PHẦN II: HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1 – VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VECTƠ LÀ GÌ ?

   Véctơ là một đoạn thẳng có định hướng:
   - Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
   - Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của véctơ.
   - Độ dài của đoạn thẳng gọi là độ dài của véctơ.

2. VECTƠ KHÔNG

Định nghĩa: ***Vectơ không*** *là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.*

Như vậy, *véctơ không,* kí hiệu $\vec{0}$ là vectơ có:
- Điểm gốc và ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.

3. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng phương, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \;//\; \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB//CD \\ A,B,C,D \text{ thẳng hàng} \end{array}\right..$$

4. HAI VECTƠ CÙNG HƯỚNG, NGƯỢC HƯỚNG

   a. Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng , ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB//CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng} \end{array}\right..$$

   b. Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB//CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng} \end{array}\right..$$

5. HAI VECTƠ BẰNG NHAU

Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là bằng nhau, ký hiệu:

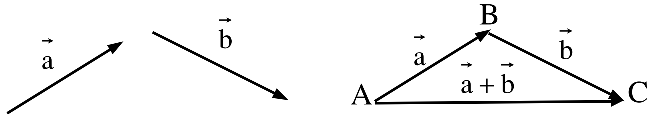
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}.$$

II. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

<u>Định nghĩa</u>: ***Tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *là một véctơ được xác định như sau:*

- *Từ một điểm tùy ý A trên mặt phẳng dựng vectơ* $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
- *Từ điểm B dựng vectơ* $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
- *Khi đó véctơ* $\overrightarrow{AC}$ *gọi là vectơ tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$*, ta viết*

  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Từ định nghĩa trên ta được ***quy tắc ba điểm***:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, với ba điểm A, B, C bất kì.

Tính chất của phép cộng véctơ

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, ta có:

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất kết hợp): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất 3: (Tính chất của vectơ không): $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Quy tắc hình bình hành:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, với ABCD là hình bình hành.

Ta có "*Nếu* M *là trung điểm đoạn thẳng* AB *thì* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$".

Ta có "*Gọi* G *là trọng tâm* ΔABC *thì*:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall$M. $+ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$".

III. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. HAI VECTƠ ĐỐI NHAU

Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là đối nhau, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \end{cases}.$$

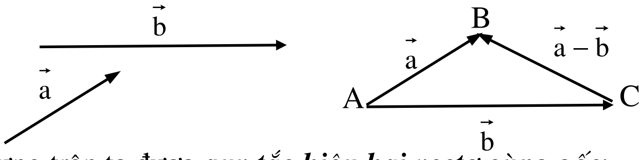
2. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

<u>Định nghĩa</u>: ***Hiệu của hai véctơ*** $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$*, kí hiệu* $\vec{a} - \vec{b}$*, là tổng của vectơ* $\vec{a}$ *và vectơ đối của vectơ* $\vec{b}$*, nghĩa là*:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

*Phép lấy hiệu của hai vectơ gọi là **phép trừ vectơ**.*

Để dựng vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ khi biết các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta lấy điểm A tuỳ ý, từ đó dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$.



Từ cách dựng trên ta được ***quy tắc hiệu hai vectơ cùng gốc***:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, với ba điểm A, B, C bất kì.

Tính chất của phép trừ véctơ

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}.$$

IV. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

<u>Định nghĩa</u>: ***Tích của vectơ** $\vec{a}$ **với một số thực** k là một vectơ, kí hiệu k$\vec{a}$ được xác định như sau:*

a. *Vectơ* k$\vec{a}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a}$ *và sẽ :*
   - *Cùng hướng với vectơ* $\vec{a}$ *nếu* $k \geq 0$.
   - *Ngược hướng với vectơ* $\vec{a}$ *nếu* $k < 0$.

b. *Có độ dài bằng* $|k|.|\vec{a}|$.

*Phép lấy tích của một vectơ với một số gọi là **phép nhân vectơ với số** (hoặc phép nhân số với vectơ).*

Từ định nghĩa trên ta có ngay các kết quả:

$1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

1. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI SỐ

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và các số thực m, n, ta có:

Tính chất 1: $m(n.\vec{a}) = (mn).\vec{a}$.

Tính chất 2: $(m + n).\vec{a} = m.\vec{a} + n.\vec{a}$.

Tính chất 3: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m.\vec{a} + n.\vec{b}$.

Tính chất 4: $m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ hoặc $m = 0$.

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

***Định lí 1 (Quan hệ giữa hai vectơ cùng phương)**: Vectơ* $\vec{b}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *khi và chỉ khi tồn tại số* k *sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$.

***Hệ quả**: Điều kiện cần và đủ để ba điểm* A, B, C *thẳng hàng là tồn tại số* k *sao cho*

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

3. BIỂU THỊ MỘT VECTƠ QUA HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

***Định lí 2** **(Phân tích một vectơ thành hai vectơ khác** $\vec{0}$ **không cùng phương)**: Cho hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *khác* $\vec{0}$ *và không cùng phương. Với mọi vectơ* $\vec{c}$ *bao giờ cũng tìm được một cặp số thực m, n duy nhất, sao cho:*

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

V. HỆ TOẠ ĐỘ

1. VECTƠ

Cho 2 điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_1(x_2; y_2)$ thì $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

2. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Nếu có hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2; y_2)$ thì:

(i): $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

(ii): $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

(iii): $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

(iv): $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

(v): $k\vec{v}_1(x_1; y_1) = (kx_1; ky_1)$, $k \in \mathbb{R}$.

(vi): $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$.

3. KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách d giữa hai điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_1(x_2; y_2)$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$, được cho bởi:

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4. CHIA MỘT ĐOẠN THẲNG THEO MỘT TỈ SỐ CHO TRƯỚC

Điểm M(x; y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu $k = -1$, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

5. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ba điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$ thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. VECTƠ

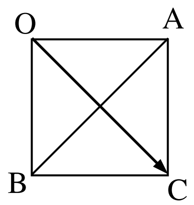
Dạng toán 1: Mở đầu về vectơ

Thí dụ 1. *Cho* ΔOAB *vuông cân với* $OA = OB = a$. *Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng*:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}, \quad 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$$

$$\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2.5\overrightarrow{OB}, \quad \frac{14}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}.$$

✍ *Giải*



a. Với C là đỉnh thứ tư của hình vuông OACD, ta có ngay:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, theo quy tắc hình bình hành.

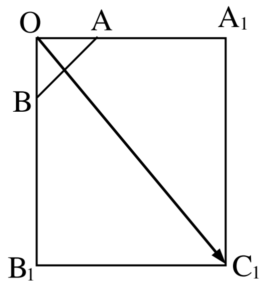
Từ đó, suy ra:

$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = OC = a\sqrt{2}$.

b. Ta có ngay:

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, quy tắc hiệu hai vectơ cùng gốc

$\Rightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = BA = a\sqrt{2}$.



c. Để dựng vectơ $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$ ta lần lượt thực hiện:

- Trên tia OA lấy điểm A_1 sao cho $OA_1 = 3OA$.
- Trên tia OB lấy điểm B_1 sao cho $OB_1 = 4OB$.
- Dựng hình chữ nhật $OA_1C_1B_1$.

