CHƯƠNG 2 – PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Định nghĩa: *Cho hai biểu thức* $f(x)$ *và* $g(x)$ *của cùng biến số* x.

1. *Mệnh đề chứa biến x dạng* $f(x) = g(x)$ *được gọi là* ***phương trình*** *một ẩn; x gọi là ẩn số (hay ẩn) của phương trình.*
2. *Ngoài các điều kiện để hai biểu thức* $f(x)$ *và* $g(x)$ *có nghĩa, đôi khi* x *còn phải thoả mãn thêm những điều kiện khác nữa. Ta gọi chung các điều kiện ấy là* ***điều kiện xác định*** *của phương trình* $f(x) = g(x)$.
3. *Số* x_0 *gọi là* ***nghiệm*** *của phương trình* $f(x) = g(x)$ *nếu nó thoả mãn ĐKXĐ của phương trình và mệnh đề* $f(x_0) = g(x_0)$ *là đúng.*
4. *Việc tìm tất cả các nghiệm của phương trình gọi là* ***giải phương trình****. Nói cách khác, giải một phương trình là tìm* ***tập nghiệm*** *của phương trình đó.*

☞ ***Chú ý***:

1. Hệ thức $x = m$ (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.
2. Ta thường kí hiệu tập nghiệm của phương trình là T. Phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào (tức là $T = \varnothing$) thì ta gọi là *vô nghiệm*, phương trình có $T = \mathbb{R}$ thì gọi là *nghiệm đúng với mọi* x.
3. Nhiều trường hợp, ta không thể tính được giá trị chính xác của nghiệm, hoặc bài toán chỉ yêu cầu tính giá trị gần đúng của nghiệm (với độ chính xác cho trước). Giá trị đó gọi là *nghiệm gần đúng* của phương trình.

2. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa: *Hai phương trình* $f_1(x) = g_1(x)$ *và* $f_2(x) = g_2(x)$ *có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương. Khi đó, ta viết:*

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

☞ ***Chú ý***: Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng điều kiện xác định D và tương đương với nhau, ta nói:

"*Hai phương trình tương đương trong điều kiện* D"

hoặc "*Với điều kiện* D*, hai phương trình là tương đương với nhau*".

Định nghĩa *(Phép biến đổi tương đương)****:*** *Các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình được gọi là* ***các phép biến đổi tương đương****. Phép biến đổi tương đương biến một phương trình thành phương trình tương đương với nó.*

Định lí 1: *Cho phương trình* f(x) = g(x) *với ĐKXĐ* D, h(x) *là một biểu thức xác định với mọi* x *thoả mãn điều kiện* D (h(x) *có thể là hằng số*). *Khi đó, với điều kiện* D, *phương trình* f(x) = g(x) *tương đương với mỗi phương trình sau*:

a. f(x) + h(x) = g(x) + h(x).

b. f(x).h(x) = g(x).h(x) *nếu* $h(x) \neq 0$ *với* $\forall x \in D$.

Hệ quả: *Với ĐKXĐ của phương trình ban đầu thì:*

a. (*Quy tắc chuyển vế*): $f(x) + h(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$.

b. (*Quy tắc rút gọn*): $f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

3. PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

Định nghĩa: *Cho phương trình* $f_1(x) = g_1(x)$ *có tập nghiệm* T_1. *Phương trình* $f_2(x) = g_2(x)$ *có tập nghiệm* T_2 *được gọi là* ***hệ quả*** *của phương trình* $f_1(x) = g_1(x)$ *nếu* $T_1 \subset T_2$.

Định lí 2: *Khi bình phương hai vế của phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho*:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

☞ ***Chú ý***: 1. Nếu hai vế của một phương trình luôn cúng dấu với mọi x thoả mãn ĐKXĐ của phương trình thì khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương.

2. Nếu phép biến đổi một phương trình dẫn đến phương trình hệ quả thì sau khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả, ta phải thử lại vào phương trình đã cho để phát hiện và loại nghiệm ngoại lai.

4. PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Định nghĩa: *Cho hai biểu thức* f(x, y,…) *và* g(x, z,…).

1. *Mệnh đề chứa các biến dạng* f(x, y,…) = g(x, z,…) *được gọi là* ***phương trình*** *nhiều ẩn ẩn; x, y, z,… gọi là các ẩn số của phương trình.*
2. *Các số* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$,… *thoả mãn ĐKXĐ của phương trình và mệnh đề* $f(x_0, y_0,\dots) = g(x_0, z_0,\dots)$ *là đúng thì bộ* $(x_0, y_0, z_0,\dots)$ *được gọi là một nghiệm của phương trình.*

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Với yêu cầu "*Giải và biện luận phương trình* ax + b = 0" ta sẽ thực hiện như sau:

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$ax = -b. \quad (1)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu a = 0 thì:

$(1) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0$.

Vậy, ta được:

- Nếu b = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$, tức là phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- Với a = b = 0 , phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với a = 0 và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Với yêu cầu "*Giải và biện luận phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ (1)" ta sẽ thực hiện như sau:

Trường hợp 1. Với a = 0 thì phương trình có dạng:

$$bx + c = 0 \Leftrightarrow bx = -c. \qquad (2)$$

a. Nếu b = 0 thì:

$$(2) \Leftrightarrow 0 = -c \Leftrightarrow c = 0.$$

- Nếu c = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $b \neq 0$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}$$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Trường hợp 2. Với $a \neq 0$ ta tính biệt thức:

$\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc nếu b = 2b' thì tính $\Delta' = (b')^2 - ac$).

a. Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) thì phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ (hoặc } x_0 = -\frac{b'}{a}\text{)}.$$

c. Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\text{)}.$$

Kết luận:

- Với a = b = c = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Với a = b = 0 và $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với a = 0 và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{c}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x_0 = -\frac{b'}{a}$).

- Với $a \neq 0$ và $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\text{).}$$

3. ĐỊNH LÍ VI –ÉT

Định lí: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Hệ quả:

1. Nếu $a + b + c = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right..$$

2. Nếu $a - b + c = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{c}{a} \end{array}\right..$$

☞ ***Chú ý***: Trước khi áp dụng định lí Viét cần tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Định lí Viét được sử dụng để:

a. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng.
b. Tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm.
c. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số.
d. Xét dấu các nghiệm.
e. Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện K.
f. Ứng dụng khác.

III. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

a. Phương trình chứa ẩn ở mẫu.
b. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.
c. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

IV. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa: *Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng*:

$$ax + by = c$$

trong đó:

- a, b, c *là hằng số và* a, b *không đồng thời bằng không*.
- x, y *là hai ẩn số*.

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm (x, y) của phương trình).

- *Nếu* $a \neq 0, b \neq 0$ *thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số bậc nhất:*

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

- *Nếu* $a = 0, b \neq 0$ *thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số* $y = \frac{c}{b}$

đó là đường thẳng song song với Ox nếu $c \neq 0$, trùng với Ox nếu $c = 0$.

- *Nếu* $a \neq 0, b = 0$ *thì đường thẳng đó có dạng* $x = \frac{c}{a}$

đó là đường thẳng song song với Oy nếu $c \neq 0$, trùng với Oy nếu $c = 0$.

☞ ***Chú ý***: 1. Đường thẳng $x = \frac{c}{a}$ không phải là đồ thị hàm số.

2. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:
   - Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.
   - Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.
   - Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng toạ độ.

2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa: *Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Khi đó, đặt:

$$D = a_1b_2 - a_2b_1,\ D_x = c_1b_2 - c_2b_1,\ D_y = c_1a_2 - c_2a_1.$$

Ta có:

a. Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

b. Nếu D = 0 thì:

- Nếu $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x_0, y_0) thoả mãn phương trình $a_1x + b_1y = c_1$.

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

a. Hệ phương trình trong đó ccó một phương trình bậc nhất: Dùng phương pháp thế.

b. Hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ không thay đổi khi thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ $S = x + y$; $P = xy$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§*1*. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng toán 1: Các bài toán mở đầu về phương trình

Phương pháp áp dụng

Sử dụng kiến thức trong phần "*Kiến thức cần nhớ*".

Thí dụ 1. *Tìm tập nghiệm của phương trình* $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = x + 1$.

Giải

Nhận xét rằng:

- Với x = 0 thì VT = 0 còn VP = 8, do đó x = 0 không là nghiệm.
- Với x < 0 thì $\sqrt{x}$ không xác định.
- Với x > 0 thì $\sqrt{-x}$ không xác định.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm $T = \varnothing$.

Nhận xét: Lời giải của thí dụ trên được trình bày theo kiểu *loại dần*. Tuy nhiên, các em học sinh hẳn sẽ thắc mắc " *Tại sao lại biết cách thực hiện như vậy ?*". Câu trả lời được lấy ra từ thuật toán chung khi thực hiện công việc giải phương trình, bao gồm các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Và ở đây, khi thực hiện bước 1, ta cần có điều kiện:

$$x \geq 0 \text{ và } -x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó, việc giải phương trình trong bước 2 chỉ cần thử với x = 0.

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $\sqrt{x-1} = \sqrt{5-2x}$. b. $|x-2| = 2x - 1$.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: (*Sử dụng lược đồ giải phương trình trong thí dụ 1*): ĐKXĐ của phương trình là:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 5-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le \frac{5}{2} \Rightarrow D = [1,\ \frac{5}{2}].$$

Với $x \in D$, bằng cách bình phương hai vế phương trình ban đầu, ta nhận được phương trình tương đương là:

$$x - 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \in D.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Cách 2: (*Sử dụng phép biến đổi tương đương*): Ta có:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow x - 1 = 5 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Cách 3: Ta có:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{5-2x} \Rightarrow x - 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2.$$

Thử lại, với $x = 2$ phương trình có dạng:

$$\sqrt{2-1} = \sqrt{5-2.2} \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: (*Sử dụng phép biến đổi tương đương*): Ta có:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ (x-2)^2 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Cách 2: Ta có:

$$|x-2| = 2x - 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 = 2x-1 \\ x-2 = -(2x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Thử lại:

- Với $x = -1$ phương trình có dạng:
  $$|-1-2| = 2(-1) - 1 \Leftrightarrow 3 = -3, \text{ mâu thuẫn.}$$
- Với $x = 1$ phương trình có dạng:
  $$|1-2| = 2.1 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Thí dụ 3. *Giải các phương trình sau*:

a. $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$.   b. $\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}} = \sqrt{2x-3}$.

✍ *Giải*

a. Ta có $D = (2; +\infty)$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 5.

b. Ta có $D = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2x^2 - x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3/2 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

<u>Dạng toán 2:</u> Phương trình hệ quả và hai phương trình tương đương

Phương pháp áp dụng

Cho hai phương trình

$$f(x, m) = 0 \quad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \quad (2)$$

1. Xác định tham số để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2) (nói cách khác "*Để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)*"), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện cần

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2), trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

  $g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0$.
- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: Điều kiện đủ

- Với $m = m_0$, ta được:

  (1) $\Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (1)

  (2) $\Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (2)
- Kết luận.

2. Xác định tham số để (1) và (2) tương đương, ta lựa chọn theo hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu (1) & (2) đều giải được.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giải (1) để tìm tập nghiệm D_1,

Giải (2) để tìm tập nghiệm D_2.

Bước 2: Thiết lập điều kiện để $D_1 = D_2$.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ

Bước 1: Điều kiện cần

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) & (2) tương đương, trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0.$$

- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: *Điều kiện đủ*

- Với $m = m_0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của } (1)$$
$$(2) \Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của } (2)$$

- Kết luận.

Thí dụ 1. *Cho hai phương trình*:

$$\sqrt{x+1} - 2 = 0, \qquad (1)$$
$$x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0. \qquad (2)$$

Tìm m *để mọi nghiệm của* (1) *cũng là nghiệm của* (2).

✍ *Giải*

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do đó, để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) điều kiện là $x = 3$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$9 - 6m - m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -7 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -7$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta đã không sử dụng mẫu phương pháp điều kiện cần và đủ bởi các lý do sau:

1 Phương trình (1) không chứa tham số.

2 Dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm của (1) và phép thử các nghiệm đó vào (2) đơn giản.

Trong những trường hợp một trong các lý do trên bị vi phạm các em học sinh nên thực hiện đúng mẫu điều kiện cần và đủ để giải.

Trong trường hợp (1) có chứa tham số ta cần chỉ ra được một nghiệm tường minh của (1) để tìm được điều kiện cần cho m. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Thí dụ 2. *Cho hai phương trình*:

$$x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0, \qquad (1)$$
$$x^3 - 2x^2 - mx - m^2 + 3 = 0. \qquad (2)$$

Tìm m *để mọi nghiệm của* (1) *cũng là nghiệm của* (2).

✍ *Giải*

Điều kiện cần: Nhận xét rằng với mọi m phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$.

Do đó, để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) trước hết cần $x = 1$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$1 - 2 - m - m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right..$$

Đó chính là điều kiện cần của m.

Điều kiện đủ: Ta lần lượt:

- Với m = 1, ta được:

  (1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

  (2) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 2$.

  suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2), tức m = 1 thoả mãn.

- Với m = –2, ta được:

  (1) $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

  (2) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

  suy ra x = –1 không là nghiệm của (2), tức m = –2 không thoả mãn.

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

<u>Dạng toán 1:</u> Phương trình bậc nhất một ẩn

Phương pháp áp dụng

1. Với bài toán "*Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn*" chúng ta sử dụng kiến thức đã biết trong phần lý thuyết.
2. Với bài toán "*Tìm điều kiện để phương trình bậc nhất một ẩn có nghiệm thoả mãn điều kiện* K" chúng ta thực hiện như sau:

   Giả sử điều kiện cho ẩn số (nếu cần) là K, khi đó ta có ĐKXĐ là tập D.

   Biến đổi phương trình về dạng:

   $$ax = -b. \qquad (*)$$

   Khi đó:

   (1). Phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -b/a \in D \end{cases}.$$

   (2). Phương trình (1) có nghiệm:

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -b/a \in D \end{cases} \end{array}\right..$$

   (3). Phương trình (1) có nghiệm $\forall x \in D$ thường ta có điều kiện a = b = 0.

   (4). Phương trình ban đầu vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \ \& \ b \neq 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -b/a \notin D \end{cases} \end{array}\right. .$$

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp các em học lên trình bày đòi hỏi của bài toán thông qua các bước giải biện luận.

Thí dụ 1. *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số* m:

$$m^2x + 6 = 4x + 3m.$$

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6. \qquad (*)$$

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{3m-6}{m^2-4} = \frac{3}{m+2}$$

Trường hợp 2: Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0.x = 0 \ (\text{luôn dúng}) \\ 0.x = -12 \ (\text{vô lý}) \end{array}\right.$$

Kết luận:

- Khi $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{3}{m+2}$.
- Khi $m = 2$, phương trình vô số nghiệm.
- Khi $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

☞ ***Nhận xét***: Trong thí dụ trên, ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh hoạ trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số $a \neq 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.
- Hệ số $a = 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho b.

Thí dụ 2. *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số* a, b:

$$\frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2-b^2}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $a \neq \pm b$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a + b)(x + a) + (a - b)(x - a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1.$$

Khi đó:
- Với b = 0, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

Thí dụ 3. *Xác định tham số để phương trình sau có tập hợp nghiệm là* $\mathbb{R}$:

$$m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1).$$

Giải

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^3 - 4m)x = m^2 + 2m. \qquad (*)$$

Điều kiện để (*) có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$ là:

$$\begin{cases} m^3 - 4m = 0 \\ 2m + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy, với m = 0 hoặc m = –2 phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Thí dụ 4. *Xác định* m *để phương trình sau có nghiệm*:

$$m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2 \text{ với } x > 0.$$

Giải

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^2 - 4)x = m^2 - 3m + 2 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2)x = (m - 2)(m - 1).$$

Phương trình có nghiệm với x > 0 điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} m - 2 = 0 \\ \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \dfrac{m-1}{m+2} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right.$$

Vậy, với m > 1 hoặc m < –2 phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện đề bài.

