CHƯƠNG 2 – TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

1. QUY TẮC CỘNG

Quy tắc cộng: *Giả sử một công việc có thể tiến hành theo một trong* k *phương án* A_1, A_2, ..., A_k. *Nếu:*

- *Phương án* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Phương án* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Phương án* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1 + n_2 + ... + n_k$ *cách.*

Biểu diễn dưới dạng tập hợp: Quy tắc cộng thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

1. Nếu A, B là hai tập hữu hạn, không giao nhau, thì:
$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right|.$$
2. Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là k tập hữu hạn, từng đôi một không giao nhau, thì:
$$\left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + ... + \left|A_k\right|.$$
3. Nếu A, B là là hai tập hữu hạn và $A \subseteq B$, thì:
$$\left|\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k\right| = \left|B \setminus A\right| = \left|B\right| - \left|A\right|.$$

2. QUY TẮC NHÂN

Quy tắc nhân: *Giả sử một công việc* A *bao gồm* k *công đoạn* $A_1, A_2, ..., A_k$. *Nếu:*

- *Công đoạn* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Công đoạn* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Công đoạn* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1.n_2...n_k$ *cách.*

Biểu diễn quy tắc nhân dưới dạng tập hợp: Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ *là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề – các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề – các* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ *được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của* A_1 *một phần tử của* A_2*, ..., một phần tử của* A_m. *Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức:*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1| . |A_2| ... |A_m|.$$

3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần . Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là nguyên lý bù trừ.

Biểu diễn dưới dạng tập hợp: Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý bù trừ bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của A_1 còn T_2 là việc chọn một phần tử của A_2.

- Có $|A_1|$ cách làm việc T_1
- Có $|A_2|$ cách làm việc T_2.

Số cách làm hoặc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc T_1 hoặc T_2, và có $|A_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc T_1 và T_2 nên chúng ta có:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

II. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

1. HOÁN VỊ

__**Định nghĩa 1**__: *Cho tập hợp* A, *gồm* n *phần tử* ($n \geq 1$). *Một cách sắp thứ tự* n *phần tử của tập hợp* A *được gọi là một hoán vị của* n *phần tử đó*.

__**Định lí 1**__: *Nếu kí hiệu số hoán vị của* n *phần tử là* P_n, *thì ta có*:

$$P_n = n! = 1.2.3\ldots(n-1).n.$$

2. CHỈNH HỢP

__**Định nghĩa 2**__: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một bộ gồm* k ($1 \leq k \leq n$) *phần tử sắp thứ tự của tập hợp* A *được gọi là một chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

☞ ***Nhận xét***:

1. Hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi: hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này mà không là phần tử của chỉnh hợp kia, hoặc các phần tử của hai chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.
2. Bộ k phần tử có kể thứ tự được hiểu như sau: giả sử a, b là hai bộ k phần tử của tập E

   $$a = (a_1, a_2,..., a_k) \text{ và } b = (b_1, b_2,..., b_k)$$

   - a, b được coi là có kể thứ tự nếu:

     $$a = b \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{1,k}.$$

   - a, b được coi là không kể thứ tự nếu:

     $$a = b \Leftrightarrow \text{mỗi } a_i \text{ trùng với một } b_j \text{ nào đó } i, j = \overline{1,k}.$$

Định lí 2: *Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử là* A_n^k, *thì ta có*:

$$A_n^k = n.(n - 1)\ldots(n - k + 1).$$

☞ ***Chú ý***:

1. Ta có thể viết A_n^k theo cách khác:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n\,!}{(n\text{-}k)\,!}$$

2. Nếu k = n thì:

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n.$$

Như vậy, một chỉnh hợp n chập n được gọi là một hoán vị của n phần tử.
Từ đó, suy ra:

$$A_n^n = A_n^k \,.\, A_{n-k}^{n-k}, \text{ với mọi } 1 \le k \le n.$$

Kết quả này được phát biểu là " *Số các hoán vị của n phần tử phân biệt bằng số các chỉnh hợp n chập r của các phần tử đó, nhân với số các hoán vị của (n – r) phần tử còn lại* ".

3. TỔ HỢP

Định nghĩa 3: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một tập con của* E, *gồm* k *phần tử phân biệt* (1 ≤ k ≤ n), *được gọi là một tổ hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

Định lí 3: *Nếu kí hiệu số tổ hợp chập* k *của* n *phần tử là* C_n^k, *thì ta có*:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, \qquad (1)$$

với $0 \le k \le n$ và quy ước $C_n^0 = 1$.