Từ đó, ta có:

$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC_1}$

$\Rightarrow |3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC_1}| = OC_1 = \sqrt{OA_1^2 + C_1A_1^2} = 5a$.

d. Thực hiện tương tự câu c), ta dựng được vectơ $\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2.5\overrightarrow{OB}$ và

$$\left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2.5\overrightarrow{OB}\right| = \frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

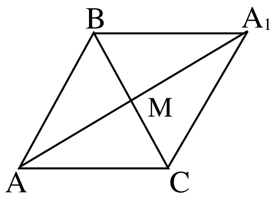
e. Thực hiện tương tự câu c), ta dựng được vectơ $\frac{14}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ và

$$\left|\frac{14}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \frac{a\sqrt{6073}}{28}.$$

Thí dụ 2. *Cho* ΔABC *đều có cạnh bằng* a. *Tính độ dài vectơ tổng* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Giải

Gọi M là trung điểm BC, lấy điểm A_1 đối xứng với A qua M, ta có ngay ABA_1C là hình bình hành, suy ra:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AA_1}\right| = 2AM = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

☞ ***Chú ý***: Với các em học sinh chưa nắm vững kiến thức về tổng của hai vectơ thì thường kết luận ngay rằng:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = a + a = 2a.$$

Dạng toán 2: Chứng minh một đẳng thức vectơ

Phương pháp áp dụng

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

Khi thực hiện các phép biến đổi ta sử dụng:

- Quy tắc ba điểm:
  $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$
- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành ABCD luôn có:
  $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$
- Hiệu hai vectơ cùng gốc
  $$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$
- Tính chất trung điểm: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:
  $$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$
- Tính chất trọng tâm tam giác: Với ΔABC có trọng tâm G ta có:
  $$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$
  $$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ với M tuỳ ý.}$$
- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

Thí dụ 1. *Cho bốn điểm* A, B, C, D. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo ba cách sau:

Cách 1: Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$VT = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$VT = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}, \text{ đpcm.}$$

Cách 3: Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}, \text{ đpcm.}$$

Cách 4: Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Việc trình bày thí dụ trên theo bốn cách chỉ mang tính chất minh hoạ cho những ý tưởng sau:

1. Với cách 1 và cách 2, chúng ta gom hai vectơ có "*điểm cuối của vectơ thứ nhất trùng với điểm đầu của vectơ thứ hai*" từ đó sử dụng chiều thuận của quy tắc ba điểm.
2. Với cách 3 và cách 4, chúng ta sử dụng chiều ngược lại của quy tắc ba điểm, cụ thể "*với một vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *bất kì chúng ta đều có thể xen thêm vào giữa một điểm tuỳ ý để từ đó phân tích được vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *thành tổng của hai vectơ*".

Thí dụ 2. *Cho* 4 *điểm* A, B, C, D. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$VT = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = VP.$$

Cách 2: Ta có:

$$VT = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = VP.$$

Cách 3: Biến đổi tương đương biểu thức về dạng:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}, \text{ đúng} \Rightarrow \text{Điều phải chứng minh.}$$

Cách 4: Biến đổi tương đương đẳng thức về dạng:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}, \text{ luôn đúng.}$$

☞ ***Nhận xét***: 1. Để thực hiện chứng minh đẳng thức vectơ đã cho chúng ta lựa chọn hướng biến đổi VT thành VP và hai cách giải trên đều có chung một ý tưởng, cụ thể bằng việc lựa chọn vectơ xuất phát là $\overrightarrow{AB}$ ta có:

- Trong cách 1, ta ý thức được rằng cần tạo ra sự xuất hiện của vectơ $\overrightarrow{AD}$ do đó ta xen vào điểm D.

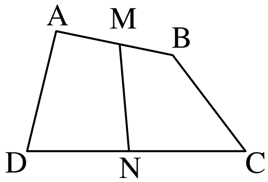
- Trong cách 2, ta ý thức được rằng cần tạo ra sự xuất hiện của vectơ $\overrightarrow{CB}$ do đó ta xen vào điểm C.

2. Từ nhận xét trên hẳn các em học sinh thấy được thêm rằng còn có 4 cách khác để giải bài toán, cụ thể:
   - Hai cách với việc lựa chọn vectơ xuất phát là $\overrightarrow{CD}$.
   - Hai cách theo hướng biến đổi VP thành VT.

Thí dụ 3. *Cho* M và N *lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng* AB *và* CD. *Chứng minh rằng*:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Giải



a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có phân tích:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}, \quad (1)$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2) với lưu ý $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$ (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}, \text{ đpcm.} \quad (*)$$

Cách 2: Ta có phân tích:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, \quad (3)$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}, \quad (4)$$

Cộng theo vế (3) và (4) với lưu ý $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$ (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}, \text{ đpcm.} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được đẳng thức cần chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho* O *là tâm của hình bình hành* ABCD. *Chứng minh rằng với điểm* M *bất kì, ta có*:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$
$$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$
$$= 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{MO}, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh hãy trình bày thêm cách biến đổi VT thành VP.

Thí dụ 5. *Cho* ΔABC. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng*:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}.$$

✍ *Giải*

Sử dụng quy tắc trung điểm ta biến đổi:

$$VT = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) \text{, đpcm.}$$

Thí dụ 6. *Cho* $\Delta A_1B_1C_1$ *và* $\Delta A_2B_2C_2$ *lần lượt có trọng tâm là* G_1, G_2. *Chứng minh rằng*:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}.$$

✍ *Giải*

Với G_1, G_2 là trong tâm các $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_2B_2C_2$, ta có:

$$\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = \vec{0}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{G_2A_2} + \overrightarrow{G_2B_2} + \overrightarrow{G_2C_2} = \vec{0}. \quad (2)$$

Mặt khác, ta có:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2A_2}. \quad (3)$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2B_2}. \quad (4)$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2C_2}. \quad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5) và sử dụng các kết quả trong (1) và (2), ta được:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2} \text{, đpcm.}$$

Thí dụ 7. *Cho* ΔABC. *Gọi* M *là trung điểm của* AB *và* N *là một điểm trên cạnh* AC, *sao cho* NC = 2NA. *Gọi* K *là trung điểm của* MN.

a. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b. *Gọi* D *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng* $KD = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết ta nhận thấy:

$$\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}; \qquad \begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}.$$

Vì K là trung điểm MN nên:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \text{đpcm.}$$

b. Vì D là trung điểm BC nên:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

từ đó, suy ra:

$$KD = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - (\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ đpcm.}$$

<u>Dạng toán 3:</u> Xác định điểm M thoả một đẳng thức vectơ cho trước

Phương pháp áp dụng

Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{v},$$

trong đó điểm O cố định và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho* ΔABC *đều nội tiếp đường tròn tâm* O.

a. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

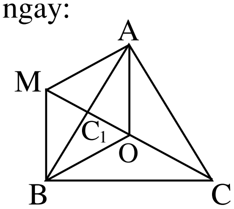
b. *Hãy xác định các điểm* M, N, P *sao cho*:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}; \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.$$

✍ *Giải*

a. Vì ΔABC đều nên O chính là trọng tâm ΔABC, do đó ta có ngay:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$



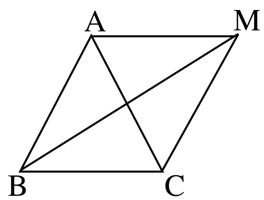
b. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB.

- Dựng hình bình hành AOBM bằng việc lấy điểm M đối xứng với O qua C_1, ta có được $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- Các điểm N, P được xác định tương tự.