Dạng toán 2: Phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp áp dụng

1. Với bài toán "*Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn*" chúng ta sử dụng kiến thức đã biết trong phần lý thuyết.
2. Với bài toán "*Tìm điều kiện để phương trình bậc hai một ẩn có nghiệm thoả mãn điều kiện* K" chúng ta thực hiện như sau:
   Với phương trình:
   $$ax^2 + bx + c = 0.$$

để tìm điều kiện của tham số sao cho:

Dạng 1: Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \ \& \ c \neq 0 \\ a \neq 0 \ \& \ \Delta < 0 \end{array}\right.$.

Dạng 2: Phương trình nhận mọi x làm nghiệm $\Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Dạng 3: Phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ a = 0 \ \& \ b \neq 0 \\ a \neq 0 \ \& \ \Delta \geq 0 \end{array}\right. .$$

Dạng 4: Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \ \& \ b \neq 0 \\ a \neq 0 \ \& \ \Delta = 0 \end{array}\right.$.

Dạng 5: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Giải và biện luận các phương trình*:

$$mx^2 - 2mx + m - 1 = 0. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1: Với m = 0, ta được:

(1) $\Leftrightarrow -1 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, ta có $\Delta' = m$.

a. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m}}{m}.$$

Kết luận:

- Với $m \leq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m}}{m}.$$

☞ ***Chú ý***:

1. Chúng ta có thể trình bày bài toán trên bằng bảng, như sau:

m	a	Δ	Kết luận
$-\infty$			
	−	−	Vô nghiệm.
0	0	0	Vô nghiệm.
	+	+	Có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m}}{m}$.
$+\infty$			

2. Dựa trên tính chất đặc thù của phương trình chúng ta có thể thực hiện bài toán như sau:

   Biến đổi phương trình về dạng:

   $$m(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow m(x - 1)^2 = 1.$$

   Nhận xét rằng:

   - Với $m \le 0$, phương trình vô nghiệm.
   - Với $m > 0$, ta được:

   $$(x - 1)^2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow x - 1 = \pm\frac{1}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

3. Nếu bài toán chỉ yêu cầu biện luận theo m số nghiệm của phương trình thì chúng ta có thể sử dụng phương pháp đồ thị, cụ thể:

   Biến đổi phương trình về dạng:

   $$m(x^2 - 2x + 1) = 1.$$

   Nhận xét rằng:

   - Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.
   - Với $m \ne 0$, ta được:

   $$x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{m}.$$

   từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ rồi suy ra kết quả biện luận.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0. \qquad (1)$$

a. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm.*

b. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

a. Ta xét hai trường hợp của m:

Trường hợp 1: Với $m = 0$

$$(1) \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Trường hợp 2: Với $m \ne 0$ thì $\Delta' = (m - 2)^2 - m(m - 3) = 4 - m$

Để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 4$.

Vậy, với $m \le 4$ phương trình có nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \ne m < 4.$$

Vậy, với $0 \ne m < 4$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi* m *phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt*:

$$x^2 - 2(m - 1)x - m^2 - m - 1 = 0.$$

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$\Delta = (m-1)^2 + m^2 + m + 1 = 2m^2 - m + 2 = 2(m - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8} > 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 2: Ta có:

$$\Delta = (m-1)^2 + m^2 + m + 1 = (m-1)^2 + (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Cách 3: Ta có:

$$a.c = -m^2 - m - 1 = -(m + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 0 < x_2$.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với* $a^2 + b^2 > 0$ *phương trình sau luôn có nghiệm*:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1.$$

✍ *Giải*

Điều kiện $x \neq 0, 1$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$f(x) = x^2 - (1 + a^2 + b^2)x + a^2 = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 = (1 + a^2 + b^2 - 2a)(1 + a^2 + b^2 + 2a)$$
$$= [b^2 + (a-1)^2][b^2 + (a+1)^2] > 0.$$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta đi kiểm tra điều kiện (*), ta có:

$$f(0) = a^2 \text{ và } f(1) = -b^2.$$

Do a, b không đồng thời bằng 0 nên ít nhất một trong hai giá trị f(0) và f(1) khác 0.

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Thí dụ 5. *Cho hai phương trình*:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + cx + d = 0. \quad (2)$$

Biết rằng $ac \geq 2(b + d)$. *Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.*

✍ *Giải*

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = a^2 - 4b \quad \Delta_{(2)} = c^2 - 4d.$

Nhận xét rằng:

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a^2 - 4b + c^2 - 4d$$
$$= (a^2 + c^2) - 4(b + d) \geq 2ac - 4(b + d) \geq 4(b + d) - 4(b + d) = 0.$$

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ không âm

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng kết quả:

$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số không âm.

Ngoài ra, chúng ta còn có:

1. Nếu $A + B < 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số âm.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*ít nhất một trong hai phương trình vô nghiệm* ".
2. Nếu $A.B < 0 \Leftrightarrow$ hai số trái dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Chỉ có một trong hai phương trình có nghiệm* ".
3. Nếu $A.B > 0 \Leftrightarrow$ hai số cùng dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Hoặc cả hai phương trình đề có hai nghiệm phân biệt hoặc chúng cùng vô nghiệm*".

Thí dụ tiếp theo, sẽ minh hoạ lại phương pháp giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Thí dụ 6. *Hai người quét sân. Cả hai người cùng quét sân hết 1 giờ 20 phút, trong khi nếu chỉ quét một mình thì người thứ nhất quét hết nhiều hơn 2 giờ so với người thứ hai. Hỏi mỗi người quét sân một mình thì hết mấy giờ ?*

✍ *Giải*

Gọi x (giờ) là thời gian người thứ nhất quét sân một mình ($x > 2$).

Khi đó, $x - 2$ (giờ) là thời gian người thứ hai quét sân một mình.

Trong 1 giờ:

- Người thứ nhất quét được $\frac{1}{x}$ (sân)
- Người thứ hai quét được $\frac{1}{x-2}$ (sân).

Vì cả hai người cùng quét sân hết 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ, nên trong 1 giờ làm được $\frac{3}{4}$ (sân).

Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x(x-2)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, thời gian người thứ nhất quét sân một mình là 4 giờ, do đó người thứ hai quét một mình hết 2 giờ.

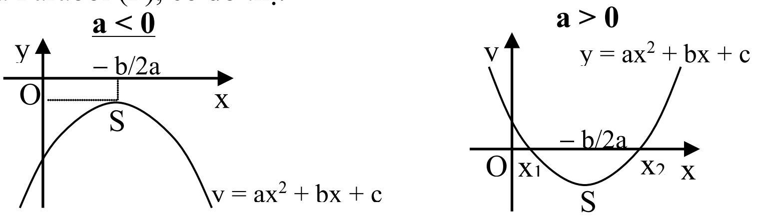
<u>Dạng toán 3:</u> Sử dụng phương pháp đồ thị giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp áp dụng

Ta biết rằng hàm số:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0$$

được gọi là Parabol (P), có đồ thị:



Số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị parabol $y = ax^2 + bx + c$ với trục hoành.

Để biện luận theo tham số m, số nghiệm của phương trình:

$$ax^2 + bx + c = m$$

ta xét vị trí tương đối của đường thẳng (d): $y = m$ với Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$.

Như vậy, trong trường hợp tổng quát ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:
$$ax^2 + bx + c = g(m).$$

Bước 2: Vẽ (P): $y = ax^2 + bx + c$.

Bước 3: Khi đó, số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng (d): $y = g(m)$ với Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$.

Bước 4: Bằng việc dịch chuyển đường thẳng (d) song song với Ox ta sẽ nhận được kết luận tương ứng.

Bước 5: Kết luận.

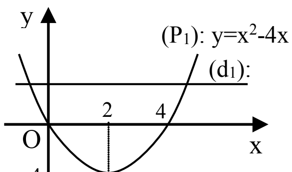
☞ ***Chú ý***: Phương pháp này tỏ ra đặc biệt hiệu quả với yêu cầu về nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$ cho trước.

<u>Thí dụ 1.</u> *Biện luận số giao điểm của parabol* (P): $y = x^2 - 3x + 1$ *với đường thẳng* (d): $y = x + m + 1$.

✍ *Giải*

Số giao điểm của (P) và (d) đúng bằng số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 3x + 1 = x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0$$



$\Leftrightarrow x^2 - 4x = m$ (2)

Khi đó, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của Parabol (P_1): $y = x^2 - 4x$ và đường thẳng (d_1): $y = m$.

Ta được:

- Với $m < -4$, phương trình vô nghiệm, tức là (P) không cắt (d).
- Với $m = -4$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 2$, tức là (P) tiếp xúc với (d) tại điểm M(2; –1).
- Với $m > -4$, phương trình có hai nghiệm phân biệt, tức là (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

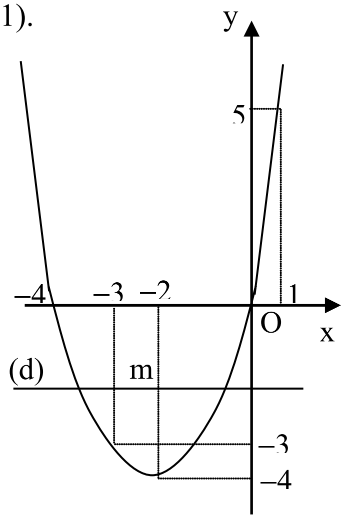
$$x^2 + 4x - m = 0.$$

Xác định m *để phương trình*:

a. *Có nghiệm thuộc khoảng* (–3; 1).

b. *Có đúng một nghiệm thuộc* (–3; 1).

c. *Có hai nghiệm phân biệt thuộc* (–3; 1).



✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$x^2 + 4x = m$.

Khi đó số nghiệm trên tập D = (–3; 1) của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ với Parabol (P): $y = x^2 + 4x$ trên D.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

a. Phương trình có nghiệm thuộc D

$\Leftrightarrow -4 < m < 5$.

b. Phương trình có một nghiệm thuộc D

$\Leftrightarrow -3 < m < 5$.

c. Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc D

$\Leftrightarrow -4 < m < -3$.

Dạng toán 4: Các ứng dụng của định lí Vi–ét

Ứng dụng 1: *Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai*

Phương pháp áp dụng

Trước tiên, chúng ta cần hiểu rằng " *Chỉ thực hiện nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai trong trường hợp nó có nghiệm nguyên hoặc một nghiệm nguyên còn một nghiệm hữu tỉ* ".

Để làm rõ được ý tưởng chủ đạo của phương pháp này, chúng ta bắt đầu lại bằng thí dụ với phương trình:

$x^2 - x - 12 = 0.$

Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -12 = -3.4 \end{cases}$$

ở đó:

$$-12 = -1.12 = 1.(-12) = -2.6 = 2.(-6) = -3.4 = 3.(-4)$$

trong các cặp số trên, ta chọn được cặp (–3, 4) vì $-3 + 4 = 1 = x_1 + x_2$.

Từ đánh giá đó, suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3$ và $x_2 = 4$.

Như vậy, để thực hiện việc nhẩm nghiệm (nếu có thể) cho phương trình:

$$x^2 + bx + c = 0$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập hệ thức Viét cho các nghiệm x_1 và x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1.x_2 = c \end{cases}.$$

Bước 2: Thực hiện phép phân tích c thành tích của hai thừa số c = m.n.

Với mỗi cặp thừa số phân tích được, ta tính ngay m + n, khi đó:

a. Nếu m + n = –b, chuyển sang bước 3.

b. Nếu m + n ≠ –b, thực hiện lại bước 2.

Bước 3: Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = m$ và $x_2 = n$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Thuật toán trên có tính *dừng* và được hiểu như sau:

- Nếu tìm được một cặp (m, n) thoả mãn điều kiện m + n = –b thì dừng lại phép thử và đưa ra lời kết luận.
- Nếu các cặp (m, n) đều không thoả mãn thì dừng và trong trường hợp này được hiểu là không nhẩm được nghiệm.

2. Chúng ta đã biết hai trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là:

- Nếu a + b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu a – b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Thí dụ 1. *Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau*:

a. $-x^2 - 13x + 48 = 0.$ b. $3x^2 + 3x - 18 = 0.$

c. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0.$

✍ *Giải*

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + 13x - 48 = 0.$$

Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -13 \\ x_1.x_2 = -48 = 3.(-16) \end{cases} \text{ mà } 3 + (-16) = -13.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$ và $x_2 = -16$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1.x_2 = -6 = 2.(-3) \end{cases} \text{ mà } 2 + (-3) = -1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

c. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1.x_2 = 12 = 2.6) \end{cases} \text{ mà } 2 + 6 = 8.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 6$.

☞ ***Nhận xét***: Thí dụ trên, được nêu ra với mục đích khuyên cách em học sinh hãy thực hiện việc chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản nhất trước khi thực hiện công việc nhẩm nghiệm để tránh được những sai sót không đáng có.

Ứng dụng 2: ***Tìm hai số biết tổng và tích của chúng***

Phương pháp áp dụng

Nếu hai số u và v có:

$$\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$$

thì u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - St + P = 0. \qquad (1)$$

☞ ***Chú ý:*** Nếu (1) có hai nghiệm t_1, t_2 (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$) thì ta được:

$$\left[\begin{array}{l} u = t_1 \ \& \ v = t_2 \\ u = t_2 \ \& \ v = t_1 \end{array}\right..$$

Thí dụ 1. *Tìm hai cạnh của một mảnh vườn hình chữ nhật trong hai trường hợp*:

a. *Chu vi là* 94,4m *và diện tích là* 494,55m^2.

b. *Hiệu của hai cạnh là* 12,1m *và diện tích là* 1089m^2.

✍ *Giải*

a. Gọi x và y là hai kích thước của hình chữ nhật, ta có:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 94,4 \\ xy = 494,55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 47,2 \\ xy = 494,55 \end{cases}.$$

Suy ra, x và y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 47,2X + 494,55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 31,5m \\ y = 15,7m \end{cases}.$$

Vậy, hình chữ nhật có chiều dài là 31,5m và chiều rộng là 15,7m.

b. Ta có:

$$\begin{cases} x - y = 12,1\ (x > y) \\ xy = 1089 \end{cases}.$$

Suy ra, x và –y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 12X + 1089 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 39,6 \\ -y = -27,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 39,6 \\ y = 27,5 \end{cases}.$$

Vậy, hình chữ nhật có chiều dài là 39,5m và chiều rộng là 27,5m.

<u>Ứng dụng 3</u>: *Tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm*

Phương pháp áp dụng

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0$$

là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2.

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.
- $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}$.
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$.
- $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P^2}$.

<u>Thí dụ 1.</u> *Tìm m để phương trình*:

$$x^2 + 2(m+1)x + 2m + 3 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2. *Khi đó hãy lập phương trình có hia nghiệm là* $-2x_1$ *và* $-2x_2$.

✍ *Giải*

Trước hết ta cần đi tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{2}.\ (*)$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, thỏa mãn:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ P = x_1.x_2 = 2m+3 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -2(x_1 + x_2) = 4(m+1) \\ (-2x_1).(-2x_2) = 4x_1.x_2 = 4(2m+3) \end{cases}$$

do đó $-2x_1$ và $-2x_2$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 4(m + 1)t + 4(2m + 3) = 0.$$

<u>Ứng dụng 4</u>: ***Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số***

Phương pháp áp dụng

Để tìm hệ thức liện hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số (giả sử tham số là m), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng định lí Viét, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp, việc khử tham số từ hệ (I) cần sử dụng các hằng đẳng thức, đặc biệt là các hằng đẳng lương giác, cụ thể:

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. b. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$.

c. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. d. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho phương trình*:

$$x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 *và* x_2 *của phương trình mà không phụ thuộc vào* m.

✍ *Giải*

Trước hết ta cần đi tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3] \cup [0; +\infty).$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ 2x_1x_2 = 2 - 2m \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4.$$

Vậy, ta được $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$ là hệ thức cần tìm.

