CHƯƠNG 5 – ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1. MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán của toán học, vật lí, hoá học, sinh học, kĩ thuật ... đòi hỏi phải tìm giới hạn dạng:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó f(x) là một hàm số đã cho của đối số x.

Qua Đại số và Giải tích 11, ta đã biết định nghĩa và kí hiệu của số gia đối số và số gia tương ứng của hàm số:

- Số gia đối số là $\Delta x = x - x_0$.
- Số gia tương ứng của hàm số là $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Ta sẽ dùng khái niệm và kí hiệu đó để viết các giới hạn trên:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$.

Giới hạn, nếu có, của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số tại x_0*, khi số gia đối số dần tới* 0*, được gọi là đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 được kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

hoặc $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. ĐẠO HÀM MỘT BÊN

a. *Đạo hàm bên trái của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^-)$, *được định nghĩa là*:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và nhỏ hơn x_0.

b. *Đạo hàm bên phải của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^+)$, *được định nghĩa là*:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và lớn hơn x_0.

Định lí: *Hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu* $f'(x_0^-)$ *và* $f'(x_0^+)$ *tồn tại và bằng nhau.*

Khi đó, ta có:

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+).$$

4. ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa:

a. *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là có đạo hàm trên khoảng* (a, b) *nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.*

b. *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là có đạo hàm trên đoạn* $[a, b]$ *nếu nó có đạo hàm trên khoảng* (a, b) *và có đạo hàm bên phải tại* a, *đạo hàm bên trái tại* b.

Quy ước: Từ nay khi ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, mà không nói rõ trên khoảng nào, thì điều đó có nghĩa là đạo hàm tồn tại với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

5. QUAN HỆ GIỮA SỰ TỒN TẠI CỦA ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Định lí: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thì nó liên tục tại điểm đó.*

☞ ***Chú ý***:

1. Đảo lại không đúng, nghĩa là *một hàm số liên tục tại điểm* x_0 *có thể không có đạo hàm tại điểm đó.* Để minh hoạ ta xét hàm số :

$$y = f(x) = |x|$$

tại điểm $x_0 = 0$, ta có :

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Vậy, hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Mặt khác, ta có :

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{khi } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{khi } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Do đó

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ không tồn tại}$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

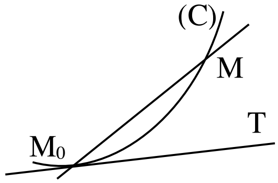
2. Như vậy, hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

6. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

6.1. Ý nghĩa hình học

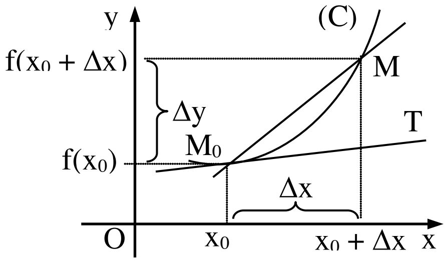
a. *Tiếp tuyến của đường cong phẳng*: Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C), M là điểm di động trên (C). Khi đó M_0M là một cát tuyến của (C).

Định nghĩa: *Nếu cát tuyến* M_0M *có vị trí giới hạn* M_0T *khi điểm* M *di chuyển trên* (C) *và dần tới điểm* M_0 *thì đường thẳng* M_0T *được gọi là tiếp tuyến của đường cong* (C) *tại điểm* M_0. *Điểm* M_0 *được gọi là tiếp điểm.*



Sau đây ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với Oy.

b. *Ỹ nghĩa hình học của đạo hàm*: Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.



Định lí 1: *Đạo hàm của hàm số* f(x) *tại điểm* x_0 *là hệ số góc của tiếp tuyến* M_0T *của* (C) *tại điểm* $M_0(x_0, f(x_0))$.

c. *Phương trình của tiếp tuyến*:

Định lí 2: *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C) *của hàm số* y = f(x) *tại điểm* $M_0(x_0, f(x_0))$ *là*:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

6.2. Ý nghĩa vật lí

a. *Vận tốc tức thời*: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

s = f(t), với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 *là đạo hàm của hàm số* s = f(t) *tại* t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0).$$

b. *Cường độ tức thời*: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình:

Q = f(t), với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 *là đạo hàm của hàm số* Q = f(t) *tại* t_0.

$$I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0).$$

II. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

BẢNG TÓM TẮT

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$

$(ku)' = ku'$, k là hằng số

$(u.v)' = u'v + u.v'$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

$y'_x = y'_u.u'_x$.

BẢNG CÁC ĐẠO HÀM

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của các hàm số hợp (u = u(x))**
$(x^\alpha)' = \alpha.\, x^{\alpha-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(C)' = 0$ (C là hằng số)	$(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(ku)' = k.u'$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$(\sin u)' = u'.\cos u$ $(\cos u)' = -u'.\sin u$ $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1 + \tan^2 u)$ $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
$(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$ $(\log_a\|x\|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln\|u\|)' = \dfrac{u'}{u}$ $(\log_a\|u\|)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x.\ln a$	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

IV. VI PHÂN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b) *và có đạo hàm tại* $x \in (a, b)$. *Cho số gia* Δx *tại* x *sao cho* $x + \Delta x \in (a, b)$.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) *là vi phân của hàm số* $y = f(x)$ *tại* x *ứng với số gia* Δx *và ký hiệu là* dy *hoặc* $df(x)$.

Như vậy, ta có :

$$dy = y'\Delta x, \qquad (1)$$

hoặc
$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \qquad (1')$$

Áp dụng định nghĩa trên và hàm số $y = x$, ta được:

$$dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x. \qquad (2)$$

Vậy, ta có:

$$dy = y'dx \qquad (3)$$

hoặc
$$df(x) = f'(x)dx. \qquad (3')$$

2. ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN VÀO PHÉP TÍNH GẦN ĐÚNG

Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Do đó, với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì :

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Đó là công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

V. ĐẠO HÀM CẤP CAO

1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$.

Tương tự, đạo hàm của hàm số $f''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp ba* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp bốn* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'''' hay $f^{(4)}(x)$...

Tổng quát, *đạo hàm của đạo hàm cấp* $(n - 1)$ *được gọi là đạo hàm cấp* n *của hàm số* $y = f(x)$, *kí hiệu là* $y^{(n)}$ *hay* $f^{(n)}(x)$.

Vậy, ta có:

$$f^{(n)}(x) = [\,f^{(n-1)}(x)]', \text{ với } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 2.$$

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t *là đạo hàm cấp hai của hàm số* $s = f(t)$ *tại* t.

$$\gamma(t) = f''(t).$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. ĐẠO HÀM

<u>Dạng toán 1:</u> Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 1

Phương pháp áp dụng

Cho hàm số:

$$y = f(x).$$

Để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0, ta xác định:

$$f'(x_O) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

<u>Thí dụ 1.</u> *Tìm số gia của hàm số* $y = x^2 - 1$ *tại điểm* $x_0 = 1$ *ứng với số gia* Δx, *biết*:

a. $\Delta x = 1$. b. $\Delta x = -0,1$.

Giải

Ta có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

a. Với $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$ thì:

$$f(x_0) = f(1) = 0, \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(1 + 1) = f(2) = 3,$$

từ đó suy ra:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3 - 0 = 3.$$

b. Với $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$ thì:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 - 0,1) - f(1) = 0,9^2 - 1 = -0,19.$$

<u>Thí dụ 2.</u> *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số tại điểm* x_0:

a. $y = 2x + 1$ tại $x_0 = 2$.
b. $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$y'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1 - 5}{x - 2} = 2.$$

Cách 2: Ta lần lượt có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2) = [2(2 + \Delta x) + 1] - 5 = 2\Delta x,$$

$$y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2\Delta x) = 2.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 3.$$

Cách 2: Ta lần lượt có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1) = [(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)] - 2$$

$$= (\Delta x)^2 + 3\Delta x,$$

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 3.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, việc tìm đạo hàm bằng định nghĩa liên quan mật thiết với bài toán tính giới hạn của hàm số. Do đo, các em học sinh cần ôn lại các phướng pháp tính giới hạn cùng với các dạng giới hạn cơ bản.

Thí dụ 3. *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số*:

a. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ *tại điểm* $x_0 = 0$. b. $y = \sqrt{2x + 7}$ *tại điểm* $x_0 = 1$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x + 1}{x - 1} + 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x - 1} = -2.$$

b. Ta có:

$$y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 7 - 9}{(x - 1)(\sqrt{2x + 7} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{2x + 7} + 3} = \frac{1}{3}.$$

Dạng toán 2: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 2

Phương pháp áp dụng

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0, ta xác định:

$$f'(x_O) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}.$$

Thí dụ 1. *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng* f(x) *liên tục tại* $x = 0$.

b. *Tính đạo hàm, nếu có, của* f(x) *tại điểm* $x = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 0$, bởi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right) = 0 = f(0).$$

b. Ta có:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$$

Thí dụ 2. *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \textit{tại điểm } x_0 = 0.$$

✍ *Giải*

Hàm số f(x) xác định trong một lân cận của $x_0 = 0$.

Ta có:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x.\cos\frac{1}{x}.$$

Ta có:

- Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$|x.\cos\frac{1}{x}| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x.\cos\frac{1}{x} \le |x|.$$

- Mặt khác $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$.

Suy ra:

$$\lim_{x\to 0} x.\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Dạng toán 3: Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm – dạng 3

Phương pháp áp dụng

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Tính đạo hàm hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có đạo hàm tại điểm x_0, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0.

Bước 2: (*Đạo hàm bên trái*) Tính:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bước 3: (*Đạo hàm bên phải*) Tính:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bước 4: Đánh giá hoặc giải $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$, từ đó đưa ra lời kết luận.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ *nhưng có đạo hàm tại điểm* $x = 2$.

✍ *Giải*

a. Tại điểm $x = 0$, ta thấy:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0,$$

suy ra:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \text{Hàm số gián đoạn tại } x = 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

b. Tại điểm $x = 2$, ta có:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x = 2$$

tức là $f'(2) = 2$.

Thí dụ 2. (Đề – 111): *Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số* $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ *tại điểm* $x_0 = 0$.