<u>Thí dụ 2.</u> *Cho* ΔABC. *Hãy xác định điểm* M *thoả mãn điều kiện*:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \qquad (*)$$

✍ *Giải*



Biến đổi (*) về dạng:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$$

⇔ ABCM là hình bình hành.

Từ đó, để xác định điểm M ta thực hiện:

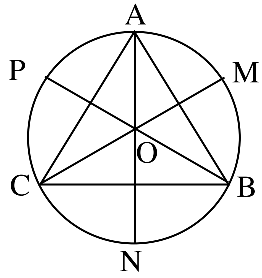
- Kẻ Ax // BC.
- Kẻ Cy // AB.
- Giao của Ax và Cy chính là điểm M cần tìm.

Thí dụ 3. Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn tâm O.

a. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.$$

b. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Giải

a. Dựa theo quy tắc hình bình hành, ta lần lượt có:

- Với điểm M thoả mãn:

  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

  $\Rightarrow$ M là đỉnh thứ tư của hình bình hành AOBM

  $\Rightarrow$ CM là đường kính của (O), vì ΔABC đều.

- Với điểm N thoả mãn:

  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow$ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành BOCN

  $\Rightarrow$ AN là đường kính của (O), vì ΔABC đều.

- Với điểm P thoả mãn:

  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow$ P là đỉnh thứ tư của hình bình hành AOCP

  $\Rightarrow$ BP là đường kính của (O), vì ΔABC đều.

Vậy, các điểm M, N, P nằm trên đường tròn (O) sao cho CM, AN, BP là các đường kính của đường tròn (O).

b. Dựa vào kết quả câu a) và $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MO}$, ta có ngay:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

Thí dụ 4. *Cho* ΔABC.

a. *Tìm điểm* I *sao cho* $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b. *Tìm điểm* K *sao cho* $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.

c. *Tìm điểm* M *sao cho* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\vec{0} = \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, suy ra điểm I được hoàn toàn xác định.

b. Ta biến đổi:

$$\vec{0} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

$\Leftrightarrow$ K là trọng tâm ΔABC.

c. Gọi E, F, N là trung điểm AB, BC, EF, ta có:

$$\vec{0} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MF} = 4\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow M \equiv N.$$

Thí dụ 5. *Cho trước hai điểm* A, B *và hai số thực* α, β *thoả mãn* $\alpha + \beta \neq 0$.

a. *Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm* I *thoả mãn* $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b. *Từ đó, suy ra với điểm bất kỳ* M, *ta luôn có*:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}.$$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + (\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB})$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét quan trọng***:

1. Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.
2. Bài toán trên được mở rộng tự nhiên cho ba điểm A, B, C và bộ ba số thực α, β, γ cho trước thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, tức là:
   a. Tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn:
   $$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$
   b. Từ đó suy ra với điểm bất kỳ M, ta luôn có
   $$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI}.$$
   và khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm ΔABC.
3. Việc mở rộng cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $i = \overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, xin dành cho bạn đọc.
4. Kết quả trên được sử dụng để giải bài toán:

“ *Cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $\overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = k\overrightarrow{MI}, \qquad (1)$$

thoả mãn với mọi điểm M. ”

Phương pháp giải

Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ I, khi đó:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{IA_i} = k\overrightarrow{II} = \vec{0}. \qquad (2)$$

- Xác định được điểm I từ (2).
- Từ (2), suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \overrightarrow{MI}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i .$$

Thí dụ 6. *Cho tứ giác* ABCD, M *là điểm tuỳ ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số* k *và điểm cố định* I, J, K *sao cho các đẳng thức vectơ sau thoả mãn với mọi điểm* M.

a. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MI}$.

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MJ}$.

c. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$.

✍ *Giải*

a. Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ I, khi đó:

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{II} = \vec{0}. \quad (1.1)$$

- Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{xác định được điểm I.}$$

- Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}. \quad (1.2)$$

Từ (1) và (1.2), suy ra:

$$3\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k = 3.$$

b. Vì (2) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ J, khi đó:

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = k\overrightarrow{JJ} = \vec{0}. \quad (2.1)$$

- Gọi E là trung điểm AB, từ (2.1), ta được:

$$2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{J là trung điểm của CE.}$$

- Từ (2.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1+1+2)\overrightarrow{MJ} = 4\overrightarrow{MJ}. \quad (2.2)$$

Từ (2) và (2.2), suy ra:

$$4\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow k = 4.$$

c. Vì (3) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M ≡ K, khi đó:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = k\overrightarrow{KK} = \vec{0}. \quad (3.1)$$

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, từ (3.1), ta được:

$$3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{K là trung điểm của GD.}$$

- Từ (3.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MK}. \quad (3.2)$$

Từ (3) và (3.2), suy ra:

$$6\overrightarrow{MK} = k\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow k = 6.$$

☞ ***Chú ý***: Bài toán tìm điểm có thể được mở rộng thành bài toán tìm tập hợp điểm (quĩ tích). Với các bài toán quĩ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng k.AB.
3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì
   a. Với $k \in \mathbb{R}$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
   b. Với $k \in \mathbb{R}^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
   c. Với $k \in \mathbb{R}^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

Thí dụ 7. *Cho* ΔABC, *tìm tập hợp những điểm* M *thoả mãn*:

a. $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (1)

b. $(1 - k)\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (2)

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi (1) về dạng:

$$\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.

b. Ta biến đổi (2) về dạng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}. \quad (3)$$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và AC, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} - 2k\overrightarrow{MF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MF}$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường trung bình EF của ΔABC.

Dạng toán 4: Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ

Phương pháp áp dụng

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Thí dụ 1. *Cho đoạn thẳng* AB *và điểm I sao cho* $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a. *Tìm số* k *sao cho* $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b. *Chứng minh rằng với mọi điểm* M *ta có* $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi giả thiết:

$$\vec{0} = 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = -5\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy, với $k = \frac{3}{5}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Biến đổi giả thiết:

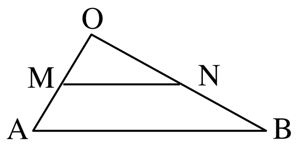
$$\vec{0} = 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) + 3(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI})$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$$, đpcm.

Thí dụ 2. *Cho* ΔOAB. *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm hai cạnh* OA *và* OB. *Hãy tìm các số* m *và* n *thích hợp trong mỗi đẳng thức sau đây*:

$$\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};$$
$$\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB};$$

✍ *Giải*



a. Ta có ngay $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

do đó đẳng thức $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ sẽ có $m = \frac{1}{2}$ và $n = 0$.

b. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

do đó đẳng thức $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ sẽ có $m = -\frac{1}{2}$ và $n = \frac{1}{2}$.

c. Ta có:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

do đó đẳng thức $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ sẽ có $m = -1$ và $n = \frac{1}{2}$.

d. Ta có:

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

do đó đẳng thức $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ sẽ có $m = -\frac{1}{2}$ và $n = 1$.

Thí dụ 3. *Gọi* G *là trọng tâm* ΔABC. *Đặt* $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ *và* $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. *Hãy biểu thị mỗi vectơ* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ *qua các vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

✍ *Giải*

a. Sử dụng quy tắc hiệu của hai vectơ cùng gốc, ta có ngay:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}.$$

b. Vì G là trọng tâm ΔABC nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}.$$

c. Sử dụng quy tắc hiệu của hai vectơ cùng gốc và kết quả trong b), ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}.$$

d. Sử dụng quy tắc hiệu của hai vectơ cùng gốc và kết quả trong b), ta có:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

Thí dụ 4. *Cho* ΔABC. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Tính các vectơ* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ *theo các vectơ* $\overrightarrow{BN}$ *và* $\overrightarrow{CP}$.