<u>Thí dụ 2.</u> *Cho phương trình*:

$$x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.*

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\Delta' = \sin^2\alpha - \cos\alpha + 1 = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha) \ge 0, \forall\alpha.$$

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm.

b. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sin\alpha \\ x_1.x_2 = \cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \cos\alpha = x_1.x_2 + 1 \end{cases} \overset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}{\Rightarrow} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

<u>Ứng dụng 5</u>: *Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai*

Phương pháp áp dụng

Dùng định lí Viét ta có thể xét dấu được các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dựa trên kết quả:

- Nếu $P = -\dfrac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$.
- Nếu:
$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{phương trình có hai nghiệm cùng dấu.}$$
- Nếu:
$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{phương trình có hai nghiệm dương } 0 < x_1 \le x_2.$$
- Nếu:
$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{phương trình có hai nghiệm âm } x_1 \le x_2 < 0.$$

☞ ***Chú ý***: 1. Cũng từ đây, chúng ta thiết lập được điều kiện để phương trình có các nghiệm liên quan tới dấu.

2. Nếu bài toán yêu cầu " Xét dấu các nghiệm của phương trình tuỳ theo giá trị của tham số ", chúng ta sử dụng bảng sau:

m	Δ	P	S	Kết luận
$-\infty$				

m_1				
m_2				
$+\infty$				

Thí dụ 1. *Tuỳ theo* m *hãy xét dấu các nghiệm của phương trình*:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$$

✍ *Giải*

Ta đi xác định các giá trị:

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m, \qquad S = \frac{2(m-2)}{m}, \quad P = \frac{m-3}{m}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	P	S	Dấu các nghiệm
$-\infty$				Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0 < x_1 < x_2$
	+	+	+	
0		‖	‖	Phương trình có nghiệm $x = 3/4$
	+	–	–	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ và $x_2 < \lvert x_1\rvert$
2			0	Phương trình có một nghiệm $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$
	+	–	+	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ và $x_2 > \lvert x_1\rvert$
3		0		Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = 2/3$
	+	+	+	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0 < x_1 < x_2$
4	0			Phương trình có nghiệm kép x = 1□□ > 0
	–	+	+	Phương trình vô nghiệm
$+\infty$				

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0.$$

Xác định m *để phương trình*:

a. *Có hai nghiệm trái dấu.* b. *Có hai nghiệm dương.*

c. *Có hai nghiệm cùng dấu.*

✍ *Giải*

a. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm trái dấu là:

$P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$

Vậy, với $-2 < m < 2$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm dương là:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m + 53 \geq 0 \\ m^2 - 4 > 0 \\ 2(m+7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-\frac{53}{14}; -2) \cup (2; +\infty).$$

Vậy, với $m \in [-\frac{53}{14}; -2) \cup (2; +\infty)$ phương trình có hai nghiệm dương.

c. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm cùng dấu:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m + 53 \geq 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-\frac{53}{14}; -2) \cup (2; +\infty).$$

Vậy, với $m \in [-\frac{53}{14}; -2) \cup (2; +\infty)$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

<u>Ứng dụng 6</u>: ***Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình bậc hai thoả mãn điều kiện cho trước***

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng định lí Viét, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bước 3: Biểu diễn điều kiện K thông qua (I).

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho phương trình* $3x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 5 = 0$. *Xác định* m *để phương trình có một nghiệm gấp ba nghiệm kia. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.*

✍ *Giải*

Theo định lý Viét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{3}(m+1) & (1) \\ x_1.x_2 = \frac{3m-5}{3} & (2) \end{cases}$$

Theo điều kiện đề bài, ta có: $x_1 = 3x_2$ (3)

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\Delta' = (m + 1)^2 + 15 - 9m = m^2 - 7m + 16 > 0, \forall m \in R.$$

Từ (1) và (3), ta có:

$$4x_2 = \frac{2}{3}(m + 1) \Leftrightarrow x_2 = \frac{m+1}{6} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có: $x_1 = \dfrac{m+1}{2}$ (5)

Thay x_1, x_2 ở (5) và (4) vào (2), ta được:

$$\frac{m+1}{6}.\frac{m+1}{2} = \frac{3m-5}{3} \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 4(3m - 5)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 10m + 21 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = 7.$$

Ta có:

- Khi $m = 3$ thì $x_1 = 2$ và $x_2 = \dfrac{2}{3}$.
- Khi $m = 7$ thì $x_1 = 4$ và $x_2 = \dfrac{4}{3}$.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$$

a. *Tìm các giá trị của* m *để phương trình có* 2 *nghiệm phân biệt cùng dấu.*

b. *Xác định* m *để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng* 3.

c. *Xác định m để phương trình có hai nghiệm* x_1, x_2 *thoả mãn* $|x_1 - x_2| = 2$.

Giải

a. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2m > 0 \\ \dfrac{m-2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; \frac{5}{2}).$$

Vậy, với $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \frac{5}{2})$ phương trình thoả mãn điều kiện đề bài.

b. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm:

$$\begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \neq m < \frac{5}{2}.$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-2}{m+2} \end{cases}.$$

Ta có:

$$3 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4(m-1)^2}{(m+2)^2} - 2.\frac{m-2}{m+2}$$

$\Leftrightarrow m^2 + 20m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -20$.

Vậy, có hai giá trị của m phương trình thoả mãn điều kiện.

c. Ta có:

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2}{(m+2)^2} - 4\frac{m-2}{m+2} = 4 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(m-2)(m+2) = 4(m+2)^2$$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm \sqrt{10}$.

Vậy, với $m = -3 \pm \sqrt{10}$ thoả mãn đề bài.

Thí dụ 3. *Tìm* m *để phương trình* $x^2 + 2mx + 4 = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2. *Khi đó*:

a. *Tính theo* m *giá trị các biểu thức* $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

b. *Xác định* m *sao cho* $x_1^4 + x_2^4 \le 32$.

c. *Xác định* m *sao cho* $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 \ge 3$.

✍ *Giải*

Điều kiện để phương trình có nghiệm

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m| > 2.$ (*)

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1.x_2 = 4 \end{cases}.$$

a. Ta có:

$$E^2 = \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}$$

$= -2m + 2.2 = 4 - 2m > 0$ với (*) suy ra $m < -2$

$\Rightarrow E = \sqrt{4 - 2m}$.

$$F^2 = \left(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}\right)^2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1x_2} = \sqrt{4-2m} + 2\sqrt[4]{4}$$

$\Rightarrow F = \sqrt{\sqrt{4-2m} + 2\sqrt[4]{4}}$.

b. Ta có:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2$$

Do đó:

$$x_1^4 + x_2^4 \le 32 \Leftrightarrow (m^2 - 2.4) - 2.4^2 \le 32 \Leftrightarrow m^2 - 40 \le 32$$

$$\Leftrightarrow m^2 \le 72 \Leftrightarrow |m| \le 6\sqrt{2}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} -6\sqrt{2} \le m < -2 \\ 2 < m \le 6\sqrt{2} \end{array}\right..$$

c. Ta có:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^2x_1^2 + x_2^2x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2x_2^2}.$$

Do đó:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \ge 3 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 40}{16} \ge 3 \Leftrightarrow m^2 \ge 88 \Leftrightarrow |m| \ge 2\sqrt{22}$$, thoả mãn (*).

<u>Ứng dụng 7</u>: *Ứng dụng khác*

Phương pháp áp dụng

Trong mục này ta đi ứng dụng định lí Viét vào việc:

Dạng 1: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thuộc Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ cho trước, khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử phương trình đường thẳng (AB): $y = kx + m$.

Bước 2: Phương trình hoành độ giao điểm của (AB) và (P) là:

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0.$$

Bước 3: Ta có x_A và x_B là nghiệm của phương trình và theo Viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{k-b}{a} \\ x_A.x_B = \dfrac{c-m}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \\ m \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (d).}$$

Dạng 2: Lập phương trình tiếp tuyến của Parabol (P) tại điểm $M(x_M; y_M)$, được thực hiện tương tự như trên bằng cách thay $x_A = x_B = x_M$.

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho Parabol* (P) *có phương trình*:

$$(P): y = x^2 + 3x + 2.$$

Gọi A *và* B *là hai điểm thuộc* (P) *có hoành độ lần lượt là* 1, 8.

a. *Lập phương trình đường thẳng* AB.

b. *Lập phương trình tiếp tuyến với* (P) *tại* A.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Cách giải thông thường): Từ giả thiết, ta được A(1; 6) và B(8; 90).

Phương trình đường thẳng AB được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1;6) \\ \text{qua } B(8;90) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x-1}{8-1} = \frac{y-6}{90-6} \Leftrightarrow (AB): 12x - y - 6 = 0.$$

Cách 2: (Ứng dụng định lý Viét): Giả sử phương trình đường thẳng (AB) có phương trình:

(AB): $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (AB) và (P) là:

$$x^2 + 3x + 2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a-3)x + 2 - b = 0$$

Ta có $x_A = 1$ và $x_B = 8$ là nghiệm của phương trình và theo Viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B = a - 3 \\ x_A.x_B = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = a - 3 \\ 8 = 2 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -6 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình (AB): $y = 12x - 6 = 0$.

b. Giả sử phương trình tiếp tuyến tại A là (d): $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 + 3x + 2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a-3)x + 2 - b = 0. \qquad (*)$$

Ta có $x_A = 1$ là nghiệm kép của (*) ($x_1 = x_2 = 1$) và theo Viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B = a - 3 \\ x_A.x_B = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a - 3 \\ 1 = 2 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình tiếp tuyến (d): $y = 5x + 1$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình chứa ẩn ở mẫu

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình, khi đó ta có ĐKXĐ là tập D.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng bậc nhất hoặc bậc hai, rồi thực hiện giải nó.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 1. *Tìm* m *để phương trình sau vô nghiệm*:

$$\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m+2)x = 4 - m. \qquad (2)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = –2 thì:

(2) $\Leftrightarrow$ 0x = 6, mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu m – 2 ≠ 0 $\Leftrightarrow$ m ≠ 2 thì:

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{4-m}{m+2}.$$

Do đó (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{4-m}{m+2} = 1 \text{ hoặc } \frac{4-m}{m+2} = -1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = –2 hoặc m = 1 phương trình ban đầu vô nghiệm.

☞ ***Chú ý***: Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

Điều kiện x ≠ ±1.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 2)x = 4 - m. \qquad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2=0 \\ 4-m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \dfrac{4-m}{m+2} = 1 \ \vee \ \dfrac{4-m}{m+2} = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right..$$

Tuy nhiên, cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy, nếu bài toán yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)* " tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.

Thí dụ 2. *Tìm* m *để phương trình sau có nghiệm duy nhất*:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x-m}. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Tập xác định D = $\mathbb{R}\backslash\{1, m\}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$mx = 2 - m. \qquad (2)$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq 1 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Vậy, với m = $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Thí dụ 3. *Cho phương trình*:

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2. \qquad (1)$$

a. *Tìm* a, b *để phương trình có hai nghiệm phân biệt*.
b. *Tìm* a, b *để phương trình có nghiệm*.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x - a \neq 0 \\ x - b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a \\ x \neq b \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$a(x - a) + b(x - b) = 2(x - a)(x - b)$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 3(a + b)x + a^2 + 2ab + b^2 = 0 \qquad (2)$

Ta có $\Delta = 9(a + b)^2 - 8(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2 \geq 0, \forall a, b$.

a. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(a) \neq 0 \\ f(b) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 > 0 \\ b^2 - ab \neq 0 \\ a^2 - ab \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 0, b \neq 0 \text{ và } a \neq \pm b.$$

Vậy, với $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$. phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. *Đáp số*: Với mọi a, b không đồng thời bằng không.

Thí dụ 2. *Giải và biện luận các phương trình*:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ a + b \neq 0 \\ a - b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ a \neq \pm b \end{cases}.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$

Vì $a \neq \pm b \Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0$, ta đi tính biệt thức $\Delta' = 4a^2b^2 \geq 0$.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \ \& \ b \neq 0 \\ a \neq 0 \ \& \ b = 0 \end{array}\right.$.

- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_0 = 1$.

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4a^2b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{a-b}{a+b}$ và $x_2 = \dfrac{a+b}{a-b}$.

Kết luận:

- Với $a = \pm b$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 1$.
- Với $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{a-b}{a+b} \text{ và } x_2 = \frac{a+b}{a-b}.$$

Dạng toán 2: Phương trình tích

Phương pháp thực hiện

Giả sử cần đi "*Giải và biện luận phương trình* $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$", ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} a_1x + b_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2 = 0 & (2) \end{array}\right..$$

Bước 2: Giải và biện luận (1).

Bước 3: Giải và biện luận (2).

Bước 4: Kết luận: Trong bước này các em học sinh cần biết cách kết hợp các trường hợp đã xét trong cả hai bước 1 và bước 2 để có được lời kết luận đầy đủ và tường minh.

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$x^3 - 2mx^2 + m^2x + m - 1 = 0.$$

Xác định m *để*:

a. *Phương trình có đúng* 1 *nghiệm*.
b. *Phương trình có* 2 *nghiệm phân biệt*.
c. *Phương trình có* 3 *nghiệm phân biệt*.
d. *Phương trình có* 2 *nghiệm âm phân biệt*.
e. *Phương trình có* 3 *nghiệm dương phân biệt*.

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x-1)[x^2-(2m-1)x-m+1]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ g(x)=x^2-(2m-1)x-m+1=0 & (2) \end{array}\right. . \qquad (I)$$

a. Để phương trình có đúng 1 nghiệm điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}(2)\text{ vô nghiệm}\\ (2)\text{ có nghiệm kép bằng } 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_g<0\\ \begin{cases}\Delta_g=0\\ g(1)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4m^2-3<0\\ \begin{cases}4m^2-3=0\\ 3-3m=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow |m|<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với $|m|<\frac{\sqrt{3}}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}(2)\text{ có 2 nghiệm phân biệt và 1 nghiệm bằng } 1\\ (2)\text{ có nghiệm kép khác } 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_g>0 \text{ và } g(1)=0\\ \Delta_g=0 \text{ và } g(1)\neq 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4m^2-3>0\\ 3-3m=0\end{cases}\\ \begin{cases}4m^2-3=0\\ 3-3m\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4m^2-3>0\\ 3-3m=0\end{cases}\\ \begin{cases}4m^2-3=0\\ 3-3m\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m=1 \text{ hoặc } m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với $m=1$ hoặc $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để phương trình có ba nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$(2)\text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g>0\\ g(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-3>0\\ 3-3m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|m|>\frac{\sqrt{3}}{2}\\ m\neq 1\end{cases}.$$

Vậy, với $m\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt điều kiện là:

(2) có 2 nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g>0\\ S_g<0\\ P_g>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-3>0\\ 2m-1<0\\ 1-m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|m|>\sqrt{3}/2\\ m<1/2\\ m<1\end{cases} \Leftrightarrow m<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với $m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Để phương trình có ba nghiệm dương phân biệt điều kiện là:

(2) có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ S_g > 0 \\ P_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 1 - m > 0 \\ 3 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{3}/2 \\ m > 1/2 \\ m < 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < m < 1.$$

Vậy, với $\frac{\sqrt{3}}{2} < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Lời giải của thí dụ trên đã miêu tả phương pháp cơ bản để "*Giải và biện luận một phương trình bậc ba*".

<u>Dạng toán 3:</u> Phương trình trùng phương

Phương pháp thực hiện

Để giải và biện luận phương trình:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Bước 2: Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (2)$$

Bước 3: Khi đó:

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất
$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 = t_2$.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2$.

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.