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{khi } x \ge 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Hàm số f(x) xác định trong một lân cận của $x_0 = 0$. Ta có:

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Nhận xét rằng $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$.

Vậy, hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ và $f'(0) = 1$.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta có thể tính một cách trực tiếp, như sau:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+|x|}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|} = 1.$$

Thí dụ 3. (ĐHHH – 1997): *Chứng minh rằng hàm số* $y = \dfrac{x^2 - 2|x+3|}{3x-1}$ *liên tục tại* $x = -3$ *những không có đạo hàm tại điểm ấy.*

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-6}{3x-1} & \text{khi } -3 \le x \ne \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x^2+2x+6}{3x-1} & \text{khi } x < -3 \end{cases}.$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2|x+3|}{3x-1} = -\dfrac{9}{10} = f(-3)$

Do đó hàm số liên tục tại $x = -3$.

Mặt khác:

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = -3$.

$$f'(-3^-) = \lim_{x\to -3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{13}{100}.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = -3$.

$$f'(-3^+) = \lim_{x\to -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \frac{53}{100}.$$

Nhận xét rằng $f'(-3^-) \neq f'(-3^+)$.

Vậy, hàm số không có đạo hàm tại $x = -3$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

Tìm a, b *để* f(x) *có đạo hàm tại điểm* $x = 1$.

✍ *Giải*

Để hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm $x = 1$, trước hết f(x) phải liên tục tại $x = 1$, do đó:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a. \quad (1)$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = 1$:

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = 2.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = 1$:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + b - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x-1} = a.$$

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$

$$\Leftrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow a = 2. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $b = -1$.

Vậy, hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 1$, nếu và chỉ nếu $a = 2$, $b = -1$.

Thí dụ 5. *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & \text{khi } x \le 0 \\ px + q + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng với mọi cách chọn p, q *hàm* f(x) *không thể có đạo hàm tại điểm* $x = 0$.

✍ *Giải*

Để hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm $x = 0 \Rightarrow$ f(x) phải liên tục tại điểm $x = 0$, do đó:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow p = q + 1 \Leftrightarrow q = p - 1. \quad (1)$$

Khi đó, hàm số f(x) có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} p\cos x + (p-1)\sin x & \text{khi } x \le 0 \\ px + p & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

- *Đạo hàm bên trái* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{p\cos x + (p-1)\sin x - p}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(p-1)\sin x - p(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{(p-1)\sin x}{x} - \frac{2px\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= p - 1.$$

- *Đạo hàm bên phải* của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{px+p-p}{x} = \lim_{x\to 0^+} p = p.$$

Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x = 0, nếu và chỉ nếu:

$$f'(0) = f'(0^+) \Leftrightarrow p = p - 1 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với mọi cách chọn p, q hàm f(x) không thể có đạo hàm tại điểm x = 0.

<u>Dạng toán 4:</u> Tính đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Phương pháp áp dụng

Để tính đạo hàm của hàm số:

$$y = f(x)$$

trên khoảng (a, b), bằng định nghĩa, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 2: Tìm $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

☞ ***Chú ý***:

1. Cần lưu ý rằng trong các phép tính này, điểm x coi như cố định còn Δx thì tiến tới 0.
2. Nếu khoảng (a; b) bằng đoạn [a; b], ta thực hiện theo các bước sau:
   Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số y = f(x) trong khoảng (a; b)
   Bước 2: *Tính đạo hàm bên phải* của hàm số y = f(x) tại điểm a.
   Bước 3: *Tính đạo hàm bên trái* của hàm số y = f(x) tại điểm b.

<u>Thí dụ 1.</u> *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm* x_0 (a *là hằng số*):

a. y = ax + 3. b. $y = \frac{1}{2}ax^2$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{ax+3-ax_0-2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} a = a.$$

b. Ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}ax_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}a(x+x_0)$$

$$= ax_0.$$

Thí dụ 2. *Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau*:

a. $y = \frac{1}{2x-1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$. b. $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+\Delta x)-1}-\frac{1}{2x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{[2(x+\Delta x)-1](2x-1)} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

b. Ta có:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3-(x+\Delta x)}-\sqrt{3-x}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3-(x+\Delta x)}+\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Thí dụ 3. *Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số* $f(x) = \cos 2x$.

✍ *Giải*

Cho x một số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \cos 2(x+\Delta x) - \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos 2(x+\Delta x)-\cos 2x}{\Delta x} = -\frac{2\sin(2x+\Delta x).\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

Do đó:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin(2x+\Delta x).\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right] = -2\sin 2x.$$

Vậy, ta được $f'(x) = -2\sin 2x$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

a. *Tính đạo hàm của f tại mỗi* $x \in \mathbb{R}$.

b. *Chứng tỏ rằng đạo hàm* f' *không liên tục tại* $x_0 = 0$.

Giải

a. Ta xét hai trường hợp:

- Với $x \neq 0$, ta có $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.
- Với $x = 0$, ta có:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}.$$

Ta có:

- Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$|x\sin\frac{1}{x}| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|.$$

- Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

Suy ra:

$$\lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Vậy, ta được:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

b. Chứng tỏ rằng đạo hàm f' không liên tục tại $x_0 = 0$.

Đặt $g(x) = 2x.\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$g(x_n) = 2x_n.\sin\frac{1}{x_n} - \cos\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} -1.$$

- $y_n = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi} \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = 2y_n.\sin\frac{1}{y_n} - \cos\frac{1}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Tức $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ không tồn tại. Suy ra:

$f'(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0 \Rightarrow f'$ không liên tục tại $x_0 = 0$.

Dạng toán 5: Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm

Phương pháp áp dụng

Sử dụng các kết quả:

1. Hệ số góc k của cát tuyến MN với đường cong (C): $y = f(x)$, biết M, N theo thứ tự có hoành độ là x_M, x_N, được cho bởi:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N}.$$

2. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* $M_0(x_0, f(x_0))$ *là*:

$$(d): y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Thí dụ 1. *Cho Parabol* $y = x^2$ *và hai điểm* $A(2; 4)$ *và* $B(2 + \Delta x; 4 + \Delta y)$ *trên Parabol đó.*

a. *Tính hệ số góc của cát tuyến* AB *biết* Δx *lần lượt bằng* 1; 0,1 và 0,01.

b. *Tính hệ số góc của tiếp tuyến của Parabol đã cho tại điểm* A.

✍ *Giải*

a. Gọi k là hệ số góc của cát tuyến AB với đường cong (C), ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{2 - (4 + \Delta y)}{2 - 2 - \Delta x} = 4 + \Delta x.$$

Khi đó:

- Với $\Delta x = 1$, ta được $k = 4 + 1 = 5$.
- Với $\Delta x = 0,1$, ta được $k = 4 + 0,1 = 4,1$.
- Với $\Delta x = 0,01$, ta được $k = 4 + 0,01 = 4,01$.

b. Hệ số góc của tiếp tuyến của Parabol đã cho tại điểm A được cho bởi:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4.$$

Thí dụ 2. *Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong* (C), *biết*:

a. (C): $y = x^2 - 2x$ *và hoành độ* M, N *theo thứ tự là* $x_M = 2$, $x_N = 1$.

b. (C): $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ *và hoành độ* M, N *theo thứ tự là* $x_M = 1$, $x_N = 3$.

✍ *Giải*

Gọi k là hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C).

a. Ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N} = \frac{(2^2 - 2.2) - (1^2 - 2.1)}{2 - 1} = 1.$$

b. Ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N} = \frac{\frac{1^2 + 1 + 1}{1} - \frac{3^2 + 3 + 1}{3}}{1 - 3} = \frac{2}{3}.$$

Thí dụ 3. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y = x^3$, *biết*:

a. *Tiếp điểm có hoành độ bằng* -1.
b. *Tiếp điểm có tung độ bằng* 8.
c. *Hệ số góc của tiếp tuyến bằng* 3.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta đi tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x) = 3x^2.$$

a. Tại điểm có hoành độ bằng -1 phương trình tiếp tuyến có dạng:

(d_1): $y - y(-1) = y'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow (d_1)$: $y = 3x + 2$.

b. Trước tiên, tiếp điểm có tung độ $y_0 = 8$ thì:

$x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

Do đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

(d_2): $y - 8 = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (d_2)$: $y = 12x - 16$.

c. Hê số góc của tiếp tuyến bằng 3, suy ra:

$3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Khi đó:

- Tại $x_0 = 1$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  (d_3): $y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (d_3)$: $y = 3x - 2$.
- Tại $x_0 = -1$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  (d_4): $y - (-1) = y'(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow (d_4)$: $y = 3x + 2$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 4. *Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol* $y = \frac{1}{x}$:

a. *Tại điểm* $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

b. *Tại điểm có hoành độ bằng* -1.

b. *Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng* $-\frac{1}{4}$.

✍ *Giải*

Trước tiên ta đi tính đạo hàm của hàm số:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

a. Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d_1): y - \frac{1}{2} = y'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (d_1): y = -4x + 4.$$

b. Tại điểm có hoành độ bằng -1 phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d_2): y - y(-1) = y'(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow (d_2): y = -x - 2.$$

c. Hê số góc của tiếp tuyến bằng 3, suy ra:

$$-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

Khi đó:

- Tại $x_0 = 2$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d_3): y - y(2) = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (d_3): y = -\frac{1}{4}x + 1.$$

- Tại $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d_4): y - (-2) = y'(-2)[x - (-2)] \Leftrightarrow (d_4): y = -\frac{1}{4}x - 1.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho đường cong* (C): $y = \sqrt{x}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C):

a. *Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng* 1.

b. *Biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng* (Δ): $x - 4y + 3 = 0$.

✍ *Giải*

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

a. Từ điều kiện hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1, ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(\frac{1}{4}) = 1.(x - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow (d): y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow (d): y = x + \frac{1}{4}.$$

b. Đường thẳng (Δ) có hệ số góc $k = \frac{1}{4}$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (Δ) nên có hệ số góc $k = \frac{1}{4}$, do đó:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(4) = \frac{1}{4}.(x - 4) \Leftrightarrow (d): 4(y - 2) = x - 4 \Leftrightarrow (d): x - 4y + 4 = 0.$$

Dạng toán 6: Tính đạo hàm của các hàm số

Phương pháp áp dụng

Sử dụng bảng các đạo hàm và bảng các quy tắc.

