực hiện

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (H) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (H).

Thí dụ 1. *Cho Hyperbol* (H) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1 \text{ và } (d): x - y - 2 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng* (d) *luôn cắt* (H) *tại hai điểm phân biệt* A, B. *Tính độ dài* AB.

b. *Tìm toạ độ điểm* C *thuộc* (H) *sao cho*:

- ΔABC *có diện tích bằng* 4.
- ΔABC *cân tại* A.
- ΔABC *vuông tại* A.

✍ *Giải*

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (H):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-6, -8) \\ B(2, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{độ dài } AB = 8\sqrt{2}.$$

b. Lấy $C(x_0, y_0) \in (H)$, suy ra $\dfrac{x_0^2}{4} - \dfrac{y_0^2}{8} = 1$. (1)

- Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH \Leftrightarrow 4 = 4CH\sqrt{2} \Leftrightarrow CH = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mặt khác:

$$CH = d(C, (d)) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|x_0 - y_0 - 1\right| \Leftrightarrow x_0 - y_0 - 1 = \pm 1. \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2) – *Dành cho bạn đọc*.

- (ΔABC cân tại A): Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: (Sử dụng phương trình điều kiện): ΔABC cân tại A suy ra:

$$AB = AC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2. \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (3) – *Dành cho bạn đọc*.

Cách 2: (Sử dụng phép đánh giá): ΔABC cân tại A suy ra

B, C đối xứng nhau qua Ox ⇒ C – *Dành cho bạn đọc*.

- ΔABC vuông tại A thực hiện tương tự câu ΔABC cân tại A.

Thí dụ 2. *Cho* Elíp (E) *và Hypebol* (H) *có phương trình*:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Lập phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai Hyperbol.

✍ *Giải*

Ta có (E)∩(H) = {A,B,C,D} đối xứng với nhau qua O (bởi (E_1) và (E_2) đều nhận O làm tâm đối xứng).

Vậy đường tròn đi qua A, B, C, D nhận O làm tâm và bán kính

$$R^2 = OA^2 = x_A^2 + y_A^2.$$

Toạ độ điểm A(x_A, y_A) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 4x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 = 9/5 \\ y_A^2 = 16/5 \end{cases} \Rightarrow R^2 = x_A^2 + y_A^2 = 5.$$

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có dạng:

(C): $x^2 + y^2 = 5$.

Thí dụ 3. *Cho Hypebol* (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. *Chứng minh rằng diện tích hình bình hành tạo bởi các tiệm cận của Hyperbol* (H) *và các đường thẳng kẻ từ một điểm trên* (H) *lần lượt song song với các tiệm cận là một hằng số.*

✍ *Giải*

Gọi α là góc tạo bởi đường đường tiệm $y = \frac{4}{3}x$ với trục Ox. Ta có:

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \text{ và } \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{24}{25}.$$

$$S_{OPMQ} = OP.OQ.\sin 2\alpha = \frac{24}{25} OP.OQ \Rightarrow OP.OQ = \frac{25}{24} S_{OPMQ}$$

Mặt khác:

$$S_{OPMQ} = OQ.h_1 = OP.h_2 \Rightarrow S^2_{OPMQ} = OP.OQ.h_1h_2 = \frac{25}{24}.S_{OPMQ}.\frac{144}{25}$$

$\Leftrightarrow S_{OPMQ} = 6$ không đổi.

Dạng toán 4: Điểm và Hypebol

Phương pháp thực hiện

Với Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$ suy ra

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Hypebol về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = btgt \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \backslash \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Bước 2: Điểm $M \in (H) \Rightarrow M(a.\sin t, b.\cos t)$.

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0. Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

☞ ***Chú ý***: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

   Điểm $M(x, y) \in (H)$ luôn có:

   a. $F_1M = \frac{cx}{a} + a$ và $F_2M = \frac{cx}{a} - a$ với $x > 0$.

   b. $F_1M = -\frac{cx}{a} - a$ và $F_2M = -\frac{cx}{a} + a$ với $x < 0$.

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Hypebol với một đường khác ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

Thí dụ 1. *Cho Hyperbol* (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Tìm điểm* M *trên* (H) *sao cho độ dài* F_1M (*tiêu điểm* $F_1(-c, 0)$) *ngắn nhất, dài nhất*.

✍ *Giải*

Lấy $M(x_0, y_0) \in (H)$, suy ra:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = a^2(1 + \frac{y_0^2}{b^2}) \geq a^2 \Rightarrow |x_0| \geq a.$$

Ta có:

$$F_1M = |\frac{cx_0}{a} + a| \geq |-\frac{ca}{a} + a| = |-c + a| = c - a.$$

Vây, $F_1M_{Min} = c - a$, đạt được khi $M \equiv A_1(-a, 0)$.

Thí dụ 2. *Cho Hyperbol* (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. *Tìm điểm* M *trên* (H) *sao cho*:

a. *Có toạ độ nguyên.*
b. *Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc* 90^0.

✍ *Giải*

a. Ta chỉ cần tìm các cặp (x, y) nguyên không âm, khi đó các nghiệm còn lại là (x, −y), (−x, y), (−x, −y). Ta có:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x, y \in Z^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 4y)(3x - 4y) = 144 \\ x, y \in Z^+ \\ 3x + 4y \geq 3x - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm trên (H) có toạ độ nguyên là $M_9(-4, 0)$, $M_{10}(4, 0)$.

b. $MF_1 \perp MF_2 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C) đường kính $F_1F_2 = 10$ có phương trình:

(C): $x^2 + y^2 = 25$.

Vậy toạ độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

ta được bốn điểm:

$$M_1(\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}), M_2(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{5}), M_3(\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}), M_4(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{5}),$$

§5. PARABOL

<u>Dạng toán 1:</u> Xác định các thuộc tính của Parabol (P)

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

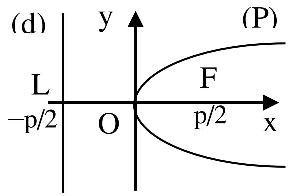
Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Parabol (P) về dạng chính tắc

$$(P): y^2 = \pm 2px \text{ hoặc } (P): x^2 = \pm 2py.$$

Bước 2: Xét các khả năng:

Dạng 1: Parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p>0$)

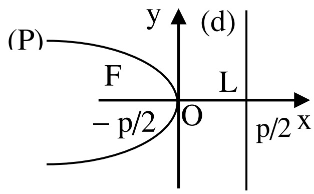
Các thuộc tính của (P) gồm:



- Đỉnh O(0. 0),
- Tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$, 0),
- Đường chuẩn (d): $x = -\frac{p}{2}$,
- Parabol, nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên phải Ox.

Dạng 2: Parabol (P): $y^2 = -2px$ ($p>0$)

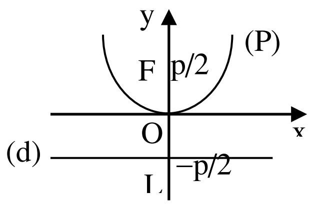
Các thuộc tính của (P) gồm:



- Đỉnh O(0. 0),
- Tiêu điểm F ($-\frac{p}{2}$, 0),
- Đường chuẩn (d): $x = \frac{p}{2}$,
- Parabol, nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên trái Ox.

Dạng 3: Parabol (P): $x^2 = 2py$ ($p>0$)

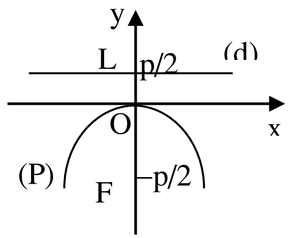
Các thuộc tính của (P) gồm:



- Đỉnh O(0. 0),
- Tiêu điểm F (0, $\frac{p}{2}$),
- Đường chuẩn (d): $y = -\frac{p}{2}$,
- Parabol, nhận Oy làm trục đối xứng, đồ thị có hướng lên trên.

Dạng 4: Parabol (P): $x^2 = -2py$ ($p>0$)

Các thuộc tính của (P) gồm:



- Đỉnh O(0. 0),
- Tiêu điểm F (0, $-\frac{p}{2}$),
- Đường chuẩn (d): $y = \frac{p}{2}$,
- Parabol, nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị có hướng xuống dưới.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp phương trình của (P) có dạng:

$$(P): (y - \beta)^2 = \pm 2p(x - \alpha) \text{ hoặc } (P): (x - \alpha)^2 = \pm 2p(y - \beta).$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(P): Y^2 = \pm 2pX \text{ hoặc } (P): X^2 = \pm 2pY.$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục Oxy.

Thí dụ 1. *Chứng tỏ rằng phương trình* $Ax^2 + By = 0$, *với* $A, B \neq 0$ *là phương trình của một Parabol có đỉnh* $O(0, 0)$, *nhận* Oy *làm trục đối xứng. Tìm tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của Parabol đó.*

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$Ax^2 = -By \Leftrightarrow x^2 = -\frac{B}{A}y \overset{-\frac{B}{A}=2p}{\Leftrightarrow} x^2 = 2py$$

đó chính là phương trình của một Parabol có đỉnh O(0, 0), nhận Oy làm trục đối xứng. Parabol đó có:

- Tiêu điểm $F(0; p) = (0; -\frac{B}{2A})$.
- Phương trình đường chuẩn $y = -p \Leftrightarrow y = \frac{B}{2A}$.

Thí dụ 2. *Chuyển phương trình Parabol (P) về dạng chính tắc, từ đó xác định các thuộc tính của nó và vẽ hình, biết* $(P): y^2 + 2y - 4x - 3 = 0$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Chuyển phương trình của (P) về dạng:

$$(P): (y + 1)^2 = 4(x + 1)$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS}$ với $S(-1, -2)$ thành hệ trục SXY, với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(P): Y^2 = 4X \Rightarrow p = 2.$$

Khi đó trong hệ trục SXY, (P) có các thuộc tính:

- Đỉnh S.
- Trục đối xứng SX chứa tiêu điểm F(1, 0).
- Phương trình đường chuẩn (d): $X = -1$.

Do đó, trong hệ trục Oxy, (P) có các thuộc tính:

Đỉnh S(−1, −1).

