# CHƯƠNG 4 – GIỚI HẠN

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

### 1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

***Định nghĩa***: *Ta nói **dãy số** $(u_n)$ **có giới hạn là** 0 (hay có giới hạn 0) nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$, viết tắt là $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

***Nhận xét***:

1. Dãy số $(u_n)$ có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0.
2. Dãy số không đổi $(u_n)$ với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

### 2. MỘT SỐ DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0 THƯỜNG GẶP

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim\frac{1}{n} = 0$.  b. $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.  c. $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

***Định lí 1***: Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$. Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

***Định lí 2***: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

## II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

### 3. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN

***Định nghĩa***: *Ta nói **dãy số** $(u_n)$ **có giới hạn là số thực** L nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - L) = 0$.

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

### 4. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ

***Định lí 1***: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

a. $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b. Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

***Định lí 2***: Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

a. Các dãy số $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$ và $(cu_n)$ có giới hạn và:
   - $\lim(u_n + v_n) = L + M$.
   - $\lim(u_n - v_n) = L - M$.
   - $\lim(u_n.v_n) = LM$.
   - $\lim(cu_n) = cL$.

b. Nếu $M \neq 0$ thì dãy số $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$.

### 5. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Với cấp số nhân $(u_n)$ có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ thì:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

## III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

### 1. DÃY SỐ CỚI GIỚI HẠN $+\infty$

***<u>Định nghĩa</u>***: *Ta nói* ***dãy số*** $(u_n)$ ***có giới hạn là*** $+\infty$ *nếu mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty, \text{ viết tắt là } \lim(u_n) = +\infty \text{ hoặc } \lim u_n = +\infty \text{ hoặc } u_n \to +\infty.$$

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim n = +\infty$.

b. $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

c. $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

### 2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN $-\infty$

***Định nghĩa***: *Ta nói* ***dãy số*** $(u_n)$ ***có giới hạn là*** $-\infty$ *nếu mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty, \text{ viết tắt là } \lim(u_n) = -\infty \text{ hoặc } \lim u_n = -\infty \text{ hoặc } u_n \to -\infty.$$

***Nhận xét***: Nếu $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim(-u_n) = +\infty$.

☞ ***Chú ý***:

1. Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
2. Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

## 3. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

***Quy tắc 1***: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

| $\lim u_n$ | $\lim v_n$ | $\lim(u_n.v_n)$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

***Quy tắc 2***: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

| $\lim u_n$ | Dấu của L | $\lim(u_n.v_n)$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | + | $+\infty$ |
| $+\infty$ | – | $-\infty$ |
| $-\infty$ | + | $-\infty$ |
| $-\infty$ | – | $+\infty$ |

***Quy tắc 3***: Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

| Dấu của L | Dấu của $v_n$ | $\lim \frac{u_n}{v_n}$ |
|---|---|---|
| + | + | $+\infty$ |
| + | – | $-\infty$ |
| – | + | $-\infty$ |
| – | – | $+\infty$ |

## 4. MỘT SỐ KẾT QUẢ

a. $\lim \frac{q^n}{n} = +\infty$ và $\lim \frac{n}{q^n} = 0$, với $q > 1$.

*Mở rộng*: Ta có $\lim \frac{q^n}{n^k} = +\infty$ và $\lim \frac{n^k}{q^n}$, với $q > 1$ và k là một số nguyên dương.

b. Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$.

- Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbf{R}$ và $\lim |v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim v_n = L \in \mathbf{R}$ thì $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

# IV. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

## 1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

**Định nghĩa 1** *(Giới hạn hữu hạn): Giả sử* (a; b) *là một khoảng chứa điểm* $x_0$ *và* y = f(x) *là một hàm số xác định trên một khoảng* (a; b)*, có thể trừ ở một điểm* $x_0$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $x_0$ *(hoặc* ***tại điểm*** $x_0$*) nếu với mọi số dãy số* $(x_n)$ *trong tập hợp* $(a; b)\backslash\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, với c là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm $x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Định nghĩa 2** *(Giới hạn vô cực): Giả sử* (a; b) *là một khoảng chứa điểm* $x_0$ *và* y = f(x) *là một hàm số xác định trên một khoảng* (a; b)*, có thể trừ ở một điểm* $x_0$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn vô cực khi*** x ***dần đến*** $x_0$ *(hoặc* ***tại điểm*** $x_0$*) nếu với mọi số dãy số* $(x_n)$ *trong tập hợp* $(a; b)\backslash\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = \pm\infty$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } f(x) \to \pm\infty \text{ khi } x \to x_0.$$

## 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

**Định nghĩa 3**: *Giả sử hàm số* y = f(x) *xác định trên khoảng* $(a; +\infty)$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $+\infty$ *nếu với mọi số dãy số* $(x_n)$ *trong khoảng* $(a; +\infty)$ *mà* $\lim x_n = +\infty$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

☞ ***Chú ý***: Các giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ta có, các kết quả sau với số nguyên dương k bất kì cho trước:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}.$

### 3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

***Định lí 1***: *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbf{R})$. *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$;

Đặc biệt, nếu c là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} [c.f(x)] = cL$;

c. Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

***Định lí 2***: *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$. *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

c. Nếu $f(x) \geq 0$ với thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

***Định lí 3***: *Giả sử* f(x), g(x) *và* h(x) *là ba hàm số xác định trên một khoảng* (a; b) *chứa điểm* $x_0$*, có thể trừ ở một điểm* $x_0$. *Nếu* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *với mọi* $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

☞ ***Chú ý***: Các định lí 1, định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to \pm\infty$.

## V. GIỚI HẠN MỘT BÊN

**Định nghĩa 1** *(Giới hạn phải): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(x_0; b)$ $(x_0 \in \mathbf{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn phải là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $x_0$ *(hoặc* ***tại điểm*** $x_0$*) nếu với mọi số dãy số* $(x_n)$ *trong khoảng* $(x_0; b)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+.$$

**Định nghĩa 2** *(Giới hạn trái): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(a; x_0)$ $(x_0 \in \mathbf{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn trái là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $x_0$ *(hoặc* ***tại điểm*** $x_0$*) nếu với mọi số dãy số* $(x_n)$ *trong khoảng* $(a; x_0)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-.$$

***Định lí***: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ là $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

☞ ***Chú ý***:

1. Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.
2. Định lí vẫn đúng với giới hạn vô cực.

## VI. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

***Quy tắc 1***: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$ được cho trong bảng sau:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | Dấu của L | $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | + | $+\infty$ |
| $+\infty$ | – | $-\infty$ |
| $-\infty$ | + | $-\infty$ |
| $-\infty$ | – | $+\infty$ |

***Quy tắc 2***: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

| Dấu của L | Dấu của g(x) | $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|
| + | + | $+\infty$ |
| + | – | $-\infty$ |
| – | + | $-\infty$ |
| – | – | $+\infty$ |

☞ ***Chú ý***:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.
2. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$.

## VII. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Khi tìm giới hạn của một hàm số, chúng ta có thể gặp các trường hợp sau:

1. $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to 0$.
2. $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
3. $\lim[u(x) - v(x)]$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.

4. $\lim[u(x).v(x)]$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to \infty$.

Ta gọi là các dạng vô định dạng $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, …

# VIII. HÀM SỐ LIÊN TỤC

## 1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

***Định nghĩa 1***: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(a, b)$. *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm $x_0$ hàm số $y = f(x)$ không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* tại $x_0$ và điểm $x_0$ được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số $y = f(x)$.

☞ ***Chú ý 1***: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0$ nếu ba điều kiện sau được đồng thời thoả mãn :

(i) $f(x)$ xác định tại $x_0$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0$ nếu một trong ba điều kiện trên không được thoả mãn.

☞ ***Chú ý 2***: Nếu sử dụng giới hạn một phía thì :

1. Nếu $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trái tại điểm $x_0$.*
2. Nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục phải tại điểm $x_0$.*
3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

***Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm***

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$. Giả sử $x_O$ và $x(x \neq x_O)$ là hai phần tử của $(a ; b)$.

- Hiệu $x - x_O$, kí hiệu là $\Delta x$ (đọc là đen - ta x), được gọi là *số gia của đối số tại điểm $x_O$*. Ta có :

$$\Delta x = x - x_O \Leftrightarrow x = x_O + \Delta x.$$

- Hiệu $y - y_O = f(x) - f(x_O)$, kí hiệu là $\Delta y$, được gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm $x_O$*. Ta có :

$$\Delta y = y - y_O = f(x) - f(x_O) = f(x_O + \Delta x) - f(x_O).$$

*Đặc trưng* : Dùng khái niệm số gia, ta có thể đặc trưng tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_O$ như sau:

***Định lí 1.*** *Một hàm số $y = f(x)$, xác định trên (a; b), là liên tục tại $x_O \in$ (a; b) nếu và chỉ nếu* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

*Chứng minh.*

Thật vậy, ta có :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_O) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_O)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

### 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

***Định nghĩa 2***: Ta có :

1. *Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trong khoảng (a; b) nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*
2. *Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó*
   - *Liên tục trong khoảng (a; b),*
   - $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *(liên tục bên phải tại điểm a),*
   - $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *(liên tục bên trái tại điểm b).*

☞ ***Chú ý***:

1. Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.
2. Khi ta nói hàm số y = f(x) liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

### 3. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

***Định lí 2.*** *Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.*

***Định lí 3.*** *Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.*

# B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

## §1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

### Dạng toán 1: Dãy số có giới hạn 0

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng các dãy số* $(u_u)$ *sau đây có giới hạn* 0:

a. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. b. $u_n = \dfrac{\sin n}{n+4}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có:

$$\left|\frac{\sin n}{n+4}\right| < \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh các dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < \frac{1}{n}$ và kết quả $\lim\frac{1}{n} = 0$.