✍ *Giải*

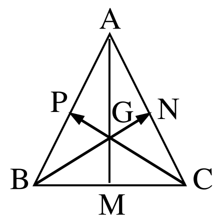
Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{GM} + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}) = 2\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GB}$$

$$= 2\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2.\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$$

$$= -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}.$$



Vectơ $\overrightarrow{CA}$ được biểu diễn tương tự $\overrightarrow{AB}$.

Thí dụ 5. *Cho* ΔABC.

a. *Tìm các điểm* M *và* N *sao cho*:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0},\ 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

b. *Với các điểm* M *và* N *ở câu* a), *tìm các số* p *và* q *sao cho*:

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}.$$

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt thực hiện:

$\vec{0} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

$\vec{0} = 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NE}$, với E là trung điểm BC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NE} = \vec{0} \Leftrightarrow$ N là trung điểm của AE.

b. Ta có biểu diễn:

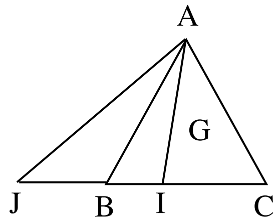
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Thí dụ 6. *Cho* ΔABC *trọng tâm* G. *Gọi* I *là điểm trên cạnh* BC *sao cho* $2CI = 3BI$ *và* J *là điểm trên* BC *kéo dài sao cho* $5JB = 2JC$.

a. *Tính* $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b. *Tính* $\overrightarrow{AG}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$ *và* $\overrightarrow{AJ}$



✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} 2CI = 3BI \\ \overrightarrow{IC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} 5JB = 2JCI \\ \overrightarrow{JB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{JC} \end{cases} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (3)$$

Mặt khác từ hệ tạo bởi (1) và (2), ta nhận được:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \text{ và } \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta nhận được:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

Dạng toán 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau

Phương pháp áp dụng

Muốn chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng* AD *và* BC *trùng nhau.*

✍ *Giải*

Ta có:

- Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì ABCD là hình bình hành. Do đó, AD và BC có trung điểm trùng nhau.
- Nếu AD và BC có trung điểm trùng nhau thì ABCD là hình bình hành. Do đó: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Thí dụ 2. *Cho lục giác* ABCDEF. *Gọi* M, N, P, Q, R, S *lần lượt là trung điểm của các cạnh* AB, BC, CD, DE, EF, FA. *Chứng minh rằng hai tam giác* MPR *và* NQS *có cùng trọng tâm.*

✍ *Giải*

Gọi G là trọng tâm của ΔMPR, ta có:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0} \quad (1)$$

Lại có:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}, \quad 2\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}, \quad 2\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0} \text{ (do(1))}$$

Do đó:

$$(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GN} + 2\overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Vậy, ta được G là trọng tâm của ΔSNQ.

Tóm lại, các ΔMPR và ΔNQS có cùng trọng tâm.

Dạng toán 6: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp áp dụng

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ đã biết.

Hướng 2: Xác định vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

☞ ***Chú ý***: Ta có kết quả:

" *Cho ba điểm* A, B, C. *Điều kiện cần và đủ để* A, B, C *thẳng hàng là:*

$$\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB},$$

với điểm tuỳ ý M *và số thực* α *bất kỳ* ".

Thí dụ 1. *Cho* ΔABC, *lấy các điểm* I, J *thoả mãn* $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. *Chứng minh rằng* IJ *đi qua trọng tâm* G *của* ΔABC.

✍ *Giải*

Viết lại $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ dưới dạng:

$$\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}. \quad (1)$$

Biến đổi $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ về dạng:

$$3(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IJ}) + 2(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IJ}. \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) cho (2), ta được:

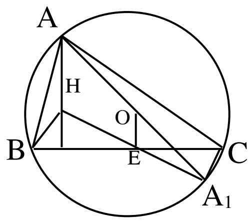
$$2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{IG} = 5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \text{I, J, G thẳng hàng.}$$

Thí dụ 2. *Cho* ΔABC. *Gọi* O, G, H *theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của* ΔABC. *Chứng minh rằng*:

a. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$, *với* E *là trung điểm* BC.

b. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c. *Chứng minh rằng* O, G, H *thẳng hàng*.



✍ *Giải*

a. Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua O, ta được:

$$\begin{cases} BH \,//\, CA_1 \text{ cùng vuông góc với AC} \\ CH \,//\, BA_1 \text{ cùng vuông góc với AB} \end{cases} \Rightarrow A_1BHC \text{ là hình bình hành}$$

$\Rightarrow A_1$, E, H thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$, đpcm.

b. Ta có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \text{O, G, H thẳng hàng.}$$

Thí dụ 3. *Cho* ΔABC, *lấy các điểm* M, N, P *thoả mãn*:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},\ 3\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0},\ \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}.$$

Chứng minh rằng M, N, P *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP}. \quad (2)$$

Ta đi tính $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, cụ thể từ giả thiết:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (3)$$

$$3\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}. \quad (5)$$

Thay (3), (4), (5) vào (1) và (2) ta được:

$$\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}. \quad (6)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}. \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta nhận thấy:

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \text{M, N, P thẳng hàng.}$$

Dạng toán 7: Xác định đặc tính K của đối tượng S khi nó thoả mãn một đẳng thức vectơ

Phương pháp áp dụng

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết.

Lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác.

Thí dụ 1. *Cho* ΔABC, *có các cạnh bằng* a, b, c *và trọng tâm* G *thoả mãn*:

$$a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (1)$$

Chứng minh rằng ΔABC *là tam giác đều.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$a.(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b-a).\overrightarrow{GB} + (c-a).\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (3)$$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương, do đó (3) tương đương với:

$$\begin{cases} b-a=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta\text{ABC là tam giác đều.}$$

Thí dụ 2. *Cho tứ giác* ABCD. *Giả sử tồn tại điểm* O *sao cho*:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng ABCD *là hình chữ nhật.*

✍ *Giải*

Từ phương trình thứ nhất của hệ , ta suy ra:

O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. (1)

Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA , từ phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ M, P, O thẳng hàng và O là trung điểm MP. (2)

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ N, Q, O thẳng hàng và O là trung điểm NQ. (3)

Từ (2), (3), suy ra MNPQ là hình bình hành suy ra

- A, C, O thẳng hàng và O là trung điểm AC.
- B, D, O thẳng hàng và O là trung điểm BD.

Do đó ABCD là hình bình hành. (4)

Từ (1) và (4) suy ra ABCD là hình chữ nhật.

§2 HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Dạng toán 1: Toạ độ vectơ – Toạ độ điểm

Phương pháp áp dụng

Ta cần nhớ các kết quả sau:

1 Với hai điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A), \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

2 Với hai vectơ $\vec{a}(x_1, y_1)$ và $\vec{b}(x_2, y_2)$, ta có:

$$\vec{a} = x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j},$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases},$$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm* A(–4 ; 1), B(2; 4), C(2 ; –2).

a. *Tìm toạ độ trọng tâm* ΔABC.

b. *Tìm toạ độ điểm* D *sao cho* C *là trọng tâm* ΔABD.

c. *Tìm toạ độ điểm* E *sao cho* ABCE *là hình bình hành*.