- Trục đối xứng là đường thẳng y + 1 = 0 chứa tiêu điểm F(0, −1).
- Phương trình đường chuẩn (d): x + 2 = 0.

Thí dụ 3. *Cho họ đường cong* $(P_m): y^2 - 2my - 2mx + m^2 = 0$.

Tìm điều kiện của m *để* (P_m) *là phương trình một Parabol, khi đó*:

a. *Tìm quĩ tích đỉnh của họ* (P_m).

b. *Tìm quĩ tích tiêu điểm của họ* (P_m).

✍ *Giải*

Chuyển phương trình của (P_m) về dạng:

$$(P_m): (y - m)^2 = 2mx$$

Để phương trình trên là phương trình của một Parabôn điều kiện là $m \neq 0$.

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS}$ với S(0; m) thành hệ trục SXY, với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + m \end{cases}$$

Khi đó:

(P): $Y^2 = 2mX \Rightarrow p = m$.

Khi đó trong hệ trục SXY, (P_m) có các thuộc tính:

- Đỉnh S.
- Trục đối xứng SX chứa tiêu điểm $F(\frac{m}{2}, 0)$.
- Phương trình đường chuẩn (d): $X = -\frac{m}{2}$.

Do đó trong hệ trục Oxy, (P_m) có các thuộc tính:

- Đỉnh S(0; m).
- Trục đối xứng là y − m = 0 chứa tiêu điểm $F(\frac{m}{2}; m)$.
- Phương trình đường chuẩn (d): $x + \frac{m}{2} = 0$.

a. Quĩ tích đỉnh của họ (P_m).

$$S: \begin{cases} x = 0 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Vậy quĩ tích đỉnh của (P_m) thuộc trục tung.

b. Quĩ tích tiêu điểm của họ (P_m).

$$F: \begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = m \end{cases} \Rightarrow y = 2x \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

Vậy quĩ tích tiêu điểm của (P_m) thuộc đường thẳng 2x − y = 0.

Dạng toán 2: Lập phương trình của Parabol (P)

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Parabol

$$(P): y^2 = 2px \text{ hoặc } (P): x^2 = 2py.$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (P)$ có tiêu điểm F và dường chuẩn (d).

Bước 2: Chuyển MF = MH thành biểu thức giải tích nhờ:

$$MF^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 \text{ và } MH = d(M, (d)).$$

Bước 3: Thu gọn.

☞ ***Chú ý***:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Parabol (P) có phương trình:
$$(P): y^2 = 2px.$$
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác phương trình Parabol hoặc chứng minh tập hợp điểm là Parabol.

Thí dụ 1. *Viết phương trình Parabol* (P) *có đỉnh là gốc toạ độ và đi qua điểm* A(2, 2).

✍ *Giải*

Parabol (P) có đỉnh O có phương trình

$$(P): y^2 = 2px \text{ hoặc } (P): x^2 = 2py.$$

Trường hợp 1: Nếu phương trình của (P): $y^2 = 2px$.

Vì $A \in (P)$, suy ra $4 = 4p \Leftrightarrow p = 1$.

Khi đó phương trình Parabol (P_1): $y^2 = 2x$.

Trường hợp 2: Nếu phương trình của (P): $x^2 = 2py$.

Vì $A \in (P)$, suy ra $4 = 4p \Leftrightarrow p = 1$.

Khi đó phương trình Parabol (P_2): $x^2 = 2y$.

Vậy tồn tại hai Parabol (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho điểm* F(3, 0).

a. *Lập phương trình Parabol* (P) *có tiêu điểm* F *và đỉnh là gốc toạ độ.*
b. *Một điểm nằm trên Parabol* (P) *có hoành độ* $x = 2$. *Hãy tính khoảng cách từ điểm đó tới tiêu điểm.*
c. *Qua* I(2, 0) *dựng đường thẳng (d) thay đổi luôn cắt Parabol* (P) *tại hai điểm* A, B. *Chứng minh rằng tích số khoảng cách từ* A *và* B *tới* Ox *là một hằng số.*

✍ *Giải*

a. Parabol (P) có tiêu điểm F(3, 0) và đỉnh O(0, 0) suy ra:

$$(P): y^2 = 2px.$$

Ta có $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$.

Vậy, phương trình Parabol (P): $y^2 = 12x$.

b. Với điểm $M(2, y) \in (P)$ luôn có:

$$FM = x + \frac{p}{2} = 2 + 3 = 5.$$

c. Đường thẳng (d): $a(x - 2) + by = 0$ đi qua I.

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 12x \\ a(x-2) + by = 0 \end{cases}.$$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$ay^2 - 12by + 24a = 0. \qquad (1)$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} y_A + y_B = \dfrac{12b}{a} \\ y_A.y_B = 24 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ A và B đến trục Ox theo thứ tự là:

$$h_1 = |y_A|,\ h_2 = |y_B|.$$

Nhận xét tích

$$h_1.h_2 = |y_A.y_B| = 24 - \text{không đổi}.$$

<u>Dạng toán 3:</u> Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Parabol

Phương pháp thực hiện

1. Xét vị trí tương đối của điểm $M(x_0, y_0)$ với Parabol (P) : $y^2 = 2px$, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Xác định phương tích của M đối với Parabol (P) là :

   $$P_{M/(P)} = y_0^2 - 2px_0.$$

   Bước 2: Kết luận:
   - Nếu $P_{M/(P)} < 0 \Leftrightarrow$ M nằm trong Parabol.
   - Nếu $P_{M/(P)} = 0 \Leftrightarrow$ M nằm trên Parabol.
   - Nếu $P_{M/(P)} > 0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài Parabol.

☞ ***Chú ý***: Ta có các kết quả sau:

- $M(x, y) \in$ *miền trong* của (P) $\Rightarrow$ qua M không thể kẻ được tiếp tuyến tới (P).
- $M(x, y) \in$ *miền ngoài* của (P) $\Rightarrow$ qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (P).
- M(x, y) nằm trên (P) $\Rightarrow$ qua M kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

2. Xét vị trí tương đối của đường thẳng với Parabol bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (P).

Thí dụ 1. *Cho Parabol* (P): $y^2 = 4x$ và (d): $2x - y - 4 = 0$.

Tìm các điểm $M \in (d)$ *để từ đó*:

a. *Không kẻ được tiếp tuyến nào tới* (P).
b. *Kẻ được một tiếp tuyến tới* (P).
c. *Kẻ được hai tiếp tuyến tới* (P).

Giải

Với mỗi điểm $M(x_0, y_0) \in (d)$, ta có:

$2x_0 - y_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2x_0 - 4$.

$P_{M/(P)} = y_0^2 - 4x_0 = (2x_0 - 4)^2 - 4x_0 = 4x_0^2 - 20x_0 + 16$.

a. Để từ M không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P)

$\Leftrightarrow P_{M/(P)} < 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 20x_0 + 16 < 0 \Leftrightarrow 1 < x_0 < 4$.

Vậy, tập hợp các điểm $M(x_0, y_0) \in (d)$ có hoành độ thoả mãn $1 < x_0 < 4$ không kẻ được tiếp tuyến nào tới (P).

b. Để từ M kẻ được một tiếp tuyến tới (P)

$$\Leftrightarrow P_{M/(P)} = 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 20x_0 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1,-2) \\ M_2(4,4) \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai điểm $M_1(1, -2)$ và $M_2(4, 4)$ thuộc (d) từ đó kẻ được một tiếp tuyến tới (P).

c. Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến tới (P)

$$\Leftrightarrow P_{M/(P)} > 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 20x_0 + 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 < 1 \\ x_0 > 4 \end{array}\right.$$

Vậy, tập hợp các điểm $M(x_0, y_0) \in (d)$ có hoành độ $x_0 \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới (P).

Thí dụ 2. *Cho Parabol và đường thẳng* (d_1) *có phương trình*:

$$(P): y = x^2 - 2x + 2, \quad (d_1): x - y - 1 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) *cùng phương với đường thẳng* (d_1) *và cắt* (P) *tại 2 điểm phân biệt* A, B *sao cho* AB = 4.

Giải

Đường thẳng (d) cùng phương với đường thẳng (d_1) có phương trình:

(d): $x - y + C = 0$.

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ x - y + C = 0 \end{cases}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$x^2 - 3x + 2 - C = 0. \quad (1)$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4(2 - C) \geq 0 \Leftrightarrow C \geq -\frac{1}{4}.$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 3 \\ x_A.x_B = 2 - C \end{cases}.$$

Với giả thiết AB = 4, ta được:

$$16 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_A - x_B)^2 + [(x_A + C) - (x_B + C)]^2$$
$$= 2(x_A - x_B)^2 = 2[(x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B] = 2[9 - 4(2 - C)] = 2(1 + 4C)$$
$$\Leftrightarrow 1 + 4C = 8 \Leftrightarrow C = \frac{7}{4}.$$

Vậy, đường thẳng (d) có phương trình $x - y + \frac{7}{4} = 0$.

Thí dụ 3. *Cho Parabol* (P): $y^2 = 4x$. *Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của* (P) *cắt* (P) *tại hai điểm phân biệt* A *và* B. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ* A *và* B *đến trục của* (P) *là một đại lượng không đổi.*

✍ *Giải*

Parabol (P) có tiêu điểm F(1, 0).

Đường thẳng (d): ax + by + c = 0 đi qua F(1, 0) có dạng:

(d): ax + by − a = 0.

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ ax + by - a = 0 \end{cases}.$$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$ay^2 + 4by - 4a = 0. \quad (1)$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} y_A + y_B = -\dfrac{4b}{a} \\ y_A.y_B = -4 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ A và B đến trục Ox theo thứ tự là:

$$h_1 = |y_A|, \ h_2 = |y_B|.$$

Nhận xét tích

$$h_1.h_2 = |y_A.y_B| = 4.$$

Vậy, tích các khoảng cách từ A và B đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

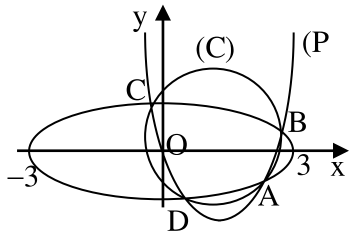
Thí dụ 4. *Cho Parabol* (P) *và Elíp* (E) *có phương trình*:

$$(P): y = x^2 - 2x \text{ và } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

a. *Chứng minh rằng* (P) *cắt* (E) *tại bốn điểm phân biệt* A, B, C, D.

b. *Lập phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó*.