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng dãy số* $(u_u)$ *với số hạng tổng quát* $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ *có giới hạn* 0.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{và } \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh các dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ và $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

**Thí dụ 3.** *Chứng minh rằng dãy số* $(u_u)$ *với số hạng tổng quát* $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{4^n}$ *có giới hạn* 0.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\left|\frac{\cos(n\pi)}{4^n}\right| < \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ và } \lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh các dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < q^n$ và $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

## Dạng toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng lim $u_n$ = L

*Phương pháp áp dụng*

Ta đi chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng*:

a. $\lim\dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$.   b. $\lim\dfrac{n^2+n}{n^2+1} = 1$.

✍ *Giải*

a. Đặt $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = \lim\left(\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right) = \lim\frac{-5}{2n+1} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

b. Đặt $u_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$, ta có nhận xét:

$$\lim\left(\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right) = \lim\frac{n-1}{n^2+1} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = 1$.

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng*:

$$\lim\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} + 2\right] = 2.$$

✍ *Giải*

Đặt $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} + 2$, ta có nhận xét:

$$\lim(u_n - 2) = \lim\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

từ đó suy ra $\lim u_n = 2$.

## Dạng toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn

*Phương pháp áp dụng*

Đưa dãy số cần tìm giới hạn về dạng tổng hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim c = c$, với c là hằng số.
2. Kết quả trong định lí 1.
3. Kết quả trong định lí 2.

**Thí dụ 1.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\frac{n+1}{3n-1}$.  b. $\lim\frac{n-1}{n^2-2}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim\frac{n+1}{3n-1} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{\lim 1+\lim\frac{1}{n}}{\lim 3-\lim\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\lim\frac{n-1}{n^2-2} = \lim\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\frac{1}{n}-\lim\frac{1}{n^2}}{\lim 1-\lim\frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của n và sử dụng kết quả $\lim\frac{a}{n^k} = 0$ với $k > 0$.

**Thí dụ 2.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.  b. $\lim\frac{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}+1}$.

*Giải*

a. Chia cả tử và mẫu cho n, ta được:

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

b. Chia cả tử và mẫu cho $n^2$, ta được:

$$\lim\frac{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}+1} = \lim\frac{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^2}} = 2.$$

**Thí dụ 3.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\sqrt{\frac{4n+\sin(n\pi)}{n}}$.  b. $\lim\sqrt[3]{\frac{8n+\cos(n\pi)}{n}}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim\sqrt{\frac{4n+\sin(n\pi)}{n}} = \lim\sqrt{4+\frac{\sin(n\pi)}{n}} = \sqrt{4} = 2, \text{ vì } \lim\frac{\sin(n\pi)}{n} = 0.$$

b. Ta có:

$$\lim\sqrt[3]{\frac{8n+\cos(n\pi)}{n}} = \lim\sqrt[3]{8+\frac{\cos(n\pi)}{n}} = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ vì } \lim\frac{\cos(n\pi)}{n} = 0.$$

***Nhận xét***: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực phép tách thành các giới hạn nhỏ.

**Thí dụ 4.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-4^n}{1+4^n}$.  b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$.

*Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-4^n}{1+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{1}{4^n}+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+1} = -1.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{4^n}-4}{3.\frac{3^n}{4^n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-4}{3\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-4}{\lim\limits_{n\to\infty}3.\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} = -4.$$

***Nhận xét***: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho cơ số cao nhất và sử dụng kết quả $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

**Thí dụ 5.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.  b. $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$.

c. $\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$.  d. $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$

*Giải*

a. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

b. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

c. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}} = \lim\frac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}}{n+1} = \lim\frac{\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = 0.$$

d. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \lim\frac{n^2-n}{(3n+2)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim\frac{1-\frac{1}{n}}{(3+\frac{2}{n})\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các giới hạn trên trước tiên chúng ta cần sử dụng phép nhân liên hợp để khử dạng $\infty - \infty$ và $\frac{k}{\infty - \infty}$.

**Thí dụ 6.** *Tính giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

✍ *Giải*

Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1-n^3)(\sqrt{n^2+1}+n)}{(n^2+1-n^2)\left[n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^2}} = 0.$$

**Thí dụ 7.** *Tính các giới hạn sau*:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n},\ \text{với } |a|,\ |b| < 1.$$

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+a+a^2+...+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+...+b^n)(1-b)(1-a)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-a^{n+1}\right)\left(1-b\right)}{\left(1-b^{n+1}\right)\left(1-a\right)}$$

$$= \frac{1-b}{1-a}.\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính giới hạn trên chúng ta cần sử dụng kiến thức về khai triển nhị thức Niutơn.

## <u>Dạng toán 4:</u> Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

*Phương pháp áp dụng*

Sử dụng công thức:

$$S = u_1 + u_2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}, \text{ với } |q| < 1.$$

**<u>Thí dụ 1.</u>** *Tính tổng các tổng sau*:

a. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ b. $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ...$

✍ *Giải*

a. Xét cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$, ta được:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

b. Dãy số $-1, \frac{1}{10}, ..., \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$ là một cấp số nhân có $u_1 = -1$ và công bội $q = -\frac{1}{10}$.

Từ đó, suy ra:

$$\lim S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = -\frac{10}{11}.$$

**<u>Thí dụ 2.</u>** *Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số*:

a. 0,444... b. 0,2121.... c. 0,32111....

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$0,444... = 0,4 + 0,04 + 0,004... = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + ...$$

trong đó, các số $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{4}{1000}$. ... là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{4}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó, suy ra:

$$0,444... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$0,2121... = 0,21 + 0,0021 + ... = \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + ...$$

trong đó, các số $\frac{21}{100}$, $\frac{21}{10000}$,. ... là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{21}{100}$ và công bội $q = \frac{1}{100}$.

Từ đó, suy ra:

$$0,2121... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{21}{99}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$0,32111... = 0,32 + 0,001 + 0,0001... = 0,32 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ...$$

trong đó, các số $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ... là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{1000}$ và $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó, suy ra:

$$0,32111... = 0,32 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{32}{100} + \frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{289}{900}.$$

## Dạng toán 5: Dãy số có giới hạn vô cực

**Thí dụ 1.** *Tính các giới hạn sau:*

a. $\lim(n^2 - n + 1)$. b. $\lim(-n^2 + n + 1)$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim(n^2 - n + 1) = \lim[n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = +\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim(-n^2 + n + 1) = \lim[-n^2(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) = -\infty.$$

**Thí dụ 2.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8}$. b. $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8} = \lim\sqrt{n^2(2 - \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2})} = +\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} = \lim\sqrt[3]{n^3(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - 1)} = -\infty.$$

**Thí dụ 3.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})$. b. $\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1})$.

c. $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$.

*Giải*

a. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) = \lim\frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim\frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \infty.$$

b. Ta có:

$$\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1}) = \lim\frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \lim\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty.$$

c. Ta có:

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \lim(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = +\infty.$$

**Thí dụ 4.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim(2n + \cos n)$. b. $\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5)$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$2n + \cos n \geq 2n - 1 \text{ và } \lim(2n - 1) = +\infty$$

từ đó, suy ra:

$$\lim(2n + \cos n) = +\infty.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \geq \frac{1}{2}n^2 + 2 \text{ và } \lim(\frac{1}{2}n^2 + 2) = +\infty$$

từ đó, suy ra:

$$\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5) = +\infty.$$

**Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng nếu* $q > 1$ *thì* $\lim q^n = +\infty$.
*Áp dụng tìm giới hạn của các dãy số* $(u_n)$ *với*:

a. $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^n - 1}$. b. $u_n = 2^n - 3^n$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

a. Ta có:

$$\lim u_n = \lim \frac{3^n + 1}{2^n - 1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}} = +\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim u_n = \lim(2^n - 3^n) = \lim 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -\infty.$$

**Thí dụ 6.** *Cho hai dãy số* $(u_n)$ , $(v_n)$ *với* $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ *và* $v_n = \dfrac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2 + 1}$.

a. *Tính* $\lim u_n$.

b. *Chứng minh rằng* $\lim v_n = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim u_n = \lim \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

b. Ta có:

$$\left|\frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1} \text{ và } \lim\frac{n}{n^2+1} = 0,$$

từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

# §2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

## Dạng toán 1: Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số tìm giới hạn

*Phương pháp áp dụng*

Sử dụng các định nghĩa 1, định nghĩa 2, định nghĩa 3.