Thí dụ 1. *Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau* (a *và* b *là hằng số*):

a. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + a^3.$ b. $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}.$

Giải

a. Ta có ngay:

$$y' = x^3 - x^2 + x - 1.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (x^2 - x + 1)^{-5} \Rightarrow y' = -5(2x - 1)(x^2 - x + 1)^{-6} = -\frac{5(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^6}.$$

Thí dụ 2. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = 3x^5(8 - 3x^2).$ b. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$

Giải

a. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = 24x^5 - 9x^7.$$

Khi đó:

$$y' = 120x^4 - 63x^6.$$

Cách 2: Sử dụng công thức tính đạo hàm của một tích, ta có:

$$y' = 15x^4(8 - 3x^2) - 3x^5.6x = 120x^4 - 63x^6.$$

b. Ta có thể thực hiện theo ba cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* y = u.v.w): Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= [(x + 1)(x + 2)(x + 3)]' \\ &= (x + 1)'(x + 2)(x + 3) + (x + 1)(x + 2)'(x + 3) + (x + 1)(x + 2)(x + 3)' \\ &= 1.(x + 2)(x + 3) + (x + 1).1.(x + 3) + (x + 1)(x + 2).1 \\ &= 3x^2 + 12x + 11. \end{aligned}$$

Cách 2: (*Sử dụng quy tắc cho hàm số dạng* y = u.v): Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = (x^2 + 3x + 2)(x + 3)$$

suy ra:

$$y' = [(x^2 + 3x + 2)(x + 3)]' = (x^2 + 3x + 2)'(x + 3) + (x^2 + 3x + 2)(x + 3)'$$

$$= (2x + 3)(x + 3) + (x^2 + 3x + 2).1 = 3x^2 + 12x + 11.$$

Cách 3: Viết lại hàm số dưới dạng có:

$$y = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

suy ra:

$$y' = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)' = 3x^2 + 12x + 11.$$

Thí dụ 3. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$. b. $y = \dfrac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$.

Giải

a. Ta có:

$$y' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x.2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}.$$

b. Ta có:

$$y' = \frac{5(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(5x - 3)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Thí dụ 4. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. b. $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$.

Giải

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-3/2} \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x^2 + x^{3/2} + 1 \Rightarrow y' = 2x + \frac{3}{2}x^{1/2} = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Thí dụ 5. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$. b. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$y' = \frac{\left(2 - 5x - x^2\right)'}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}} = \frac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}.$$

b. Ta có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$y' = \frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{\frac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}.$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}.\frac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}.\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1/2} = \frac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}.$$

Thí dụ 6. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. b. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y' = \frac{\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{3-x}{(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

b. Ta có:

$$y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

☞ ***Chú ý***: Để tính đạo hàm của hàm số y = |f(x)| trên miền E sao cho f(x) ≠ 0 ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

a. Viết lại hàm số dưới dạng $y = \sqrt{f^2(x)}$.

b. Ta được:

$$y' = \frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}} = \frac{f'(x).f(x)}{|f(x)|}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} f(x) & \text{với } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{với } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Ta được:

$$y' = \begin{cases} f'(x) & \text{với } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{với } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 7. *Tính đạo hàm của hàm số* $y = |x - 1|$ *tại các điểm* $x \neq 1$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{(x-1)^2}.$$

Ta được:

$$y' = \frac{2(x-1)'.(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 1 \\ -1 & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Cách 2: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{với } x > 1 \\ 1 - x & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Ta được:

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 1 \\ -1 & \text{với } x < 1 \end{cases}.$$

Dạng toán 7: Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

Thí dụ 1. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = 5\sin x - 3\cos x$. b. $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$y' = 5\cos x + 3\sin x.$$

b. Ta có ngay:

$$y' = (x^2 - 3x + 2)'.\cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3).\cos(x^2 - 3x + 2).$$

Thí dụ 2. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \cos\sqrt{2x+1}$. b. $y = \sin 3x.\cos 5x$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$y' = \left(\sqrt{2x+1}\right)'.\sin\sqrt{2x+1} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}.\sin\sqrt{2x+1} = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

b. Ta có các cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có ngay $y' = 3\cos 3x.\cos 5x - 5\sin 3x.\sin 5x$.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$y = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(8\cos 8x - 2\cos 2x) = 4\cos 8x - \cos 2x.$$

Thí dụ 3. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$. b. $y = \tan 3x - \cot 3x$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y' = \frac{(2\tan x)'}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}.$$

b. Ta có các cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có ngay:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{3}{\sin^2 3x} = \frac{3}{\sin^2 3x.\cos^2 3x} = \frac{3}{\frac{1}{4}\sin^2 6x} = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x}{\cos 3x.\sin 3x} = -\frac{2\cos 6x}{\sin 6x} = -2\cot 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc* x:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x.$$

✍ *Giải*

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x.\cos^2 x = 1.$$

Khi đó:

$$y' = (1)' = 0.$$

Vậy, hàm số có đạo hàm không phụ thuộc x.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, nếu các em học sinh không thực hiện việc đơn giản hàm số trước khi lấy đạo hàm thì sẽ phải thực hiệm những phép biến đổi khác, cụ thể:

$$\begin{aligned} y' &= 6\sin^5 x.\cos x - 6\cos^5 x.\cos x + 3(2\sin x.\cos^3 x - 2\sin^3 x.\cos x) \\ &= 6\sin x.\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 6\sin x.\cos x[(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x] \\ &= 6\sin x.\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \end{aligned}$$

Thí dụ 5. *Tính đạo hàm của hàm số*:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}} \text{ với } x \in (0; \pi).$$

✍ *Giải*

Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{x}{8}} = \cos\frac{x}{8}.$$

Do đó $y' = (\cos\frac{x}{8})' = -\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}$.

Dạng toán 8: Đẳng thức, bất đẳng thức chứa đạo hàm

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng*:

a. *Hàm số* $y = \tan x$ *thoả mãn hệ thức* $y' - y^2 - 1 = 0$.

b. *Hàm số* $y = \cot 2x$ *thoả mãn hệ thức* $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0, \text{ đpcm.}$$

b. Trước tiên, ta có:

$$y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin^2 2x} = 0.$$

Thí dụ 2. *Cho hàm số* $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. *Chứng minh rằng với mọi* x *ta có* $|f'(x)| \le 8$. *Tìm giá trị của* x *để đẳng thức xảy ra.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$f'(x) = -16\sin(4x - 1).\cos(4x - 1) = -8\sin(8x - 2).$$

Suy ra:

$$|f'(x)| = |-8\sin(8x-2)| = 8|\sin(8x-2)| \le 8,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sin(8x-2) = 1 \Leftrightarrow 8x - 2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Dạng toán 9:</u> Phương trình, bất phương trình chứa đạo hàm

Phương pháp áp dụng

Bài toán thường được đặt ra dưới dạng:

"*Cho hàm số* $y = f(x)$, *hãy giải phương trình* $g(y, y') = 0$"

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính đạo hàm y'.

Bước 2: Chuyển phương trình $g(y, y') = 0$ về phương trình đại số thông thường để giải.

Ví dụ 1: *Tìm các nghiệm của phương trình sau*:

a. $f'(x) = 0$ *với* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 1$.

b. $f'(x) = -5$ *với* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3$.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta có:

$$f'(x) = x^2 - 4x - 6.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \approx 5,162 \text{ hoặc } x \approx -1,162.$$

b. Trước tiên, ta có:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 3x.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$x^3 - 3x^2 - 3x = -5 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x \approx 3,449 \text{ hoặc } x \approx -1,449.$$

Ví dụ 2: *Cho hàm số* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. *Hãy giải bất phương trình*:

a. $f'(x) > 0$.

b. $f'(x) \le 3$.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

a. Bất phương trình có dạng:

$$3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ hoặc } x < 0.$$

b. Bất phương trình có dạng:

$$3x^2 - 6x \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \le x \le 1 + \sqrt{2}.$$

Thí dụ 3. *Giải phương trình* y' = 0 *trong mỗi trường hợp sau*:

a. $y = \sin 2x - 2\cos x$. b. $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$.

c. $y = \cos^2 x + \sin x$. d. $y = \tan x + \cot x$.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta có:

$y' = 2\cos 2x + 2\sin x$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Trước tiên, ta có:

$y' = 6\cos 2x - 8\sin 2x + 10$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$6\cos 2x - 8\sin 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x = 1.$$

Đặt $\frac{4}{5} = \cos 2\alpha$ thì $\frac{3}{5} = \sin 2\alpha$, do đó ta được:

$$\sin 2x\cos 2\alpha - \sin 2\alpha.\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x - 2\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Trước tiên, ta có:

$y' = -2\sin x.\cos x + \cos x = -\sin 2x + \cos x$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

d. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3: *Cho hàm số* $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. *Tìm* m *để*:

a. y' *bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.*
b. y' *có hai nghiệm trái dấu.*
c. $y' > 0$ *với mọi* x.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta có $y' = 3mx^2 + 2x + 1$.

a. Để y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \neq 0 \\ 1 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để y' có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình:

$3mx^2 + 2x + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$

Vậy, với $m < 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để $y' > 0$ với mọi x khi và chỉ khi:

$3mx^2 + 2x + 1 > 0\ \forall x.$

Trường hợp 1: Với $m = 0$ ta được:

$$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}, \text{ không thoả mãn với mọi x.}$$

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$ điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m > 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $m > \frac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: *Cho hàm số* $y = 4\sin x + 3\cos x + 5x$. *Hãy giải phương trình* $y' = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$y' = 4\cos x - 3\sin x + 5.$

Khi đó:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 3\sin x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1.$$

Đặt $\frac{3}{5}$ = cosα và = $\frac{4}{5}$sinα, phương trình được chuyển về dạng:

$$\sin x.\cos\alpha - \cos x.\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Dạng toán 10: Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức

Phương pháp áp dụng

Ta đã biết nếu một hàm số không đổi trong khoảng (a, b) thì đạo hàm luôn triệt tiêu trong khoảng đó. Đảo lại ta có định lí sau:

Định lí 1. *Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm trong khoảng (a, b) và f'(x) = 0, ∀x ∈ (a, b) thì hàm số y = f(x) không đổi trong khoảng (a, b).*

Từ đó, để thực hiện các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh rằng :

$$A(x) = c, \forall x \in D$$

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính A'(x), rồi khẳng định A'(x) = 0, ∀x ∈ D.