✍ *Giải*



a. Xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (E)

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad (I)$$

$\Rightarrow x^2 + 9(x^2 - 2x)^2 = 9$

$\Leftrightarrow f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0.$ (1)

Ta có:

$f(-1) = 73 > 0, f(0) = -9 < 0, f(1) = 1 < 0, f(2) = -77 < 0, f(3) = 81 > 0$

Do đó:

- $f(-1).f(0) < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(-1, 0)$.
- $f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(0, 1)$.
- $f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(1, 2)$.
- $f(2).f(3) < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm thuộc $(2, 3)$.

Vậy, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (d) \cap (P) = \{A, B, C, D\}$.

b. Từ hệ (I), ta được :

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 9 \\ 8(x^2 - 2x) = 8y \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{8}{9})^2 + (y - \frac{4}{9})^2 = \frac{161}{81}. \quad (*)$$

Nhận xét rằng toạ độ của A,B,C,D cùng thoả mãn (*).

Vậy, phương trình đường tròn đi qua A, B, C, D có dạng:

$$(C): (x - \frac{8}{9})^2 + (y - \frac{4}{9})^2 = \frac{161}{81}.$$

Dạng toán 4: Điểm và Parabol.

Phương pháp thực hiện

Với Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y^2 = 2px.$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (P) \Rightarrow y_0^2 = 2px_0$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0.

☞ ***Chú ý***: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

$$MF = x_0 + \frac{p}{2}.$$

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Parabol với một đường khác ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

Thí dụ 1. *Cho Parabol* (P): $y = x^2$. *Một góc vuông ở đỉnh* O *cắt Parabol tại* A_1 *và* A_2. *Hình chiếu của* A_1 *và* A_2 *lên* Ox *là* B_1 *và* B_2.

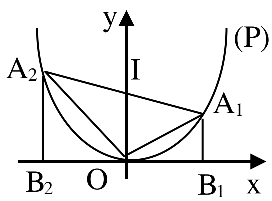
a. *Chứng minh rằng* $OB_1.OB_2 = \text{const}$.

b. *Chứng minh rằng* A_1A_2 *luôn đi qua một điểm cố định*.

✍ *Giải*

a. Giả sử $A_1 \in (P) \Rightarrow A_1(x_0,\ x_0^2)$.

Khi đó:



- $B_1(x_0, 0) \Rightarrow OB_1 = |x_0|$.
- Phương trình đường thẳng (OA_1): $y = xx_0$.
- Theo giả thiết $OA_2 \perp OA_1$

  $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(O\,A_2)$: $y = -\frac{1}{x_0}x$.
- Toạ độ của A_2 là nghiệm hệ phương trình:

$$A_2: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{x_0}x \end{cases} \Rightarrow A_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{x_0} \\ y = \frac{1}{x_0^2} \end{cases} \Rightarrow A_2\left(-\frac{1}{x_0},\ \frac{1}{x_0^2}\right).$$

- $B_2\left(-\frac{1}{x_0}, 0\right) \Rightarrow OB_2 = \left|-\frac{1}{x_0}\right|$.

Vậy $OB_1.OB_2 = 1$.

b. Ta lần lượt có:

▪ Phương trình (A_1A_2) được xác định bởi:

$$(A_1\,A_2):\ \frac{x + \frac{1}{x_0}}{x_0 + \frac{1}{x_0}} = \frac{y - \frac{1}{x_0^2}}{x_0^2 - \frac{1}{x_0^2}}$$

$$\Leftrightarrow (A_1\,A_2):\ x\,x_0^3 + (1 - y)\,x_0^2 - xx_0 = 0. \qquad (1)$$

- Ta đi chứng minh A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Thật vậy giả sử I(x, y) là điểm cố định của họ đường thẳng A_1A_2

$$\Leftrightarrow \text{(1) đúng với mọi } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(0, 1).$$

Vậy (A_1A_2) luôn đi qua một điểm cố định I(0, 1).

§6. BA ĐƯỜNG CÔNÍC

Thí dụ 1. *Biện luận theo* m *hình dạng của đường* $(\mathscr{C})$ *có phương trình*:

$$(\mathscr{C}): (m - 1)x^2 + my^2 = m^2 - m.$$

✍ *Giải*

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình của $(\mathscr{C})$ về dạng:

$$m[(x - 1)^2 + y^2] = (x - m)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|x - m|} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy với điểm F(1, 0) và đường thẳng (Δ): x = m, ta có nhận xét:

- Với m < 0, thì $(\mathscr{C})$ là tập ∅.
- Với m = 0, thì $(\mathscr{C})$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: x = 0 là phương trình trục Oy.
- Với:
$$\begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow (\mathscr{C}) \text{ là phương trình của Elíp.}$$
- Với:
$$\begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1 \Rightarrow (\mathscr{C}) \text{ là phương trình của Hypebol.}$$
- Với:
$$\begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{m}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow (\mathscr{C}) \text{ là phương trình của Parabol điểm (có dạng } y^2 = 0).$$

Cách 2: Ta xét dựa trên các tính chất đại số:

a. Với $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1$

- Với m = 0, ta được:
  $(\mathscr{C})$: $-x^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: x = 0 là phương trình trục Oy.
- Với m = 1, ta được:
  $(\mathscr{C})$: $y^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathscr{C})$: y = 0 là phương trình trục Ox.

b. Với $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq 1$

$$(\mathscr{C}): \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m-1} = 1.$$

- Với:

$$\begin{cases} m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow (\mathscr{C}) \text{ là phương trình của Elíp.}$$

- Với:

$$m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1 \Rightarrow (\mathscr{C}) \text{ là phương trình của Hypebol.}$$

Thí dụ 2. *Lập phương trình của Côníc* (C) *có tâm sai* $e = \frac{1}{2}$, *một tiêu điểm là* $F(-3; 1)$ *và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là* $(\Delta): y + 2 = 0$.

✍ *Giải*

Với $M(x, y) \in (E)$ ta có:

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2}}{|y+2|} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4[(x+3)^2 + (y-1)^2] = (y+2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 3y^2 + 24x - 12y + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{\frac{8}{3}} = 1.$$

Đó chính làphương trình của Elíp (E).

Thí dụ 3. *Lập phương trình của Hypebol, biết tiêu điểm* $F(2, -3)$, *đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó có phương trình* $3x - y + 3 = 0$ *và tâm sai* $e = \sqrt{5}$.

✍ *Giải*

Với $M(x, y) \in (H)$ ta có:

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}}{\frac{|3x - y + 3|}{\sqrt{10}}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 7x^2 - y^2 - 6xy + 26x - 18y - 17 = 0.$$

Đó chính làphương trình của Hypebol (H).

Thí dụ 4. *Lập phương trình của Parabol, biết tiêu điểm* $F(0, 2)$, *đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó có phương trình* $3x - 4y - 12 = 0$.

✍ *Giải*

Với $M(x, y) \in (P)$ ta có:

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = 1 \Leftrightarrow MF^2 = d^2(M, (\Delta)) \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = \frac{(3x - 4y - 12)^2}{25}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 + 24xy + 72x - 196y - 44 = 0.$$

Đó chính là phương trình của Parabol (P).

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho hình bình hành* ABCD, *biết tâm* I(2; 2) *và phương trình cạnh*

(AB): $2x - y = 0$, (AD): $4x - 3y = 0$.

Lập phương trình các cạnh BC *và* CD.

✍ *Giải*

a. Cạnh BC đối xứng với AD qua I, ta lần lượt thực hiện:

Với mỗi đểm $M(x, y) \in (AD) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1) \in (BC)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 4 \\ y + y_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x_1 \\ y = 4 - y_1 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Thay (I) vào phương trình của (AD), ta được:

$$4(4 - x_1) - 3(4 - y_1) = 0 \Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 - 4 = 0. \qquad (1)$$

$$4x - 3y - 4 = 0. \qquad (2)$$

Vậy phương trình (BC): $4x - 3y - 4 = 0$.

b. Cạnh CD đối xứng với AB qua I, ta lần lượt thực hiện:

Lấy điểm $O(0, 0) \in (AB)$, gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua I $\Rightarrow O_1(4, 4)$.

- Vì (CD) // (AB): $2x - y = 0 \Rightarrow$ (CD): $2x - y + C = 0$.
- Vì $O_1 \in (CD) \Rightarrow C = -4$.

Vậy, phương trình đường thẳng (CD): $2x - y - 4 = 0$.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC, *biết* A(1, 3) *và hai trung tuyến có phương trình là*:

$x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$.

Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

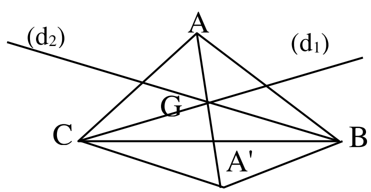
✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Để có được phương trình các cạnh của ΔABC ta đi xác định toạ độ điểm B, C.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G của ΔABC, khi đó:

$$\begin{cases} A'B // (d_1) \\ A'C // (d_2) \end{cases}.$$



Suy ra:

Điểm B là giao điểm của (A'B) và (d_2).

Điểm C là giao điểm của (A'C) và (d_1).

Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó toạ độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$$

- Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G, suy ra A'(1; –1).

- Toạ độ điểm B: Phương trình đường thẳng (A'B) được xác định bởi:

$$(A'B): \begin{cases} \text{qua } A' \\ (A'B)//(d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (A'B): \begin{cases} \text{qua } A'(1,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CG}(2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (A'B): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$$

$\Leftrightarrow$ (A'B): $x - 2y - 3 = 0$.

Điểm $\{B\} = (A'B) \cap (d_2)$, toạ độ điểm B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow B(5,\ 1).$$

- Tương tự, ta có toạ độ điểm $C(-3,\ -1)$.
- Phương trình cạnh AC, được xác định bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow (AC): x-y+2=0.$$

- Tương tự, ta có :

(AB): $x + 2y - 7 = 0$ và (BC): $x - 4y - 1 = 0$.