**Thí dụ 1.** *Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}$.  b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \ne 1$ với mọi n và $\lim x_n = +\infty$, ta có $f(x_n) = \frac{2}{x_n-1}$.

Do đó:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1} = \lim\frac{2}{x_n-1} = \frac{2}{\lim x_n - 1} = 0.$$

b. Đặt $f(x) = \frac{2}{3x+1}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \ne -\frac{1}{3}$ với mọi n và $\lim x_n = +\infty$, ta có $f(x_n) = \frac{2}{3x_n+1}$.

Do đó:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1} = \lim\frac{2}{3x_n+1} = \frac{2}{3\lim x_n + 1} = 0.$$

**Thí dụ 2.** *Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$.  b. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

✍ *Giải*

a. Đặt $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \neq 1$ với mọi n và $\lim x_n = 1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2 - 3x_n + 1}{x_n - 1} = 2x_n - 1.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim(2x_n - 1) = 2\lim x_n - 1 = 2 - 1 = 1.$$

b. Đặt $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \neq -1$ với mọi n và $\lim x_n = -1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{2x_n + 2}{x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n + 1} = \frac{2}{(x_n + 1)^2}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \lim \frac{2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2}{(\lim x_n + 1)^2} = +\infty.$$

**Thí dụ 3.** *Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x - 1}}$. b. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

✍ *Giải*

a. Đặt $f(x) = \dfrac{3x + 2}{\sqrt{x - 1}}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \neq 2$ với mọi n và $\lim x_n = 2$, ta có $f(x_n) = \dfrac{3x_n + 2}{\sqrt{x_n - 1}}$.

Do đó:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x + 2}{\sqrt{x - 1}} = \lim \frac{3x_n + 2}{\sqrt{x_n - 1}} = \frac{3\lim x_n + 2}{\sqrt{\lim x_n - 1}} = \frac{3.2 + 2}{\sqrt{2 - 1}} = 8.$$

b. Đặt $f(x) = x.\sin\dfrac{1}{x}$.

Với mọi dãy số $(x_n)$ mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$, ta có $f(x_n) = x_n.\sin\dfrac{1}{x_n}$.

Nhận xét rằng:

$$|f(x_n)| = \left|x_n.\sin\frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \text{ và } \lim |x_n| = 0 \text{ nên } \lim f(x_n) = 0.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x.\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

**Dạng toán 2:** Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f(x)}$ không tồn tại

*Phương pháp áp dụng*

Ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với

- $x_n \to x_0$ khi $n\to\infty$, khi đó đánh giá $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} L_1$.
- $y_n \to x_0$ khi $n\to\infty$, khi đó đánh giá $f(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} L_2$.

*Bước 2:* Nhận xét rằng $L_1 \neq L_2$.

*Bước 3:* Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại*:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$.        b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$.

*Giải*

a. Đặt $f(x) = \cos x$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n \to +\infty$ khi $n\to\infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \cos(x_n) = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

- $y_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow y_n \to +\infty$ khi $n\to\infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \cos(y_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ không tồn tại.

b. Đặt $f(x) = \sin x$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = -n\pi \Rightarrow x_n \to -\infty$ khi $n\to\infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \sin(x_n) = \sin(-n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $y_n = \dfrac{\pi}{2} - 2n\pi \Rightarrow y_n \to -\infty$ khi $n\to\infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ không tồn tại.

☞ ***Chú ý***: Với các hàm số:

- $f(x) = \cos ax$ chúng ta thường chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

$$x_n = \frac{2n\pi}{a} \text{ và } y_n = \frac{\pi}{2a} + \frac{n\pi}{a}.$$

- $f(x) = \sin ax$ chúng ta thường chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

$$x_n = \frac{n\pi}{a} \text{ và } y_n = \frac{\pi}{2a} + \frac{2n\pi}{a}.$$

## <u>Dạng toán 3:</u> Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn

*Phương pháp áp dụng*

Ta lựa chọn một trong hai cách:

*Cách 1:* Đưa hàm số cần tìm giới hạn về dạng tổng hiệu, tích, thương của những hàm số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, với c là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm $x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$.

*Cách 2:* Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, cụ thể:

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$), ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

*Bước 2:* Khẳng định:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

$$\left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L\right).$$

*Bước 3:* Kết luận:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L\right).$$

☞ ***Chú ý***: Chúng ta còn sử dụng các kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2. Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số xác định trên khoảng (a; b) có thể trừ điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ và $|g(x)| \le M$ với $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$ (trong đó M là một hằng số) thì $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = 0$.

**Thí dụ 1.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + x)$. b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 3}(x^2 + x) = 3^2 + 3 = 12.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1} = +\infty.$$

***Nhận xét***: Như vậy:

- Với hàm số f(x) xác định tại điểm $x_0$ thì giới hạn của nó khi $x\to x_0$ có giá trị bằng $f(x_0)$.
- Với hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có $f(x_0) \neq 0$ và $g(x_0) = 0$ thì giới hạn của nó khi $x\to x_0$ có giá trị bằng $\infty$.

Trong trường hợp với hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có $f(x_0) = 0$ và $g(x_0) = 0$ (tức có dạng $\dfrac{0}{0}$) chúng ta cần sử dụng các phép biến đổi đại số để khử dạng $\dfrac{0}{0}$, và thông thường là làm xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$.

**Thí dụ 2.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x+8}+3)(x-1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)(x+3)} = \frac{1}{24}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với hàm số f(x) không xác định tại điểm $x_0$ thì chúng ta cần khử dạng vô định đó (nếu có thể), và ở đây:

- Trong câu a), chúng ta sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử để khử nhân tử x − 1.
- Trong câu b), chúng ta sử dụng phép nhân liên hợp để khử nhân tử x − 1.

**Thí dụ 3.** *Tìm các giới hạn sau*:

b. $\lim\limits_{x\to 0} x\left(2-\frac{1}{x}\right)$. b. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0} x\left(2-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(2x-1) = -1.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x(9-x)} = -\lim_{x\to 9}\frac{1}{x(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{54}$$

hoặc có thể trình bày theo cách:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x(9-x)\left(\sqrt{x}+3\right)} = -\lim_{x\to 9}\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+3\right)} = -\frac{1}{54}$$

**Thí dụ 4.** *Tìm các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x-1}$. b. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$.

✍ *Giải*

a. Chia cả tử và mẫu cho $x^2$, ta được:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

**Thí dụ 5.** *Tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$. b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{3-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{3-\dfrac{1}{x^3}}=-\frac{1}{3}.$$

**Thí dụ 6.** *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{x\to1^-}(x+x^2+...+x^n-\dfrac{n}{1-x})$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim_{x\to1^-}(x+x^2+...+x^n-\frac{n}{1-x})=\lim_{x\to1^-}\frac{x(1-x^n)-n}{1-x}=\frac{\lim\limits_{x\to1^-}[x(1-x^n)-n]}{\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)}=-\infty.$$

☞ ***Chú ý***: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng nguyên lý kẹp giữa.

**Thí dụ 7.** *Giả sử hàm số* $f(x)$ *xác định trên một khoảng chứa điểm* $x = 0$ *và thoả mãn* $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le M$ *với mọi* $x\ne0$. *Tính* $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

*Áp dụng*:

a. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$. b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

✍ *Giải*

Từ giả thiết $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le M$ với mọi $x\ne0$ suy ra:

$$|f(x)|\le M.|x| \text{ và } \lim_{x\to0}|x|=0\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=M.0=0.$$

a. Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|x.\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x| \text{ và } \lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Vậy, ta được $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

b. Ta có: với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|},\ \forall x \ne 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|} = 0.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

## Dạng toán 4: Tính giới hạn một bên của hàm số

*Phương pháp áp dụng*

Sử dụng các định nghĩa với lu ý:

- $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x > x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x - x_0$).
- $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x < x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x_0 - x$).

**Thí dụ 1.** *Áp dụng định nghĩa giới hạn phải và giới hạn trái, tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$.  b. $\lim_{x\to 5^-}(\sqrt{5-x}+2x)$.

*Giải*

a. Ta có ngay:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0.$$

b. Ta có ngay:

$$\lim_{x\to 5^-}(\sqrt{5-x}+2x) = 10.$$

***Nhận xét***: Như vậy, nếu hàm số f(x) xác định tại điểm $x_0$ thì giới hạn một bên của nó không khác so với hạn tại $x_0$.