✍ *Giải*

a. Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có ngay G(0, 1).

b. Giả sử $D(x_D, y_D)$, khi đó với điều kiện C là trọng tâm ΔABD, ta được:

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{-4 + 2 + x_D}{3} \\ -2 = \dfrac{1 + 4 + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases} \Rightarrow D(8; -11).$$

c. Giả sử $E(x_E; 0)$, khi đó với điều kiện ABCE là hình bình hành, ta được:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 4 = 0 \\ y_E - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -4 \\ y_E = -5 \end{cases} \Rightarrow E(-4; -5).$$

Thí dụ 2. Cho điểm M(1 – 2t; 1 + t). Tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

✍ *Giải*

Ta có:

$$x_M^2 + y_M^2 = (1 - 2t)^2 + (1 + t)^2 = 5t^2 - 2t + 2 = 5(t - \frac{1}{5})^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$$

suy ra $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = \frac{9}{5}$ đạt được khi :

$$t - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow M_0(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}).$$

Vậy, điểm $M_0(\frac{3}{5}; \frac{6}{5})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. *Cho ba điểm* A(1; 1); B(3; 3); C(2; 0).

a. *Tính diện tích* ΔABC.

b. *Hãy tìm tất cả các điểm* M *trên trục* Ox *sao cho góc* $\widehat{AMB}$ *nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$AB^2 = 4 + 4 = 8$, $BC^2 = 1 + 9 = 10$, $CA^2 = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Vậy diện tích ΔABC được cho bởi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \text{ (đvdt).}$$

b. Góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \widehat{AMB} = 0^0 \Leftrightarrow$ A, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_M - 1}{3 - 1} = \frac{-1}{3 - 1} \Leftrightarrow x_M = 0 \Rightarrow M \equiv O.$$

Vậy, điểm M(0; 0) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 2: Biểu diễn vectơ $\vec{c}(c_1; c_2)$ theo các vectơ $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. (1)

Bước 2: Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2).$$

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Giả hệ (I), ta nhận được giá trị của cặp (α, β)

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 4. *Hãy biểu diễn vectơ* $\vec{c}$ *theo các vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, *biết*:

$$\vec{a}(2; -1),\ \vec{b}(-3; 4) \text{ và } \vec{c}(-4; 7).$$

✍ *Giải*

Giả sử $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. (1)

Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(2; -1) + \beta(-3; 4) = (2\alpha - 3\beta; -\alpha + 4\beta).$$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -4 = 2\alpha - 3\beta \\ 7 = -\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Thí dụ 5. *Cho bốn điểm* A(1; 1), B(2; − 1), C(4; 3) *và* D(16; 3). *Hãy biểu diễn vectơ* $\overrightarrow{AD}$ *theo các vectơ* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

✍ *Giải*

Giả sử $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. (1)

Ta có:

$$\overrightarrow{AD}(15; 2),\ \overrightarrow{AB}(1; -2),\ \overrightarrow{AC}(3; 2)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \alpha(1; -2) + \beta(3; 2) = (\alpha + 3\beta; -2\alpha + 2\beta)$$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 15 \\ -2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

Dạng toán 3: Xác định toạ độ điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ, độ dài

Phương pháp áp dụng

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử M(x; y).

Bước 2: Toạ độ hoá các vectơ có trong đẳng thức hoặc sử dụng công thức về khoảng cách giữa hai điểm, để chuyển đẳng thức về biểu thức đại số.

Bước 3: Giải phương trình hoặc hệ trên, ta nhận được toạ độ của M.

☞ ***Chú ý***: Điểm M(x; y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu k = −1, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Cho hai điểm* A(0; 2) *và* B(4; −3). *Tìm toạ độ*:

a. *Trung điểm* I *của* AB.

b. *Điểm* M *sao cho* $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

✍ *Giải*

a. Ta có $I(2; -\frac{1}{2})$.

b. Từ giả thiết

$MA + 2MB = \vec{0} \Leftrightarrow MA - 2MB \Leftrightarrow$ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k = −2.

Do đó:

$$M: \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M(\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}).$$

☞ ***Chú ý***: Ta cũng có thể trình bày theo cách: Giả sử M(x; y), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-x, 2 - y) \\ \overrightarrow{MB} = (4 - x, -3 - y) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (8 - 3x; -4 - 3y).$$

Vì $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, nên:

$$\begin{cases} 8 - 3x = 0 \\ -4 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}).$$

Thí dụ 2. *Cho* ΔABC, *biết* A(1; 0), B(−3; −5), C(0; 3).

a. *Xác định toạ độ điểm* E *sao cho* $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b. *Xác định toạ độ điểm* F *sao cho* AF = CF = 5.

c. *Tìm tập hợp các điểm* M *sao cho*:

$$|2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|. \qquad (1)$$

✍ *Giải*

a. Giả sử E(x; y), khi đó $\overrightarrow{AE}(x - 1; y)$, $\overrightarrow{BC}(3; 8)$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2.3 \\ y = 2.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow E(7;\ 16).$$

b. Giả sử F(x; y), khi đó:

$$AF = CF = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} AF^2 = 25 \\ CF^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 25 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 - 30y = 0 \\ x = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3 \end{array}\right. \\ x = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \,\&\, y = 0 \\ x = 5 \,\&\, y = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1(-4,0) \\ F_2(5,3) \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm $F_1(-4;\ 0)$ và $F_2(5;\ 3)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử M(x; y), khi đó:

$\overrightarrow{MA}(1 - x; -y)$, $\overrightarrow{MB}(-3 - x; -5 - y)$, $\overrightarrow{MC}(-x; 3 - y)$

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC} = (-x - 4; -y - 19)$ và $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (-3; -8)$.

Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow (-x - 4)^2 + (-y - 19)^2 = (-3)^2 + (-8)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y + 19)^2 = 73$.

Đặt $I(-4; -19)$, ta được:

$IM^2 = 73 \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm $I(-4, -19)$, bán kính $R = \sqrt{73}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong ví dụ trên chúng ta đã thực hiện việc xác định điểm dựa trên các đẳng thức về vectơ, độ dài cho trước. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần đi thiết lập các đẳng thức đó dựa trên tính chất của điểm cần xác định.

Thí dụ 3. *Cho* ΔABC *cân tại* A, *biết* $A(a;\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, $B(1;\ 0)$, $C(2a - 1;\ 0)$ *và* A *thuộc góc phần tư thứ nhất.*

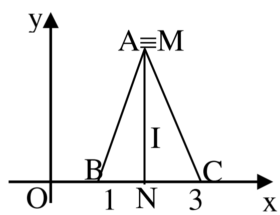
a. *Xác định toạ độ các đỉnh của* ΔABC, *biết rằng* $p = 9$ (p *là nửa chu vi*).

b. *Tìm toạ độ điểm* $M \in AB$ *và* $N \in BC$ *sao cho đường thẳng* MN *đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của* ΔABC.

✍ *Giải*

a. Ta có toạ độ các điểm:

$A(a;\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, $B(1;\ 0)$, $C(2a - 1;\ 0)$,



Từ giả thiết:

- $A \in P(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 1.$
- $p = 9 \Leftrightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 9$

$\Leftrightarrow 2.8|a - 1| + 2|a - 1| = 18 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = 0$ (loại).