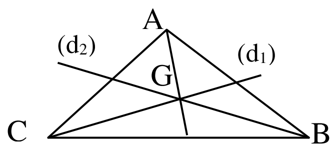
Vậy, phương trình ba cạnh của ΔABC là:

(AB): $x + 2y - 7 = 0$, (BC): $x - 4y - 1 = 0$, (AC): $x - y + 2 = 0$.

Cách 2: Sử dụng phương trình tham số của đường thẳng

Gọi (d_1): $x - 2y + 1 = 0$ là trung tuyến đỉnh C, ta có :

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \end{cases},\ t \in \mathbf{R} \Rightarrow C(2t - 1,\ t).$$



Gọi (d_2): $y - 1 = 0$ là trung tuyến đỉnh B, ta có :

$$(d_2): \begin{cases} x = u \\ y = 1 \end{cases},\ u \in \mathbf{R} \Rightarrow B(u,\ 1).$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó toạ độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow G(1,\ 1).$$

Ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+u+2t-1=3 \\ 3+1+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ u=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(5,1) \\ C(-3,-1) \end{cases}.$$

Khi đó:

- Phương trình cạnh (AB), được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } B(5,1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): x + 2y - 7 = 0.$$

- Phương trình cạnh (AB), được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1,3) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): x - y + 2 = 0.$$

- Phương trình cạnh (BC), được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(5,1) \\ \text{qua } C(-3,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x - 4y - 1 = 0.$$

Vậy, phương trình các cạnh của ΔABC là:

$(AB): x + 2y - 7 = 0$, $(AC): x - y + 2 = 0$, $(BC): x - 4y - 1 = 0$.

Ví dụ 3: *Cho ba đường thẳng* (d_1), (d_2) *và* (d_3) *có phương trình*:

$$(d_1): 3x + 4y - 6 = 0,\ (d_2): 4x + 3y - 1 = 0,\ (d_3): y = 0.$$

Gọi $A = (d_1)\cap(d_2)$, $B = (d_3)\cap(d_2)$, $C = (d_1)\cap(d_3)$.

a. *Lập phương trình đường phân giác trong của góc* $\widehat{A}$ *của* ΔABC.

b. *Tính diện tích tam giác, xác định tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp* ΔABC.

c. *Xác định toạ độ điểm* M *sao cho* $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

✍ *Giải*

Trước tiên:

- Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-2;\ 3).$$

- Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(\frac{1}{4};\ 0).$$

- Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;\ 0).$$

a. Gọi (d_A) là đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$ của ΔABC.

Khi đó, điểm $M(x, y)\in(d_A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M vµ B cïng phÝa víi (AC)} \\ \text{M vµ C cïng phÝa víi (AB)} \\ d(M,(AB)) = d(M,(AC)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 4y - 6)(3.\frac{1}{4} - 6) > 0 \\ (4x + 3y - 1)(4.2 - 1) > 0 \\ \frac{|3x + 4y - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 6 < 0 \\ 4x + 3y - 1 > 0 \\ -(3x + 4y - 6) = 4x + 3y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Đó chính là phương trình tổng quát của đường thẳng (d_A).

b. Diện tích ΔABC được cho bởi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d(A, BC).BC = \frac{1}{2}.3.(2 - \frac{1}{4}) = \frac{21}{8} \text{ (đvdt).}$$

Giả sử I(x; y) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, khi đó:

$$\begin{cases} I \in (d_A) \\ d(I, AC) = d(I, BC) \\ y_I > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ \dfrac{|3x + 4y - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |y| \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 6 = \pm 5y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy, đường tròn nội tiếp ΔABC có tâm $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ và bán kính bằng $\frac{1}{2}$.

c. Giả sử M(x; y), từ hệ thức:

$$\vec{0} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3(\frac{1}{4} - x) + (2 - \frac{1}{4}) \\ 0 = -3y \end{cases} \Rightarrow M(\frac{5}{6}; 0).$$

Ví dụ 4: *Cho hai điểm* A(0, 2), B(2, − 2) *và đường thẳng* (d): x − y − 1 = 0. *Tìm trên đường thẳng điểm* M *trên* (d) *sao cho* MA + MB *nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

Ta có nhận xét:

$t_A.t_B = (-2 - 1)(2 + 2 - 1) = -9 < 0 \Rightarrow$ A, B khác phía với (d)

Ta luôn có:

MA + MB ≥ AB

do đó $(MA + MB)_{Min}$ = AB đạt được khi:

A, B, M thẳng hàng ⇔ {M} = (d) ∩ (AB).

- Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0, 2) \\ \text{qua } B(2, -2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x}{2} = \frac{y - 2}{-2 - 2} \Leftrightarrow (AB): 2x + y - 2 = 0$$

- Toạ độ điểmM là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1, 0).$$

Vậy, tại điểm M(1, 0) ta được MA + MB nhỏ nhất.

Ví dụ 5: *Xác định toạ độ đỉnh* C *của* ΔABC, *biết* A(2; −3), B(3; −2), *trọng tâm của* ΔABC *thuộc đường thẳng* $3x - y - 8 = 0$ *và diện tích của* ΔABC *bằng* $\frac{3}{2}$.

✍ *Giải*

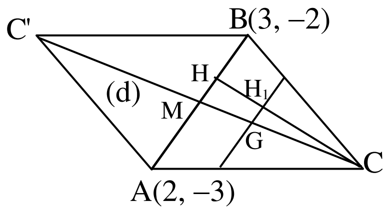
Phân tích: Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm ΔABC.

Khi đó

$$\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_G = 2(x_G - x_M) \\ y_C - y_G = 2(y_G - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2(x_G - x_M) + x_G \\ y_C = 2(y_G - y_M) + y_G \end{cases} \quad (I)$$

Vậy để xác định toạ độ C, ta đi xác định toạ độ M, G.

- Toạ độ điểm M được cho bởi:



$$\begin{cases} 2x_M = x_A + x_B \\ 2y_M = y_A + y_B \end{cases} \Rightarrow M(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}).$$

- Điểm $G(x, y) \in (d) \Rightarrow 3x - y - 8 = 0$ (1)

Gọi CH là đường cao của ΔABC hạ từ C, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.CH = \frac{3}{2} \Leftrightarrow CH = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow CH = \frac{3}{\sqrt{(3-2)^2 + (-2+3)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Qua G dựng đường thẳng song song với AB cắt CH tại H_1, khi đó:

$$\frac{HH_1}{CH} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow HH_1 = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình (AB) được cho bởi

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(2,-3) \\ \text{qua } B(3,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{-2+3} \Leftrightarrow (AB): x - y - 5 = 0.$$

Nhận xét rằng:

$$d(G, (AB)) = HH_1 \Leftrightarrow \frac{|x-y-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |x - y - 5| = 1 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-y-8=0 \\ |x-y-5|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y-8=0 \\ \left[\begin{array}{l} x-y-5=1 \\ x-y-5=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \ \& \ y=-5 \\ x=2 \ \& \ y=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} G(1,-5) \\ G(2,-2) \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với G(1, – 5) thay vào (I), ta được C(–2, –10).
- Với G(2, – 2) thay vào (I), ta được C(1, –1).

Vậy có hai điểm C thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: *Cho họ đường cong*:

$$(C_m): x^2 + y^2 - (m + 6)x - 2(m - 1)y + m + 10 = 0. \quad (1)$$

a. *Tìm* m *để* (C_m) *là một họ đường tròn. Tìm quĩ tích tâm* I_m.

b. *Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn* (C_m).

c. *Chứng minh rằng các đường tròn của họ* (C_m) *luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 - c = \frac{(m+6)^2}{4} + (m - 1)^2 - m - 10 = \frac{5m^2}{4} \geq 0, \forall m.$$

Vậy, với mọi giá trị của m phương trình (1) là phương trình của một đường tròn, có tâm $I_m(\frac{m+6}{2}; m - 1)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{5}|m|}{2}$.

Quĩ tích tâm I_m:

$$I_m: \begin{cases} x = \dfrac{m+6}{2} \\ y = m - 1 \end{cases}. \qquad (I)$$

Khử m từ hệ (I), ta được (d): $2x - y - 7 = 0$.

Vậy, tâm I_m của họ (C_m) thuộc đường thẳng (d): $2x - y - 7 = 0$.

b. Giả sử M(x; y) thuộc trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (C_m)

$$\Leftrightarrow P_{M/(C_{m_1})} = P_{M/(C_{m_2})}, \forall m_1, m_2 \text{ và } m_1 \neq m_2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (m_1 + 6)x - 2(m_1 - 1)y + m_1 + 10 =$$
$$= x^2 + y^2 - (m_2 + 6)x - 2(m_2 - 1)y + m_2 + 10$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2)(x + 2y - 1) = 0, \forall m_1, m_2 \text{ và } m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0.$$

Vậy, đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$ là trục đẳng phương cần tìm.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Với m_1 và m_2 bất kỳ ($m_1 \neq m_2$), thì:

(C_{m_1}) có tâm $I_1(\dfrac{m_1+6}{2}; m_1 - 1)$ và bán kính $R_1 = \dfrac{\sqrt{5}|m_1|}{2}$.

(C_{m_2}) có tâm $I_2(\dfrac{m_2+6}{2}; m_2 - 1)$ và bán kính $R_2 = \dfrac{\sqrt{5}|m_2|}{2}$.

suy ra:

$$I_1I_2 = \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right)^2 + (m_1 - m_2)^2} = \frac{\sqrt{5}|m_1 - m_2|}{2} = \left[\begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ |R_1 - R_2| \end{array}\right..$$

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(3; –1).

Cách 2: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (m + 6)x - 2(m - 1)y + m + 10 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(-x - 2y + 1) + x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(3, -1).$$

Nhận xét rằng tâm I_m của họ (C_m) luôn thuộc đường thẳng (d) cố định đi qua M.

Vậy, các đường tròn của họ (C_m) luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định M(3; –1).

Ví dụ 7: *Cho hai điểm* A(8; 0); B(0; 6).

a. *Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp* ΔOAB.

b. *Lập phương trình đường tròn nội tiếp* ΔOAB.