☞ ***Chú ý***: 1. Các đánh giá trên nhận được thông qua nhận xét nếu phương trình (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

2. Cũng thông qua nhận xét này chúng ta thiết lập được điều kiện cho nghiệm t của phương trình (2) trong trường hợp bài toán yêu cầu điều kiện nghiệm x của phương trình (1), thí dụ:

$$x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4 \Leftrightarrow -\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < 1 < 2 < \sqrt{t_2}$$
$$\Leftrightarrow 0 < t_1 < 1 < 4 < t_2.$$

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho phương trình*:

$$x^4 - (m + 2)x^2 + m = 0. \quad (1)$$

Tìm m *để phương trình*:

a. *Có nghiệm duy nhất.*

b. *Có hai nghiệm phân biệt.*
c. *Có ba nghiệm phân biệt.*
d. *Có bốn nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$f(t) = t^2 - (m + 2)t + m = 0. \quad (2)$$

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \leq 0 \\ m = 0 \end{cases}$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy, với $m < 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ m = 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy, với $m = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$

Vậy, với $m > 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Phương trình hồi quy

Phương pháp thực hiện

Dạng 1: (*Phương trình hồi quy*): Để giải và biện luận phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $t \geq 2$ suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$(2) \Leftrightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0. \quad (3)$$

Bước 3: Khi đó:

a. Phương trình (1) có nghiệm, ta sử dụng phương pháp gián tiếp, tức là "*Tìm điều kiện để* (3) *vô nghiệm hoặc cả hai nghiệm đều thuộc* $(-2; 2)$".

b. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow$ (3) có nghiệm $t = 2$ hoặc $t = -2 \Rightarrow$ tham số.

Thử lại.

c. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \ \& \ t_2 = 2 \\ t_1 < -2 < t_2 < 2 \\ -2 < t_1 < 2 < t_2 \end{array}\right. .$$

d. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t_1 < t_2 = -2 \\ 2 = t_1 < t_2 \end{array}\right. .$$

e. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} 2 < t_1 < t_2 \\ t_1 < t_2 < -2 \\ t_1 < -2 < 2 < t_2 \end{array}\right. .$$

Dạng 2: (*Phương trình phản hồi quy*): Để giải và biện luận phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \qquad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) + c = 0. \qquad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng $at^2 + bt + c + 2a = 0$. (3)

☞ ***Chú ý***: 1. Với phương trình phản hồi quy trên không hề có điều kiện cho ẩn phụ t, tức là với mỗi nghiệm t_0 của (3) ta luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 cho (1).

2. Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho dạng phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có các hệ số thoả mãn $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, $e \neq 0$.

Khi đó, ta sử dụng ẩn phụ $t = x + \frac{d}{b}.\frac{1}{x}$, và trong trường hợp bd > 0 ta có điều kiện $t \geq 2\sqrt{\frac{d}{b}}$.

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$x^4 + mx^3 - 2(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0. \quad (1)$$

a. *Giải phương trình với* m = 1.

b. *Tìm* m *để phương trình có đúng* 2 *nghiệm phân biệt.*

c. *Tìm* m *để phương trình có* 4 *nghiệm phân biệt.*

Giải

Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + mx - 2(m^2 - 1) + m.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) + m(x + \frac{1}{x}) - 2m^2 + 2 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + mt - 2m^2 = 0. \quad (2)$$

a. Với m = 1 thì (2) có dạng:

$$t^2 + t - 2 = 0 \overset{|t|\geq 2}{\Leftrightarrow} t = -2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm x = –1.

b. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(3) có nghiệm thoả mãn } \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \text{ và } t_2 = 2 \\ t_1 < -2 < t_2 < 2 \text{ hoặc } -2 < t_1 < 2 < t_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(2) > 0 \\ f(-2) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 + 2m - 2m^2 = 0 \\ 4 - 2m - 2m^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 + 2m - 2m^2 > 0 \\ 4 - 2m - 2m^2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 + 2m - 2m^2 < 0 \\ 4 - 2m - 2m^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m^2 + m - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m < 2 \\ -2 < m < -1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $1 < |m| < 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm thoả mãn:

$$\left[\begin{array}{ll} 2 < t_1 < t_2 \text{ hoặc } t_1 < t_2 < -2 & (*) \\ t_1 < -2 < 2 < t_2 & (**) \end{array}\right..$$

Nhận xét rằng phương trình (2) có $ac = -2m^2 < 0$ nên (*) không thể xảy ra.

Khi đó, để có (**) điều kiện là:

$$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2m - 2m^2 < 0 \\ 4 - 2m - 2m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| > 2.$$

Vậy, với $|m| > 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$x^4 - mx^3 - 2x^2 + mx + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. *Giải phương trình với* m = 3.
b. *Tìm* m *để phương trình có đúng* 2 *nghiệm phân biệt*.
c. *Tìm* m *để phương trình có* 4 *nghiệm phân biệt*.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 - mx - 2 + m.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) - m(x - \frac{1}{x}) - 2 = 0.$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - mt = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = m \end{array}\right..$$

Với t = 0, ta được:

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

a. Với m = 3 ta được:

$$t = 3 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy, với m = 3 phương trình có bốn nghiệm $x = \pm 1$ và $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b. Phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt điều kiện là m = 0.

c. Phương trình có 4 nghiệm phân biệt điều kiện là $m \neq 0$.

<u>Dạng toán 5:</u> Phương trình $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, với $a + b = c + d$

Phương pháp thực hiện

Kí hiệu phương trình ban đầu là (1), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (c + d)x + cd] = m. \qquad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab$, điều kiện

$$t \geq -\frac{(a-b)^2}{4} \text{ (chính là } -\frac{\Delta}{4a}\text{)}$$

Suy ra $x^2 + (c + d)x + cd = t - ab + cd$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

Bước 3: Khi đó:

a. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm thoả mãn } t \geq -\frac{(a-b)^2}{4} = \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 \leq \alpha \leq t_2 \\ \alpha \leq t_1 \leq t_2 \end{array}\right..$$

b. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \leq t_2 = \alpha$.

c. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm thoả mãn } \left[\begin{array}{l} \alpha < t_1 = t_2 \\ t_1 < \alpha < t_2 \end{array}\right..$$

d. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\alpha = t_1 < t_2$.

e. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\alpha < t_1 < t_2$.

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = 2m. \quad (1)$$

a. *Giải phương trình với* m = –6.
b. *Tìm* m *để phương trình vô nghiệm.*
c. *Tìm* m *để phương trình có đúng một nghiệm.*
d. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*
e. *Tìm* m *để phương trình có ba nghiệm phân biệt.*
f. *Tìm* m *để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 8) = m.$$

Đặt $t = x^2 + 2x + 1$, điều kiện $t \geq 0$, suy ra $x^2 + 2x = t - 1$ và $x^2 + 2x - 8 = t - 9$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$(t - 1)(t - 9) = 2m \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 10t + 9 - 2m = 0. \quad (2)$$

a. Với m = –6, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 7 \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với t = 3, ta được:

$$x^2 + 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

- Với t = 7, ta được:

$$x^2 + 2x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Vậy, với m = –6 phương trình có nghiệm là $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ và $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

b. Phương trình (1) vô nghiệm khi:

$$\left[\begin{array}{ll} (2)\text{ vô nghiệm} & (*) \\ (2)\text{ có hai nghiệm nhỏ hơn } 0 & (**) \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng phương trình (2) có S = 10 > 0 nên (**) không thể xảy ra.

Khi đó, để có (*) điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 25 - (9 - 2m) < 0 \Leftrightarrow 2m + 16 < 0 \Leftrightarrow m < -8.$$

Vậy, với m < –8 thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm khi:

(2) có nghiệm thoả mãn $t_1 \le t_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ f(0) = 0 \\ S \le 0 \end{cases}$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\left[\begin{array}{l} (2)\text{ có nghiệm kép lớn hơn } 0 \\ (2)\text{ có hai nghiệm } t_1 < 0 < t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S > 0 \end{cases} \\ P < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m + 16 = 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \\ 9 - 2m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -8 \\ m > 9/2 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = -8$ hoặc $m > \frac{9}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi:

(2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 16 > 0 \\ 9 - 2m = 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}.$

Vậy, với $m = \frac{9}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi:

(2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 16 > 0 \\ 9 - 2m > 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < m < \frac{9}{2}.$

Vậy, với $-8 < m < \frac{9}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Dạng toán 6:</u> Phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Phương pháp thực hiện

Kí hiệu phương trình ban đầu là (1), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, suy ra:

$$\begin{cases} x + a = t + \dfrac{a-b}{2} \\ x + b = t - \dfrac{a-b}{2} \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^4 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.t^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$.
Khi đó, phương trình có dạng:

$$2u^2 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.u + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (3)$$

Bước 3: Chuyển điều kiện của bài toán thành điều kiện cho u.

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$(x + 2)^4 + (x + 6)^4 = m^2 - 2. \quad (1)$$

a. *Giải phương trình với* $m = \sqrt{34}$.

b. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng* (–2; –1).

Giải

Đặt $t = x + \frac{2+6}{2} = x + 4$, suy ra:

$$\begin{cases} x + 2 = t - 2 \\ x + 6 = t + 2 \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình (1) được chuyển về dạng:

$$(t - 2)^4 + (t + 2)^4 = m^2 - 2 \Leftrightarrow 2t^4 + 48t^2 + 32 = m^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 48t^2 - m^2 + 34 = 0. \quad (2)$$

Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$.
Khi đó, phương trình (2) được chuyển về dạng:

$$f(u) = 2u^2 + 48u - m^2 + 34 = 0. \quad (3)$$

a. Với $m = \sqrt{34}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2t^4 + 48t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Vậy, với $m = \sqrt{34}$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -4$.

b. Từ giả thiết:

$$-2 < x < -1 \Leftrightarrow 2 < x + 4 < 3 \Leftrightarrow 2 < t < 3 \Rightarrow t^2 < 9 \Leftrightarrow u < 9.$$

Vậy, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng (–2; –1) khi:

(3) có 1 nghiệm $\in (0; 9) \Leftrightarrow f(0).f(9) < 0 \Leftrightarrow (34 - m^2)(17044 - m^2) < 0$

$\Leftrightarrow 34 < m^2 < 17044 \Leftrightarrow \sqrt{34} < |m| < 2\sqrt{4261}.$

Vậy, với $\sqrt{34} < |m| < 2\sqrt{4261}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 7: Phương trình sử dụng ẩn phụ bậc hai

Thí dụ 1. *Giải và biện luận phương trình*:

$$(x - a)^2x^2 + a^2x^2 = 8(x - a)^2a^2, \text{ với } a \neq 0. \quad (1)$$

Giải

Nhận xét rằng $x = a \neq 0$ không phải là nghiệm của phương trình, khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $(x - a)^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-a)^2} = 8a^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{ax}{x-a}\right)^2 - \frac{2ax^2}{x-a} = 8a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-a}\right)^2 - \frac{2ax^2}{x-a} = 8a^2. \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x-a}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2 - 2at - 8a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4a \\ t = -2a \end{array}\right..$$

- Với $t = 4a$, ta được:

$$\frac{x^2}{x-a} = 4a \Leftrightarrow x^2 - 4ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2a \text{ thoả mãn (*)}.$$

- Với $t = -2a$, ta được:

$$\frac{x^2}{x-a} = -2a \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = -a \pm \sqrt{3a^2} \text{ thoả mãn (*)}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1 = 2a$, $x_{2,3} = a \pm \sqrt{3a^2}$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Ở dạng ban đầu, ta không thấy sự xuất hiện ẩn phụ, tuy nhiên để làm xuất hiện ẩn phụ ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x)^2 + \left(\frac{ax}{x-a}\right)^2 = 8a^2..$$

Ta đưa ra nhận xét cho 2 số hạng trong vế trái của phương trình trên đóng vai trò $A^2 + B^2$ của hằng đẳng thức $(A \pm B)^2$.

Khi đó, ta có được 2 hướng biến đổi:

$$\left[\begin{array}{ll} A^2 + B^2 = (A - B)^2 + 2AB & \text{(h1)} \\ A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB & \text{(h2)} \end{array}\right..$$

- Nếu lựa chọn hướng thứ nhất:

$$x^2 + \left(\frac{ax}{x-a}\right)^2 = \left(x - \frac{ax}{x-a}\right)^2 + \frac{2ax^2}{x-a} = \left(\frac{x^2-2ax}{x-a}\right)^2 + \frac{2ax^2}{x-a}.$$

Ta thấy rằng không có sự xuất hiện của ẩn phụ.

- Nếu lựa chọn hướng thứ hai:

$$x^2 + \left(\frac{ax}{x-a}\right)^2 = \left(x + \frac{ax}{x-a}\right)^2 - \frac{2ax^2}{x-a} = \left(\frac{x^2}{x-a}\right)^2 - \frac{2ax^2}{x-a}.$$

Ở đây ẩn phụ đã xuất hiện, đó là $\frac{x^2}{x-a}$.

Như vậy việc lựa chọn hướng biến đổi đại số đúng cho mỗi phương trình bậc bốn nói riêng và các phương trình, bất phương trình nói chung là rất quan trọng.

2. Phương trình trên trên có dạng tổng quát:

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{(x+a)^2} = b.$$

<u>Dạng toán 8:</u> Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp thực hiện

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng:

a. Định nghĩa của giá trị tuyệt đối.
b. Bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.
c. Tính chất của giá trị tuyệt đối.
d. Ẩn phụ.

***<u>Dạng 1:</u> Với phương trình*:**

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow [f(x) - g(x)].[f(x) + g(x)] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = g(x) & (2) \\ f(x) = -g(x) & (3) \end{array}\right..$$

Như vậy, với phương trình dạng trên có chứa tham số chúng ta cần thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giải và biện luận (2).
Bước 2: Giải và biện luận (3)
Bước 3: Kết luận với lưu ý tập nghiệm của phương trình (1) là hợp 2 tập nghiệm của (2), (3).

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho phương trình*:

$$|x^2 - 2mx - 2m| = |x^2 + 2x|. \qquad (1)$$

1. *Giải phương trình với* m = 1.
2. *Tìm* m *để phương trình*:
   a. *Vô nghiệm.*
   b. *Có nghiệm.*
   c. *Có nghiệm duy nhất.*
   d. *Có hai nghiệm phân biệt.*
   e. *Có ba nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx - 2m = x^2 + 2x \\ x^2 - 2mx - 2m = -x^2 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)x = -m \\ x^2 - (m-1)x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)x = -m \ \ (*) \\ x = 1 \text{ hoặc } x = -m \end{array}\right. . \text{(I)}$$

1. Với m = 1, ta thấy ngay phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm 1$.

2. Ta lần lượt:

a. Không tồn tại m để phương trình vô nghiệm.

b. Với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

c. Phương trình có nghiệm duy nhất khi m = –1.

d. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt ta lần lượt đánh giá:

- Nếu –m = 1 tức m = –1 thì (*) vô nghiệm, do đó không thoả mãn.
- Nếu –m ≠ 1 tức m ≠ –1 thì (*) có nghiệm $x = -\frac{m}{m+1}$.
- Khi đó, để phương trình có 2 nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{m+1} = 1 \\ -\dfrac{m}{m+1} = -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m = m+1 \\ -m = -m(m+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1/2 \\ m = 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi:

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{m}{m+1} \neq 1 \\ -m \neq 1 \\ -\dfrac{m}{m+1} \neq -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -m \neq m+1 \\ m \neq -1 \\ -m \neq -m(m+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq -1/2 \\ m \neq -1 \\ m \neq 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\frac{1}{2}, -1\right\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 2. *Giải và biện luận phương trình* |mx + 1| = |3x + m – 2|.

✍ *Giải*

Phương trình được chuyển thành dạng:

$$\left[\begin{array}{l} mx + 1 = 3x + m - 2 \\ mx + 1 = -3x - m + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-3)x = m-3 & (2) \\ (m+3)x = 1-m & (3) \end{array}\right. .$$

- Giải và biện luận phương trình (2): Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m – 3 = 0 ⇔ m = 3.

(2) ⇔ 0x = 0, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: Nếu m – 3 ≠ 0 ⇔ m ≠ 3.

(2) ⇔ x = 1: phương trình có nghiệm duy nhất.

- Giải và biện luận phương trình (3): Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu m + 3 = 0 ⇔ m = –3.