Từ đó: $A(2;\ 3\sqrt{7})$, $B(1;\ 0)$, $C(3;\ 0) \Rightarrow AB = AC = 8$, $BC = 2$.

b. Ta cần tìm điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM$, $0 \le x \le 8$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$$BN = p - x = 9 - x,\ 0 \le 9 - x \le 2 \Leftrightarrow 7 \le x \le 9,$$

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(9-x)}{8.2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 1 (l) \end{array}\right..$$

- Với $x = 8 \Rightarrow M \equiv A(2;\ 3\sqrt{7})$ và $N(2; 0)$ là trung điểm BC.

☞ ***Chú ý:*** Bài toán trên có dạng tổng quát như sau "*Cho* ΔABC *có các cạnh* a, b, c (*tương ứng với các đỉnh* A, B, C *và chu vi* 2p), *giả sử* $c \le b \le a$. *Tìm điểm* $M \in AB$, $N \in BC$ *sao cho đường thẳng* MN *đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của* ΔABC "

Phương pháp giải

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM$, $0 \le x \le c$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$$BN = p - x,\ 0 \le p - x \le \ \text{ và } \frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Bước 2: Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(p-x)}{c.a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2px + ac = 0. \quad (2)$$

Bước 3: Giải (2) ta xác định được x, từ đó suy ra toạ độ các điểm M, N.

<u>Dạng toán 4:</u> Vectơ cùng phương – Ba điểm thẳng hàng – Định lý Menelaus

Phương pháp áp dụng

Cần nhớ các kết quả sau:

a. Với hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ ta có $\vec{v}_1 \ // \ \vec{v}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

b. Cho ba điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$, ta có:

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overline{AC} \ // \ \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

c. ***Định lý Menelaus***: Lấy ba điểm M, N, P theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm* A(–3 ; 4), B(1 ; 1), C(9 ; –5).

a. *Chứng minh rằng ba điểm* A, B, C *thẳng hàng*.

b. *Tìm toạ độ điểm* D *sao cho* A *là trung điểm của* BD.

c. *Tìm toạ độ điểm* E *trên trục* Ox *sao cho* A, B, E *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$\overrightarrow{AB}(4; -3)$ và $\overrightarrow{AC}(12; -9) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

b. Giả sử $D(x_D, y_D)$, khi đó với điều kiện A là trung điểm của BD, ta được:

$$\begin{cases} -3 = \dfrac{1+x_D}{2} \\ 4 = \dfrac{1+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = 7 \end{cases} \Rightarrow D(-7; 7).$$

c. Giả sử $E(x_E, 0) \in Ox$, khi đó $\overrightarrow{AE}(x_E + 3; -4)$.

Từ đó, để ba điểm A, B, E thẳng hàng điều kiện là:

$$\frac{x_E+3}{4} = \frac{-4}{-3} \Leftrightarrow x_E = \frac{7}{3} \Rightarrow E\left(\frac{7}{3}; 0\right).$$

Thí dụ 2. *Tìm trên trục hoành điểm* M *sao cho tổng các khoảng cách từ* M *tới các điểm* A *và* B *là nhỏ nhất trong các trường hợp sau*:

a. A(1; 2) và B(3; 4).   b. A(1; 1) và B(2; –4).

✍ *Giải*

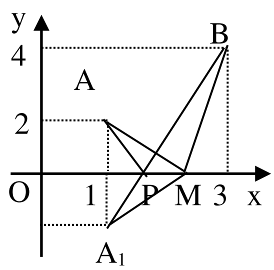
a. Nhận xét A, B cùng phía với Ox.

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox, suy ra $A_1(1; -2)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$

$\Leftrightarrow A_1, B, P_0(x; 0)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B} // \overrightarrow{A_1P_0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{6}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow P_0\left(\dfrac{5}{3}; 0\right).$



Ta có

$PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B.$

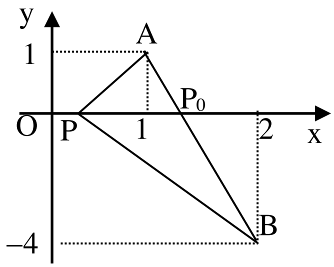
Vậy PA + PB nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1, B, P$ thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

b. Nhận xét A, B khác phía với Ox.

Gọi $P_0 = (AB) \cap Ox$

$\Leftrightarrow A, B, P_0(x, 0)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP_0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5} \Rightarrow P_0\left(\dfrac{6}{5}; 0\right).$



Ta có

$PA + PB \geq AB.$

Vậy PA + PB nhỏ nhất khi và chỉ khi A, B, P thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

☞ ***Chú ý:*** Thí dụ trên, đã minh hoạ phương pháp giải cho một lớp bài toán cực trị rất quen thuộc trong các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học và cao đẳng, do đó các em học sinh cần nắm được phương pháp giải cho bài toán tổng quát như sau:

Bài toán*: Tìm trên đường thẳng (d): Ax + By + C = 0 điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ không thuộc (d) là nhỏ nhất ".*

Phương pháp

Ta xác định

$t_A.t_B = (Ax_A + By_A + C)(Ax_B + By_B + C)$.

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A, B ngược phía với (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi $P_0 = (AB)\cap(d)$, suy ra toạ độ P_0.

Bước 2: Ta có $PA + PB \geq AB$.

Vậy PA + PB nhỏ nhất khi và chỉ khi A, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

Trường hợp 2: Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng phía với (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d) , suy ra toạ độ A_1.

Bước 2: Gọi $P_0 = (A_1B)\cap(d)$, suy ra toạ độ P_0.

Bước 3: Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq AB$.

Vậy PA + PB nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1$,P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

Ngoài phương pháp trên chúng ta sẽ còn nhận được một phương pháp giải khác được minh hoạ trong bài toán " *Phương pháp toạ độ hoá* ".

Dạng toán 5: Phương pháp toạ độ hoá

Phương pháp áp dụng

Phương pháp toạ độ hoá thường được sử dụng phổ biến trong hai dạng:

Dạng 1: Ta thực hiện phép toạ độ hoá các điểm trong hình và đưa bài toán hình học về dạng giải tích.

Dạng 2: Lựa chọn các điểm thích hợp để biến đổi biểu thức đại số về dạng độ dài hình học − Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức đại số.

Thí dụ 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số* $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

Xét các điểm $A(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ và M(x; 0), khi đó:

$$AM = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad BM = \sqrt{x^2 - x + 1},$$

suy ra S = AM + BM ≥ AB = 1

Vậy, ta được $S_{Min} = 1$, đạt được khi:

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ toạ độ của M.

☞ ***Chú ý:*** Với các em học sinh chưa có kinh nghiệm giải dạng toán này thông thường sẽ chọn ngay $A(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ và M(x; 0) và vẫn nhận được $S_{Min} = 1$, tuy nhiên khi đó điều kiện cho A, B, M thẳng hàng sẽ vô nghiệm.

Đôi khi dạng toán này được minh hoạ dưới dạng trị tuyệt đối.

Thí dụ 2. Cho ba điểm A(1; 2), B(0; −1) và M(t; 2t + 1). Tìm điểm M thuộc (d) sao cho:

a. (MA + MB) nhỏ nhất. b. |MA − MB| lớn nhất.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$MA + MB = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2} + \sqrt{t^2 + (2t+2)^2}$$

$$= \sqrt{5t^2 - 6t + 2} + \sqrt{5t^2 + 8t + 4}$$

$$= \sqrt{5}\left[\sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} + \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}}\right]$$

Xét các điểm $A_1(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$; $B_1(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5})$ và $M_1(t; 0)$.