✍ *Giải*

a. Chính là đường tròn đường kính AB, có phương trình $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

b. Giả sử đường tròn (C) có tâm I(a, b) và bán kính r.

Cách 1: Tâm I thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$ và phân giác trong của góc $\angle BAO$.

Phương trình phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$ là x − y = 0.

Phương trình cạnh (AB) được cho bởi:

$$(AB): \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

Phương trình các đường phân giác của góc $\widehat{BAO}$ được cho bởi:

$$\frac{3x + 4y - 24}{\sqrt{9+16}} = \pm\frac{y}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\Delta_1): 3x - y - 24 = 0\\ (\Delta_2): 3x + 9y - 24 = 0\end{array}\right..$$

(Δ_2) là đường phân giác trong của góc $\widehat{BAO}$.

Khi đó toạ độ tâm I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0\\ 3x + 9y - 24 = 0\end{cases} \Leftrightarrow I(2, 2).$$

Bán kính r được cho bởi r = d(I, OA) = 2.

Vậy phương trình (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

- Tâm I(a, b) thuộc góc phần tư thứ nhất, suy ra a, b > 0.
- (C) tiếp xúc với OA, OB, vậy a = b = r.

Ta có $S_{\Delta OAB} = p.r$ (1)

trong đó:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = 24 \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{2}(OA + OB + AB) = 12 \quad (3)$$

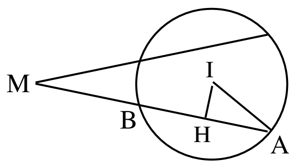
Thay (2), (3) vào (1), ta được r = 2.

Vậy, phương trình đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

<u>Ví dụ 8:</u> *Cho điểm* M(6, 2) *và đường tròn* (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

a. *Chứng tỏ rằng điểm* M *nằm ngoài* (C).

b. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *đi qua* M *và cắt đường tròn* (C) *tại hai điểm* A, B *sao cho* AB = $\sqrt{10}$.



✍ *Giải*

Đường tròn (C) có tâm I(1, 2) và bán kính R = $\sqrt{5}$.

a. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = (6 - 1)^2 + (2 - 2)^2 - 5 = 20 > 0 \Leftrightarrow \text{M nằm ngoài đường tròn.}$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Đường thẳng (d) đi qua M có dạng:

(d): A(x − 6) + B(y − 2) = 0 ⇔ (d): Ax + By − 6A − 2B = 0.

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện dầu bài khi và chỉ khi:

$$d(I, (d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|A + 2B - 6A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm 3B.$$

Khi đó:

- Với $A = -3B$, ta được (d_1): $x - 3y = 0$.
- Với $A = 3B$, ta được (d_2): $x + 3y - 12 = 0$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 9: *Cho đường tròn* (C) *có phương trình* :

$$(C): x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0.$$

a. *Tìm toạ độ tâm và và bán kính của* (C).

b. *Viết phương trình tiếp tuyến với* (C) *đi qua điểm* $A(-1, 0)$.

c. *Viết phương trình tiếp tuyến với* (C) *vuông góc với đường thẳng* (d): $3x - 4y + 5 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay, tâm $I(2, -4)$ và bán kính $R = 5$.

b. Vì $A \in (C)$ nên tiếp tuyến có phương trình:

$$x.(-1) + y.0 - 2(x + 1) + 4(y + 0) - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0.$$

c. Gọi (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Tiếp tuyến $(\Delta) \perp (d)$ nên có phương trình:

$$(\Delta) : 4x + 3y + c = 0.$$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (C) điều kiện là:

$$d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|4.2 + 3.(-4) + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = 21 \\ c_2 = -29 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $c_1 = 21$, ta được tiếp tuyến (Δ_1): $4x + 3y - 21 = 0$.
- Với $c_2 = -29$, ta được tiếp tuyến (Δ_2): $4x + 3y + 29 = 0$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2 (Hướng dẫn): Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): x.x_0 + y.y_0 - 2(x + x_0) + 4(y + y_0) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (d): (x_0 - 2)x + (y_0 + 4)y - 2x_0 + 4y_0 - 5 = 0 \qquad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0) \in (C)$ nên $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 8y_0 - 5 = 0$. (2)

Đường thẳng $(d) \perp (\Delta)$ khi và chỉ khi:

$$3.(x_0 - 2) - 4(y_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - 4y_0 - 22 = 0. \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) để suy ra x_0 và y_0, từ đó suy ra hai tiếp tuyến (d_1), (d_2).

Ví dụ 10: *Cho điểm* M(2; 3) *và đường tròn* (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. *Lập phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *cắt* (C) *tại hai điểm phân biệt A, B sao cho*:

a. $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$. b. $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 2.

a. Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \text{ và } \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

Khi đó:

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = -3 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}.(-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}) = -\frac{3}{16}AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = 16 \Leftrightarrow AB = 4.$$

Vì (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho:

$$AB = 4 = 2R \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} \text{qua } M(2;3) \\ \text{qua tâm } I(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{3-3} \Leftrightarrow (d): y - 3 = 0.$$

b. Từ điều kiện suy ra M là trung điểm AB, do đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(2;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IM}(1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): 1.(x-2) = 0 \Leftrightarrow (d): x - 2 = 0.$$

Ví dụ 11: *Cho đường tròn* (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. *Xác định toạ độ các đỉnh* B, C *của* ΔABC *đều nội tiếp trong đường tròn* (C), *biết điểm* A(−2, 2).

Giải

Ta có thể thực hiện theo ba cách sau:

Cách 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua I ⇒ toạ độ điểm $A_1(4, 2)$.

Đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tam } A_1(4,2) \\ \text{bkinh } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Khi đó: $(C)\cap(C_1) = \{B, C\}$, toạ độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ 6x - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}.$$

Cách 2: Nhận xét rằng: ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C) ⇒ tâm I là trọng tâm của ΔABC.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC ⇒ $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IH} \Rightarrow H(\frac{5}{2}, 2)$.

Phương trình cạnh BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } H(\frac{5}{2}, 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AI}(3, 0) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x - \frac{5}{2} = 0.$$

Khi đó $(BC) \cap (C) = \{B, C\}$, toạ độ B, C là nghiệm của :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ x - \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}.$$

Cách 3: Giải sử AB = a, khi đó:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.6 \Leftrightarrow a^2 = 27.$$

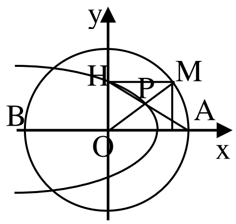
Điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$ sao cho $AM^2 = 27$, ta có:

$$\begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 = 9 \\ (x_0+2)^2 + (y_0-2)^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 = 9 \\ x_0 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\frac{5}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \\ C(\frac{5}{2}, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) \end{cases}.$$

Ví dụ 12: *Cho điểm* A(2, 0) *và điểm* M *di chuyển trên đường tròn* (C) *tâm* O *bán kính bằng* 2. *Gọi* H *là hình chiếu vuông góc của* M *lên* Oy.

a. *Tính các toạ độ giao điểm* P *của các đường thẳng* OM *và AH theo góc* $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
b. *Xác định và vẽ quĩ tích của* P *khi* m *thay đổi trên* (C).

✍ *Giải*



Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$

Điểm $M(a, b) \in (C) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$ (1)

H là hình chiếu vuông góc của M lên Oy, vậy H(0, b).

Phương trình (AH) được cho bởi:

$$(AH): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow (AT): bx + 2y - 2b = 0.$$

Phương trình OM là (OM): $bx - ay = 0$.

Toạ độ giao điểm P là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} bx + 2y - 2b = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Hệ có nghiệm khi

$$-ab - 2b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \;\&\; a \neq -2 \Leftrightarrow a \neq \pm 2.$$

a. Ta có

$$M: \begin{cases} a = OM.\cos\alpha \\ b = OM.\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\cos\alpha \\ b = 2\sin\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ M(2cosα, 2sinα) & P($\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+1}, \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+1}$).

b. Xác định và vẽ quĩ tích của P khi M thay đổi trên (C).

Từ hệ (I), ta được $a = \dfrac{2x}{2-x}$ và $b = \dfrac{2y}{2-x}$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được phương trình quĩ tích P là $y^2 = 4 - 4x$.

Vậy tập hợp điểm P thuộc Parabol $y^2 = 4 - 4x$ trừ hai điểm A, B.

Ví dụ 13: *Cho hai điểm* A(a; 0) *và* B(0; b) *với* ab ≠ 0. *Gọi* (C) *là đường tròn tiếp xúc với* Ox *tại* A *và có tâm* C *với tung độ* $y_C = m$ (m *là tham số*). *Lấy mọi giá trị khác* 0 *và khác* $\dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

a. *Đường thẳng* AB *cắt đường tròn* (C) *tại giao điểm thứ hai là* P. *Xác định toạ độ của* P.

b. *Xác định tâm* K *của đường tròn* (K) *tiếp xúc với* Oy *tại* B, *và đi qua* P.

c. *Giả sử* (C) ∩ (K) = {P, Q}. *Chứng minh rằng khi m thay đổi* PQ *luôn đi qua một điểm cố định.*

✍ *Giải*

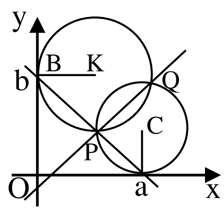
Đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C với tung độ $y_C = m$, suy ra C(a, m) và bán kính R = CA = m. Vậy phương trình đường tròn (C) có dạng:

$$(C): (x-a)^2 + (y-m)^2 = m^2 \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 - 2ax - 2my + a^2 = 0.$$

a. Xác định toạ độ của P.

Phương trình (AB) có dạng:

$$(AB): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow (AB): bx + ay - ab = 0.$$



Toạ độ giao điểm của (AB) và (C) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} bx + ay - ab = 0 & (1) \\ (x-a)^2 + (y-m)^2 = m^2 & (2) \end{cases}$$

Rút x – a từ (1) thay vào (2) ta được:

$$\left(-\frac{a}{b}y\right)^2 + (y-m)^2 = m^2 \Leftrightarrow (a^2+b^2)y^2 - 2b^2my = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{2b^2m}{a^2+b^2} \end{array}\right..$$

Thay $y = \dfrac{2b^2m}{a^2+b^2}$ vào (1), được $x = a\left[1 - \dfrac{2b^2m}{a^2+b^2}\right]$.