(3) ⇔ 0x = 4, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu m + 3 ≠ 0 ⇔ m ≠ –3.

(3) ⇔ $x = \frac{1-m}{m+3}$: là nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với m = 3, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Với m = –3, phương trình có một nghiệm là x = 1.
- Với m ≠ ±3, phương trình có hai nghiệm là x = 1 và $x = \frac{1-m}{m+3}$.

<u>Dạng 2:</u> Với phương trình:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{hoặc} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. . \qquad \text{(II)}$$

Như vậy, với phương trình dạng trên có chứa tham số chúng ta cần thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lựa chọn hướng biến đổi về (I) hoặc (II), rồi thực hiện việc giải và biện luận nó.

Bước 2: Kết luận.

☞ ***Chú ý***: a. Nếu g(x) không chứa tham số ta lựa chọn phép biến đổi (I).

b. Nếu f(x) không chứa tham số ta lựa chọn phép biến đổi (II).

c. Trong trường hợp cả f(x), g(x) đều chứa tham số thì tuỳ vào độ phức tạp của f(x), g(x) ta lựa chọn phép biến đổi (I) hoặc (II).

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải các phương trình sau*:

a. $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1$. b. $\frac{x-1}{2x-3} = \frac{-3x+1}{|x+1|}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $x^2 + 5x + 1 + 3 \ge 0$. (*)

Biến đổi phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+5 = x^2+5x+1 \\ -2x-5 = x^2+5x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0 \\ x^2+7x+6=0 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right. .$$

Vậy,phương trình có hai nghiệm x = 1 và x = –6.

b. Tập xác định $D = R\backslash\{-1; \frac{3}{2}\}$

Biến đổi phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{x+1} \text{ khi } x \ge -1 \\ \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{-x-1} \text{ khi } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 11x + 2 = 0 \text{ khi } x \ge -1 \\ 5x^2 - 11x + 2 = 0 \text{ khi } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{65}}{14}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$.

Thí dụ 2. *Giải và biện luận các phương trình* $|x - 1| = mx + 2m - 1$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$|x-1| = mx + 2m - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x - 1 = mx + 2m - 1 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 1 = -(mx + 2m - 1) \end{cases} & \text{(II)} \end{array}\right..$$

Ta đi giải và biện luận (I)

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (1-m)x = 2m \quad (*) \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Nếu 1 – m = 0 ⇔ m = 1.

(*) ⇔ 0.x = 2 (mâu thuẫn) ⇒ (*) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu 1 – m ≠ 0 ⇔ m ≠ 1.

$(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{2m}{1-m}$.

- Nếu $\dfrac{2m}{1-m} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3m-1}{1-m} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{3} \\ m > 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ (I) vô nghiệm.
- Nếu $\dfrac{2m}{1-m} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{3m-1}{1-m} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le m < 1 \Rightarrow$ (I) có nghiệm $x = \dfrac{2m}{1-m}$.

Giải và biện luận (II) – *Học sinh tự làm*.

Dạng 3: ***Sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối***

Ta sử dụng các tính chất sau:

Tính chất 1: Ta có:

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0.$$

Tính chất 2: Ta có:

$$|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}.$$

Tính chất 3: Ta có:

$$|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \le 0 \end{cases}.$$

Tính chất 4: Ta có:

$$|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \ge 0.$$

với lược đồ thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa (nếu cần) cho các biểu thức trong phương trình.
Bước 2: Biến đổi phương trình về một trong 4 tính chất đã biết.
Bước 3: Giải (hoặc biện luận) phương trình đại số nhận được.
Bước 4: Kết luận.

Thí dụ 1. *Giải phương trình* $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = 3$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|x^2 - 4x + 3| + |4x - x^2| = (x^2 - 4x + 3) + (4x - x^2)$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 2}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ 4x - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 3 \le x \le 4 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $[0; 1] \cup [3; 4]$.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = (x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 4x)$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 3}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 4x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 1 \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 3 \le x \le 4 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $[0; 1] \cup [3; 4]$.

Dạng 4: ***Sử dụng ẩn phụ***

Thí dụ 1. *Cho phương trình* $|mx - 2| + \dfrac{2}{|mx - 2| + 1} = 2$. (1)

a. *Giải phương trình với* m = 1.
b. *Giải và biện luận phương trình theo* m.

✍ *Giải*

Đặt $t = |mx - 2| + 1$, điều kiện $t \ge 1$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t - 1 + \frac{2}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |mx-2|+1=1 \\ |mx-2|+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |mx-2|=0 \\ |mx-2|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx=2 \\ mx=3 \\ mx=1 \end{array}\right. . \qquad (I)$$

a. Với m = 1, khi đó (I) tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = 1 phương trình có 3 nghiệm là x = 1, x = 2 và x = 3.

b. Ta có ngay:

- Với m = 0, (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm.
- Với $m \neq 0$, (I) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $(x + 2)|x^3 - 3x| = x^6 - 6x^4 + 9x^2 + 2x$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^3 - 3x)^2 - (x + 2)|x^3 - 3x| + 2x = 0. \qquad (1)$$

Đặt $t = |x^3 - 3x|$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình (1) được biến đổi về dạng:

$$t^2 - (x + 2)t + 2x = 0 \qquad (3)$$

ta có $\Delta_t = (x + 2)^2 - 8x = (x - 2)^2$, do đó:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3-3x|=x \\ |x^3-3x|=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3-3x=\pm x \end{cases} \\ x^3-3x=\pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3-4x=0 \\ x^3-2x=0 \end{array}\right. \end{cases} \\ x^3-3x\pm 2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=\pm 1,\ x=\pm 2 \end{array}\right. .$$

Vây, phương trình có 6 nghiệm phân biệt x = 0, x = ± 1, x = $\sqrt{2}$, x = ± 2.

Dạng toán 9: Phương trình chứa căn

Phương pháp áp dụng

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta có thể dùng:

a. Định nghĩa của giá trị tuyệt đối.
b. Bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.
c. Tính chất của giá trị tuyệt đối.
d. Ẩn phụ.

Dạng 1: ***Với phương trình***:

$$\sqrt{f(x,m)} = \sqrt{g(x,m)} \Leftrightarrow f(x,m) = g(x,m) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D & (*) \\ f(x,m) = g(x,m) \end{cases}.$$

$$\sqrt{f(x,m)} = g(x,m) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x,m) \text{ có nghĩa và } g(x,m) \ge 0 \\ f(x,m) = g^2(x,m) \end{cases}.$$

Lưu ý rằng: Điều kiện (*) được lựa chọn tuỳ theo độ phức tạp của $f(x, m) \ge 0$ và $g(x, m) \ge 0$, thí dụ với phương trình:

$$\sqrt{x-m} = \sqrt{x^2 - 2mx + 3}$$

Ta lựa chọn phép biến đổi:

$$\begin{cases} x - m \ge 0 \\ x - m = x^2 - 2mx + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x^2 - (2m+1)x + 3 + m = 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Giải và biện luận các phương trình*:

a. $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{m}{\sqrt{x-2}}$. b. $\dfrac{x}{\sqrt{x+m}} = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{m}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = m \end{cases}.$$

Kết luận:

- Với $m \le 2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m > 2$, phương trình có nghiệm $x = m$.

b. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } m>0 \\ \sqrt{x+m} = \sqrt{x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } m>0 \\ x+m = x+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } m>0 \\ x>-1 \text{ và } m = 1 \end{array}\right..$$

Kết luận:

- Với $0 < m \ne 1$, phương trình có nghiệm $x = 0$.
- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = 0$ hoặc $x > -1$.
- Ngoài ra vô nghiệm.

Thí dụ 2. *Giải phương các trình sau*:

a. $\sqrt{5x+6} = x - 6$. b. $\sqrt{x+1} = 1 - x^2$

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x - 6 \ge 0 \\ 5x + 6 = (x-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ x^2 - 17x + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 15$.

b. Biến đổi phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ x+1=(1-x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1 \\ x(x+1)(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

<u>***Dạng 2:***</u> ***Với phương trình***:

$$\sqrt{f(x,m)} + \sqrt{g(x,m)} = \sqrt{h(x,m)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,m) \text{ có nghĩa và } f(x,m) \ge 0 \\ g(x,m) \text{ có nghĩa và } g(x,m) \ge 0 \\ f(x,m)+g(x,m)+2\sqrt{f(x,m)g(x,m)} = h(x,m) \end{cases}.$$

Lưu ý rằng: Không cần $h(x, m) \ge 0$.

Thí dụ 1. *Giải phương các trình sau*:

a. $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$. b. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 3.$$

Biến đổi phương trình:

$$3 - x = x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \ge 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, phương trình có 1 nghiệm $x = -1$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}.$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1/2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -7/2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 2$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2} + 1| - |\sqrt{x-2} - 1| = |(\sqrt{x-2} + 1) - (\sqrt{x-2} - 1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{TÝnh chÊt 4}} (\sqrt{x-2} - 1).2 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x \ge 3$.

☞ ***Chú ý***: Rất nhiều học sinh giải bài này chỉ thu được nghiệm $x = 3$.

Dạng 5: ***Sử dụng ẩn phụ***

Thí dụ 3. *Giải phương các trình sau*:

a. $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$.   b. $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2+3x}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có:

$$t = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

do đó điều kiện cho ẩn phụ t là $t \ge \frac{3}{4}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t \ge 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

b. Điều kiện:

$$x^2 + 3x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ x \ge 0 \end{array}\right., \qquad (1)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2+3x} - 10 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+3x}$, điều kiện $t \ge 0$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5 \end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right., \text{ thoả mãn (1).}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -4$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong thí dụ trên:

- Ở câu a), ẩn phụ được sử dụng với mục đích hạ bậc cho phương trình.
- Ở câu b), ẩn phụ được sử dụng với mục đích chuyển phương trình ban đầu về phương trình bậc hai.

§4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Dạng toán 1: Phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Thí dụ 1. a. *Giải phương trình* $4x - y = 1$.

b. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x - 2y = 3$.

c. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình* $2x + y = 4$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$y = 4x - 1.$$

suy ra, các cặp số (0; −1), (1; 3), …là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x; 4x - 1)$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x = 2y + 3.$$

Để nghiệm của phương trình là nghiệm nguyên thì y phải nguyên.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(2a + 3, a)$ với $a \in \mathbb{Z}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$y = 4 - 2x.$$

Để x, y nguyên dương điều kiện là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ 4 - 2x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có duy nhất một cặp nghiệm nguyên dương là (1; 2).

Thí dụ 2. *Giải và biện luận phương trình*:

$$mx + (m - 1)y = m^2 - 1. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Ta xét từng trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu m = 0 thì:

$$(1) \Leftrightarrow 0.x - y = -1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{(x_0, 1), x_0 \in \mathbb{R}\}$.

Trường hợp 2: Nếu và m = 1 thì:

$$(1) \Leftrightarrow x + 0.y = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{(0; y_0), y_0 \in \mathbb{R}\}$.

Trường hợp 3: Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Khi đó lấy $x = x_0$ tuỳ ý, ta được $y_0 = \dfrac{m^2 - 1 - mx_0}{m - 1}$.

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{(x_0 ; \dfrac{m^2 - 1 - mx_0}{m - 1}), x_0 \in \mathbb{R}\}$.

Dạng toán 2: Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Thí dụ 1. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} (2a - 1)x - y = 1 \\ x + (a + 1)y = -1 \end{cases}.$$

a. *Xét nghiệm của hệ đó với* $a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$.

b. *Giải và biện luận hệ phương trình.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Với $a = 0$, hệ có vô số nghiệm.
- Với $a = \dfrac{1}{2}$, hệ có nghiệm $(-\dfrac{1}{2}; -1)$

b. Ta có $D = 2a^2 + a$; $D_x = a$; $D_y = -2a$.

Trường hợp 1: Nếu $D \neq 0$, tức là:

$$2a^2 + a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1/2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2a + 1}$ và $y = -\dfrac{2}{2a + 1}$.

Trường hợp 2: Nếu $D = 0$, tức là:

$$2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -\frac{1}{2}.$$

- Với $a = 0$, suy ra $D_x = D_y = 0$ nên hệ có vô số nghiệm.
- Với $a = -\dfrac{1}{2}$, suy ra $D_x \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $a \neq -\dfrac{1}{2}$, hệ có nghiệm $\dfrac{1}{2a + 1}$ và $y = -\dfrac{2}{2a + 1}$.
- Với $a = 0$, hệ có vô số nghiệm.
- Với $a = -\dfrac{1}{2}$, hệ vô nghiệm.

☞ ***Chú ý***: Với bài toán yêu cầu "*Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm* x, y *không phụ thuộc vào tham số*", khi đó từ hệ nghiệm x, y hoặc từ hệ ban đầu ta khử tham số sẽ được hệ thức cần tìm.

Trong nhiều trường hợp việc khử tham số cần áp dụng các hằng đẳng thức lượng giác, ví dụ như:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tan\alpha.\cot\alpha = 1,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2\alpha = 1, \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2\alpha = 1,...$$

Thí dụ 2. *Giải và biện luận hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x(1+\cos 2\alpha) + y\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \\ x(1+\cos 2\alpha) - y.\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \end{cases}.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y *của hệ không phụ thuộc vào* α.

✍ *Giải*

a. *Bạn đọc tự giải*.

b. *Hướng dẫn*: Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} x.\cos 2\alpha + (y-1)\sin 2\alpha = -x \\ (x-1)\cos 2\alpha - y.\sin 2\alpha = -x \end{cases}$$

coi cos2α và sin2α làm ẩn ta đi tính các D, $D_{\cos 2\alpha}$ và $D_{\sin 2\alpha}$ từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = f(x,y) \\ \sin 2\alpha = g(x,y) \end{cases} \overset{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1}{\Rightarrow} f^2(x, y) + g^2(x, y) = 1.$$

Đó chính là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào α.

Thí dụ 3. *Tìm* m *để hệ phương trình sau có nghiệm*:

$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \\ x + y = m & (3) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

✍ *Giải*

Xét hệ phương trình tạo bởi (2) và (3):

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Ta có $D = 1 - m$, $D_x = 1 - m^2$, $D_y = m - 1$.

Trường hợp 1: Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó, hệ (II) hệ (II) có nghiệm duy nhất $x = 1 + m$ và $y = -1$.

Nghiệm trên thoả mãn (1)

$$\Leftrightarrow m(1 + m) - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (l)} \\ m = -2 \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$x + y = 1$, có vô số nghiệm.

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -2$ hệ có nghiệm.

☞ ***Chú ý***: Với bài toán yêu cầu "*Tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện cho trước*", ta có các nhận xét sau:

a. Với $D \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{D_x}{D}$ và $y = \dfrac{D_y}{D}$.

b. Với $D = D_x = D_y = 0$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

c. Với $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.

Trong trường hợp a, c phải so sánh giá trị của nghiệm số với điều kiện nếu có để nhận được kết luận đúng.

Thí dụ 4. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}.$$

a. *Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất*.

b. *Tìm giá trị của* m *để hệ có nghiệm* (x; y) *là một điểm thuộc góc phần tư thứ* I.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$D = m^2 + 1 \neq 0$ với $\forall m$, nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$D_x = 1 - m^2$, $D_y = 2m$.

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{1-m^2}{m^2+1}; \dfrac{2m}{m^2+1}\right)$.

b. Để nghiệm (x; y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I, điều kiện là:

$$\begin{cases} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} > 0 \\ \dfrac{2m}{m^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y = m \\ (2m-1)x - y = 2m + 5 \end{cases}.$$

a. *Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm* x, y *không phụ thuộc vào* m.

b. *Khi hệ có nghiệm duy nhất, tìm* $m \in \mathbb{Z}$ *để hệ có nghiệm nguyên*.

✍ *Giải*

a. *Hướng dẫn*: Từ hệ thức về nghiệm:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5m+10}{5m-4} \\ y = \dfrac{2m-10}{4-5m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m(x-1) = 4x+10 \\ m(5y+2) = 4y+10 \end{cases} \Rightarrow \frac{5(x-1)}{5y+2} = \frac{4x+10}{4y+10}$$

$\Leftrightarrow 21x - 35y + 75 = 0$.