Khi đó:

$$MA + MB = \sqrt{5}\,(M_1A_1 + M_1B_1).$$

Vì M_1 chạy trên trục hoành và A_1, B_1 nằm về hai phía của Ox nên

$$(MA + MB)_{min} \Leftrightarrow (M_1A_1 + M_1B_1)_{min} \Leftrightarrow M_1 = (A_1B_1) \cap Ox$$

$$\Leftrightarrow M_1(\frac{2}{15}; 0) \Leftrightarrow M(\frac{2}{15}; \frac{19}{15})$$

b. Tương tự câu a) ta có:

$$|MA - MB| = \sqrt{5}\left|\sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} - \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}}\right|$$

Xét các điểm $A_2(\frac{3}{5}; \frac{1}{5})$; $B_2(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5})$ và $M_2(t; 0)$.

Khi đó:

$$|MA - MB| = \sqrt{5}\,|M_2A_2 - M_2B_2|.$$

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$$|MA - MB|_{max} \Leftrightarrow |M_2A_2 - M_2B_2|_{max} \Leftrightarrow M_2 = (A_2B_2)\cap Ox \Leftrightarrow M_2(2; 0) \Leftrightarrow M(2; 5).$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho tứ giác* ABCD. *Chứng minh rằng*:

a. *Có một điểm* O *duy nhất sao cho*:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Điểm O *được gọi là trọng tâm của bốn điểm* A, B, C, D. *Tuy nhiên, người ta vẫn gọi quen* O *là trọng tâm của tứ giác* ABCD.

b. *Trọng tâm* O *là trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối các trung điểm hai cạnh đối của tứ giác, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.*

c. *Trọng tâm* O *nằm trên các đoạn thảng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.*

✍ *Giải*

a. Giả sử có điểm O_1 thoả mãn:

$$\vec{0} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1D}$$
$$= 4\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{O_1O}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O} = \vec{0} \Leftrightarrow O_1 \equiv O.$$

Vậy, tồn tại một điểm O duy nhất thoả mãn hệ thức vectơ đã cho.

b. Gọi M, N, P, Q, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD, ta có lần lượt chứng minh:

- O là trung điểm MP (đoạn nối trung điểm của hai cạnh AB và CD), thật vậy:
$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP}$$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trung điểm MP.
- O là trung điểm NQ (đoạn nối trung điểm của hai cạnh BC và DA), thật vậy:
$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ}$$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trung điểm NQ.
- O là trung điểm EF (đoạn nối trung điểm của hai đường chéo AC và BD), thật vậy:
$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OF}$$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trung điểm EF.

c. Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{GO} + (\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GO})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GO} \Rightarrow$ G, O, D thẳng hàng.

Vậy, trọng tâm O nằm trên các đoạn thảng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.

Ví dụ 2: *Cho đa giác đều* n *cạnh* $A_1A_2...A_n$, *tâm* O. *Chứng minh rằng*:

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$.

Nhận xét rằng khi quay đa giác một góc bằng $\frac{2\pi}{n}$ thì:

- Đa giác vẫn không đổi, nên $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA}$.
- Vectơ $\overrightarrow{OA}$ sẽ bị quay theo cùng chiều một góc $\frac{2\pi}{n}$.

Suy ra vectơ $\overrightarrow{OA}$ có hướng tuỳ ý $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \vec{0}$, đpcm.

Cách 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu n = 2k.

Khi đó, với đỉnh bất kỳ của đa giác đều có đỉnh đối xứng với nó qua O $\Rightarrow$ đpcm.

Trường hợp 2: Nếu n = 2k − 1.

Khi đó các đỉnh $A_2, .., A_n$ chia thành hai phần đối xứng qua trục OA_1, bằng cách lập tổng các cặp vectơ đối xứng $\Rightarrow$ đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$ ta có thể sử dụng tính chất "*Vectơ không là vectơ có phương hướng tuỳ ý*".

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC. *Gọi* I *là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng* $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

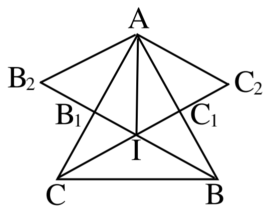
✍ *Giải*

Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2 // CC_1$ và $AC_2 // BB_1$, ta được:

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{IB_2}{IB} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a} \\ \overrightarrow{IB_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB_2} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB}. \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{IC_2}{IC} = \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{c}{a} \\ \overrightarrow{IC_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ICB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC_2} = -\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}. \quad (3)$$



Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: *Cho các điểm* A, B, C, D, E.

a. *Tìm* O *sao cho* $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

b. *Tìm* I *sao cho* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

c. *Tìm* K *sao cho* $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE}) = \vec{0}$.

✍ *Giải*

a. Gọi M, N, F là trung điểm AB, BC và AC, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$
$$= 2\overrightarrow{OF} + 4\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{FO} + 4(\overrightarrow{FN} - \overrightarrow{FO})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FN}$, suy ra điểm O được hoàn toàn xác định.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày:

Cách 1: Gọi P, Q là trung điểm CD, MP, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IP} = 4\overrightarrow{IQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ I ≡ Q, suy ra điểm I được hoàn toàn xác định.

Cách 2: Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{ID} = -3\overrightarrow{GI} + (\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GI})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$, suy ra điểm I được hoàn toàn xác định.

c. Ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE}) = 3\overrightarrow{KG} + 3(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \vec{0} \Leftrightarrow$ K là trọng tâm ΔDEG.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC, M *là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng.*

a. *Chứng minh rằng vectơ* $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ *không đổi.*

b. *Tìm tập hợp những điểm* M *thoả mãn*:

$$|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$$

$= 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$, không đổi.

b. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức

$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm I.

Ta được:

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (3 + 2 - 2)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có:

$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$. (2)

Thay (1), (2) vào hệ thức của câu b), ta được:

$3|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}BC$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính bằng $\frac{1}{3}$BC.

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC. *Lấy các điểm* $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ *sao cho*

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC *và* $A_1B_1C_1$ *có cùng trọng tâm.*

✍ *Giải*

Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, ta có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = \vec{0}$.

Mặt khác từ giả thiết, ta có:

$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$

$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C_1})$

$= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1}) + 3\overrightarrow{GG_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G_1$.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC, *điểm* M *trong mặt phẳng thoả mãn*:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

a. *Chứng minh rằng* MN *luôn đi qua trọng tâm* G *của* ΔABC *khi* M *thay đổi.*
b. *Gọi* P *là trung điểm của* CN. *Chứng minh rằng* MP *luôn đi qua một điểm cố định khi* M *thay đổi.*

✍ *Giải*

a. Với G là trọng tâm ΔABC ta luôn có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ giả thiết ta nhận được:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Vậy MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J cố định.

Từ đó:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2)\overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{MJ}.$$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC. *Lấy các điểm* $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ *sao cho*:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

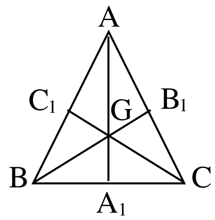
a. *Chứng minh rằng* $\dfrac{BA_1}{BC} = \dfrac{CB_1}{CA} = \dfrac{AC_1}{AB}$.

b. *Xác định vị trí của* A_1, B_1, C_1 *để* AA_1, BB_1 *và* CC_1 *đồng quy*.