**Thí dụ 2.** *Áp dụng định nghĩa giới hạn phải và giới hạn trái, tìm các giới hạn sau:*

a. $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}$.  b. $\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

b. Ta có ngay:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty.$$

**Thí dụ 3.** *Tính các giới hạn sau (nếu có):*

a. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2}$. b. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2}$. c. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|3x-6|}{x-2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-3x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (-3) = -3.$$

c. Từ câu a) và b), ta thấy:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{|3x-6|}{x-2} \text{ không tồn tại.}$$

**Thí dụ 4.** *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-x^3}} - \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

## Dạng toán 5: Giới hạn của hàm số kép

*Phương pháp áp dụng*

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để tính giới hạn hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tính giới hạn các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

*Bước 2:* Khi đó:

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
- Để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$ điều kiện là:

  $L_1 = L_2 \Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

**Thí dụ 1.** *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ khi } x<0 \\ x^2+1 \text{ khi } x \ge 0 \end{cases}.$$

*Tính các giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

✍ *Giải*

Ta có :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x+1) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

**Thí dụ 2.** *Cho hàm số* :

$$f(x) = \begin{cases} x+a \text{ khi } x<0 \\ x^2+1 \text{ khi } x \ge 0 \end{cases}.$$

*Tìm* a *để hàm số có giới hạn khi* $x \to 0$.

✍ *Giải*

Ta có :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+a) = a \text{ và } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1.$$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy với $a = 1$ ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

## <u>Dạng toán 6:</u> Một vài quy tắc tìm giứoi hạn vô cực

**Thí dụ 1.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3 - 5x^2 + 7)$. b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}\right) = (-\infty)^3.3 = -\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{12}{x^4}} = (+\infty)\sqrt{2} = +\infty.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với hàm số dạng:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = (\pm\infty)^n.a_n$$

**Thí dụ 2.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 - 5}{x^2 + 1}$. b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 - \dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}} = +\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{5}{x^3}\right) = 1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 0$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} > 0$ với $x > 0$.

b. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}} = +\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$ và $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} > 0$ với $x < 0$.

**Ví dụ 1:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}$.   b. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1}{x-2}=+\infty,$$

vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x + 1) = 5$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}(x - 2) = 0$ và $x - 2 > 0$ với $x > 2$.

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+1}{x-2}=-\infty,$$

vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(2x + 1) = 5$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}(x - 2) = 0$ và $x - 2 < 0$ với $x < 2$.

**Thí dụ 3.** *Tính giới các hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{(x-1)^2}.\dfrac{2x+1}{2x-3}\right]$.   b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}.\frac{2x+1}{2x-3}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(1-1)^2}.\frac{2+1}{2-3}\right]=+\infty.(-3)\ =-\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{5}{(x-1)^2(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{5}{(1-1)^2}.\frac{5}{1-2}=+\infty.(-5)=-\infty.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên, ở câu b) nếu các em học sinh không biến đổi hàm số về dạng $\dfrac{5}{(x-1)^2(x-2)}$ thì sẽ không thể khẳng định được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{(1-1)^2}=+\infty$.

**Thí dụ 4.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.   b. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}(x - 1) = -1$ và $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ với $x \neq 0$ nên:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

b. Ta biến đổi:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x + 1) = 3$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - 4) = 0$ và $x^2 - 4 < 0$ với $x < 2$ nên:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}\right) = -\infty.$$

## Dạng toán 7: Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$

*Phương pháp áp dụng*

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để:

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

***Ghi chú***:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0$ thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức:

$\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

**Thí dụ 1.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$.   b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(3x - 1) = 2.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với giới hạn dạng:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

trong đó f(x), g(x) là các hàm đa thức nhận $x = x_0$ làm nghiệm.
Khi đó:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f_1(x)}{(x-x_0)g_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \ldots$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f_k(x)}{g_k(x)} = \frac{f_k(x_0)}{g_k(x_0)}$$

với điều kiện $f_k^2(x_0) + g_k^2(x_0) > 0$.

**Thí dụ 2.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$. b. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^-}\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^-}\frac{2x-1}{x+3} = +\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^+}\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^+}\frac{2x-1}{x+3} = -\infty.$$

☞ ***Chú ý***: Tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp khử nhân tử chung như trên cho các hàm số khác, cụ thể là các hàm số lượng giác, khi đó cần nhớ lại các phép biến đổi lượng giác.

**Thí dụ 3.** *Tính giới hạn*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x} = \frac{(1-\cos 2x)-\sin 2x}{(1-\cos 2x)+\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x-2\sin x.\cos x}{2\sin^2 x+2\sin x.\cos x}$$

$$= \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} = -1.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã cần tới các phép biến đổi lượng giác để khử nhân tử 0/0.

Tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp khử nhân tử chung cho các hàm số chứa căn, cụ thể:

Với giới hạn dạng:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-a}{g(x)}$$

trong đó $\sqrt{f(x_0)} = a$ và $g(x_0) = 0$.

Khi đó, thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt{f(x)} + a$, ta được:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-a}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a^2}{[\sqrt{f(x)}+a]g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f_1(x)}{[\sqrt{f(x)}+a](x-x_0)g_1(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{[\sqrt{f(x)}+a]g_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{2a.g_1(x_0)}.$$

Phương pháp được mở rộng cho các giới hạn:

1. Với giới hạn $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-a}{\sqrt{g(x)}-b}$, với $\sqrt{f(x_0)} = a$ và $\sqrt{g(x_0)} = b$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-a}{\sqrt{g(x)}-b} = \lim_{x\to x_0}\frac{[\sqrt{g(x)}+b][f(x)-a^2]}{[\sqrt{f(x)}+a][g(x)-b^2]}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[\sqrt{g(x)}+b](x-x_0)f_1(x)}{[\sqrt{f(x)}+a](x-x_0)g_1(x)} = \frac{[\sqrt{g(x_0)}+b]f_1(x_0)}{[\sqrt{f(x_0)}+a]g_1(x_0)}.$$

2. Với giới hạn $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{g(x)}$, với $\sqrt{f_1(x_0)} = \sqrt{f_2(x_0)}$ và $g(x_0) = 0$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f_2(x)}{[\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}]g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f(x)}{[\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}](x-x_0)g_1(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}]g_1(x)}$$

$$= \frac{f(x_0)}{[\sqrt{f_1(x_0)}+\sqrt{f_2(x_0)}]g_1(x_0)}.$$

3. Với giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{g_1(x)}-\sqrt{g_2(x)}}$, với $\sqrt{f_1(x_0)} = \sqrt{f_2(x_0)}$ và $\sqrt{g_1(x_0)} = \sqrt{g_2(x_0)}$ – *Bạn đọc tự trình bày.*

**Thí dụ 4.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$.    b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3+\sqrt{2x+9})}{-2x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\sqrt{2x+9}}{-2(\sqrt{x+1}+1)} = -\frac{3}{2}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})(2-x)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(2x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{-2(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})} = -\frac{1}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các giới hạn trên chúng ta cần thực hiện phép nhân liên hợp cho cả TS và MS.

**Thí dụ 5.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$.    b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{4x-8}{[(\sqrt[3]{4x})^2+\sqrt[3]{4x}+4](x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{4}{(\sqrt[3]{4x})^2+2\sqrt[3]{4x}+4} = \frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{x[\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{4}{3}.$$

**Thí dụ 6.** *Tính các giới hạn sau:*

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, với a> 0. b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}+\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x-1)}+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+x-2} = -2.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được các giới hạn trên chúng ta cần thực hiện phép tách nó thành hai giới hạn nhỏ, từ đó mới có thể khử được dạng $\dfrac{0}{0}$.

Với giới hạn dạng:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-a}{g(x)}, \text{ trong đó } \sqrt[3]{f(x_0)} = a \text{ và } g(x_0) = 0.$$

Thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2$, ta được:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-a}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a^3}{[\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)}+a^2]g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f_1(x)}{[\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)}+a^2](x-x_0)g_1(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{[\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)}+a^2]g_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{(2a^2+a).g_1(x_0)}$$

Phương pháp được mở rộng cho giới hạn dạng:

1. Với giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)}+a}{g(x)}$$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = -a$ và $g(x_0) = 0$

thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x_0)} - a\sqrt[3]{f(x_0)} + a^2$.

2. Với các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{f(x)}\pm a}{\sqrt[3]{g(x)}\pm b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt[3]{g(x_0)} = \mp b$.

b. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{f(x)}\pm a}{\sqrt{g(x)}-b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt{g(x_0)} = b$.

c. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{f_1(x)}\pm\sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt{g_1(x)}-\sqrt{g_2(x)}}$, trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp\sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt{g_1(x_0)} = \sqrt{g_2(x_0)}$.

d. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt[3]{f_1(x)}\pm\sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{g_1(x)}\pm\sqrt[3]{g_2(x)}}$,

trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp\sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt[3]{g_1(x_0)} = \mp\sqrt[3]{g_2(x_0)}$.

Thực hiện phép nhân liên hợp cho cả tử số và mẫu số.