Đó là hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

b. Từ công thức nghiệm x, ta biến đổi $x = 1 + \dfrac{14}{5m-4}$.

Khi đó, để x nguyên điều kiện là 5m – 4 phải là ước của 14 (tức bằng ±1, ±2, ±7, ±14) từ đó ta lập bảng:

5m – 4	–1	–2	–7	–14	1	2	7	14
m	loại	loại	loại	–2	1	loại	loại	loại
x				0	15			
y				–1	8			

Vậy, ta nhận được:

- Với m = –2 thì hệ có cặp nghiệm nguyên là (0; –1).
- Với m = 1 thì hệ có cặp nghiệm nguyên là (15; 8).

Dạng toán 3: Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Thí dụ 1. *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} 2x - 3y + x = -7 \\ -4x + 5y + 3z = 6 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2) và (3), khi đó:
   - Khử z giữa (1) và (2), ta có: 3x + y = 4. (4)
   - Khử z giữa (2) và (3), ta có: x – y = 0. (5)
   - Khử y giữa (4) và (5), ta có: x = 1 ⇒ y = 1 ⇒ z = 2.

   Vậy, hệ phương trình có nghiệm (1; 1; 2).

b. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2) và (3), khi đó:
   - Khử z giữa (1) và (2), ta được: 10x – 14y = – 27. (4)
   - Khử z giữa (1) và (3), ta được: 5x – 4y = – 9. (5)
   - Khử x giữa (4) và (5), ta được: $y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow z = -\dfrac{13}{10}$.

   Vậy, nghiệm của hệ phương trình: $(-\dfrac{3}{5}\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{13}{10})$.

Dạng toán 4: Ứng dụng của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Dạng 1: ***Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng***

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình tổng quát:

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Tuỳ theo giá trị của tham số hãy xác định vị trí tương đối của (d_1), (d_2), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bước 2: Bằng việc biện luận (I) ta có được vị trí tương đối của (d_1) và (d_2), cụ thể:

- Nếu (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1) \,//\, (d_2)$.
- Nếu (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d_1)\cap(d_2) = \{M(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})\}$.
- Nếu (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$.

Thí dụ 1. *Cho* $a^2 + b^2 > 0$ *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): ax + by = a + b; \quad (d_2): bx + ay = a - b.$$

a. *Xác định giao điểm của* (d_1) *và* (d_2).

b. *Tìm quỹ tích toạ độ giao điểm khi* a, b *thay đổi*.

✍ *Giải*

a. Xét hệ phương trình tạo bới (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Ta có $D = a^2 - b^2$; $D_x = a^2 - 2ab - b^2$; $D_y = a^2 + b^2$.

Để (d_1) và (d_2) cắt nhau điều kiện là:

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$.

Khi đó, giao điểm là $I\left(\frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}, \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$.

b. Viết lại hệ (I) dưới dạng:

$$\begin{cases} a(x-1) = b(1-y) \\ a(1-y) = b(x+1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1-y} = \frac{1-y}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

Vậy, quỹ tích giao điểm I khi a, b thay đổi thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 2$.

Dạng 2: ***Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để xét hai phương trình bậc hai có nghiệm chung***

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi 2 phương trình bậc hai:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bước 2: Đặt $x^2 = y$, ta được hệ:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1x + a_1y = c_1 \\ b_2x + a_2y = c_2 \end{cases}. \qquad (II)$$

Bước 3: Để 2 phương trình có nghiệm chung trước hết (II) phải có nghiệm thoả mãn $x^2 = y$, ta có điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \neq 0 \\ (D_x / D)^2 = D_y / D \end{cases}. \\ D = D_x = D_y = 0 \end{array}\right.$$

Bước 4: Thử lại.

Thí dụ 1. *Với giá trị nào của* m *thì* 2 *phương trình sau có nghiệm chung*:

$$2x^2 + mx - 1 = 0 \text{ và } mx^2 - x + 2 = 0.$$

✍ *Giải*

Các phương trình đã cho có nghiệm chung $\Leftrightarrow$ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ:

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ x - my = 2 \end{cases}.$$

Ta có $D = -m^2 - 2$; $D_x = -m - 4$; $D_y = 2m - 1$.

Vì $D \neq 0$, $\forall m$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m+4}{m^2+2}$ và $y = \dfrac{1-2m}{m^2+2}$.

Do $x^2 = y$, nên ta phải có:

$$\left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow m^3 + 6m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

Dạng 3: *Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để biện luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức hai ẩn*

Với yêu cầu biện luận giá trị nhỏ nhất của

$$F = (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2$$

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét hai đường thẳng:

(d_1): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và (d_2): $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}.$$

Xác định các giá trị D, D_x, D_y.

Bước 3: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $D \neq 0$ thì:

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.

Khi đó (d_1) cắt (d_2) do đó minF = 0.

Trường hợp 1: Nếu D = 0, đặt $t = a_1x + b_1y + c_1$, ta được:

$$F = 2t^2 + At + B \geq -\frac{\Delta}{4}.$$

Vậy $\min F = -\frac{\Delta}{4}$, đạt được khi $t = -\frac{A}{4} \Rightarrow a_1x + b_1y + c_1 = -\frac{A}{4}$.

Bước 4: Kết luận:

- Với <u>$D \neq 0$</u>, minF = 0, đạt được khi $x = \frac{D_x}{D}$ và $y = \frac{D_y}{D}$.
- Với <u>$D = 0$</u>, $\min F = -\frac{\Delta}{4}$, đạt được khi x, y thuộc đường thẳng có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = -\frac{A}{4}$.

<u>Thí dụ 1.</u> *Hãy biện luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau theo tham số* a:

$$F = (x + y - 2)^2 + (x + ay - 3)^2.$$

✍ *Giải*

Xét hai đường thẳng

(d_1): x + y – 2 = 0 và (d_2): x + ay – 3 = 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của (d_1) và (d_2).

Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + ay = 3 \end{cases}.$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1,\ D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 3,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{2a-3}{a-1} \text{ và } y = \frac{1}{a-1} \Rightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2) \text{ do đó minF = 0.}$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Với a = 1, suy ra $D_x = -1 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Khi đó (d_1) // (d_2) do đó:

$$F = (x + y - 2)^2 + (x + y - 3)^2.$$

Đặt t = x + y – 2, ta được

$$F = t^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - 2t + 1 \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy, ta được $\min F = \frac{3}{4}$, đạt được khi:

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 2y - 5 = 0.$$

Kết luận:

- Với $a \neq 1$, $\min F = 0$, đạt được khi $x = \frac{2a-3}{a-1}$ và $y = \frac{1}{a-1}$.
- Với $a = -4$, $\min F = \frac{3}{4}$, đạt được khi x, y thoả mãn $2x + 2y - 5 = 0$.

<u>Dạng 4:</u> Ứng dụng khác của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

<u>Thí dụ 1.</u> *Hãy xác định tất cả các giá trị của* a, b *sao cho nghiệm của bất phương trình* $|x - 2a + 1| \leq b + 1$ là đoạn $[-2; 5]$.

Giải

1. Nếu $b + 1 < 0 \Leftrightarrow b < -1$ thì bất phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -1$ thì bất phương trình được viết lại dưới dạng:

$$-b - 1 \leq x - 2a + 1 \leq b + 1 \Leftrightarrow 2a - b - 2 \leq x \leq 2a + b + 2.$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình là đoạn $[-2; 5]$ điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} 2a - b - 2 = -2 \\ 2a + b + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3/4 \\ b = 3/2 \end{cases}.$$

Vậy, với $a = \frac{3}{4}$ và $b = \frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện dầu bài.

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

<u>Dạng toán 1:</u> Giải hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn

Phương pháp áp dụng

Để giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & (2) \end{cases}$$

chúng ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: (***Phương pháp thế***): Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ phương trình (1) rút x hoặc y rồi thế vào phương trình (2). Khi đó, ta được phương trình bậc hai theo x hoặc y, giả sử:

$$f(x, m) = 0. \qquad (3)$$

Bước 2: Thực hiện giải (3) theo yêu cầu của đầu bài.

Cách 2: (***Phương pháp đồ thị***): Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Ta có:

- Tập hợp các điểm thoả mãn (1) thuộc đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$
- Tập hợp các điểm thoả mãn (2) với $b = 0$ thuộc đường cong (S): $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Bước 2: Khi đó số nghiệm của hệ là số giao điểm của đường thẳng (d) với đường (S).

☞ ***Chú ý***: Khi sử dụng phương pháp này các em học sinh cần nhớ lại điều kiện tiếp xúc của đường thẳng (d) với đường tròn, Elíp, Hypebol, Parabol.

Thí dụ 1. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2mx^2 - my^2 + 4x + 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

a. *Giải hệ phương trình với* m = 3.

b. *Tìm* m *để hệ có nghiệm duy nhất*.

✍ *Giải*

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2mx^2 - m(x+1)^2 + 4x + 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

a. Với m = 3, hệ có hai cặp nghiệm (0; 1) và ($\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$).

b. Hệ có nghiệm duy nhất, khi và chỉ khi (1) có nghiệm duy nhất.

Với phương trình (1), ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{4},$$

tức là, hệ có nghiệm duy nhất ($\frac{3}{4}$; $\frac{7}{4}$).

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, để (1) có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - m(m-3) = 0 \Leftrightarrow -m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, với m = 0 hoặc m = 4 hệ có nghiệm duy nhất.

Thí dụ 2. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = m \end{cases}.$$

Xác định các giá trị của m *để*:

a. *Hệ phương trình vô nghiệm.*
b. *Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.*
c. *Hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (x-m)^2 = 1 \\ y = x - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (3) \\ y = x - m \end{cases}.$$

a. Hệ đã cho vô nghiệm điều kiện là:

(3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| > \sqrt{2}$ hệ vô nghiệm.

b. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất điều kiện là:

(3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, với $m = \pm\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

c. Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

(3) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| < \sqrt{2}$ hệ có hai nghiệm phân biệt.

☞ ***Chú ý***: Khi đã có kiến thức về phương trình đường thẳng và đường tròn trong mặt phẳng chúng ta có thể thực hiện theo cách sau:

- Phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm O(0; 0), bán kính R = 1.
- Phương trình (2) là phương trình đường thẳng (d).

a. Hệ vô nghiệm khi:

(d) không cắt (C) $\Leftrightarrow d(O, d) > R \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{1+1}} > 1 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| > \sqrt{2}$ hệ vô nghiệm.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi:

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(O, d) = R \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{1+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, với $m = \pm\sqrt{2}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

c. Hệ có hai nghiệm phân biệt khi:

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow d(O, d) < R \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{1+1}} < 1 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| < \sqrt{2}$ hệ có hai nghiệm phân biệt.

Thí dụ 3. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x - y - m = 0 \\ y^2 + 2x - 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

a. *Giải hệ phương trình với* m = 1.

b. *Tìm* m *để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt* $(x_1; y_1)$ *và* $(x_2; y_2)$ *thoả mãn* $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. (*)

✍ *Giải*

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m)^2 + 2x - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \,\&\, y = 1 \\ x = -2 \,\&\, y = -3 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 1 hệ có hai cặp nghiệm (2; 1) và (–2; –3).

b. Biến đổi tiếp hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m - 1)(x - m + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ \left[\begin{array}{l} x - m - 1 = 0 \\ x - m + 3 - 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m + 1 \,\&\, y_1 = 1 \\ x_2 = m - 3 \,\&\, y_1 = -3 \end{array}\right..$$

Tức là, với mọi m hệ luôn có hai cặp nghiệm.

Điều kiện (*) trở thành:

$$(m + 1)^2 + 1 = (m - 3)^2 + 9 \Leftrightarrow 8m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với m = 2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Dạng toán 2:</u> Giải hệ hệ phương trình đối xứng loại I

Phương pháp áp dụng

Phương pháp chung để giải và biện luận hệ đối xứng loại I bao gồm các bước:

Bước 1: Sử dụng ẩn phụ:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0.$$

Bước 2: Xác định S và P. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - St + P = 0. \qquad (*)$$

Bước 3: Bài toán được chuyển về giải và biện luận phương trình (*).

☞ ***Chú ý***:

1. Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại I được trình bày ở trên, trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng các phương pháp:

   a. ***Phương pháp thế***: bởi rất nhiều hệ đối xứng loại I là "*Hệ gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất của hai ẩn*".

   b. ***Phương pháp đồ thị***.

c. ***Phương pháp điều kiện cần và đủ***: được áp dụng rất tốt cho hệ với yêu cầu " *Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất* ". Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần

- Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hê, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \qquad (**)$$

- Thay (**) vào hệ ta được giá trị của tham số . Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ.

2. Một số hệ phương trình cần sử dụng một vài phép biến đổi đơn giản để đưa về dạng đối xứng loại I. Thông thường ta sử dụng phép đổi biến.

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ xy + x + y = -3 \end{cases}.$$

Giải

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, điều kiện $S^2 - 4P \ge 0$.

Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - xy = 3 \\ xy + x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 3 \\ P + S = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - (-3 - S) = 3 \\ P = -3 - S \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \text{ và } P = -3 \\ S = -1 \text{ và } P = -2 \end{array}\right..$$

- Với $S = 0$ và $P = -3$, ta được:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -3 \end{cases}$$

khi đó x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{3} \text{ và } y_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \text{ và } y_2 = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

- Với $S = -1$ và $P = -2$, ta được:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

khi đó x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 1 \text{ và } y_3 = -2 \\ x_4 = -2 \text{ và } y_4 = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có 4 cặp nghiệm $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ và $(x_4; y_4)$.

Thí dụ 2. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}.$$

a. *Giải hệ phương trình với* m = 26.
b. *Xác định m để hệ vô nghiệm.*
c. *Xác định* m *để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.*
d. *Xác định* m *để hệ có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Cách 1: Sử dụng phương pháp chung của hệ đối xứng loại I để thực hiện các yêu cầu của bài toán.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = m \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \dfrac{36 - m}{2} \end{cases}$$

khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 26, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \;\&\; y = 5 \\ x = 5 \;\&\; y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 26 hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1; 5) và (5; 1).

b. Hệ vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18$.

Vậy, với m < 18 hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18$.

Khi đó hệ có nghiệm x = y = 3.

Vậy, với m = 18 hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 3..

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0 \Leftrightarrow m - 18 > 0 \Leftrightarrow m > 18$.

Vậy, với m > 18 hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế để thực hiện các yêu cầu của bài toán.

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (6 - x)^2 = m \\ y = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 12x + 36 - m = 0 \quad (2) \\ y = 6 - x \end{cases}. \quad (I)$$

a. Với m = 26, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \;\&\; y = 5 \\ x = 5 \;\&\; y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = 26$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1, 5)$ và $(5, 1)$.

b. Hệ vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18$.

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18$.

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0 \Leftrightarrow m - 18 > 0 \Leftrightarrow m > 18$.

Vậy, với $m > 18$ hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị để thực hiện các yêu cầu b), c), d) của bài toán.