Bước 2: Chọn $x_0 \in D \Rightarrow A(x_0) = c$.

Dạng 2: Tìm điều kiện của tham số để biểu thức A(x) không phụ thuộc vào x.

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính A'(x), rồi tìm điều kiện để A'(x) = 0, ∀x.

Bước 2: Kết luận.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi x ta đều có:*

$$\cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a).\sin(x - b).\sin(a - b) = \cos^2(a - b).$$

Giải

Xét hàm số $y = \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a).\sin(x - b).\sin(a - b)$.

Ta có:

$$y' = -2\sin(x - a)\cos(x - a) + 2\sin(x - b)\cos(x - b) +$$
$$+ 2\sin(a - b)[\sin(x - a).\sin(x - b) - \cos(x - a).\cos(x - b)]$$
$$= -\sin2(x - a) + \sin2(x - b) - 2\sin(a - b).\cos(2x - a - b)$$
$$= 2\cos(2x - a - b).\sin(a - b) - 2\sin(a - b).\cos(2x - a - b) = 0$$

⇔ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $y = y(b) = \cos^2(a - b)$.

Vậy $y = \cos^2(a - b)$.

Thí dụ 2. *Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào* x:

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

✍ *Giải*

Xét hàm số

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Ta có:

$$A'_x = 2\sin(x - \frac{2\pi}{3}).\cos(x - \frac{2\pi}{3}) + 2\sin x.\cos x + 2\sin(x + \frac{2\pi}{3}).\cos(x + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sin(2x - \frac{4\pi}{3}) + \sin 2x + \sin(2x + \frac{4\pi}{3})$$

$$= 2\sin 2x.\cos\frac{4\pi}{3} + \sin 2x = -\sin 2x + \sin 2x = 0$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $A = A(0) = \frac{3}{2}$.

Vậy $A = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc vào x.

Dạng toán 11: Sử dụng định nghĩa đạo hàm tính giới hạn của hàm số

Phương pháp áp dụng

Giả sử cần xác định giới hạn:

$$L = \lim_{x \to x_0} Q(x),$$

ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định một hàm $f(x) \Rightarrow f(x_0)$

Xác định $f'(x) \Rightarrow f'(x_0)$.

Bước 2: Khéo léo biến đổi giới hạn trên về một trong các dạng:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\text{hoặc } L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.P(x) = f'(x_0).P(x_0) \text{ với } P(x_0) \neq \infty$$

$$\text{hoặc } L = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ với } g'(x_0) \neq 0.$$

Thí dụ 1. *Tính giới hạn* $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

✍ *Giải*

Đặt $f(x) = x^2 - 1$.

Ta có:

$$f(1) = 0, \qquad f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2.$$

Thí dụ 2. *Tính giới hạn* $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng một hàm số*): Đặt $f(x) = \sqrt{x+8} - 3$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{6}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.\frac{1}{x+3} = f'(1).\frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Cách 2: (*Sử dụng hai hàm số*): Đặt $f(x) = \sqrt{x+8} - 3$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{6}.$$

Đặt $g(x) = x^2 + 2x - 3$, ta có $g(1) = 0$ và $g'(x) = 2x + 2$ và $g'(1) = 4$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{24}.$$

☞ ***Nhận xét***: Để xác định giới hạn trên bằng phương pháp thông thường, ta cần:

- Thực hiện phép nhân liên hợp cho $\sqrt{x+8} - 3$ là $\sqrt{x+8} + 3$.
- Thực hiện phép phân tích $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 2)$.

Thí dụ 3. *Tính giới hạn* $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$.

✍ *Giải*

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{4x} - 2$, ta có:

$$f(2) = 0, \qquad f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{16x^2}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{1}{3}.$$

☞ ***Nhận xét***: Để xác định giới hạn trên bằng phương pháp thông thường, ta cần thực hiện phép nhân liên hợp cho $\sqrt[3]{4x} - 2$ là $(\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4$.

Thí dụ 4. (ĐHQG – 98): *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$.

✍ *Giải*

Đặt $f(x) = x^3 - \sqrt{3x-2}$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Để xác định giới hạn trên bằng phương pháp thông thường, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện ngay phép nhân liên hợp, ta được:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 3x + 2}{(x-1)(x^3 + \sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 2}{x^3 + \sqrt{3x-2}} = \frac{3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp gọi hằng số vắng, ta được:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x-1} + \lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) + \lim_{x \to 1} \frac{3 - 3x}{(x-1)(1 + \sqrt{3x-2})} = \frac{3}{2}.$$

Các ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ cho phương pháp còn chưa nêu nên được tính tiện lợi của phương pháp. Ta tiếp tục xém xét các ví dụ sau:

Thí dụ 5. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^2 - 1}$.

✍ *Giải*

Đặt $f(x) = \sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}$, ta có $f(1) = 0$,

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{5 - x^2}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{11}{12}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5 - x^3} - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} . \frac{1}{x+1} = f'(1) . \frac{1}{2} = -\frac{11}{24}.$$

Nhận xét: Để xác định giới hạn trên, ta cần sử dụng phương pháp gọi hằng số vắng:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}$$

Sau đó, có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Sử dụng phép nhân liên hợp.

Cách 2: Sử dụng kết quả:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}.$$

được chứng minh bằng cách đặt ẩn phụ $t=\sqrt[n]{1+ax}$.

Thí dụ 6. (ĐHSP II/Khối A – 99): *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$.

Giải

Đặt $f(x)=\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}$, ta có $f(1)=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}+\frac{1}{5\sqrt[5]{(2x-1)^4}}\Rightarrow f'(1)=\frac{7}{10}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{7}{10}.$$

Thí dụ 7. *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001}{x}$.

Giải

Đặt $f(x)=(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001$, ta có $f(0)=0$,

$$f'(x)=2x\sqrt[7]{1-2x}-\frac{2(x^2+2001)}{7\sqrt[7]{(1-2x)^6}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{4002}{7}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2001)\sqrt[7]{1-2x}-2001}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-\frac{4002}{7}.$$

Nhận xét: Để xác định giới hạn trên bằng phương pháp thông thường, ta cần sử dụng phương pháp gọi hằng số vắng, bằng cách thêm bớt $P(x)=x^2+2001$ vào tử thức làm xuất hiện giới hạn dạng:

$$\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.$$

Dạng toán 12: Tiếp tuyến của đồ thị

Thí dụ 1. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:*

a. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, *biết hoành độ tiếp điểm là* $x_0 = 0$.

b. $y = \sqrt{x+2}$, *biết tung độ tiếp điểm là* $y_0 = 2$.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta đi tính đạo hàm:

$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(0) = y'(0)(x-0) \Leftrightarrow (d): y = 2x - 1.$$

b. Trước tiên, ta đi tính đạo hàm:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Tại điểm có tung độ $y_0 = 2$, ta lần lượt có:

- Hoành độ tiếp điểm được cho bởi:

$$\sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(2) = y'(2)(x-2) \Leftrightarrow (d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Thí dụ 2. *Cho hai hàm số* $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ *và* $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.*

✍ *Giải*

Hoành độ giao điểm của đồ thị của mỗi hàm số được cho bởi:

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Với đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ ta có $y' = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{2}}$.

  Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hành độ x = 1 có dạng:

$$(d_1): y - y'(1) = y'(1)(x-1) \Leftrightarrow (d_1): y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}.$$

- Với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ ta có $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2}}$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hành độ x = 1 có dạng:

$$(d_2):\ y - y'(1) = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (d_2):\ y = x\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nhận xét rằng $k_{(d_1)}.k_{(d_2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -1$ nên hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

Thí dụ 3. *Cho Parabol* ($\mathcal{P}$): $y = x^2$. *Gọi* M_1 *và* M_2 *là hai điểm thuộc* ($\mathcal{P}$) *lần lượt có hoành độ* $x_1 = -2$ *và* $x_2 = 1$. *Hãy tìm trên* ($\mathcal{P}$) *một điển* C *sao cho tiếp tuyến tại* C *song song với cát tuyến* M_1M_2. *Viết phương trình tiếp tuyến đó.*

✍ *Giải*

Trước tiên, ta có:

$y' = 2x.$

Gọi k là hệ số góc của cát tuyến M_1M_2 với Parabol ($\mathcal{P}$), ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2)^2 - 1^2}{-2-1} = -1.$$

M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị, giả sử M có hoành độ bằng a, khi đó:

- Để tiếp tuyến tại M song song với cát tuyến M_1M_2 điều kiện là:

$$y'(a) = -1 \Leftrightarrow 2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

- Tại $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d):\ y - \frac{1}{4} = -(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (d):\ y = -x - \frac{1}{4}.$$

Thí dụ 4. *Cho hàm số* (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $3x - 5y - 4 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$y' = 3x^2 - 6x$ và hệ số góc của đường thẳng (Δ) bằng $\frac{3}{5}$.

Do đó, hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$y'.\frac{3}{5} = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/3 \\ x = 5/3 \end{array}\right..$$

- Với $x = \frac{1}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng:

$$(d_1):\ y = -\frac{5}{3}(x - \frac{1}{3}) + y(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow (d_1):\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}.$$

- Với $x = \frac{5}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng:

$$(d_2):\ y = -\frac{5}{3}(x - \frac{5}{3}) + y(\frac{5}{3}) \Leftrightarrow (d_2):\ y = -\frac{5}{3}x - \frac{31}{27}.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Viết phương trình tiếp tuyến của Parabol* $y = x^2$, *biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm* A(0; −1).