**Thí dụ 7.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}$.   b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}+\dfrac{x^2-x}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)}+x-2}{\dfrac{x-1}{[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1](x-1)}+x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x-2}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1}+x} = 0.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)}+\frac{x}{x[4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}]}\right\}=\frac{13}{12}.$$

**Thí dụ 8.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1-1}{[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1](x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}=\frac{2}{3}.$$

*Cách 2*: Đặt t = $\sqrt[3]{2x-1}$, ta được:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\dfrac{t^3+1}{2}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

b. Đặt t = $\sqrt[5]{5x+1}$, ta được :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t-1}{\dfrac{t^5-1}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{t^4+t^3+t^2+t+1}=1.$$

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đã được biết tới một giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Từ đó, suy ra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x.\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}\right)=1.1=1.$$

Mở rộng:

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1 \text{ và } \lim_{x\to x_0}\frac{\tan[f(x)]}{f(x)}=1,\ \text{với } f(x_0)=0.$$

Tuy nhiên, việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

**Thí dụ 9.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan 2x}$.   b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\frac{x}{\tan 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\frac{2x}{\tan 2x}.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}.\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}.2\cos x\right)$$
$$= 4.$$

***Nhận xét***: Trong thí dụ trên:

- Ở câu a), bằng việc thêm vào x chúng ta nhận được hai dạng giới hạn cơ bản và cần lưu ý tan2x sẽ phải tương ứng với 2x.
- Ở câu b), chúng ta cần sử dụng một phép biến đổi lượng giác để chuyển $1 - \cos^2 2x$ thành $\sin^2 2x$. Ngoài ra, cũng có thể trình bày như sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}.\frac{4x}{\sin x}\right)=4.$$

**Thí dụ 10.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\tan 3x}{x}$.   b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

*Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan 3x}{x} =\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}\right) =\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}+\frac{3\tan 3x}{3x}\right)= 5.$$

b. Ta có:

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = \frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}.\frac{\sin x.}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4.(x/2)^2} = \frac{1}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong thí dụ trên:

- Ở câu a), chúng ta thực hiện phép tách để nhận được ***tổng*** của hai giới hạn cơ bản.
- Ở câu b), chúng ta không thể thực hiện phép tách, bởi nếu làm như vậy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{x^2}=(1-1).\infty=0.\infty$$

$$\text{hoặc }\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}.\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{x^2}\right)=1.\infty-1.\infty=\infty-\infty$$

cả hai đều là những dạng vô định và chúng ta không thể kết luận được gì.

**Thí dụ 11.** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 3x.\cos 5x}{x^2}$.  b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\cos 4x-\cos 3x.\cos 5x=\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos 4x-\cos 8x-\cos 2x)=\frac{1}{2}[(1-\cos 8x)+(1-\cos 2x)-2(1-\cos 4x)]$$

$$=\sin^2 4x+\sin^2 x-2\sin^2 2x.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 3x\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x+\sin^2 x-2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 4x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{2\sin^2 2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16\sin^2 4x}{(4x)^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{8\sin^2 2x}{(2x)^2}\right]$$

$$=16+1-8=9.$$

b. Ta có:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\sin^2\frac{x}{2}}=\pi\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\pi\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}} = \pi.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong thí dụ trên:

- Ở câu a), chúng ta cần sử dụng phép biến đổi tích thành tổng. Và từ đó, với việc định hướng biến đổi TS thành tổng của các hàm số sin chúng ta đã sử dụng ccông thức góc nhân đôi của hàm số cosin (cụ thể cos2x = 1 − 2sin$^2$x).
- Ở câu b), các em học sinh cần có kinh nghiệm về hàm số lượng giác lồng nhau.

**Thí dụ 12.** *Tính giới hạn* $L = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x).\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a = \frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

$$= \frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2x+\cos 2a} - \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} = \frac{-2\cos 2a(1-\cos 2x)}{(\cos 2x+\cos 2a)(1+\cos 2a)}$$

$$= \frac{-4\cos 2a.\sin^2 x}{(\cos 2x+\cos 2a)(1+\cos 2a)} = \frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x+\cos 2a)(1+\cos 2a)}.\sin^2 x.$$

Do đó:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x+\cos 2a)(1+\cos 2a)}.\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{-4\cos 2a}{(1+\cos 2a)^2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong thí dụ trên chúng ta đã cần sử dụng những phép biến đổi lượng giác phức tạp hơn rất nhiều. Và câu hỏi thường được đặt ra ở đây là "*Định hướng cách thực hiện trên như thế nào* ?", để trả lời chúng ta sẽ bắt đầu như sau:

- Không thể thực hiện phép tách, bởi nó không mang lại kết quả gì khi ứng với tan(a + x) cần có a + x và tan(a − x) cần có a − x. Và khi đó, sẽ nhận được dạng vô định $(\infty-\infty)$.
- Nếu sử dụng các phép biến đổi thuần tuý với hàm số tang sẽ khó có thể tạo ra được nhân tử chung tan$^2$x cho TS, bởi sự có mặt của số hạng tự do tan$^2$a.
- Từ nhận định trên, chúng ta khẳng định chỉ có thể làm xuất hiện nhân tử chung là sin$^2$x cho TS. Từ đó, dẫn đến việc biến đổi các hàm số tang về dạng sin và cos.

**Thí dụ 13.** *Tìm* $A = \lim_{x\to 1} F(x)$ *với* $F(x) = \dfrac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

✍ *Giải*

Viết lại giới hạn dưới dạng:

$$A = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x^3}-2\right)-\left(\sqrt[3]{x^2+7}-2\right)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}\right).$$

Trong đó:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{5-x^3-4}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = -\frac{3}{8}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+7-8}{\left(x^2-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+7}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+7}+4} = \frac{1}{12}.$$

Vậy, ta được:

$$A = -\frac{3}{8} - \frac{1}{12} = -\frac{11}{24}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên ta đã thêm bớt 2 vào tử thức của F(x). Ba câu hỏi đặt ra:

(1). Tại sao phải có số 2 ?

(2). Tại sao lại là số 2 ?

(3). Tìm số 2 như thế nào ?

Trả lời ba câu hỏi đó ta có phương pháp giải loại toán này.

Trả lời câu hỏi 3: Để tìm số 2, ta đưa ra thuật toán gọi số hạng vắng:

***Bước 1***: Với mọi $c \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{5-x^3}-c}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-c}{x^2-1}.$$

***Bước 2***: Trong các số c đó, ta tìm số c sao cho $x^2 - 1$ cùng nhân tử chung với:

$$f_1(x) = \sqrt{5-x^3} - c \text{ và } f_2(x) = \sqrt[3]{x^2+7} - c.$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi c là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} f_1(\pm 1) = 0 \\ f_2(\pm 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 2.$$

Đáp số c = 2 là câu trả lời cho câu hỏi 1 và 2.

**Thí dụ 14.** *Tính giới hạn*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

Ta đi xác định từng giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[\sqrt{1+2x}+(x+1)]x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1-3x}{[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}]x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}=1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

☞ ***Chú ý***: Rất nhiều học sinh khi gặp giới hạn trên chỉ sử dụng phương pháp hằng số vắng.

Trong các bài thi tuyển sinh, chúng ta thường gặp yêu cầu tính giới hạn của những hàm số không mẫu mực (kết hợp đại số và lượng giác).

**Thí dụ 15.** (ĐHGTVT – 98): *Tính giới hạn*: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{x}\right):\left(\frac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{\sqrt{3x+4}-2}{x}-1\right)$$

$$=\left(\frac{-2x}{x(1+\sqrt{2x+1})}+\frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3x}{x(\sqrt{3x+4}+2)}-1\right)$$

$$=\left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+2}-1\right).$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}} + \frac{\sin x}{x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} - 1\right) = 0.$$

## Dạng toán 1: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$

*Phương pháp áp dụng*

Để tính các giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$, ta lựa chọn một trong các cách sau:

*Cách 1*: (*Được sử dụng cho các phân thức đại số*): Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

*Cách 2*: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

*Bước 2:* Khẳng định:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L.$$

*Bước 3:* Kết luận $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

**Thí dụ 16.** *Tính các giới hạn*:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$.  b. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^3+11}{2x-7}$.

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}$.  d. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6+4x^2+x-2}{(x^3+2)^2}$

*Giải*

a. Chia cả tử và mẫu cho $x^3$, ta được :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-10}{9-3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{\frac{9}{x^3}-3} = 0.$$

b. Chia cả tử và mẫu cho $x^4$, ta được :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^3+11}{2x-7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{11}{x^4}}{\frac{2}{x^3}-\frac{7}{x^4}} = +\infty.$$

c. Chia cả tử và mẫu cho $x^6$, ta được :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\left(\frac{3}{x}+1\right)^2}{\left(\frac{2}{x}-1\right)\left(\frac{3}{x}-1\right)^2\left(\frac{4}{x}-1\right)^2} = 1.$$

d. Chia cả tử và mẫu cho $x^6$, ta được:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6+4x^2+x-2}{(x^3+2)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{2}{x^6}}{(1+\dfrac{2}{x^3})^2}=1.$$

**Tổng quát:** Giả sử $R(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0}$, với $a_n\neq 0$ và $b_m\neq 0$.

Ta có:

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty & \text{khi } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{khi } n=m\\ 0 & \text{khi } n<m\end{cases}.$$

*Chứng minh*

1. Nếu n > m. Khi đó:

$$|R(x)|=|x|^{n-m}\left|\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_0}{x^m}}\right|>|x|^{n-m}\left|\frac{a_n}{2b_m}\right| \text{khi } |x| \text{ đủ lớn.}$$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}|x|^{n-m}\left|\dfrac{a_n}{2b_m}\right|=\infty$, nên ta có $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\infty$.