Vậy, toạ độ điểm P($a\left[1 - \dfrac{2b^2m}{a^2+b^2}\right], \dfrac{2b^2m}{a^2+b^2}$).

b. Giả sử đường tròn (K) có dạng:

$$(K): (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

(K) tiếp xúc với Oy tại B điều kiện là:

$$\begin{cases} R = \alpha \\ \beta = b \end{cases}.$$

Khi đó (K) có dạng: $(x - \alpha)^2 + (y - b)^2 = \alpha^2$.

Đường tròn (K) đi qua P, suy ra:

$$(a\left[1 - \frac{2b^2m}{a^2+b^2}\right] - \alpha)^2 + (\frac{2b^2m}{a^2+b^2} - b)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{a^2+b^2-2mb}{2a}.$$

Vậy $K(\frac{a^2+b^2-2mb}{2a}, b)$ và phương trình đường tròn (K) có dạng:

$$(K): (x - \frac{a^2+b^2-2mb}{2a})^2 + (y - b)^2 = (\frac{a^2+b^2-2mb}{2a})^2$$

$$\Leftrightarrow (K): x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2-2mb}{a}x - 2by + b^2 = 0.$$

c. Hai đường tròn (C), (K) cắt nhau tại P, Q, vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2my + a^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2-2mb}{a}x - 2by + b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2 + 2mb)x + 2a(m - b)y - a(a^2 - b^2) = 0$$

Đó chính là phương trình (PQ).

- Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (PQ) luôn đi qua với mọi m. Khi đó:

$$(a^2 - b^2 + 2mb)x_0 + 2a(m - b)y_0 - a(a^2 - b^2) = 0 \ \forall m$$

$$\Leftrightarrow 2(bx_0 + ay_0)m + (a^2 - b^2)x_0 - 2aby_0 - a(a^2 - b^2) = 0 \ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bx_0 + ay_0 = 0 \\ (a^2 - b^2)x_0 - 2aby_0 - a(a^2 - b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \text{ và } y_0 = -\frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$$

Đó chính là toạ độ điểm cố định M mà (PQ) luôn đi qua với $\forall$m.

Ví dụ 14: *Cho họ Elíp* (E_m): $x^2 = 2y - \frac{y^2}{m}$ với $0 < m < 1$.

a. *Đưa phương trình về dạng chính tắc, xác định toạ độ tâm, tiêu điểm* F_1, F_2 *và các đỉnh* A_1, A_2 *của Elíp.*

b. *Tìm quĩ tích các đỉnh* A_1, A_2 *của Elíp khi* m *thay đổi.*

c. *Tìm quĩ tích các tiêu điểm* F_1, F_2 *của Elíp khi* m *thay đổi.*

✍ *Giải*

a. Chuyển phương trình của (E_m) về dạng:

$$(E_m): mx^2 + y^2 - 2my = 0 \Leftrightarrow (E_m): mx^2 + (y - m)^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (E_m): \frac{x^2}{m} + \frac{(y-m)^2}{m^2} = 1.$$

Tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với I(0; m) thành hệ trục IXY, với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + m \end{cases}$$

Khi đó

(E): $\dfrac{X^2}{m} + \dfrac{Y^2}{m^2} = 1$ vì $0 < m < 1 \Rightarrow m^2 < m$.

Trong hệ trục IXY, (E) có các thuộc tính:

- Tâm I(0; 0),
- 2 tiêu điểm $F_1(-\sqrt{m - m^2}\ ; 0)$, $F_2(\sqrt{m - m^2}\ ; 0)$,
- 2 đỉnh $A_1(-\sqrt{m}\ ; 0)$, $A_2(\sqrt{m}\ ; 0)$.

Do đó trong hệ trục Oxy, (E_m) có:

- Tâm I(0; m),
- 2 tiêu điểm và $F_1(-\sqrt{m - m^2}\ ; m)$, $F_2(\sqrt{m - m^2}\ ; m)$
- 2 đỉnh $A_1(-\sqrt{m}\ ; m)$, $A_2(\sqrt{m}\ ; m)$.

b. Quĩ tích các đỉnh A_1, A_2.

- Quĩ tích đỉnh A_1:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{m} \\ y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < 1 \text{ vµ } x < 0 \\ x^2 = y \end{cases}.$$

Vậy quĩ tích đỉnh A_1 của Elíp khi m thay đổi thuộc phần đồ thị của Parabol (P): $x^2 = y$ với $0 < y < 1$ và $x < 0$.

- Tương tự quĩ tích đỉnh A_2 thuộc phần đồ thị của Parabol (P): $x^2 = y$ với $0 < y < 1$ và $x > 0$.

c. Quĩ tích các tiêu điểm F_1, F_2.

- Quĩ tích tiêu điểm F_1:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{m - m^2} \\ y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < 1 \text{ vµ } x < 0 \\ x^2 = y - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < 1 \text{ vµ } x < 0 \\ x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy quĩ tích tiêu điểm F_1 của Elíp khi m thay đổi thuộc đường tròn (C) có tâm C(0; $\frac{1}{2}$) bán kính R = $\frac{1}{2}$ với $0 < y < 1$ và $x < 0$.

- Tương tự quĩ tích tiêu điểm F_2 thuộc đường tròn (C) có tâm C(0; $\frac{1}{2}$) bán kính R = $\frac{1}{2}$ với $0 < y < 1$ và $x > 0$.

Ví dụ 15: *Cho Elíp* (E): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. *Tìm các điểm* M *thuộc Elíp* (E) *sao cho*:

a. *Có bán kính qua tiêu điểm này bằng* 7 *lần bán kính qua tiêu điểm kia.*
b. M *nhìn hai tiêu điểm dưới một góc* 90^0.

✍ *Giải*

Điểm $M(x_0, y_0) \in (E)$ suy ra:

$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \quad (1)$$

$$MF_1 = a + \frac{cx_0}{a} = 2 + \frac{x_0\sqrt{3}}{2} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx_0}{a} = 2 - \frac{x_0\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

a. Từ giả thiết ta có:

$$\left[\begin{array}{l} MF_1 = 7MF_2 \\ MF_2 = 7MF_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 0 = (MF_1 - 7MF_2)(MF_2 - 7MF_1) = 50MF_1.MF_2 - 7(MF_1^2 + MF_2^2)$$

$$= 50MF_1.MF_2 - 7[(MF_1 + MF_2)^2 - 2MF_1.MF_2]$$

$$= 50MF_1.MF_2 - 7(16 - 2MF_1.MF_2) = 64MF_1.MF_2 - 112$$

$$= 64(2 + \frac{x_0\sqrt{3}}{2}).(2 - \frac{x_0\sqrt{3}}{2}) - 112 = 64(4 - \frac{3x_0^2}{4}) - 112$$

$$= 144 - 48x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_0 = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài là:

$$M_1(\sqrt{3}, \frac{1}{2}), M_2(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}), M_3(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) \text{ và } M_4(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}).$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét ΔMF_1F_2, ta có:

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$ – thực hiện tương tự b).

Cách 2: Vì M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông do đó M thuộc đường tròn (C) đường kính F_1F_2, do đó M là giao điểm của đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 3$ và (E) có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài là:

$$M_9(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), M_{10}(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}),$$

$$M_{11}(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ và } M_{12}(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Ví dụ 16: *Cho điểm* A(0; 6) *và đường tròn* (C): $x^2 + y^2 = 100$. *Lập phương trình quỹ tích tâm các đường tròn đi qua* A *và tiếp xúc với* (C).

✍ *Giải*

Xét đường tròn (C), ta được:

$$\text{(C)}: \begin{cases} \text{Tam } \ O(0,0) \\ \text{Bkinh } \ R = 10 \end{cases}.$$

Giả sử M, là tâm đường tròn qua A và tiếp xúc với (C), ta được:

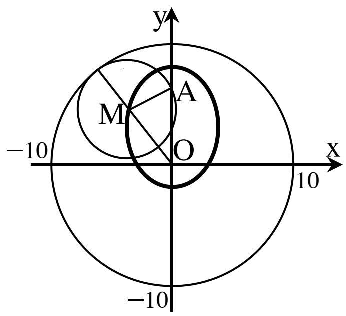
MA + MB = MN + MB = BN = 10

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E) nhận O, A làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng 10.

- Xác định phương trình của Elíp (E)

Vì O, A thuộc Oy nên phương trình của (E) có tâm I(0, 3) có dạng:

(E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$, với $0 < a < b$.



trong đó:

$2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$,

$a^2 = b^2 - c^2 = 25 - 9\left(\frac{OF_2}{2}\right)^2 = 25 - 9 = 16$.

Do đó (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.

Vậy tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.

Ví dụ 17: *Cho Elíp* (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. *Tìm các điểm* M *thuộc Elíp* (E) *sao cho*:

a. *Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất* .

b. $\frac{MF_1}{MF_2} = \frac{3}{5}$.

Giải

a. Điểm $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{25} = 1$. (1)

Khi đó:

$$(x_0 + y_0)^2 = \left(3.\frac{x_0}{4} + 5.\frac{y_0}{5}\right)^2 \le (9 + 25)\left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{25}\right) = 34$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{34} \le x_0 + y_0 \le \sqrt{34}$$

dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{x_0/3}{y_0/5} = \frac{3}{5} \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{25} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{25}{9}x_0 \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{25} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(\frac{3}{\sqrt{34}}; -\frac{25}{3\sqrt{34}}) \\ M_2(-\frac{3}{\sqrt{34}}; -\frac{25}{3\sqrt{34}}) \end{cases}$$

Vậy, ta được:

- $(x_0 + y_0)_{Max} = \sqrt{34}$, đạt được tại M_1.
- $(x_0 + y_0)_{Min} = -\sqrt{34}$, đạt được tại M_2.

b. Từ giả thiết ta có:

$$\left[\begin{array}{l} MF_1 = 3MF_2 \\ MF_2 = 3MF_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 0 = (MF_1 - 3MF_2)(MF_2 - 3MF_1) = 10MF_1.MF_2 - 3(MF_1^2 + MF_2^2)$$

$$= 10MF_1.MF_2 - 3[(MF_1 + MF_2)^2 - 2MF_1.MF_2]$$

$$= 10MF_1.MF_2 - 3(100 - 2MF_1.MF_2) = 16MF_1.MF_2 - 300$$

$$= 16(5 + \frac{4x_0}{5}).(5 - \frac{4x_0}{5}) - 300 = 16(25 - \frac{16x_0^2}{25}) - 300 = 100 - \frac{16^2x_0^2}{25}$$

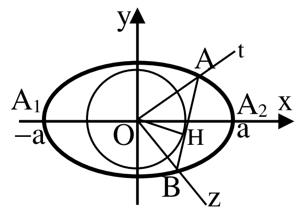
$$\Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{25}{8}.$$

Vậy tồn tại bốn điểm thoả mãn điều kiện đầu bài (*Bạn đọc tính tiếp*)

Ví dụ 18: *Cho Elíp* (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *với* $0 < b < a$.