Giải

Trước tiên, ta đi tính đạo hàm:

$$y' = 2x.$$

Giả sử hoành độ tiếp điểm là x_0, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d):\ y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (d):\ y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0). \qquad (*)$$

Vì điểm $A(0; -1) \in (d)$ nên:

$$-1 - x_0^2 = 2x_0(-x_0) \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến có phương trình:

$$(d_1):\ y - 1^2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow (d_1):\ y = 2x - 1.$$

- Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến có phương trình:

$$(d_2):\ y - (-1)^2 = 2(-1)(x + 1) \Leftrightarrow (d_2):\ y = -2x - 1.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 6. *Cho hàm số* $y = \cos^2 x + m\sin x$ (m *là tham số*) *có đồ thị là* (C). *Tìm* m *trong mỗi trường hợp sau*:

a. *Tiếp tuyến của* (C) *tại điểm có hoành độ* $x = \pi$ *có hệ số góc bằng* 1.

b. *Tiếp tuyến của* (C) *tại các điểm có các hoành độ* $x = -\frac{\pi}{4}$ *và* $x = \frac{\pi}{3}$ *song song hoặc trùng nhau.*

Giải

Trước tiên, ta có:

$$y' = -2\sin x.\cos x + m\cos x = -\sin 2x + m\cos x.$$

a. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1 điều kiện là:

$$y'(\pi) = 1 \Leftrightarrow -\sin 2\pi + m\cos\pi = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy, với $m = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ có hệ số góc bằng:

$$k_1 = y'(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(-\frac{\pi}{2}) + m\cos(-\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{m\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2 = y'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2}.$$

Để hai tiếp tuyến song song hoặc trùng nhau điều kiện là:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow 1 + \frac{m\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)m = -\sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}.$$

Vậy, với $m = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 7. *Tìm giao điểm của hai đường cong* (P): $y = x^2 - x + 1$ *và* (H): $y = \frac{1}{x+1}$.

Chứng minh rằng hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.

✍ *Giải*

Hoành dộ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^3}{x+1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A(0; 1).$$

Vậy, hai đồ thị (P) và (H) cắt nhau tại điểm A(0; 1).

Ta lần lượt có:

- Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A có dạng:

  (d_1): $y - 1 = y'_{(P)}(0).x \Leftrightarrow (d_1)$: $y = -x + 1$.

- Phương trình tiếp tuyến của (H) tại A có dạng:

  (d_2): $y - 1 = y'_{(H)}(0).x \Leftrightarrow (d_2)$: $y = -x + 1$.

Nhận thấy $(d_1) \equiv (d_2)$, tức là (P) và (H) có tiếp tuyến chung tại A.

Dạng toán 13: RÚT GON BIỂU THỨC, CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Ví dụ 1: *Rút gọn các biểu thức*:

a. $A = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n \Leftrightarrow A = n.2^{n-1}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên, chúng ta đã sử dụng khai triển Newton dạng $(1 + x)^n$, sau đó thực hiện phép lấy đạo hàm theo x để làm xuất hiện các hệ số tương ứng. Và với cách làm tương tự, ta nhận được $C_n^1 - 2C_n^2 + ... + n(-1)^{n-1}C_n^n = 0$.

Thí dụ 1. *Rút gọn biểu thức*:

$$A = 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\Leftrightarrow x^3(1 + x)^n = x^3 C_n^0 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + ... + C_n^n x^{n+3}. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm bậc 2 theo x hai vế của (1), ta được:

$$x^2(1 + x)^n + nx^3(1 + x)^{n-1} =$$

$$= 3x^2 C_n^0 + 4C_n^1 x^3 + 5C_n^2 x^4 + ... + (n + 3)C_n^n x^{n+2}$$

$$2x(1 + x)^n + nx^2(1 + x)^{n-1} + 3nx^2(1 + x)^{n-1} + n(n-1)x^3(1 + x)^{n-2} =$$

$$= 3.2x C_n^0 + 4.3C_n^1 x^2 + 5.4C_n^2 x^3 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n x^{n+1}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$2^{n+1} + 4n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} = 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow A = 2^{n+1} + 4n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2}.$$

Ví dụ 2: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$C_n^2 + 2C_n^3 + ... + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}.$$

✍ *Giải*

Ta lần lượt thực hiện:

- Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (2)$$

- Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (3)$$

Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (4)$$

Lấy (4) – (3), ta được:

$$n.2^{n-1} - 2^n = -C_n^0 + C_n^2 + ... + (n-2)C_n^{n-1} + (n-1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 + 2C_n^3 + ... + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1 > (n-2)2^{n-1}, \text{đpcm}.$$

§2. VI PHÂN

Dạng toán 1: Tính vi phân

Phương pháp áp dụng

Để tính vi phân của hàm số y = f(x), ta sử dụng công thức:

$$dy = y'dx.$$

Thí dụ 1. *Tìm vi phân của hàm số* $y = \sin 2x$ *tại điểm* $x = \frac{\pi}{3}$ *ứng với* $\Delta x = 0,01$; $\Delta x = 0,001$.

Giải

Ta có:

$$dy = y'\Delta x = 2\sin 2x.\cos 2x.\Delta x = \sin 4x.\Delta x.$$

Khi đó, với $x = \frac{\pi}{3}$ ta lần lượt có:

- Với $\Delta x = 0,01$ thì $dy = \sin\frac{4\pi}{3}.0,01 \approx -0,01$.
- Với $\Delta x = 0,001$ thì $dy = \sin\frac{4\pi}{3}.0,001 \approx -0,001$.

Thí dụ 2. *Tính vi phân của mỗi hàm số sau*:

a. $y = x^2 - x\sqrt{x} + x + 8$. b. $y = \sqrt{ax+b}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (x^2 - x\sqrt{x} + x + 8)'dx = (2x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1)dx.$$

b. Ta có ngay:

$$dy = y'dx = (\sqrt{ax+b})'dx = \frac{adx}{2\sqrt{ax+b}}.$$

Thí dụ 3. *Tính vi phân của mỗi hàm số sau*:

a. $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2$. b. $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$.

Giải

a. Ta có:

$$dy = y'dx = \left(\frac{6\tan 3x}{\cos^2 3x} + \frac{6x}{\sin^2 3x^2}\right)dx.$$

b. Ta có:

$$dy = y'dx = \frac{-4\sin 2x.\cos 2x}{2\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx = -\frac{\sin 4x.dx}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}.$$

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng nếu các hàm số* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thì tại điểm đó ta có* $d(uv) = vdu + udv$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$d(uv) = (uv)'_x dx = (u'_x v + uv'_x)dx = u'_x vdx + uv'_x dx$$
$$= v(u'_x dx) + u(v'_x dx) = vdu + udv.$$

Dạng toán 2: Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Phương pháp áp dụng

Sử dụng công thức:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Thí dụ 1. *Tính giá trị gần đúng của* $\frac{1}{0,9995}$, $\cos 45^0 30'$, $\tan 29^0 30'$.

✍ *Giải*

a. Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{0,9995} = f(1 - 0,0005) \approx f(1) - f'(1).0,0005 = 1 + 1.0,0005 = 1,0005.$$

b. Xét hàm số:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x.$$

Khi đó:

$$\cos 45^0 30' = f(45^0 + 30^0) \approx f(45^0) + f'(45^0).\frac{3,14}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{3,14}{6} = 0,7009.$$

c. Xét hàm số:

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Khi đó:

$$\tan 29^0 30' = f(30^0 - 30') \approx f(30^0) - f'(30^0).30' = f(30^0) - f'(30^0).\frac{\pi}{360} = 0,566.$$

Thí dụ 2. *Tính giá trị gần đúng của* $\sqrt{4,01}$, $\frac{1}{\sqrt{20,3}}$ và $\sqrt[3]{215}$.

✍ *Giải*

a. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Khi đó:

$$\sqrt{4,01} = f(4 + 0,01) \approx f(4) + f'(4).0,01 = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}.0,01 = 2,0025.$$

b. Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{\sqrt{20,3}} = f(20,25 + 0,05) \approx f(20,25) + f'(20,25).0,05 = 0,222.$$

c. Xét hàm số:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Khi đó:

$$\sqrt[3]{215} = f(216 - 1) \approx f(216) - f'(216).1 = 6 - \frac{1}{108} = 5,991.$$

§3. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Dạng toán 1: Đạo hàm cấp cao

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa về đạo hàm cấp cao.

Thí dụ 1. *Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được cho kèm theo*:

a. $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$. b. $f(x) = \cos^2 x$, $f^{(5)}(x)$.

c. $f(x) = (x + 10)^6$, $f^{(n)}(x)$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$f^{(1)}(x) = 4x^3 + 2\sin 2x$, $f^{(2)}(x) = 12x^2 + 4\cos 2x$,

$f^{(3)}(x) = 24x - 8\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 24 - 16\cos 2x$.

b. Ta lần lượt có:

$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,

$f^{(1)}(x) = -\sin 2x$, $f^{(2)}(x) = -2\cos 2x$,

$f^{(3)}(x) = 4\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 8\cos 2x$, $f^{(5)}(x) = -16\sin 2x$.

c. Ta lần lượt có:

$f^{(1)}(x) = 6(x + 10)^5$, $f^{(2)}(x) = 30(x + 10)^4$,

$f^{(3)}(x) = 120(x + 10)^3$, $f^{(4)}(x) = 360(x + 10)^2$,

$f^{(5)}(x) = 720(x + 10)$, $f^{(6)}(x) = 720$, $f^{(n)}(x) = 0$, với $n \geq 7$.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng*:

a. *Nếu* $y = A.\sin(\omega t + \varphi) + B.\cos(\omega t + \varphi)$, *trong đó* A, B, ω *và* φ *là những hằng số thì* $y'' + \omega^2 y = 0$.

b. *Nếu* $y = \sqrt{2x - x^2}$ *thì* $y^3.y'' + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Lấy đạo hàm liên tiếp hai lần, ta được:

$$y' = \omega A.\cos(\omega t + \varphi) - \omega B.\sin(\omega t + \varphi),$$

$$y'' = -\omega^2 A.\sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 B.\cos(\omega t + \varphi).$$

Do đó:

$$y'' + \omega^2 y = [-\omega^2 A.\sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 B.\cos(\omega t + \varphi)] + \omega^2[A.\sin(\omega t + \varphi) + B.\cos(\omega t + \varphi)] = 0, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm liên tiếp hai lần, ta được:

$$y' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

$$y'' = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - \dfrac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}(1 - x)}{2x - x^2} = \frac{-\left(2x - x^2\right) - (1 - x)^2}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= \frac{-1}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}}.$$

Do đó:

$$y^3.y'' + 1 = \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3.\frac{-1}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}} + 1 = 0, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 3. *Tính đạo hàm cấp hai của hàm số* $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$y' = \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$y'' = \left(\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' = \frac{4x\sqrt{1 + x^2} - (1 + 2x^2)x(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} = \frac{(3 + 2x^2)x}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

Thí dụ 4. *Giả sử hàm số* $f(x)$ *xác định và có đạo hàm cấp hai khi* $x \le x_0$. *Xác định các số* a, b, c *để hàm số*:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \le x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c & \text{khi } x > x_0 \end{cases}$$

cũng có đạo hàm cấp hai.