2. Nếu n = m. Khi đó:

$$R(x)=\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_0}{x^m}}\to\frac{a_n}{b_m} \text{ khi } x\to\infty.$$

3. Nếu n < m. Khi đó:

$$|R(x)|=\frac{1}{|x|^{m-n}}\left|\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_0}{x^m}}\right|<\frac{1}{|x|^{m-n}}\left|\frac{2a_n}{b_m}\right| \text{khi } |x| \text{ đủ lớn.}$$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^{m-n}}\left|\dfrac{2a_n}{b_m}\right|=0$, nên ta có $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$.

**Thí dụ 17.** *Tính các giới hạn*:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$.  b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$.

✍ *Giải*

a. Ta có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Với x > 0, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}{\left(\frac{1}{x}-2\right)}=\frac{+\infty.2}{-2}=-\infty.$$

b. Ta có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Với x < 0, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{4}{x^4}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2|\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{1+\frac{4}{x}}=-\infty.$$

☞ ***Chú ý***: Như vậy, với dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ có chứa căn bậc chẵn dạng trên, chúng ta thực hiện rút bậc cao nhất của x ra, từ đó đưa ra ngoài căn với dấu trị tuyệt đối kèm theo. Khi đó, tuỳ thuộc tính chất âm, dương của nó để bỏ dấu trị tuyệt đối này.

**Thí dụ 18.** *Tính các giới hạn*:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$. b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$.

✍ *Giải*

a. Ta có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Với x < 0, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{10}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{10}{x}}=-2.$$

b. Ta có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Với x < 0, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}}{-3x-17}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{x\left(-3-\frac{17}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{-3-\frac{17}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

☞ ***Chú ý***: Với yêu cầu tìm giới hạn của hàm số chứa căn bậc chẵn khi x tiến tới ∞, thí dụ tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ các em học sinh cần thực hiện:

- Xác định lần lượt $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ và $L_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- So sánh $L_1$ và $L_2$ để kết luận về giới hạn của $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ có tồn tại hay không.

**Thí dụ 19.** *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

✍ *Giải*

Chia cả tử và mẫu cho x, với lưu ý :

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\begin{cases}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} & \text{khi } x>0\\ -\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Do đó ta xét hai trường hợp :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+2/x^2}}=1.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+2/x^2}}=-1.$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\neq\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\text{ không tồn tại.}$$

**<u>Dạng toán 2:</u> Giới hạn dạng $\infty - \infty$**

*Phương pháp áp dụng*

Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

**<u>Thí dụ 1.</u>** *Tính các giới hạn*:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.  b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=2.$$

**<u>Thí dụ 2.</u>** *Tính các giới hạn*:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right)$.  b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1}=+\infty.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}=-1.$$

**Thí dụ 3.** *Cho hàm số* :

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}.$$

*Tính các giới hạn* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, *từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

✍ *Giải*

Ta có :

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}}$$

$$=-2.$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}}$$

$$=2.$$

Vậy, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ không tồn tại.

## Dạng toán 8: Giới hạn dạng $1^\infty$, $0.\infty$, $\infty^0$

*Phương pháp áp dụng*

1. Đối với dạng $0.\infty$ và $\infty^0$, ta chọn một trong hai cách sau:
   *Cách 1*: Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản.
   *Cách 2*: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, với các bước:
   *Bước 1:* Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:
   $$g(x)\le f(x)\le h(x).$$
   *Bước 2:* Khẳng định:
   $$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=L$$
   $$\left(\text{hoặc }\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}h(x)=L\right).$$

*Bước 3:* Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L).$$

2. Đối với dạng $1^\infty$ cần nhớ các giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

**Thí dụ 1.** *Tính giới hạn* $\lim_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x\to(-1)^+}(x+1)(x^2-x+1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+}(x^2-x+1)\sqrt{\frac{x(x+1)^2}{x^2-1}} = \lim_{x\to(-1)^+}(x^2-x+1)\sqrt{\frac{x(x+1)}{x-1}} = 0.$$

**Thí dụ 2.** *Tính giới hạn* $L = \lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}} = (1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3} = e^3.$$

# §3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

## Dạng toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I

*Phương pháp áp dụng*

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm $x_0$, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) = L.$$

*Bước 2:* Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

*Bước 3:* Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

**Thí dụ 1.** a. *Xét tính liên tục của hàm số* $y = g(x)$ *tại* $x_0 = 2$, *biết*:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}.$$

b. *Trong biểu thức xác định* $g(x)$ *ở trên, cần thay số* 5 *bởi số nào để hàm số liên tục tại* $x_0 = 2$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$g(2) = 5, \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12,$$

như vậy, ta được $\lim_{x\to 2} g(x) \neq g(2)$.

Vậy, hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.

b. Nếu thay 5 bằng 12 thì hs sẽ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

**Thí dụ 2.** *Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm* $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$f(1) = a + 1, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2,$$

Vậy, ta có:

- Nếu:

$$2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim_{x\to 1} f(x),$$

thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- Nếu:

$$2 \neq a + 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \Leftrightarrow f(1) \neq 2 = \lim_{x\to 1} f(x),$$

thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

## Dạng toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II

*Phương pháp áp dụng*

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm $x_0$, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

*Bước 1:* Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

*Bước 2:* (*Liên tục trái*) Tính :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục trái.

*Bước 3:* (*Liên tục phải*) Tính :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục phải.

*Bước 4:* Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra lời kết luận.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng*:

a. *Hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$ *gián đoạn tại điểm* $x = 0$.

b. *Mỗi hàm số*:

$$g(x) = \sqrt{x-3} \quad \text{và} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{víi } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{víi } x > 1 \end{cases}$$

*liên tục trên tập xác định của nó.*

*Giải*

a. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 2) = 2 \text{ và } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Tức là, hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$.

b. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trước tiên, ta thấy hàm số liên tục với mọi $x \ne 1$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ta có:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-2} = -1,$$

$f(1) = -1$,

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Tức là, hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy, liên tục trên tập xác định của nó.

**Thí dụ 2.** *Cho hàm số*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

a. *Tìm* a *để* f(x) *liên tục trái tại điểm* x = 1.
b. *Tìm* a *để* f(x) *liên tục phải tại điểm* x = 1.
c. *Tìm* a *để* f(x) *liên tục trên* $\mathbb{R}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

a. Để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-x) = 1$ và $f(1) = a$.

Vậy, điều kiện là a = 1.

b. Để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = -1$ và $f(1) = a$.

Vậy, điều kiện là $a = -1$.

c. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ trước hết phải có

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -1$ (mâu thuẫn).

Vậy, không tồn tại a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

## Dạng toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng

*Phương pháp áp dụng*

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

*Bước 1:* Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.
*Bước 2:* Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.
*Bước 3:* Kết luận.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng*:

a. *Hàm số* $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$.

b. *Các hàm số* $f(x) = x^3 - x + 3$ *và* $g(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ *liên tục tại mọi điểm* $x \in \mathbb{R}$.

✍ *Giải*

a. Hàm số f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

b. Ta lần lượt có nhận xét:

- Hàm số f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số g(x) là hàm phân thức nên nó liên tục trên tập xác định (tức là trên $\mathbb{R}$).

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng*:

a. *Hàm số* $f(x) = \sqrt{8-2x^2}$ *liên tục trên đoạn* $[-2; 2]$.

b. *Hàm số* $f(x) = \sqrt{2x-1}$ *liên tục trên nửa khoảng* $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

✍ *Giải*

a. Hàm số xác định trên đoạn $[-2; 2]$.

Với $x_0 \in (-2; 2)$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{8-2x^2} = \sqrt{8-2x_0^2} = f(x_0).$$

Vậy, hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

Ngoài ra, sử dụng giới hạn một bên, ta chứng minh được:

- Hàm số f(x) liên tục phải tại điểm $x_0 = -2$.
- Hàm số f(x) liên tục trái tại điểm $x_0 = 2$.

Vậy, hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

b. Hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Với $x_0 \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{2x-1} = \sqrt{2x_0-1} = f(x_0).$$

Vậy, hàm số liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Ngoài ra, sử dụng giới hạn một bên, ta chứng minh được:

- Hàm số f(x) liên tục phải tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$.

Vậy, hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

**Thí dụ 3.** *Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên* **R** :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

*Giải*

Hàm số f(x) liên tục với mọi $x \neq 0$.

Xét tính liên tục của f(x) tại điểm x = 0.