Nhận xét rằng với $m \le 0$, hệ vô nghiệm, do đó ta xét với $m > 0$. Ta có:

- Phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $O(0, 0)$, bán kính $R = \sqrt{m}$.
- Phương trình (2) là đường thẳng (d).

b. Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow d(O, (d)) > R \Leftrightarrow \frac{|-6|}{\sqrt{1+1}} > \sqrt{m} \Leftrightarrow m < 18.$$

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{(d) tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow d(O, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|-6|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó, hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(O, (d)) < R \Leftrightarrow \frac{|-6|}{\sqrt{1+1}} < \sqrt{m} \Leftrightarrow m > 18.$$

Vậy, với $m > 18$ hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Cách 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để thực hiện yêu cầu c) của bài toán.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hê, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \qquad (*)$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x_0^2 = m \\ 2x_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow m = 18.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 18$, ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 18 hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

☞ ***Nhận xét***: Thông qua ví dụ trên chúng ta đã thấy được các phương pháp khác nhau để thực hiện hệ đối xứng loại I. Trong trường hợp chúng ta lựa chọn phương pháp tổng quát thì mục đích chính là việc xác định cho được:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

để từ đó chuyển hệ phương trình thành phương trình:

$$t^2 - St + P = 0.$$

Thí dụ 3. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = m \end{cases}.$$

Xác định các giá trị của m *để*:

a. *Hệ phương trình vô nghiệm.*
b. *Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.*
c. *Hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x - y)^2 + 2xy = 1 \\ x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2xy = 1 \\ x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ x(-y) = \dfrac{m^2 - 1}{2} \end{cases}$$

khi đó x, –y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - mt + \frac{m^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2mt + m^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

a. Hệ đã cho vô nghiệm điều kiện là:

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| > \sqrt{2}$ hệ vô nghiệm.

b. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất điều kiện là:

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, với $m = \pm\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

c. Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$.

Vậy, với $|m| < \sqrt{2}$ hệ có hai nghiệm phân biệt.

<u>Dạng toán 3:</u> Giải hệ hệ phương trình đối xứng loại II

Phương pháp áp dụng

Phương pháp chung để giải và biện luận hệ đối xứng loại II bao gồm các bước:

Bước 1: Trừ từng vế của hai phương trình bao giờ cũng thu được phương trình tích.

$$(x - y)f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ f(x, y) = 0 \end{array}\right..$$

Bước 2: Giải hệ cho từng trường hợp.

☞ ***Chú ý***: Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại II được trình bày ở trên, trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng các phương pháp:

1. ***Phương pháp điều kiện cần và đủ***: được áp dụng rất tốt cho hệ với yêu cầu "*Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất*". Khi đó ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Điều kiện cần
   - Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hê, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:
     $x_0 = y_0$. (**)
   - Thay (**) vào hệ ta được giá trị của tham số . Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

   Bước 2: Điều kiện đủ.
2. ***Phương pháp đồ thị***.

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$(x^2 - y^2) = -4(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -4 - x \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với x = y, hệ phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 3x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = -2 \end{array}\right..$$
- Với y = –4 – x, hệ phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 - 3x(-4 - x) = 4(-4 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2.$$

Vậy, hệ có nghiệm (0; 0) và (–2; –2).

Thí dụ 2. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}.$$

a. *Giải hệ phương trình với* $m = -1$.

b. *Tìm* m *để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.*

✍ *Giải*

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 = -m(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -m - x \end{array}\right..$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - mx + m = 0 \quad (1) \end{cases} \text{(I)} \qquad \text{hoặc} \begin{cases} y = -m - x \\ m^2 + m = 0 \qquad (2) \end{cases} \text{(II)}$$

a. Với $m = -1$, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = 1/2 \end{array}\right..$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ vô số nghiệm.}$$

Vậy, với $m = -1$ hệ có các nghiệm là $(-1; -1)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ và $\begin{cases} y = 1 - x \\ x \text{ tùy ý} \end{cases}$.

b. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ như sau:

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì cũng có nghiệm $(y_0; x_0)$, do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0. \qquad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$\Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 8$..

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Ta lần lượt:

- Với $m = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $y = -x \Rightarrow$ loại.

- Với $m = 8$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ xy + y^2 = 8(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -8 - x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -8 - x \\ 72 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ $x = y = 2$ là nghiệm duy nhất.

Vậy, với $m = 8$ hệ có nghiệm duy nhất.

<u>Dạng toán 4:</u> Giải hệ phương trình đẳng cấp bậc hai

Phương pháp áp dụng

Để giải và biện luận hệ đẳng cấp bậc hai:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 & (1) \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 & (2) \end{cases}$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khử số hạng tự do để dẫn tới phương trình:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0. \qquad (3)$$

Bước 2: Đặt $x = ty$, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow y^2[At^2 + Bt + C] = 0.$$

- Xét $y = 0$ thay vào hệ.
- Xét $At^2 + Bt + C = 0$, nếu có nghiệm t_0 thì thế $x = t_0y$ vào hệ để xét hệ với một ẩn y.

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ hệ khử số hạng x^2 (hoặc y^2) để dẫn tới phương trình khuyết x^2 (hoặc y^2), giả sử:

$$Dx^2 + Exy + F = 0 \Rightarrow y = -\frac{Dx^2 + F}{Ex}. \qquad (4)$$

Bước 2: Thế (4) vào một phương trình của hệ ta được phương trình trùng phương ẩn x.

☞ ***Chú ý***: Với bài toán chứa tham số ta thường lựa chọn cách 2.

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 & (2) \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Khử số hạng tự do từ hệ ta được:

$$x^2 + 9xy - 22y^2 = 0. \qquad (3)$$

Đặt $x = ty$, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow y^2(t^2 + 9t - 22) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ t = 2 \\ t = -11 \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với y = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 = 15 \\ x^2 = 8 \end{cases} \text{ vô nghiệm..}$$

- Với t = 2 ta được x = 2y,

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \ \& \ y_1 = 1 \\ x_2 = -2 \ \& \ y_2 = -1 \end{array}\right..$$

- Với t = −11 ta được x = − 11y,

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_3 = 1/\sqrt{14} \\ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = -1/\sqrt{14} \ \& \ y_3 = 1/\sqrt{14} \\ x_4 = 1/\sqrt{14} \ \& \ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm.

Cách 2: Nhận xét rằng: nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$.

Khử số hạng x^2 từ hệ ta được:

$$xy - 3y^2 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3y^2 - 1}{y}. \tag{4}$$

Thay (4) vào (2), ta được:

$$14y^4 - 15y^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

Đặt $t = y^2$, điều kiện $t \geq 0$, ta được:

$$(5) \Leftrightarrow 14t^2 - 15t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1/14 \end{array}\right..$$

- Với t = 1, ta được:

$$y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \ \& \ y_1 = 1 \\ x_2 = -2 \ \& \ y_2 = -1 \end{array}\right..$$

- Với $t = \frac{1}{14}$, ta được:

$$y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_3 = 1/\sqrt{14} \\ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = -1/\sqrt{14} \ \& \ y_3 = 1/\sqrt{14} \\ x_4 = 1/\sqrt{14} \ \& \ y_4 = -1/\sqrt{14} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm.

Thí dụ 2. *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 - xy = 2 & (*) \\ 2x^2 + 4xy - 2y^2 = m \end{cases}.$$

a. *Giải hệ với* m = 14.　　　　b. *Tìm* m *để hệ có nghiệm.*

✍ *Giải*

Nhận xét rằng nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì $x \neq 0$ (nếu trái lại (*) mâu thuẫn). Từ (*) suy ra:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x}. \qquad (**)$$

Thay (**) vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2x^2 + 4(x^2 - 2) - \frac{2(x^2 - 2)^2}{x^2} = m \Leftrightarrow 4x^4 - mx^2 - 8 = 0.$$

Đặt $t = y^2$, điều kiện $t \geq 0$, ta được:

$$f(t) = 4t^2 - mt - 8 = 0. \qquad (1)$$

a. Với m = 14 thì hệ có nghiệm (2; 1) và (–2; –1).

b. Để hệ có nghiệm thì (1) phải có ít nhất một nghiệm không âm, điều này luôn đúng bởi $ac = -32 < 0$.

Vậy, hệ có nghiệm với mọi m.

Dạng toán 5: Hệ phương trình không mẫu mực

Phương pháp áp dụng

Lược đồ để giải các hệ phương trình không mẫu mực có thể được minh hoạ sơ bộ theo các bước:

Bước1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ phương trình.

Bước2: Lựa chọn phương pháp thực hiện:

Phương pháp 1: Biến đổi tương đương.
Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ.
Phương pháp 3: Đồ thị.
Phương pháp 4: Điều kiện cần và đủ.
Phương pháp 5: Đánh giá.

☞ ***Chú ý***: Nếu lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ thì:

1. Với hệ phương trình không chứa tham số có thể chỉ cần thiết lập điều kiện hẹp cho ẩn phụ.
2. Với hệ phương trình chứa tham số phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

Thí dụ 1. *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$.　　　　b. $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}(x-y)^2(x+y)=3\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[(x+y)^2-4xy](x+y)=3 \quad (*)\\(x+y)[(x+y)^2-2xy]=15\end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được:

$$2xy(x + y) = 12 \Rightarrow x + y = \frac{6}{xy}.$$

Thay x + y vào (*) ta được:

$$[(\frac{6}{xy})^2 - xy].\frac{6}{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 2 \Rightarrow x + y = 3.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$$

suy ra x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=1,\ y_1=2\\x_2=2,\ y_2=1\end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1; 2), (2; 1).

b. Nhận xét rằng hệ phương trình nhận $x_1 = y_1 = 0$ làm nghiệm.
Xét các nghiệm thoả mãn $x^2 + y^2 > 0$ và nhận thấy phải có x, y cùng dấu.
Chia theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$\frac{2y(x^2-y^2)}{x(x^2+y^2)} = \frac{3x}{10y} \Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{3}{10}.$$

Đặt $t = (y/x)^2$, điều kiện t > 0, ta được:

$$20t^2 - 17t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{4}\\t=\frac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{1}{4}\\\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2y\\x=y\sqrt{\frac{5}{3}}\end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với x = 2y thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\y=\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=2 \text{ và } y_2=1\\x_3=-2 \text{ và } y_3=-1\end{array}\right..$$

- Với $x = y\sqrt{\frac{5}{3}}$ thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ y^2 = \dfrac{15}{4}\sqrt{\dfrac{3}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = \dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \text{ và } y_4 = \dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^3} \\ x_5 = -\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \text{ và } y_5 = -\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^3} \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ phương trình có năm cặp nghiệm:

$(0; 0)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$ và $(x_5; y_5)$.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số* a, b:

$$a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a).$$

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(a^2 - b^2)x = a^2 - ab^2. \qquad (**)$$

Ta đi giải và biện luận (**)

Trường hợp 1: Nếu $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$$(*) \Leftrightarrow 0.x = b^2(1 - a)$$

- Với $a = 1 \Rightarrow b = \pm 1$, thì $(*) \Leftrightarrow 0.x = 0$ (lđ) $\Rightarrow$ (*) nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $b = 0 \Rightarrow a = 0$, thì $(*) \Leftrightarrow 0.x = 0$ (lđ) $\Rightarrow$ (*) nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $a = \pm b$, $a \neq 1$ và $b \neq 0$, thì $(*) \Leftrightarrow 0.x = b^2(1 - a) \neq 0$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$.

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}.$$

Kết luận:

- Với $a = 1$ và $b = \pm 1$, phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $a = b = 0$, phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $a = \pm b$, $a \neq 1$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq \pm b$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}$.

Ví dụ 2: *Xác định* m *để phương trình sau vô nghiệm*:

$$(m - 1)^2x = 4x + m + 1.$$

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$[(m - 1)^2 - 4]x = m + 1 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 1)x = m + 1. \qquad (*)$$

Điều kiện để phương trình (*) vô nghiệm là:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+1) = 0 \\ m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với m = 3 phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: *Xác định tham số để phương trình sau có tập hợp nghiệm là* $\mathbb{R}$:

$$a(x - 1) + b(2x + 1) = x + 2.$$

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(a + 2b - 1)x = a - b + 2. \quad (*)$$

Điều kiện để (*) có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$ là:

$$\begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ a - b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với a = –1 và b = 1 phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

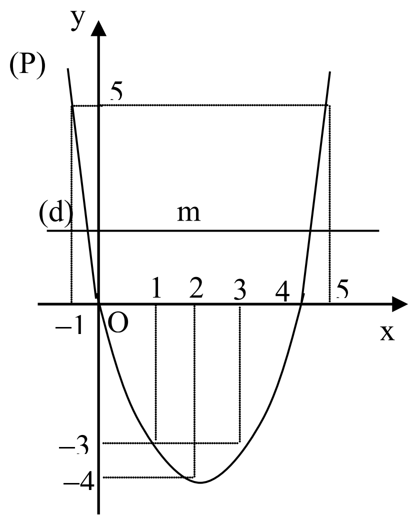
Ví dụ 4: *Cho phương trình*:

$$x^2 - 4x - m = 0.$$

Xác định m *để phương trình*:

a. *Có nghiệm thuộc khoảng* (–1; 3).
b. *Có đúng một nghiệm thuộc khoảng* (–1; 3).
c. *Có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng* (–1; 3).
d. *Có nghiệm thuộc* $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$.
e. *Có đúng một nghiệm thuộc khoảng* $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$.
f. Có *hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng* $(-\infty; 1)\cup(5; 6)$.

✍ *Giải*



Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 - 4x = m.$$

Khi đó số nghiệm trên tập D của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d): y = m với Parabol (P): $y = x^2 - 4x$ trên D.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

a. Phương trình có nghiệm thuộc D = (–1; 3)
$\Leftrightarrow -4 < m < 5$.
b. Phương trình có một nghiệm thuộc D
$\Leftrightarrow -3 < m < 5$.
c. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D
$\Leftrightarrow -4 < m < -3$.
d. Phương trình có một nghiệm thuộc D = $(-\infty, 1)\cup(5, +\infty)$ $\Leftrightarrow$ vô nghiệm.
e. Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc D = $(-\infty, 1)\cup(5, +\infty)$ $\Leftrightarrow$ m > 5.

Ví dụ 5: *Giả sử* a, b, c *là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm*:

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$$

$$= [(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2]$$

$$= \underbrace{(b - c - a)}_{<0}\underbrace{(b - c + a)}_{>0}\underbrace{(b + c - a)}_{>0}\underbrace{(b + c + a)}_{<0} < 0.$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 6: *Cho ba số dương* a, b, c *và phương trình*:

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b, c *để phương trình có nghiệm kép*.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\Delta' = 1 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{5}{2} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2}.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b) + (b + c) + (c + a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3$$

$$= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy, với a = b = c phương trình có nghiệm kép x = 1.

Ví dụ 7: *Cho phương trình*:

$$\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}. \qquad (1)$$

a. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm duy nhất.*

b. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$x(x + 2) - 2m(x + 1) = 3 - m^2$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-3 \end{array}\right..$$

a. Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-1)=0 \\ f(-2)\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-1)\neq 0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2-4=0 \\ m^2+2m-3\neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2-4\neq 0 \\ m^2+2m-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \text{ hoặc } m=-2 \\ m=1 \text{ hoặc } m=-3 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in \{-3, \pm 2, 1\}$ phương trình có nghiệm duy nhất.

b. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt điều kiện là:

$$\begin{cases} f(-1)\neq 0 \\ f(-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4\neq 0 \\ m^2+2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \pm 2 \\ m\neq 1; m\neq 3 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \notin \{-3, \pm 2, 1, 0\}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 8: *Cho hai phương trình*:

$$x^2 - mx - 2 = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 - x + 6m = 0. \qquad (2)$$

Tìm giá trị của m *để phương trình* (1) *và phương trình* (2) *có ít nhất một nghiệm chung. Biết* m *là một số nguyên.*

✍ *Giải*

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có:

$x_0^2 - mx_0 - 2 = 0$ (1')

$x_0^2 - x_0 + 6m = 0$ (2')

Lấy (1') trừ (2'), ta được:

$x_0(-m+1) - 2 - 6m = 0 \Leftrightarrow (1-m)x_0 = 6m + 2.$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thay vào (1) và (2), ta được:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, vô nghiệm.

Suy ra, $m = 1$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta được:

$$x_0 = \frac{6m+2}{1-m}.$$

Thay x_0 vào (2'), ta được phương trình ẩn m:

$$\left(\frac{6m+2}{1-m}\right)^2 - \frac{6m+2}{1-m} + 6m = 0 \Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 26m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 24m + 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m(6m^2 + 30m + 24) + 2(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+1)(m+4) + 2(m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1)[m(m+4)+2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)[m^2 + 4m + 2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m^2+4m+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2\pm\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Thử lại, với $m = -1$, ta có:

(1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_3 = -2$ và $x_4 = 3$.