✍ *Giải*

a. Đặt:

$$\overrightarrow{BA_1} = \alpha\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CB_1} = \beta\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AC_1} = \gamma\overrightarrow{AB}$$



Khi đó:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1})$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1})$$
$$= \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{CA} + \gamma\overrightarrow{AB}. \quad (*)$$

Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ nên (*) chỉ đúng khi và chỉ khi:

$$\alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB}, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự giải*.

Ví dụ 9: *Cho* ΔABC. *Lấy các điểm* M, N, P *sao cho*:

$$\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

Tính $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$. *Suy ra* M, N, P *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}, \quad (1)$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP}, \quad (2)$$

Ta đi tính $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, cụ thể từ giả thiết:

$$\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}. \quad (3)$$

$$\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \qquad (5)$$

Thay (3), (4), (5) vào (1) và (2) ta được:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}. \qquad (6)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) ta nhận thấy $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 10: *Cho* ΔABC, *có các cạnh* a, b, c. *Gọi* A_1, B_1, C_1 *theo thứ tự là chân các đường phân giác trong kẻ từ* A, B, C.

a. *Tính* $\overrightarrow{AA_1}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b. *Chứng minh rằng* ΔABC *là tam giác đều nếu* $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BA_1} + \overline{A_1C}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

b. Tương tự câu a), ta được:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{c+a}\overrightarrow{BA} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} - \frac{a}{c+a}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{c}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB} = -\frac{c}{a+b}\overrightarrow{AC} - \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BC}.$$

Từ đó:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$$

$$= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC}$$

$$= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC}$$

$$= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} - \frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC}$$

Vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ không cùng phương, nên đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} + \dfrac{c}{b+c} - \dfrac{c}{a+b} = 0 \\ \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} - \dfrac{c}{c+a} + \dfrac{b}{a+b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 11: *Cho* ΔABC, *biết* $A(-1; -1)$, $B(2; 4)$, $C(6; 1)$. *Lấy các điểm* M, N, P *trên các đường thẳng* AB, CA, BC *sao cho các điểm đó lần lượt chia các đoạn thẳng theo các tỉ số* $-1, -\frac{1}{2}, 2$.

a. *Xác định toạ độ của* M, N, P.

b. *Chứng tỏ rằng* M, N, P *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- $M(x; y)$ chia đoạn AB theo tỉ số $-1 \Leftrightarrow$ M là trung điểm AB $\Leftrightarrow M(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.
- $N(x; y)$ chia đoạn CA theo tỉ số $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow 2(6 - x; 1 - y) = -(-1 - x; -1 - y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(6-x) = 1 + x \\ 2(1-y) = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/3 \\ y = 1/3 \end{cases} \Leftrightarrow N(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}).$$

- $P(x; y)$ chia đoạn BC theo tỉ số 2 $\Leftrightarrow$ C là trung điểm BP $\Leftrightarrow P(10; -2)$.

b. Ta có:

$$\overrightarrow{MP}(\frac{19}{2}; -\frac{7}{2}) \ \& \ \overrightarrow{NP}(\frac{19}{3}; -\frac{7}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{MP} // \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \text{M, N, P thẳng hàng.}$$

Ví dụ 12: *Cho* ΔABC, *biết* $A(1; -3)$, $B(3; -5)$, $C(2; -2)$. *Tìm toạ độ*:

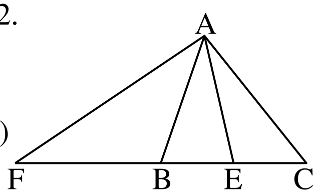
a. *Giao điểm* E *của* BC *với phân giác trong của góc* A.

b. *Giao điểm* F *của* BC *với phân giác ngoài của góc* A.

✍ *Giải*

Ta có:

$$AB^2 = 4 + 4 = 8 \text{ và } AC^2 = 1 + 2 = 2 \Rightarrow k = \frac{AC}{AB} = 2.$$



a. Giả sử $E(x; y)$, theo tính chất phân giác trong, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{EC}(2 - x; -2 - y) = -2\overrightarrow{EB}(3 - x; -5 - y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -2(3 - x) \\ -2 - y = -2(-5 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4/3 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow E(\frac{4}{3}; -4).$$

b. Giả sử $F(x; y)$, theo tính chất phân giác ngoài, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overline{FB}} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{FC}(2 - x; -2 - y) = 2\overline{FB}(3 - x; -5 - y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 2(3 - x) \\ -2 - y = 2(-5 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow F(4; -8).$$

Ví dụ 13: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *biết* A(a; 0), B(1; 0), C(a; $a\sqrt{3}-\sqrt{3}$). *Xác định toạ độ trọng tâm* G *của* ΔABC, *biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp* ΔABC *bằng* 2.

✍ *Giải*

Ta có $G(\frac{2a+1}{3}; \frac{a-1}{\sqrt{3}})$. Với nhận xét:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = p.r \Leftrightarrow AB.AC = 2(AB + AC + BC)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}|a-1|.|a-1| = 2(|a-1| + \sqrt{3}|a-1| + 2|a-1|)$$

$$\Leftrightarrow |a-1| = 2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3+2\sqrt{3} \\ a = -1-2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với $a = 3 + 2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.
- Với $a = -1 - 2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \frac{-2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.

Vậy tồn tại hai điểm G thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 14: *Cho điểm* M(4; 1), *hai điểm* A(a; 0), B(0; b) *với* a, b > 0 *sao cho* A, B, M *thẳng hàng. Xác định toạ độ của* A, B *sao cho*:

a. *Diện tích* ΔOAB *nhỏ nhất.* b. OA + OB *nhỏ nhất.*

$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ *nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

Vì A, B, M thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{4-a}{-a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1. \quad (1)$$

a. Ta có, diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{ab}{2}.$$

Từ (1) suy ra

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Vậy $S_{Min} = 8$, đạt được khi:

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(8;0) \\ B(0;2) \end{cases}.$$

b. Từ (1), ta được :

$$a = \frac{4b}{b-1} \Rightarrow \text{điều kiện } b > 1.$$

Khi đó:

$$OA + OB = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4 = \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)} + 5 = 9.$$

Vậy $(OA + OB)_{Min} = 9$, đạt được khi:

$$\frac{4}{b-1} = b - 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6;0) \\ B(0;3) \end{cases}.$$

c. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$(4^2 + 1^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \geq (\frac{4}{a} + \frac{1}{b})^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}.$$

Vậy, ta được $(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2})_{Min} = \frac{1}{17}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\frac{17}{4};0) \\ B(0;17) \end{cases}.$$

Ví dụ 15: *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}.$$

✍ *Giải*

Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$S = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

Xét các điểm $A(-1; 2)$, $B(3; 2)$ và $M(x; y)$, khi đó:

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}, \ BM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2},$$

suy ra:

$$S = AM + BM \geq AB = 4$$

Vậy, ta được $S_{Min} = 4$, đạt được khi:

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} \Leftrightarrow y = 2,$$

và khi đó:

$$S = |x + 1| + |x - 3| = |x + 1| + |3 - x| \geq |x + 1 + 3 - x| = 4,$$

dấu " = " xảy ra khi

$$(x + 1)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, ta được $S_{Min} = 4$, đạt được khi $-1 \leq x \leq 3$ và $y = 2$.