1. *Gọi* A *là một giao điểm của đường thẳng* $y = kx$ *với* (E). *Tính* OA *theo* a, b, k.
2. *Gọi* A, B *là hai điểm tuỳ ý thuộc* (E) *sao cho* $OA \perp OB$.
   a. *Chứng minh rằng* $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ *không đổi, từ đó suy ra đường thẳng* (AB) *luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*
   b. *Xác định* k *để* ΔOAB *có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.*

✍ *Giải*



1. Toạ độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow x_A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2k^2 + b^2} \text{ và } y_A^2 = \frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2 + b^2}.$$

Từ đó, suy ra

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2k^2 + b^2} + \frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2 + b^2} = \frac{a^2b^2(1 + k^2)}{a^2k^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow OA = ab\sqrt{\frac{1 + k^2}{a^2k^2 + b^2}},$$

2. Giả sử đường thẳng (OA) có phương trình $y = kx$

$$\Rightarrow OA = ab\sqrt{\frac{1 + k^2}{a^2k^2 + b^2}}.$$

Vì OA $\perp$ OB $\Rightarrow$ (OB) có phương trình:

$$y = -\frac{1}{k}x \Rightarrow OB = ab\sqrt{\frac{1+\frac{1}{k^2}}{a^2.\frac{1}{k^2}+b^2}} = ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2+b^2k^2}}.$$

c. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} = \frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2(1+k^2)} + \frac{a^2+b^2k^2}{a^2b^2(1+k^2)} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AB, khi đó:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \Rightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vậy (AB) luôn tiếp xúc với đường tròn (C) tâm O bán kính R = OH có:

$$(C): x^2+y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}}\,ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2+b^2k^2}}$$

$$= \frac{a^2b^2(1+k^2)}{2\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}}. \qquad (1)$$

ΔOAB có diện tích nhỏ nhất.

Ta có:

$$\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)} \le \frac{(a^2k^2+b^2)+(a^2+b^2k^2)}{2} = \frac{(a^2+b^2)(1+k^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+k^2}{\sqrt{(a^2k^2+b^2)(a^2+b^2k^2)}} \ge \frac{2}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), được

$$S_{\Delta OAB} \ge \frac{ab}{a^2+b^2} \Rightarrow S_{min} = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

đạt được khi $a^2k^2 + b^2 = a^2 + b^2k^2 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

ΔOAB có diện tích lớn nhất $-$ *Đề nghị bạn đọc giải.*

Ví dụ 19: *Cho Hyperbol* (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. *Tìm toạ độ điểm* M *thuộc Hyperbol* (H) *sao cho*:

a. *Có bán kính qua tiêu điểm này bằng* 2 *lần bán kính qua tiêu điểm kia.*
b. *Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc* 60^0.
c. *Độ dài* F_1M *ngắn nhất, dài nhất.*
d. *Khoảng cách từ* M *đến đường thẳng* (Δ): $x - y + 1 = 0$ *đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

Hướng dẫn

a. Ta có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ và $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

Điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$ với $x_0 > 0$, suy ra:

$$\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{1} = 1, \quad (1)$$

$$MF_1 = \frac{\sqrt{5}x_0}{2} + 2 \text{ và } MF_2 = \frac{\sqrt{5}x_0}{2} - 2. \quad (2)$$

Từ giả thiết ta có:

$$\left[\begin{array}{l} MF_1 = 2MF_2 \\ MF_2 = 2MF_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 0 = (MF_1 - 2MF_2)(MF_2 - 2MF_1) = 5MF_1.MF_2 - 2(MF_1^2 + MF_2^2)$$

$$= 5MF_1.MF_2 - 2[(MF_1 - MF_2)^2 + 2MF_1.MF_2]$$

$$= 5MF_1.MF_2 - 2(16 + 2MF_1.MF_2) = MF_1.MF_2 - 32$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}x_0}{2} + 2\right).\left(\frac{\sqrt{5}x_0}{2} - 2\right) - 32 = \frac{5x_0^2}{4} - 36$$

$\Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_0$ – *Dành cho bạn đọc*.

b. Xét ΔMF_1F_2, ta có:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^0$$

$$= [(MF_1 - MF_2)^2 + 2MF_1.MF_2] - MF_1.MF_2$$

$$\Leftrightarrow 20 = 16 + MF_1.MF_2 \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{\sqrt{5}x_0}{2} + 2\right).\left(\frac{\sqrt{5}x_0}{2} - 2\right) = \frac{5x_0^2}{4} - 4$$

$\Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{4\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y_0$ – *Dành cho bạn đọc*.

c. Từ (1) suy ra:

$$x_0^2 = a^2\left(1 + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \ge a^2 \Rightarrow |x_0| \ge a.$$

Ta có:

$$F_1M = \left|\frac{cx_0}{a} + a\right| \ge \left|-\frac{ca}{a} + a\right| = |-c + a| = c - a.$$

Vây, ta được $F_1M_{Min} = c - a$, đạt được khi $M \equiv A_1(-a, 0)$.

d. Ta có:

$$d = d(M, (\Delta)) = \frac{|x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d\sqrt{2} = |x_0 - y_0 + 1|.$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$d\sqrt{2} \ge \big|\, |x_0 - y_0| - 1 \,\big|. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức giả Bunhiacôpsk, ta có:

$$|x_0 - y_0| = \left|2.\frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{1}\right| \geq \sqrt{(2^2 - 1^2)(\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{1})} = \sqrt{3}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra:

$$d \geq \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Dấu ' = ' xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0 = -2y_0 \\ \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-4}{\sqrt{5}} \ \& \ y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}} \ \& \ y_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{array} \right..$$

Thử lại: dấu bằng chỉ xảy ra tại $M_2(x_2, y_2)$, do đó:

$$\text{Mind} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \text{ đạt được tại điểm } M_2.$$

Để xác định toạ độ điểm H_2 tương ứng, ta thực hiện theo các bước:

- Lập phương trình đường thẳng (d_2) qua M_2 và vuông góc với (d).
- Xác định tạo độ giao điểm $H_2 = (d_2) \cap (d)$.

Ví dụ 20: *Cho Hypebol* (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. *Gọi* (d) *là đường thẳng qua* O *có hệ số góc* k, (d') *là đường thẳng qua* O *và vuông góc với* (d).

a. *Tìm điều kiện đối với* k *để* (d) *và* (d') *đều cắt* (H).

b. *Tính theo* k *diện tích hình thoi với* 4 *đỉnh là* 4 *giao điểm của* (d), (d') *và* (H).

c. *Xác định* k *để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) qua O có hệ số góc k có dạng: y = kx.
- Đường thẳng (d') qua O và vuông góc với (d) có dạng: $y = -\frac{1}{k}x$.

Toạ độ giao điểm A, C của (d) và (H) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36 \quad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi:

$$9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow |k| < 3/2 \quad (2)$$

Khi đó:

$$x_A^2 = \frac{36}{9 = 4k^2} \text{ và } y_A^2 = \frac{36k^2}{9 = 4k^2}.$$

Toạ độ giao điểm B, D của (d') và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\dfrac{1}{k}x \end{cases} \Rightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36 \qquad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khi:

$$9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow |k| > \frac{2}{3} \qquad (4)$$

Khi đó:

$$x_B^2 = \frac{36k^2}{9k^2 - 4} \text{ và } y_B^2 = \frac{36}{9k^2 - 4}.$$

Kết hợp (2) và (4), ta được:

$$\frac{2}{3} < |k| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2} < k < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} < k < \dfrac{3}{2} \end{array}\right. . \qquad (I)$$

b. Nhận xét:

- A, C là giao điểm của (d) và (H) $\Rightarrow$ A, C đối xứng qua O.
- B, D là giao điểm của (d) và (H) $\Rightarrow$ B, D đối xứng qua O.
- Ngoài ra AC$\perp$BD.

Vậy ABCD là hình thoi.