✍ *Giải*

Trước hết hàm số F(x) phải có đạo hàm cấp 1 tại điểm $x_0 \Leftrightarrow$ các đạo hàm một phía tại điểm liên tục x_0 của hàm F(x) phải bằng nhau.

Bởi vậy cần có:

$f(x_0) = c$ (tính liên tục của hàm F(x)).

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) = b, \text{ tức là } F'(x_0) = b.$$

Tiếp theo, để có đạo hàm cấp hai cần có:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f'_-(x_0 + \Delta x) - f'_-(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2a\Delta x + b - b}{\Delta x} = 2a.$$

Vậy, điều kiện là:

$$a = \frac{1}{2} f''_-(x_0),\ b = f'_-(x_0) \text{ và } c = f(x_0).$$

<u>Dạng toán 2:</u> Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

<u>Thí dụ 1.</u> *Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức* $v(t) = 8t + 3t^2$, *trong đó* $t > 0$, t *tính bằng giây* (s) *và* v(t) *tính bằng* mét/giây (m/s). *Tìm gia tốc của chất điểm*:

a. *Tại thời điểm* t = 4s.

b. *Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng* 11.

✍ *Giải*

Công thức tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm t được cho bởi:

$a(t) = v'(t) = 8 + 6t.$

a. Tại thời điểm t = 4s, ta được:

$a(4) = v'(4) = 8 + 6.4 = 32\text{m/s}^2.$

b. Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11, ta có:

$$8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow 3t^2 + 8t - 11 = 0 \overset{t>0}{\Rightarrow} t = 1.$$

Khi đó, ta có gia tốc của chất điểm được cho bởi:

$a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2.$

<u>Thí dụ 2.</u> *Một chất điểm chuyển động có phương trình*:

$$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$$

trong đó $t > 0$, t *tính bằng giây* (s) *và* S *tính bằng* mét/giây (m/s).

a. *Tính vận tốc tại thời điểm* t = 2.

b. *Tính gia tốc tại thời điểm* t = 3.
c. *Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc bằng* 0.
d. *Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng* 0.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta lần lượt có:

- Vận tốc tại thời điểm t được cho bởi:
  $S' = 3t^2 - 6t - 9.$
- Gia tốc tại thời điểm t được cho bởi:
  $S'' = 6t - 6.$

a. Vận tốc của chuyển động khi t = 2s được cho bởi:
$S'(2) = -9m/s.$

b. Gia tốc của chuyển động khi t = 3s được cho bởi:
$S''(3) = 12m/s^2.$

c. Thời điểm vận tốc triệt tiêu được cho bởi:

$$3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ loại} \\ t = 3 \end{array}\right.$$

từ đó, suy ra gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu được cho bởi:
$S''(3) = 12m/s^2.$

d. Thời điểm gia tốc triệt tiêu được cho bởi:
$6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

từ đó, suy ra vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu được cho bởi:
$S'(1) = -12m/s.$

<u>Dạng toán 3:</u> Tìm công thức đạo hàm cấp n

Phương pháp áp dụng

Với hàm số y = f(x), để tìm được công thức $f^{(n)}(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính f'(x), f''(x) (đôi khi cần tính tới $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$).

Bước 2: Dự đoán công thức tổng quát $f^{(n)}(x)$.

Bước 3: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

☞ ***Chú ý***:

1. Cần nhớ các công thức cơ bản sau:
   a. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1).x^{m-n}$.
   b. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
   c. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
2. *Công thức Lepnit*: Nếu u và v là các hàm khả vi n lần thì $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)}.v^{(n-i)}$.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi* $n \ge 1$, *nếu* $f(x) = \cos x$ *thì* $f^{(4n)}(x) = \cos x$.

✍ *Giải*

Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có:

$$f^{(1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(2)}(x) = -\cos x,$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x.$$

Tức là, công thức đúng với $n = 1$.

- Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là:

$$f^{(4k)}(x) = \cos x.$$

- Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh:

$$f^{(4k+4)}(x) = \cos x.$$

Thật vậy:

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos x,$$
$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4k+4)}(x) = \cos x, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta được $f^{(4n)}(x) = \cos x$.

Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y = \sin x$. *Chứng minh rằng* $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

✍ *Giải*

Ta chứng minh bằng quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ đúng.
- Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $y^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$.
- Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \sin[x + (k+1)\frac{\pi}{2}].$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = [\sin(x + k\frac{\pi}{2})]' = \cos(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$
$$= \sin[x + (k+1)\frac{\pi}{2}].$$

Vậy, ta được $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Thí dụ 3.

a. *Cho hàm số* $f(x) = \tan x$. *Tính* $f^{(n)}(x)$ *với* $n = 1, 2, 3$.

b. *Chứng minh rằng nếu* $f(x) = \sin^2 x$ *thì* $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = 2\tan x.(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 + 6\tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

b. Trước tiên, ta viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

  $f^{(1)}(x) = \sin 2x$, $\quad f^{(2)}(x) = 2\cos 2x$,

  $f^{(3)}(x) = -2^2.\sin 2x$, $\quad f^{(4)}(x) = -2^3.\cos 2x$.

  Tức là, công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là:

  $f^{(4k)}(x) = -2^{4k-1}.\cos 2x$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

  $f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x$.

  Thật vậy:

  $f^{(4k+1)}(x) = 2^{4k}.\sin 2x$, $\quad f^{(4k+2)}(x) = 2^{4k+1}.\cos 2x$,

  $f^{(4k+3)}(x) = -2^{4k+2}.\sin 2x$, $\quad f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x$, đpcm.

Vậy, ta được $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y = \frac{1}{x}$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

✍ *Giải*

Ta có:

$y' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}$, $\quad y'' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2.2!.x^{-2-1}$,

$y^{(3)} = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3.3!.x^{-3-1}, \ldots$

Dự đoán $y^{(n)} = (-1)^n.n!.x^{-n-1}$.

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp – *Bạn đọc tự làm.*

☞ ***Chú ý***: Như vậy, chúng ta đã làm quen được với việc xác định công thức tính đạo hàm cấp n của một số hàm cơ bản. Việc mở rộng các công thức đó dựa trên kết quả của định lí sau:

Định lí: Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) có đạo hàm cấp n, thì:

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

Thí dụ 5. *Cho hàm số* $y = \frac{1}{2x+1}$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

✍ *Giải*

$$y' = -\frac{2}{(2x+1)^2}\,;\ y'' = \frac{2^2.2}{(2x+1)^3} \text{ và } y''' = -\frac{2^3.2.3}{(1+x)^4}.$$

Dự đoán:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$y' = \frac{(-1).2.1!}{(2x+1)^{1+1}} = -\frac{2}{(2x+1)^2} \text{ đúng.}$$

- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}$. (*)
- Ta đi chứng minh (2) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \left[\frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}\right]' = (-1)^k.2^k.k!\left[\frac{1}{(2x+1)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^k.2^k.k!\left[-\frac{2(k+1)}{(2x+1)^{k+2}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta được:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Thí dụ 6. *Cho hàm số* $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

✍ *Giải*

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có:

$$y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Do đó hàm số được viết lại dưới dạng $y = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$.

Từ đó ta dự đoán kết quả là:

$$y^{(n)} = (-1)^n.n!.\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n.n!.\frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n.n!.\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Thí dụ 7. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số* $y = \sin^2 x$, *từ đó suy ra đạo hàm cấp* n *của hàm số* $y = \cos^2 x$.