Ta có :

$$\left|x.\cos\frac{1}{x^2}\right| = |x|.\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x\cos\frac{1}{x^2} \leq |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x.\cos\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Mặt khác f(0) = 0.

Do đó, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại điểm x = 0.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số thực **R**.

**Thí dụ 4.** *Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số* :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x \text{ khi } x < 1 \\ ax + 1 \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}.$$

*Giải*

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

1. Khi x < 1, ta có $f(x) = x^2 + x$ nên hàm số liên tục với x < 1.
2. Khi x > 1, ta có f(x) = ax + 1 nên hàm số liên tục với x > 1.
3. Khi x = 1, ta có :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax + 1) = a + 1.$$

$$f(1) = a + 1.$$

Do đó :

- Nếu a = 1 thì $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- Nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận :

- Nếu a = 1, hàm số liên tục trên toàn trục số.
- Nếu $a \neq 1$, hàm số liên tục trên $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$.

## Dạng toán 4: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm

*Phương pháp áp dụng*

Cho phương trình f(x) = 0, để chứng minh phương trình có k nghiệm trong [a, b], ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Chọn các số $a < T_1 < T_2 < ... < T_{k-1} < b$ chia đoạn [a, b] thành k khoảng thoả mãn :

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \quad ... \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

*Bước 2:* Kết luận về số nghiệm của phương trình trên đoạn [a, b].

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng phương trình* $x^5 + x - 1 = 0$ *có nghiệm trên khoảng* $(-1; 1)$.

✍ *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$f(-1).f(1) = -3.1 = -3 < 0$,

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng phương trình* $x^2\cos x + x.\sin x + 1 = 0$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng* $(0; \pi)$.

✍ *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x^2\cos x + x.\sin x + 1$ liên tục trên $(0; \pi)$.

Ta có:

$f(0).f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$,

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0 ; \pi)$.

**Thí dụ 3.** *Chứng minh rằng phương trình* $x^3 + x + 1 = 0$ *có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn* $-1$.

✍ *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-1).f(0) = -1.1 = -1 < 0$,

Vậy, phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$, do đó nó có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn $-1$.

**Thí dụ 4.** *Chứng minh rằng phương trình* $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$ *có ba nghiệm phân biệt thuộc* $(-7; 9)$.

✍ *Giải*

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$2t^3 - 6t + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-2) = -3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$, suy ra:

- $f(-2).f(0) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_1 \in (-2; 0)$, khi đó:
  $$t_1 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_1 = 1 - t_1^3 \text{ và } t_1 \in (1; 9).$$
- $f(0).f(1) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_2 \in (0; 1)$, khi đó:
  $$t_2 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_2 = 1 - t_2^3 \text{ và } t_2 \in (0; 1).$$
- $f(1).f(2) = -15 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_3 \in (1; 2)$, khi đó:
  $$t_3 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_3 = 1 - t_3^3 \text{ và } t_3 \in (-7; 0).$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm trên khoảng $(-7; 9)$.

**Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng với mọi* m *phương trình* $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ *luôn có một nghiệm dương.*

✍ *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$f(0) = -1 < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$,

suy ra :

$f(0).f(c) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $(0, c)$ ⇔ phương trình luôn có một nghiệm dương.

***Tổng quát***: *Chứng minh rằng phương trình*:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

*luôn có ít nhất một nghiệm.*

✍ *Chứng minh*

Xét hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét rằng:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, vậy tồn tại $x_1$ để $f(x_1) < 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, vậy tồn tại $x_2$ để $f(x_2) > 0$,

suy ra $f(x_1)\ f(x_2) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

## Dạng toán 5: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số

*Phương pháp áp dụng*

Sử dụng kết quả:

"*Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục và không triệt tiêu trên đoạn* $[a, b]$ *thì có dấu nhất định trên* $(a, b)$".

**Thí dụ 1.** *Xét dấu hàm số* $f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}$.

✍ *Giải*

Hàm số f(x) liên tục trên $[-4; \frac{1}{2}]$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Như vậy, trên các khoảng $[-4; 0)$ và $(0; \frac{1}{2}]$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(-1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in [-4; 0)$.
- Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0; \frac{1}{2}]$.

## C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

**Ví dụ 1:** *Chứng minh rằng dãy số* $(u_u)$ *với số hạng tổng quát* $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$ *có giới hạn* 0.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\left|\frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{\cos n}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \text{ và } \lim\frac{1}{n} = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

**Ví dụ 2:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$

b. $L = \lim\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + ... + \frac{n-1}{n^2+1}\right).$

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}...\frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}.\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+...+\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}(1+2+...+n-1)$$

$$= \frac{1}{n^2+1}.\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2(n^2+1)}$$

Từ đó, suy ra:

$$L = \lim\frac{n^2-n}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

**Ví dụ 3:** *Cho dãy số* $(u_n)$ *với* $u_n = \frac{n}{3^n}$.

a. *Chứng minh rằng* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ *với mọi* n.

b. *Chứng minh rằng* $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *với mọi* n.

c. *Chứng minh rằng dãy số* $(u_n)$ *có giới hạn* 0.

✍ *Giải*

a. Với mọi n ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right):\left(\frac{n}{3^n}\right) = \frac{n+1}{3n} \le \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}\text{, đpcm.}$$

b. Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh – *Học sinh tự làm*.

c. Từ kết quả câu b) ta có:

$$u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ và } \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

**Ví dụ 4:** *Cho dãy số* $(u_n)$ *xác định bởi*:

$$u_1 = 10 \text{ và } u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \text{ với mọi } n \ge 1.$$

a. *Chứng minh rằng dãy số* $(v_n)$ *xác định bởi* $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ *là một cấp số nhân*.

b. *Tìm* $\lim u_n$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{15}{4}}{u_n - \frac{15}{4}} = \frac{\frac{1}{5}u_n + 3 - \frac{15}{4}}{u_n - \frac{15}{4}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

từ đó, suy ra $(v_n)$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{5}$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$v_n = v_1.q^{n-1} = (u_1 - \frac{15}{4}).\frac{1}{5^{n-1}} = \frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4}.$$

Từ đó, ta được:

$$\lim u_n = \lim\left[\frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4}\right] = \frac{15}{4}.$$

**Ví dụ 5:** *Cho*:

$S = 1 + q + q^2 + \ldots$, với $|q| < 1$, $T = 1 + Q + Q^2 + \ldots$, với $|Q| < 1$,

$A = 1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots$

*Tính* A *theo* S *và* T.

✍ *Giải*

Với giả thiết $|q| < 1$, $|Q| < 1$ suy ra $|qQ| < 1$.

Khi đó:

$$S = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S}, \qquad T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T},$$

$$A = \frac{1}{1-qQ} = \frac{1}{1-\frac{S-1}{S}.\frac{T-1}{T}} = \frac{ST}{S+T-1}.$$

**Ví dụ 6:** *Cho một tam giác đều* ABC *cạnh* a. *Tam giác* $A_1B_1C_1$ *có các đỉnh là trung điểm các cạnh của* $\Delta ABC$, $\Delta A_2B_2C_2$ *có các đỉnh là trung điểm các cạnh của* $\Delta A_1B_1C_1$, ..., $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ *có các đỉnh là trung điểm các cạnh của* $\Delta A_nB_nC_n$, .... *Gọi* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *và* $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ *theo thứ tự là chu vi và diện tích của các* $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2, \ldots, \Delta A_nB_nC_n, \ldots$.

a. *Tìm giới hạn của các dãy số* $(p_n)$ *và* $(S_n)$.

b. *Tính các tổng*:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots \text{ và } S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots.$$

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có nhận xét:

- Với dãy số $(p_n)$ thì $p_2 = \frac{1}{2}p_1$, $p_3 = \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2^2}p_1$, ...

  Từ đó, ta dự đoán được:

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}}p_1 = \frac{3a}{2.2^{n-1}} = \frac{3a}{2^n} \text{ – \textit{Chứng minh bằng quy nạp}.}$$

  Do đó:

$$\lim p_n = \lim\frac{3a}{2^n} = 3a.\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

- Với dãy số $(S_n)$ thì $S_2 = \frac{1}{4}S_1$, $S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{4^2}S_1$, ...