Ta có:

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta AOB} = 4.\frac{1}{2}.OA.OB = 2\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\ \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

$$= 2.\sqrt{\frac{36}{9 = 4k^2} + \frac{36k^2}{9 = 4k^2}}\ \sqrt{\frac{36k^2}{9k^2 - 4} + \frac{36}{9k^2 - 4}}$$

$$= \frac{72(1 + k^2)}{\sqrt{(9 - 4k^2)(9k^2 - 4)}}$$

c. Hình thoi ABCD có diện tích nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \frac{72(1 + k^2)}{\sqrt{(9 - 4k^2)(9k^2 - 4)}} \text{ nhỏ nhất.}$$

Ta có:

$$\frac{72(1 + k^2)}{\sqrt{(9 - 4k^2)(9k^2 - 4)}} \geq \frac{72(1 + k^2)}{\frac{1}{2}[(9 - 4k^2) + (9k^2 - 4)]} = \frac{144}{5}.$$

Vậy, hình thoi ABCD có diện tích nhỏ nhất bằng $\dfrac{144}{5}$ đạt được khi:

$$9 - 4k^2 = 9k^2 - 4 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

Ví dụ 21: *Cho Hypebol* (H) *có phương trình*:

$$\text{(H): } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

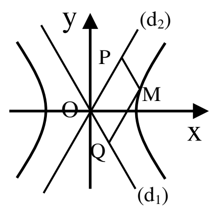
a. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ* M∈(H) *đến các tiệm cận của nó là một hằng số.*

b. *Từ điểm* M∈(H) *kẻ các đường thẳng song song với hai tiệm cận và cắt chúng tại* P, Q. *Chứng minh rằng diện tích hình bình hành* OPMQ *là một hằng số.*

✍ *Giải*

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in (H)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2. \quad (1)$$



Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx + ay = 0 \\ bx - ay = 0 \end{array}\right..$$

a. Khoảng cách h_1 từ điểm M tới tiệm cận bx + ay = 0 được xác định bởi:

$$h_1 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Khoảng cách h_2 từ điểm M tới tiệm cận bx − ay = 0 được xác định bởi:

$$h_2 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

Do đó:

$$h_1.h_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{b^2 + a^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Vậy, tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ của Hypebol (H) đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường đường tiệm $y = \frac{b}{a}x$ với trục Ox. Ta có:

$$\text{tg}\alpha = \frac{b}{a} \text{ và } \sin 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

$$S_{OPMQ} = OP.OQ.\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.OP.OQ \Rightarrow OP.OQ = \frac{a^2 + b^2}{2ab}.S_{OPMQ}$$

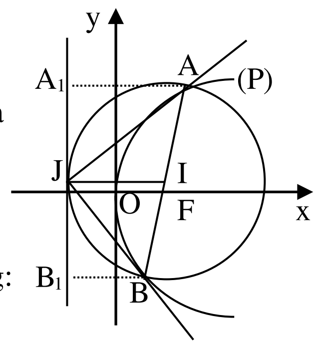
Mặt khác:

$$S_{OPMQ} = OQ.h_1 = OP.h_2 \Rightarrow S^2_{OPMQ} = OP.OQ.h_1h_2 = \frac{a^2 + b^2}{2ab}.S_{OPMQ}.\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow S_{OPMQ} = \frac{ab}{2} \text{ không đổi.}$$

Ví dụ 22: *Cho Parabol* (P): $y^2 = 2px$, $p > 0$. *Chứng minh rằng đường tròn có đường kính là dây cung quá tiêu, tiếp xúc với đường chuẩn.*

Giải



Phương trình đường thẳng (d) đi qua F có dạng:

(d): 2mx – 2y – mặt phẳng = 0.

Toạ độ giao điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ của (P) và (d) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ 2mx - 2y - mp = 0 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$4m^2x^2 - 4p(m^2 + 2)x + m^2p^2 = 0. \qquad (1)$$

Từ đó, ta có :

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{p(m^2+2)}{m^2} \\ x_A.x_B = \dfrac{p^2}{4} \end{cases}.$$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (d) có dạng:

$$my^2 - 2py - mp^2 = 0 \qquad (2)$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} y_A + y_B = p/m \\ y_A.y_B = p^2 \end{cases}.$$

- Phương trình đường tròn (C) đường kính AB:

$$M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + x_Ax_B + y_Ay_B = 0.$$

Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm của đường tròn (C), ta có:

$$I: \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x = \dfrac{p(m^2+2)}{2m^2} \\ y = \dfrac{p}{m} \end{cases}.$$

Gọi R là bán kính của đường tròn (C), ta có:

$$R^2 = x_A^2 + x_B^2 - (x_Ax_B + y_Ay_B) = \left[\frac{p(m^2+1)}{m^2}\right]^2 \Leftrightarrow R = \frac{p(m^2+1)}{m^2}.$$

Khoảng cách từ I đến đường chuẩn (Δ): $x = -\dfrac{p}{2}$ của (P), được xác đỉnh bởi:

$$\frac{|2x_I + p|}{2} = \frac{1}{2}\left|\frac{p(m^2+2)}{m^2} + p\right| = \frac{p(m^2+1)}{m^2} = R.$$

Vậy đường tròn (C) tiếp xúc với đường chuẩn (Δ) của (P).

☞ ***Chú ý***:

1. Ta có thể chứng minh bằng định nghĩa, thực hiện các bước:

Bước 1: Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên đường chuẩn của (P).

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1B_1.

Bước 2: Ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{1}{2}(AF + BF) = \frac{1}{2}AB$$

$\Leftrightarrow$ ΔABJ vuông tại J

$\Leftrightarrow$ Đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của Parabol (P).

2. Đề nghị bạn đọc chứng minh thêm các tính chất sau:

a. Tính độ dài FA, FB theo p, $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ với $0 \le \alpha \le 2\pi$. Từ đó chứng tỏ rằng $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB}$ không đổi khi (d) quay quanh F.

b. Chứng minh rằng FA.FB nhỏ nhất khi (d) vuông góc với Ox.

Ngoài ra còn có tích các khoảng cách từ A và B đến trục Ox là một đại lượng không đổi.

Ví dụ 23: *Cho Parabol* (P) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

(P): $y^2 = x$ và (d): $x - y - 2 = 0$.

a. *Xác định toạ độ giao điểm* A, B *của* (d) *và* (P).

b. *Tìm toạ độ điểm* C *thuộc* (P) *sao cho* :

- ΔABC *có diện tích bằng* 6.
- ΔABC *đều*

c. *Tìm điểm* M *trên cung* AB *của Parabol* (P) *sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi* (P) *và hai dây cung* MA, MB *là nhỏ nhất*.

✍ *Giải*

a. Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1,-1) \\ B(4,2) \end{cases} \text{ và } AB = 3\sqrt{2}.$$

b. Với $C(x, y) \in (P) \Rightarrow C(y^2, y)$.

▪ ΔABC có diện tích bằng 6

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{1}{2}AB.d(C,(d)) = \frac{1}{2}.3\sqrt{2}.\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}|y^2 - y - 2|$$

$$\Leftrightarrow |y^2 - y - 2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 - y - 2 = 4 \\ y^2 - y - 2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1(4,-2) \\ C_2(9,3) \end{array}\right.$$

▪ ΔABC đều

$$\Leftrightarrow AB = BC = CA \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 = (y^2-1)^2 + (y+1)^2 \\ (y^2-1)^2 + (y+1)^2 = (y^2-4)^2 + (y-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y^2 + 2y - 16 = 0 \\ y^2 + y - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2 - y + 3)(y^2 + y - 3) - 4y - 7 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 7 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại điểm C thuộc (P) để ΔABC đều.

c. Với $M(x_0, y_0)$ thuộc cung AB của (P) nên:

$$\begin{cases} x_0 = y_0^2 \\ -1 \le y_0 \le 2 \qquad (*) \end{cases}.$$

Tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \Delta MAB$ có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow$ d(M, (d)) lớn nhất.

Ta có:

$$d(M, (d)) = \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|y_0^2 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(y_0 + 1)(2 - y_0)$$

$$\overset{\text{C«si}}{\le} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(y_0+1)+(2-y_0)}{2}\right]^2 = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

do đó Maxd(M, (d)) = $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$, đạt được khi

$$y_0 + 1 = 2 - y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

Vậy, với $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 24: *Cho Parabol* (P): $y^2 = 2px$ *với* $p > 0$. *Điểm* M *khác* O *chạy trên* (P). *Gọi* A, B *theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của* M *lên* Ox *và* Oy. *Chứng minh rằng*:

a. *Đường thẳng qua* B *vuông góc với* OM *luôn đi qua một điểm cố định.*
b. *Đường thẳng qua* B *vuông góc với* AB *luôn đi qua một điểm cố định.*
c. *Đường thẳng* AB *luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.*

✍ *Giải*

Điểm $M \in (P)$ suy ra:

$$M(\frac{y_0^2}{2p}, y_0),\ A(\frac{y_0^2}{2p}, 0) \text{ và } B(0, y_0).$$

a. Đường thẳng (d_1) qua B vuông góc với OM được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{OM}(\frac{y_0^2}{2p}, y_0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{y_0^2}{2p}.x + y_0(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d_1): y_0^2.x + 2py_0y - 2p\,y_0^2 = 0.$$

Nhận xét rằng (d_1) luôn đi qua điểm cố định $M_1(2p, 0)$.

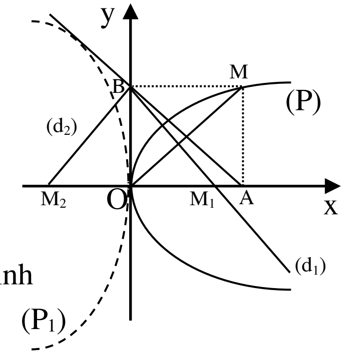
b. Đường thẳng (d_2) qua B vuông góc với AB được cho bởi:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BA}(\frac{y_0^2}{2p}, -y_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d_2): \frac{y_0^2}{2p}.x - y_0(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d_2): y_0^2.x - 2py_0y + 2p\,y_0^2 = 0.$$

Nhận xét rằng (d_2) luôn đi qua điểm cố định $M_2(-2p, 0)$.



☞ ***Chú ý***: Cũng có thể chứng minh bằng cách:

Gọi M_2 là đểm đối xứng với M_1 qua Oy $\Rightarrow M_2(-2p, 0)$.

Nhận xét rằng $BM_2 \perp AB$.

Vậy đường thẳng qua B vuông góc với AB luôn đi qua điểm cố định M_2

c. Đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B(0, y_0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BA}(\frac{y_0^2}{2p}, -y_0) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x}{\frac{y_0^2}{2p}} = \frac{y - y_0}{-y_0 - y_0}$$

$$\Leftrightarrow (AB): 2px + y_0y - y_0^2 = 0.$$

- Gọi N(x, y) là điểm mà (AB) không đi qua với mọi y_0, khi đó phương trình $2px + y_0y - y_0^2 = 0$, vô nghiệm y_0

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y_0^2 - y_0y - 2px = 0$, vô nghiệm $y_0 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow y^2 + 8px < 0$.

- Ta đi chứng minh (AB) luôn tiếp xúc với Parabol (P_1): $y^2 = -8px$.

Thật vậy:

$$-2AC + pB^2 = 2.2p.(-y_0^2) + 4p.\,y_0^2 = 0.$$

Vậy (AB) luôn tiếp xúc với Parabol (P_1): $y^2 = -8px$.