Giải

Nhận xét rằng:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \text{ và } (\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}).$$

Do đó:

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}[1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})].$$

$$y' = \frac{1}{2}.2\sin(2x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin 2x,$$

$$y'' = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) \text{ và } y^{(3)} = 2^2\sin(2x + 2.\frac{\pi}{2}),$$

Dự đoán:

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin[2x + (n-1).\frac{\pi}{2}].$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Từ hằng đẳng thức:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ = hằng số

$$\Rightarrow (\cos^2 x)^{(n)} = -(\sin^2 x)^{(n)} = -2^{n-1}\sin[2x + (n-1).\frac{\pi}{2}].$$

Thí dụ 8. *Cho hàm số* $y = \sin^3 x$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

Giải

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có:

$$y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Từ đó ta dự đoán kết quả là:

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}.3^n.\sin(3x + n\frac{\pi}{2}).$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Thí dụ 9. *Cho hàm số* $y = \sin ax \sin bx$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

✍ *Giải*

Trước hết ta đưa hàm số về dạng thuận tiện để lấy đạo hàm, ta có:

$$y = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Từ đó ta dự đoán kết quả là:

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\{(a-b)^n.\cos[(a-b)x + n\frac{\pi}{2}] - (a+b)^n.\cos[(a+b)x + n\frac{\pi}{2}]\}.$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Thí dụ 10. *Cho hàm số* $y = x.\cos ax$. *Tính đạo hàm cấp* n *của hàm số.*

✍ *Giải*

Sử dụng công thức Lepnit , ta dự đoán kết quả là:

$$y^{(n)} = xa^n.\cos(ax + n\frac{\pi}{2}) + C_n^1 a^{n-1}.\cos[ax + (n-1)\frac{\pi}{2}].$$

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Dạng toán 4: sử dụng Đạo hàm cấp cao chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp

Thí dụ 1. *Rút gọn các biểu thức*:

a. $A = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n$.

b. $B = 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm bậc hai theo x hai vế của (1), ta được:

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x - 3C_n^3 x^2 + ... + n(-1)^n C_n^n x^{n-1}$$

$$n(1-x)^{n-2} = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 x + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n x^{n-2}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$0 = 2.1C_n^2 - 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)(-1)^n C_n^n \Leftrightarrow A = 0.$$

b. Ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\Leftrightarrow x^3(1+x)^n = x^3 C_n^0 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + ... + C_n^n x^{n+3}. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm bậc 2 theo x hai vế của (3), ta được:

$$x^2(1+x)^n + nx^3(1+x)^{n-1} = 3x^2 C_n^0 + 4C_n^1 x^3 + 5C_n^2 x^4 + ... + (n+3)C_n^n x^{n+2}$$

$$2x(1+x)^n + nx^2(1+x)^{n-1} + 3nx^2(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^3(1+x)^{n-2} =$$

$$= 3.2xC_n^0 + 4.3C_n^1 x^2 + 5.4C_n^2 x^3 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n x^{n+1}. \quad (4)$$

Thay x = 1 vào (4), ta được:

$$2^{n+1} + 4n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} =$$

$$= 3.2C_n^0 + 4.3C_n^1 + 5.4C_n^2 + ... + (n+3)(n+2)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow B = 2^{n+1} + 4n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2}.$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số*:

$$f(x) = x^2 - \sin x \text{ } \textit{tại điểm } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Giải

Ta có:

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \sin x - \frac{\pi^2}{4} + 1}{x - \pi/2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x + \frac{\pi}{2})}_{L_1} + \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}}_{L_2}. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Với L_1, ta có ngay $L_1 = \pi$. (2)
- Với L_2, bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta được:

$$L_2 = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)}{-t} = -\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{2t.\sin^2\frac{t}{2}}{4\left(t/2\right)^2} = 0. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải trên để tính đạo hàm chúng ta cần xác định giá trị của một giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ và ở đây chúng ta đã tách nó thành hai giới hạn con (bao gồm $\frac{P(x)}{Q(x)}$ và dạng lượng giác) để đưa nó về dạng đơn giản hơn.

Ví dụ 2: *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$.   b. $y = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

✍ *Giải*

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} = (x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}.$$

Khi đó:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Ví dụ 3: *Tính đạo hàm của hàm số* $y = \sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}}\left(1+\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right) = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{4\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}.\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Ví dụ 4: *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. b. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\tan 2x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có các cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có ngay:

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$y = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' = -\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

b. Ta có ngay:

$$y' = \frac{\sin 2x(1+\tan 2x) - (1+\tan^2 2x).\sin^2 x}{(1+\tan 2x)^2}.$$

Ví dụ 5: *Tìm đạo hàm của các hàm số sau*:

a. $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. b. $y = \dfrac{1}{|\cos x|}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$y' = \frac{-\sin\sqrt{x^2+1}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x.\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1} - \cos\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

b. Ta viết lại:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{\cos^2 x}\right)'}{\cos^2 x} = -\frac{-2\sin x\cos x}{2\sqrt{\cos^2 x}.\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\tan x}{|\cos x|}.$$

Ví dụ 6: *Giải các phương trình*:

a. f'(x) = g(x) với $f(x) = \sin^3 2x$ và g(x) = 4cos2x — 5sin4x.

b. f'(x) = 0 với f(x) = 20cos3x + 12cos5x — 15cos4x.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta có:

$f'(x) = 6\sin^2 2x.\cos 2x$.

Từ đó:

$f'(x) = g(x) \Leftrightarrow 6\sin^2 2x.\cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x.\cos 2x = 4\cos 2x - 10\sin 2x.\cos 2x$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 2x + 5\sin 2x - 2).\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 3\sin^2 2x + 5\sin 2x - 2 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{3}\\ \sin 2x = -2 \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \arcsin\dfrac{1}{3} + 2k\pi\\ 2x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Trước tiên, ta có:

$$f'(x) = -60\sin3x - 60\sin5x + 60\sin4x$$

Từ đó:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -60\sin3x - 60\sin5x + 60\sin4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin5x + \sin3x - \sin4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin4x.\cos x - \sin4x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\sin4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 7: *Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$. *Tìm* m *để phương trình sau có nghiệm*:

$$\frac{2f^2(x)}{(3-2x)f'(x)} = \sqrt{2m + x - x^2}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\frac{2(-x^2+3x-2)(-2x+3)}{2(3-2x)\sqrt{-x^2+3x-2}} = \sqrt{2m + x - x^2}$$

$$\overset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{2m+x-x^2} \overset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} -x^2+3x-2 = 2m+x-x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2 \geq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x = m+1 \neq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Do đó, để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} 1 \leq m+1 \leq 2 \\ m+1 \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in [0; 1]\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, phương trình có nghiệm.

Ví dụ 8: *Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Hãy giải bất phương trình* $f'(x) \le f(x)$.

Giải

Trước tiên, ta có:

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \le \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x - 1 \le x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \text{ hoặc } x < 0 \\ x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x \le \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ hoặc } x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $x < 0$ hoặc $x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 9: *Tìm* m *để phương trình sau nghiệm đúng với mọi* x:

$$\sin^m x + \cos^m x = 1.$$

Giải

Đặt $f(x) = \sin^m x + \cos^m x$, khi đó yêu cầu bài toán được phát biểu dưới dạng:

$$f(x) = 1, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0, \forall x & (1) \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): Ta được:

$$m.\cos x.\sin^{m-1}x - m\sin x.\cos^{m-1}x = 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow m.\sin x.\cos x(\sin^{m-2}x - \cos^{m-2}x) = 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \sin^{m-2}x = \cos^{m-2}x, \forall x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Ta xét từng trường hợp của m để giải (2):

- Với m = 0, ta được:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 = 2, \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = 2, tương tự ta được $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, thoả mãn.

Vậy, với m = 2 phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 10: (ĐHGTVT – 98): *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

✍ *Giải*

Đặt f(x) = 1 − $\sqrt{2x+1}$ + sinx, ta có f(0) = 0,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \cos x \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Đặt $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2 - x$, ta có g(0) = 0,

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} - 1 \Rightarrow g'(0) = -\frac{1}{4}.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Để xác định giới hạn trên bằng phương pháp thông thường ta phải thực hiện như sau:

$$\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x} = \left(\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{x}\right):\left(\frac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x} + \frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{\sqrt{3x+4}-2}{x} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{-2x}{x(1+\sqrt{2x+1})} + \frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3x}{x(\sqrt{3x+4}+2)} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}} + \frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} - 1\right).$$

Từ đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}} + \frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} - 1\right) = 0.$$

Ví dụ 11: *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x.\tan(\frac{\pi}{4}-x)$.

✍ *Giải*

a. Viết lại giới hạn dưới dạng:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x.\tan(\frac{\pi}{4}-x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{\cot 2x}.$$

Sử dụng hai hàm số f(x) và g(x), trong đó:

- Đặt $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$, ta có:

$$f(\frac{\pi}{4}) = 0, \qquad f'(x) = -\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - x)} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -1.$$

- Đặt $g(x) = \cot 2x$, ta có:

$$g(\frac{\pi}{4}) = 0, \qquad g'(x) = -\frac{2}{\sin^2 2x} \Rightarrow g'(\frac{\pi}{4}) = -2.$$

Khi đó:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}} = \frac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 12: *Cho hàm số* (C): $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. *Tìm các điểm thuộc đồ thị* (C) *mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị* (C).

Giải

Xét điểm $A(a, -a^3 + 3a^2 - 2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Tiếp tuyến qua A tiếp xúc với đồ thị hàm số tại $M(x_0, y(x_0))$ có dạng:

(d): $y = (-3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2$.

Điểm $A \in (d)$ khi:

$-a^3 + 3a^2 - 2 = (-3x_0^2 + 6x_0)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2$

$\Leftrightarrow (-3x_0^2 + 6x_0)(a - x_0) + a^3 - 3a^2 - x_0^3 + 3x_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow (-3x_0^2 + 6x_0 + a^2 + ax_0 + x_0^2 - 3a - 3x_0)(a - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow (-2x_0^2 + 3x_0 + a^2 + ax_0 - 3a)(a - x_0) = 0$

$\Leftrightarrow (a + 2x_0 - 3)(a - x_0)(a - x_0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_0 = \frac{3-a}{2} \end{array}\right.$.

Để qua A kẻ được một tiếp tuyến với (C) ta phải có:

$a = \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy, qua điểm A(1; 0) (chính là điểm uốn của đồ thị (C)) kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị (C).

Ví dụ 13: *Cho hàm số* $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$.

a. *Chứng minh rằng trên đồ thị không tồn tại hai điểm sao cho hai tiếp tuyến tại hai điểm đó của đồ thị là vuông góc với nhau.*

b. *Xác định* k *để trên đồ thị có ít nhất một điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng* $y = kx$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3.$$

Giả sử hai điểm A, B có hoành độ theo thứ tự là x_A, x_B, thuộc đồ thị, ta có:

- Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B có giá trị là $y'(x_A)$ và $y'(x_B)$.
- Hai tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow y'(x_A)\, y'(x_B) = -1 \Leftrightarrow (3x_A^2 + 6x_A + 3)(3x_B^2 + 6x_b + 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_A^2 + 2x_A + 1)(x_B^2 + 2x_B + 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_A + 1)^2(x_B + 1)^2 = -1 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, trên đồ thị không tồn tại hai điểm sao cho hai tiếp tuyến tại hai điểm đó của đồ thị là vuông góc với nhau.

b. Điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc đồ thị, ta có:

- Hệ số góc của tiếp tuyến tại M có giá trị là $y'(x_0)$.
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = kx$

$$\Leftrightarrow ky'(x_0) = -1 \Leftrightarrow k(3x_0^2 + 6x_0 + 3) = -1 \Leftrightarrow 3k(x_0 + 1)^2 = -1. \quad (1)$$

Để tồn tại ít nhất một điểm M thoả mãn điều kiện đầu bài

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 3k < 0 \Leftrightarrow k < 0$.