Vậy, với $m = -1$, hai phương trình có một nghiệm chung.

Ví dụ 9: *Giả sử phương trình*:

$$(1+m^2)x^2 - 2(m^2-1)x + m = 0.$$

có hai nghiệm x_1, x_2. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào* m.

✍ *Giải*

Với giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m^2-1)}{1+m^2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{1+m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x_1+x_2) = \dfrac{m^2-1}{1+m^2} \\ 2x_1.x_2 = \dfrac{2m}{1+m^2} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Khử m từ hệ (I) bằng nhận xét:

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1x_2)^2 = \left(\frac{m^2-1}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 = 1.$$

Vậy, ta được $(x_1 + x_2)^2 + 16(x_1x_2)^2 = 4$ là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 10: *Giả sử phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2. *Chứng minh rằng hệ thức* $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ *là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.*

Giải

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Xét biểu thức:

$$P = (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3)$$
$$= x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)]$$
$$= \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \left[-\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{c}{a}.\frac{b}{a}\right] = \frac{b^3 + a^2c + ac^2 - 3abc}{a^3}.$$

Vậy, nếu $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ thì một trong hai thừa số của P phải bằng 0 và ngược lại.

Ví dụ 11: *Xác định* m *để phương trình sau có nghiệm*:

$$\frac{2x+m}{\sqrt{x-1}} - 4\sqrt{x-1} = \frac{x-2m+3}{\sqrt{x-1}}.$$

Giải

Điều kiện $x > 1$. (*)

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2x + m - 4(x - 1) = x - 2m + 3 \Leftrightarrow 3x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m+1}{3}.$$

Nghiệm trên phải thoả mãn điều kiện (*), tức là:

$$\frac{3m+1}{3} > 1 \Leftrightarrow 3m + 1 > 3 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Vậy, với $\frac{2}{3}$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 12: *Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm. Tính giá trị của nghiệm đó.*

$$\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x}. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}\Leftrightarrow\sqrt{(x-4a+16)x}=x-2a$$

$$\Rightarrow x=\frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\sqrt{a^2-16a+64}=2\sqrt{a^2-8a+16}-\sqrt{a^2}\Leftrightarrow |a-8|=2|a-4|-|a|. \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow |(2a-8)-a|=|2a-8|-|a|\Leftrightarrow a(a-8)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge 8\\ a\le 0\end{array}\right..$$

Vậy, với $a \ge 8$ hoặc $a \le 0$ thì (1) có nghiệm và nghiệm đó là $x=\frac{a^2}{4}$.

Ví dụ 13: *Cho phương trình*:

$$\sqrt{x^2-2x+m^2}=|x-1|-m.$$

a. *Giải phương trình với* $m = 2$.

b. *Giải và biện luận phương trình theo* m.

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{(x-1)^2+m^2-1}=|x-1|-m.$$

Đặt $t = |x-1|$, điều kiện $t \ge 0$.

Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{t^2+m^2-1}=t-m\Leftrightarrow\begin{cases} t-m\ge 0\\ t^2+m^2-1=(t-m)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge m\\ 2m.t=1 \quad (3)\end{cases}. \qquad (\mathrm{I})$$

a. Với $m = 2$

$$(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge 2\\ t=\frac{1}{4}\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

b. Giải và biện luận phương trình

- Với $m \le 0$ thì (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Với $m > 0$, ta được:

$$(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge m\\ t=\frac{1}{2m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{1}{2m}\ge m\\ t=\frac{1}{2m}\end{cases}\xleftrightarrow{m>0}\begin{cases} 2m^2\le 1\\ |x-1|=\frac{1}{2m}\end{cases}\xleftrightarrow{m>0}\begin{cases} 0<m\le\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x=1\pm\frac{1}{2m}\end{cases}$$

Kết luận:

- Với $m \le 0$ hoặc $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $0 < m \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, phương trình có 2 nghiệm $x = 1 \pm \frac{1}{2m}$.

Ví dụ 14: *Tìm* m *để phương trình* $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{2m + x - x^2}$ *có nghiệm.*

Giải

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$-x^2 + 3x - 2 = 2m + x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \ge 0 \\ x = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x = m + 1 \end{cases}.$$

Do đó, để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$$1 \le m + 1 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1.$$

Vậy, với $0 \le m \le 1$, phương trình có nghiệm.

Chú ý: Như vậy trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tương đương dạng 1 cùng với việc lựa chọn điều kiện $-x^2 + 3x - 2 \ge 0$, điều này đã làm giảm đáng kể độ phức tạp của lời giải.

Ví dụ 15: *Giải phương trình*:

$$m(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1}) = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}. \qquad (1)$$

a. *Giải phương trình với* $m = 1$.
b. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm*.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1. \qquad (*)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$m(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1}) = [(3x - 2) + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + (x - 1)] - 6$$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1}) = (\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1})^2 - 6. \qquad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1}$, $t \ge 1$. (**)

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow mt = t^2 - 6 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - mt - 6 = 0. \qquad (3)$$

a. Với $m = 1$, phương trình (3) có dạng:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 + x - 1 + 2\sqrt{(3x - 2)(x - 1)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(3x - 2)(x - 1)} = 6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x \ge 0 \\ (3x-2)(x-1) = (6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 - 19x + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là x = 2.

b. Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (3) có nghiệm thoả mãn (**)

Nhận xét rằng (3) luôn có hai nghiệm trái dấu, do vậy để (3) có nghiệm thoả mãn (**)

⇔ (3) có nghiệm thoả mãn $t_1 \le 1 \le t_2 \Leftrightarrow a.f(1) \le 0 \Leftrightarrow 1 - m - 6 \le 0 \Leftrightarrow m \ge 5$.

Vậy, với $m \ge 5$ phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 16: *Giải và biện luận hệ phương trình*:

$$\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab \end{cases}.$$

Giải

Ta có:

$D = a^2 - b^2$; $D_x = a(a^2 - b^2)$; $D_y = b(a^2 - b^2)$.

Trường hợp 1: Nếu $D \ne 0$, tức là $a^2 - b^2 \ne 0 \Leftrightarrow a \ne \pm b$.

Hệ có nghiệm duy nhất x = a và y = b.

Trường hợp 2: Nếu D = 0, tức là:

$$a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b.$$

Khi đó $D_x = D_y = 0$ nên hệ có vô số nghiệm.

Kết luận:

- Với $a \ne \pm b$, hệ có nghiệm x = a và y = b.
- Với $a = \pm b$, hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 17: *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}.$$

a. *Giải và biện luận hệ phương trình.*

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm* x, y *của hệ không phụ thuộc vào* m.

Giải

a. *Bạn đọc tự thực hiện.*

b. Từ hệ thức về nghiệm:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m}{m+1} \\ m = \dfrac{1}{y} - 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\dfrac{1}{y} - 1}{\dfrac{1}{y} - 1 + 1} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y của hệ không phụ thuộc vào m.

Ví dụ 18: *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}.$$

a. *Tìm* a *sao cho với mọi* b *luôn tồn tại* c *để hệ có nghiệm.*

b. *Tìm* a *sao cho tồn tại* c *để hệ có nghiệm với mọi* b.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta có:

$$D = 4 - b^2; \quad D_x = 2ac^2 - (b-2)c + b; \quad D_y = -abc^2 - (b-2)c - 2.$$

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 4 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \pm 2$.

Hệ có nghiệm duy nhất với $\forall a, c$ nên không cần đặt điều kiện cho a.

Trường hợp 2: Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 4 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 2$.

- Với $b = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x + 2y = ac^2 + c \\ 2x + 2y = c - 1 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow ac^2 + c = c - 1 \Leftrightarrow ac^2 = -1$. (1)

Do đó c tồn tại $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm theo c $\Leftrightarrow a < 0$.

- Với $b = -2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x - 2y = ac^2 + c \\ -2x + 2y = c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = ac^2 + c \\ 2x - 2y = 1 - c \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow ac^2 + c = 1 - c \Leftrightarrow ac^2 + 2c - 1 = 0$. (2)

Do đó:

c tồn tại $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm theo c

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \;\&\; c = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \{a \neq 0 \;\&\; \Delta'_c \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 + a \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geq -1$$

Để với $\forall b$ luôn $\exists c$ để hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{(1), (2) phải đồng thời có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq a < 0.$$

Vậy, với $-1 \leq a < 0$ thì với mọi b, ta luôn tìm được c để hệ có nghiệm.

b. Với mỗi a để tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b

$$\Leftrightarrow \text{(1) hoặc (2) có nghiệm} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a \geq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{mọi a}.$$

Vậy, với mọi a luôn tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b.

Ví dụ 19: *Tìm* m, n, p *để cả ba hệ sau đồng thời vô nghiệm:*

$$\begin{cases} x - py = n \\ -px + y = m \end{cases}; \quad \begin{cases} -px + y = m \\ nx + my = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} nx + my = 1 \\ x - py = n \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Kí hiệu các hệ phương trình trên theo ths tự là (I), (II) và (III).

- Xét hệ (I), ta có:

  $D = 1 - p^2$; $D_x = n + pm$; $D_y = m - np$.

  Hệ (I) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - p^2 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} n + pm \neq 0 \\ m + pn \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

- Xét hệ (II), ta có $D = -pm - n$; $D_x = m^2 - 1$; $D_y = -p - nm$.

  Hệ (II) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -pm - n = 0 \\ \left[\begin{array}{l} m^2 - 1 \neq 0 \\ -p - nm \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

- Xét hệ (III), ta có $D = -pn - m$; $D_x = -p - nm$; $D_y = n^2 - 1$.

  Hệ (III) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -pn - m = 0 \\ \left[\begin{array}{l} -p - mn \neq 0 \\ n^2 - 1 \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Như vậy, nếu hệ (I) vô nghiệm thì hệ (II) và (III) có nghiệm, do đó không tồn tại m, n, p để cả ba hệ đồng thời vô nghiệm.

Ví dụ 20: *Giả sử hệ phương trình*:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$$

có nghiệm. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

✍ *Giải*

Xét hệ phương trình tạo bởi (2) và (3) có dạng:

$$\begin{cases} bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}.$$

Ta có:

$D = ba - c^2$; $D_x = a^2 - bc$; $D_y = b^2 - ac$.

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow ba - c^2 \neq 0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 - bc}{ba - c^2}$ và $y = \dfrac{b^2 - ac}{ba - c^2}$.

Nghiệm trên thoả mãn (1) điều kiện là:

a. $\dfrac{a^2-bc}{ba-c^2}$+b.$\dfrac{b^2-ac}{ba-c^2}$=c ⇔ $a^3+b^3+c^3=3abc$.

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow ba - c^2 = 0$.

Hệ có nghiệm ⇔ $D_x = D_y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - ab = 0 \\ a^2 - bc = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^3 = abc \\ a^3 = abc \\ b^3 = abc \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Vậy, nếu hệ phương trình có nghiệm thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Ví dụ 21: *Cho* $a^2 + b^2 > 0$ *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(a - b)x + y = 1 \text{ và } (a^2 - b^2)x + ay = b.$$

a. *Xác định giao điểm của* (d_1) *và* (d_2).

b. *Tìm điều kiện với* a, b *để giao điểm đó thuộc trục hoành*.

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2):

$$\begin{cases} (a-b)x + y = 1 \\ (a^2-b^2)x + ay = b \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Ta có $D = b^2 - ab$, $D_x = a - b$, $D_y = ab - a^2$.

Để (d_1) và (d_2) cắt nhau điều kiện là:

Hệ (I) có nghiệm duy nhất ⇔ $D \neq 0 \Leftrightarrow b^2 - ab \neq 0$.

Khi đó, giao điểm I có toạ độ $I(-\dfrac{1}{b}; \dfrac{a}{b})$.

b. Điểm $I \in Ox$ điều kiện là:

$$\begin{cases} b^2 - ab \neq 0 \\ \dfrac{a}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy, với $a = 0$ và $b \neq 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 22: *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + ay - a = 0 \end{cases}.$$

a. *Tìm* a *để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt*.

b. *Gọi* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *là các nghiệm của hệ đã cho. Chứng minh rằng*:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1.$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (a-ay)^2 + y^2 - x = 0 \\ x = a - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+1)y^2 - a(2a-1)y + a^2 - a = 0 \quad (3) \\ x = a - ay \end{cases}$$

a. Hệ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{4}{3}$.

b. Khi đó, phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{a(2a-1)}{a^2+1} \\ y_1y_2 = \dfrac{a^2-a}{a^2+1} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_1 = a - ay_1 \\ x_2 = a - ay_2 \end{cases}.$$

Suy ra:

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (ay_1 - ay_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (a^2 + 1)[(y_2 + y_1)^2 - 4y_1y_2]$

$$= \frac{4a-3a^2}{a^2+1} = 1 - \frac{(2a-1)^2}{a^2+1} \leq 1, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 23: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}.$$

Giải

Ký hiệu phương trình thứ nhất của hệ là (*).

Điều kiện $2x - y \neq 0$.

Chia cả hai vế của phương trình (*) cho $(2x - y)^2 \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)^2 - 5\frac{2x+y}{2x-y} + 6 = 0.$$

Đặt $t = \dfrac{2x+y}{2x-y} = (2x + y).\dfrac{1}{2x-y}$, ta được:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right..$$

a. Với t = 2, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \\ (2x+y).\dfrac{1}{2x-y} = 2 \end{cases}$$

khi đó $2x + y$, $\dfrac{1}{2x-y}$ là nghiệm phương trình:

$u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 2$ hoặc $u = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y=2 \text{ và } \dfrac{1}{2x-y}=1 \\ 2x+y=1 \text{ và } \dfrac{1}{2x-y}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=1/2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{8} \text{ và } y_1=\dfrac{1}{4} \\ x_2=\dfrac{3}{4} \text{ và } y_2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

b. Với t = 3, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3 \\ (2x+y).\dfrac{1}{2x-y}=3 \end{cases}$$

khi đó 2x + y, $\dfrac{1}{2x-y}$ là nghiệm phương trình:

$v^2 - 3v + 3 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$ và $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

Ví dụ 24: *Cho hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ |x-2y|=m \end{cases}.$$

a. *Giải hệ phương trình với* m = 3.
b. *Tìm* m *để hệ có hai nghiệm với hoành độ trái dấu.*

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} m\ge 0 \\ y=4-2x \\ (x-2y)^2=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ y=4-2x \\ [x-2(4-2x)]^2=m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ y=4-2x \\ (5x-8)^2=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ y=4-2x \\ f(x)=25x^2-80x+64-m^2=0 \ \ (1) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

a. Với m = 3, ta được:

$$\begin{cases} y=4-2x \\ 5x^2-16x+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=11/5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ và } y=2 \\ x=\dfrac{11}{5} \text{ và } y=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 3 hệ có nghiệm (1; 2) và $(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5})$.

b. Để hệ có hai nghiệm với hoành độ trái dấu

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiểm trái dấu $\Leftrightarrow$ a.f(0) < 0 $\Leftrightarrow 64 - m^2 < 0 \overset{m\ge 0}{\Leftrightarrow} m > 8$.

Vậy, với m > 8 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 25: *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x \end{cases} \Leftrightarrow -x \leq y \leq x, \text{ suy ra } x \geq 0.$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 = 256 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+y} \\ v = \sqrt{x-y} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0.$$

Ta được:

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^4+v^4=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv(uv-32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ \left[\begin{array}{l} uv=0 \\ uv=32 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=32 \end{cases} \text{(I)} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} u+v=4 \\ uv=0 \end{cases} \text{(II)}$$

- Giải (I): vô nghiệm.
- Giải (II):

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \ \& \ v=0 \\ u=0 \ \& \ v=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+y}=4 \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+y}=0 \\ \sqrt{x-y}=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=8 \\ x=8 \text{ và } y=-8 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (8; 8) và (8; –8).