  Từ đó, ta dự đoán được:

$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}}S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16.4^{n-1}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} \text{ – \textit{Chứng minh bằng quy nạp}.}$$

  Do đó:

$$\lim S_n = \lim\frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} = a^2\sqrt{3}.\lim\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0.$$

b. Ta lần lượt có nhận xét:

- Dãy số $(p_n)$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ và $p_1 = \frac{3a}{2}$ nên:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = \frac{p_1}{1-q} = 3a.$$

- Dãy số $(p_n)$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ và $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ nên:

$$S_1 + S_2 + ... + S_n + .... = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

**Ví dụ 7:** (ĐHQG/khối B – 97): *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1-|1+\sin 3x|}{\sqrt{1-\cos x}}\right|$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\left|\frac{1-|1+\sin 3x|}{\sqrt{1-\cos x}}\right| = \left|\frac{1-1-\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}}\right| = \frac{|\sin 3x|}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{|3\sin x - 4\sin^3 x|}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$= \frac{|(3-4\sin^2 x)\sin x|}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{|3-4\sin^2 x|\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{1+\cos x}.|3-4\sin^2 x|.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1-|1+\sin 3x|}{\sqrt{1-\cos x}}\right| = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\cos x}\,.|3-4\sin^2 x|\right) = 3\sqrt{2}.$$

**Ví dụ 8:** *Tính các giới hạn sau*:

a. (HVNH – 98): $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$.

b. (ĐHQG – 98): $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^6-3x+2}{(x-1)(x^3+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x-2}{x^3+\sqrt{3x-2}} = \frac{3}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, ở câu c) để tránh gặp phải một đa thức bậc 6 chúng ta có thể thực hiện theo cách:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1+1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) + \lim_{x\to 1}\frac{3-3x}{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$= 3 - \lim_{x\to 1}\frac{3}{1+\sqrt{3x-2}} = 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ngoài ra, ý tưởng này còn có tên là "*Phương pháp gọi hằng số vắng*" trong việc tìm giới hạn, và nó sẽ được trình bày ở phía sau.

**Ví dụ 9:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$. b. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1](x-1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$= 1.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} + \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(x+1)}+\lim_{x\to -1}x=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-1=-\frac{2}{3}.$$

**Ví dụ 10:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$.  b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-2004}{x}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1+\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u=\sqrt[4]{2x-1} \\ v=\sqrt[5]{x-2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{u^4-1}{2} \\ x-1=v^5-1\end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{x-1} = \frac{2(u-1)}{u^4-1} = \frac{2}{(u+1)(u^2+1)} \text{ và } x\to 1 \Leftrightarrow u\to 1.$$

$$\frac{\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1} = \frac{v+1}{v^5+1} = \frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1} \text{ và } x\to 1 \Leftrightarrow v\to -1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}=\lim_{u\to 1}\frac{2}{(u+1)(u^2+1)}+\lim_{v\to -1}\frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1}=\frac{7}{10}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-2004}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-x^2-2004+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(x^2+2004)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right]=-\frac{4008}{7}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, ở câu b) chúng ta đã thêm bớt $x^2$ để làm xuất hiện đa thức P(x) = $x^2 + 2004$ ở tử thức, từ đó làm xuất hiện dạng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n},$$

đây là điểm mấu chốt của lời giải.

**Ví dụ 11:** *Tính giới hạn*:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}}.$$

✍ *Giải*

Gọi tử thức là T, ta có:

$$T=\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}+$$

$$+\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}+\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-1+1-\sqrt[4]{1-x}$$

$$=\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\,(\sqrt{1+x}-1)+\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}-1\right)+$$

$$+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-1\right)-(\sqrt[4]{1-x}-1).$$

Gọi mẫu thức là M, ta có:

$$M=\frac{3}{2}.2.\sqrt{1+\frac{x}{4}}-2\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-\sqrt[4]{1+x}$$

$$=3\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right)-2\left(\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-1\right)-(\sqrt[4]{1+x}-1).$$

Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}}=\lim_{x\to 1}\frac{T}{M}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{T}{x}}{\frac{M}{x}}=\frac{1}{\frac{5}{24}}=\frac{24}{5}.$$

**Ví dụ 12:** *Tính các giới hạn sau*:

a. (ĐHQG/khối D – 99): $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$

b. (ĐHDL Hải Phòng/Khối A – 2000): $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\tan(x-1)}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}} = 5.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\tan(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{\tan(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{\dfrac{\tan(x-1)}{x-1}} = -2.$$

**Ví dụ 13:** (ĐHAN/Khối A – 2000): *Tính giới hạn*:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{98}{83}\left(\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right).$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$1 - \cos3x\cos5x\cos7x = 1 - \frac{1}{2}(\cos8x + \cos2x)\cos7x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos8x\cos7x + \cos2x\cos7x)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\cos15x + \cos x + \cos9x + \cos5x)$$

$$= \frac{1}{4}[(1-\cos15x) + (1-\cos x) + (1-\cos9x) + (1-\cos5x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sin^2\frac{15x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{9x}{2} + 2\sin^2\frac{5x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{15x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{9x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}\right).$$

Do đó:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{98}{83}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{15x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{9x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 7x}$$

$$= \frac{98}{83}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{15x}{2}}{\left(\frac{15x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2\frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{(7x)^2}{\sin^2 7x}\cdot\frac{1}{(7)^2}$$

$$= \frac{98}{83}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{(7)^2} = 1.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong thí dụ trên thực chất chúng ta chỉ cần sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và công thức góc nhận đôi của cos. Tuy nhiên, các em học sinh cần thận trong trong tính toán.

**Ví dụ 14:** *Tính các giới hạn sau*:

a. (ĐHHH/Đề 1 – 97): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

b. (ĐHHH – 2000): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right] = 0.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\,\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2.4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right] = \frac{1}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta cần thực hiện phép nhân liên hợp trước khi sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chuyển chùng về dạng cơ bản.

Với giới hạn dạng:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f_2(x)}{g(x)},\ \text{trong đó } f_1(x_0) = f_2(x_0) = c \text{ và } g(x_0) = 0.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách:

***Cách 1***: (***Chèn hằng số vắng***): Ta thực hiện việc thêm hằng số vắng c (với $f_1(x_0) = f_2(x_0) = c$) vào biểu thức của giới hạn, ta được:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-c+c-f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-c}{g(x)} + \lim_{x\to x_0}\frac{c-f_2(x)}{g(x)}.$$

***Cách 2***: (***Chèn hàm số vắng***): Ta thực hiện việc thêm hàm số vắng f(x) (với $f(x_0) = c$) vào biểu thức của giới hạn, ta được:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f(x)+f(x)-f_2(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)-f(x)}{g(x)} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f_2(x)}{g(x)}.$$

**Ví dụ 15:** (ĐHQG/Khối A – 97): *Tính giới hạn* $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} + \frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} + \frac{x}{x\left[4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right]}\right\} = \frac{13}{12}.$$

**Ví dụ 16:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}$.  b. (ĐHTM – 99): $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-4x^2+x+3}{(\sqrt{x+3}+2x)\tan(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-4x-3}{\sqrt{x+3}+2x}\cdot\frac{x-1}{\tan(x-1)}$$

$$= -\frac{7}{4}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

*Cách 1*: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}.\left(1+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = 1.$$

*Cách 2*: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right] = 1.$$

**Ví dụ 17:** *Tính các giới hạn sau*:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.　　　b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^3+x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2(2x^3+x)}{x^5-x^2+3}} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}}} = -\sqrt{2}.$$

**Ví dụ 18:** *Tính giới hạn* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right).\tan x$.

✍ *Giải*

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2}-x$ suy ra $x = \dfrac{\pi}{2}-t$. Nhận xét khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ thì $t\to 0$.

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\tan x = \lim_{t\to 0} t.\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \lim_{t\to 0} t.\cot t = \lim_{t\to 0} t.\frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

**Ví dụ 19:** (HVKTMM – 99): *Tính giới hạn* $L = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x+1},$$

đặt $\frac{1}{t} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = t - 1$.

Nhận xét khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$.

Vậy, ta được:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(t-1)+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2t-1}{t}}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2t-1}{t}} = e^2.$$

**Ví dụ 20:** *Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số*:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}.$$

*Giải*

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

4. Khi $x < 1$, ta có $f(x) = x^2 + x$ nên hàm số liên tục với $x < 1$.
5. Khi $x > 1$, ta có $f(x) = ax + 1$ nên hàm số liên tục với $x > 1$.
6. Khi $x = 1$, ta có:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + x) = 2\ ; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax + 1) = a + 1.$$

$f(1) = a + 1$.

Do đó:

- Nếu $a = 1$ thì $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- Nếu $a \ne 1$ thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận:

- Nếu $a = 1$, hàm số liên tục trên toàn trục số.
- Nếu $a \ne 1$, hàm số liên tục trên $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$.

**Ví dụ 21:** *Chứng minh rằng với mọi* m *phương trình*:

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \qquad (1)$$

*luôn có nghiệm.*

*Giải*

Điều kiện $x \ne \frac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x - \cos x - m\sin x.\cos x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x.\cos x$ liên tục trên đoạn $\frac{\pi}{2}$.

Ta có:

$$f(0) = -1 < 0 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0.$$

Vậy phương trình f(x) = 0 luôn có một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

**Ví dụ 22:** *Xét dấu hàm số* $f(x) = 2 + \cos x - 2\tan\frac{x}{2}$ *trên* $(0; \pi)$.

✍ *Giải*

Hàm số f(x) liên tục trên $(0; \pi)$.

Giải phương trình f(x) = 0 với ẩn phụ $t = \tan\frac{x}{2}$, suy ra $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có:

$$2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy, trên các khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ và $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Vì $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.