Vậy, với $k \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 14: *Cho hyperbol* $(\mathscr{H})$ *có phương trình* $y = \dfrac{1}{x}$.

a. *Tìm phương trình tiếp tuyến* (T) *của* $(\mathscr{H})$ *tại tiếp điểm* A *có hoành độ* a (*với* $a \neq 0$).

b. *Giả sử* (T) *cắt trục* Ox *tại điểm* I *và cắt trục* Oy *tại điểm* J. *Chứng minh rằng* A *là trung điểm của đoạn thẳng* IJ. *Từ đó, suy ra cách vẽ tiếp tuyến* (T).

c. *Chứng minh rằng diện tích* ΔOIJ *không phụ thuộc vào vị trí của điểm* A.

✍ *Giải*

a. Trước tiên, ta có:

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại điểm A có dạng:

$$(T): y - y(a) = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow (T): y = -\frac{1}{a^2}(x - a) - \frac{1}{a}.$$

b. Ta lần lượt có:

- Toạ độ giao điểm I của tiếp tuyến (T) và trục Ox là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{1}{a^2}(x-a) - \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2a;\ 0).$$

- Toạ độ giao điểm J của tiếp tuyến (T) và trục Oy nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{a^2}(x-a) - \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow J(0;\ \frac{2}{a}).$$

Nhận xét rằng $x_I + x_J = 2a = 2x_A$ và $y_I + y_J = \frac{2}{a} = 2y_A$

suy ra A là trung điểm của đoạn thẳng IJ.

Từ đó, suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T) như sau:

- Trên Ox lấy điểm I(2a; 0).
- Trên Oy lấy điểm $J(0;\ \frac{2}{a})$.
- Nối IJ ta được tiếp tuyến (T).

c. Diện tích tam giác OIJ được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}OI.OJ = \frac{1}{2}.|2a|.\frac{2}{|a|} = 2$$ – không phụ thuộc vào a.

Vậy, diện tích ΔOIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

Ví dụ 15: *Cho hàm số* (H_m): $y = \frac{x - 4m}{2(mx - 1)}$.

a. *Chứng minh rằng với mọi* $m \neq \pm\frac{1}{2}$, *các đường cong* (H_m) *đều đi qua hai điểm cố định* A *và* B.

b. *Chứng minh rằng tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với* (H_m) *tại hai điểm* A *và* B *là một hằng số khi m biến thiên.*

✍ *Giải*

a. Giả sử $M(x_0;\ y_0)$ là điểm cố định của họ (H_m). Khi đó:

$$y_0 = \frac{x_0 - 4m}{2(mx_0 - 1)}, \forall m \Leftrightarrow 2(x_0y_0 + 2)m - x_0 - 2y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0y_0 + 2 = 0 \\ -x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2y_0 \\ (-2y_0)y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-2;1) \\ B(2;-1) \end{array}\right.$$

Vậy, họ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A(−2; 1) và $M_2(2;\ -1)$.

b. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{4m^2-1}{2(mx-1)^2}.$$

Khi đó, tích các hệ số góc của các tiếp tuyến với (H_m) tại hai điểm A và B được cho bởi:

$$k_A.k_B = y'(-2).y'(2)$$
$$= \frac{4m^2-1}{2(-2m-1)^2}.\frac{4m^2-1}{2(2m-1)^2} = \frac{(4m^2-1)^2}{4(2m+1)^2.(2m-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 16: *Tìm một điểm trên đồ thị hàm số* $y = \frac{1}{x-1}$ *sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục toạ độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng* 2.

✍ *Giải*

Trước tiên, ta có:

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị, giả sử M có hoành độ bằng a, khi đó M(a; y(a)) và phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): y - y(a) = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) - \frac{1}{a-1}.$$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến tại M và trục Oy nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) - \frac{1}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2a-1}{(a-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow A(0; \frac{2a-1}{(a-1)^2}).$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến tại M và trục Ox là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{1}{(a-1)^2}(x-a) - \frac{1}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a-1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B(2a - 1; 0).$$

Diện tích tam giác OAB được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\left|\frac{2a-1}{(a-1)^2}\right|.|2a-1| = \frac{1}{2}\frac{(2a-1)^2}{(a-1)^2}.$$

Để tam giác có diện tích bằng 2, điều kiện là:

$$\frac{(2a-1)^2}{2(a-1)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-1 = 2(a-1) \\ 2a-1 = -2(a-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Vậy, điểm cần tìm trên đồ thị hàm số là $M(\frac{3}{4}; -4)$.

Ví dụ 17: *Rút gọn biểu thức*:

$$A = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)^n = xC_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \dots + C_n^{n-1} x^n + C_n^n x^{n+1}. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} =$$

$$= C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + \dots + nC_n^{n-1} x^{n-1} + (n+1)C_n^n x^n. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$2^n + n.2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow B = 2^n + n.2^{n-1}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, nếu các em học sinh hiểu một cách thụ động ý tưởng nhận được trong câu a) thì sẽ thấy lúng túng với thắc mắc " *Làm cách nào để nâng đượcgiá trị của hệ số ?* ". Tuy nhiên, câu trả lời lại rất đơn giản bởi " *Để nâng được hệ số ta đi nâng bậc cho x* " và ở đây chúng ta đã thực hiện việc nhân cả hai vế của biểu thức với x trước khi lấy đạo hàm. Như vậy, các em học sinh có thể tổng quát hoá được cho:

$$B^* = kC_n^0 + (k+1)C_n^1 + (k+2)C_n^2 + \dots + (k+n)C_n^n.$$

Như vậy, chúng ta đã biết cách giải quyết cho việc tạo ra hệ số ứng với mỗi C_n^r và một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên từ các em học sinh khá và giỏi là " *Chúng ta đã biết lấy đạo hàm và đã biết tới khái niệm đạo hàm cấp cao do đó hàm toán có thể xây dựng ra các vị dụ mới với yêu cầu lấy đạo hàm nhiều lần* ".

Ví dụ 18: Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - \dots + (-1)^n.\,2^nC_n^n = (-1)^n.$

b. $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{k-1}kC_n^k + \dots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0.$

✍ *Giải*

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (1)$$

a. Thay x = 2 vào (1), ta được:

$$(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - \dots + (-1)^n.\,2^nC_n^n \text{ , đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + n(-1)^n C_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + n(-1)^n C_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 19: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

a. (ĐHTCKT 2000): $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n.2^{n-1}$.

b. $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$.

✍ *Giải*

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

a. Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (2), ta được:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 x + \ldots + n(n-1)C_n^n x^{n-2}. \quad (3)$$

Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$n(n-1).2^{n-2} = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 20: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$(-1)^r C_r^r C_n^r + (-1)^{r+1} C_{r+1}^r C_n^{r+1} + \ldots + (-1)^n C_n^r C_n^n = 0,$$

với r nguyên dương và $r \le n$.

✍ *Giải*

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm cấp r theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} k(k-1)\ldots(k-r+1)C_n^k x^{k-r}. \quad (2)$$

Chia hai vế của (2) cho r!, ta được:

$$\frac{1}{r!}n(n-1)\ldots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} \frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!} C_n^k x^{k-r}$$

$$= \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{r!.(k-r)!} C_n^k x^{k-r} = \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k x^{k-r}. \quad (3)$$

Thay x = −1 vào (3), ta được:

$$0 = \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k (-1)^{k-r} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k (-1)^k = 0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 21: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$C_n^2 + 2C_n^3 + ... + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}.$$

Giải

Ta lần lượt thực hiện:

- Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (2)$$

- Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (3)$$

Thay x = 1 vào (3), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (4)$$

Lấy (4) – (3), ta được:

$$n.2^{n-1} - 2^n = -C_n^0 + C_n^2 + ... + (n-2)C_n^{n-1} + (n-1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 + 2C_n^3 + ... + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1 > (n-2)2^{n-1}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 22: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$C_n^1 + 4C_n^2 + ... + n2^{n-1}.C_n^n =$$

$$= n.4^{n-1}.C_n^0 - (n-1).4^{n-2}C_n^1 + (n-2).4^{n-3}C_n^2 + ... + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1}.$$

Giải

a. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 2 vào (2), ta được:

$$n.3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + ... + n2^{n-1}.C_n^n. \quad (3)$$

b. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n. \qquad (4)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (4), ta được:

$$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}. \qquad (5)$$

Thay x = 4 vào (5), ta được:

$$n.3^{n-1} = n.4^{n-1}.C_n^0 - (n-1).4^{n-2}C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1}. \qquad (6)$$

Từ (3) và (6), suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 23: *Chứng minh đẳng thức*:

$$n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n2^{n-1}C_n^n$$

Giải

Ta có:

$$(2x-1)^n = C_n^0(2x)^n - C_n^1(2x)^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n. \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$2n(2x-1)^{n-1} = 2nC_n^0(2x)^{n-1} - 2(n-1)C_n^1(2x)^{n-2} + $$
$$+ ... + (-1)^{n-1}2C_n^{n-1}. \qquad (2)$$

Thay x = 2 vào (2), ta được:

$$n3^{n-1} = n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}2C_n^{n-1} \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n. \qquad (4)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (4), ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + ... + nC_n^nx^{n-1}. \qquad (5)$$

Thay x = 2 vào (5), ta được:

$$n3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + ... + n2^{n-1}C_n^n. \qquad (6)$$

Từ (3) và (6), suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 24: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n) < n!.$$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n. \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (3)$$

Khi đó, bất đẳng thức được chuyển về dạng:

$$2^{n-1} < n!.$$

Ta sẽ đi chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp qui nạp – *Bạn đọc tham khảo trong chủ đề hoán vị*.