Từ kết quả của định lí 3 suy ra:

1. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, với $0 \le k \le n$. (2)
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, với $0 \le k \le n$. (3)
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, với $0 \le k \le n$. (4)

III. NHỊ THỨC NIU – TƠN

1. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Ở lớp 8 chúng ta đã được làm quen với các hằng đẳng thức:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0\, a^{2-0}b^0 + C_2^1\, a^{2-1}b^1 + C_2^2\, a^0b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0\, a^{3-0}b^0 + C_3^1\, a^{3-1}b^1 + C_3^2\, a^{3-2}b^2 + C_3^3\, a^0b^3.$$

Tổng quát: Với mọi cặp số a, b và mọi số n nguyên dương, ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \qquad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k .$$

Công thức trên được gọi là ***công thức nhị thức Niu − tơn*** (gọi tắt là ***nhị thức Niu − tơn***)

NHẬN XÉT CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIUTƠN

1. Số các số hạng ở bên phải của công thức bằng n + 1, n là số mũ của nhị thức ở vế trái.
2. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
3. Số hạng tổng quát có dạng:

   $$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k, \text{ với } k = 0, 1, \ldots, n.$$

   đó là số hạng thứ k + 1 trong sự khai triển của nhị thức $(a+b)^n$.

   Như vậy, với yêu cầu "*Tìm hệ số của* $a^{n-k}b^k$" thì cầu trả lời là C_n^k.
4. Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau vì:

   $$C_n^k = C_n^{n-k},\ 0 \le k \le n.$$

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

Dạng 1: Thay a = 1 và b = x vào (1), ta được:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (2)$$

Dạng 2: Thay a = 1 và b = −x vào (1), ta được:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k x^k + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n. \qquad (3)$$

Khi đó:

- Thay x = 1 vào (2), ta được:

  $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

- Thay x = 1 vào (3), ta được:

  $$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

2. TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của khai triển Niutơn của nhị thức $(a + b)^n$ có thể được sắp xếp thành tam giác sau đây (gọi là *tam giác Pascal*):

n = 0							1						
n = 1						1		1					
n = 2					1		2		1				
n = 3				1		3		3		1			
n = 4			1		4		6		4		1		
n = 5		1		5		10		10		5		1	
n = 6	1		6		15		20		15		6		1

…

Như vậy, dựa vào bảng ta có:

$C_4^1 = C_4^3 = 4,\ C_4^2 = 6.$

$C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$ (chúng ta đã từng được biết $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$).

IV. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. KHÔNG GIAN XÁC SUẤT

Định nghĩa: (*Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu*):

a. Một ***phép thử ngẫu nhiên*** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:
   - Có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
   - Kết quả của nó không dự đoán trước được.
   - Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

   Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

b. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô – mê – ga).

2. BIẾN CỐ

Định nghĩa: (*Biến cố liên quan đến phép thử*): Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu Ω của phép thử đó. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một ***kết quả thuận lợi*** cho A.

- *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.
- *Biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Biến cố không được mô tả bởi tập ∅ và được kí hiệu là ∅.

3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất: Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan tới phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A) được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}, \qquad (1)$$

trong đó $|\Omega_A|$ và $|\Omega|$ lần lượt là số phần tử của tập Ω_A và Ω.

☞ ***Chú ý***:

1. Từ định nghĩa trên suy ra:
   - $0 \le P(A) \le 1$.
   - $P(\Omega) = 1$ và $P(\varnothing) = 0$.
2. Việc tính xác suất của biến cố A được thực hiện theo các bước:

   Bước 1. Thực hiện hai phép đếm:
   - Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.
   - Đếm số phần tử của tập Ω_A, tức là đếm số kết quả thuận lợi cho A.

   Bước 2. Sử dụng công thức (1) để tính P(A).

<u>Định nghĩa thống kê của xác suất</u>: *Xét phép thử* T *và biến cố* A *liên quan tới phép thử đó. Ta tiến hành lặp đi lặp lại* N *phép thử* T *và thống kê xem biến cố* A *xuất hiện bao nhiêu lần.*

- *Số lần xuất hiện biến cố* A *được gọi l*à ***tần số*** *của* A *trong* N *lần thực hiện phép thử* T.
- *Tỉ số giữa tần số của* A *với số* N *được gọi là* ***tần suất*** *của* A *trong* N *lần thực hiện phép thử* T.

Khi số lần thử N *càng lớn thì tần xuất của* A *càng gần với một số xác định, số đó được gọi là* ***xác suất của* A *theo nghĩa thống kê***.

V. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

1. QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố hợp: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là ***hợp của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi:

- Ω_A là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A,
- Ω_B là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho B,

thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là ***hợp của* k *biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố xung khắc: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Quy tắc cộng xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc với nhau thì xác suất để ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra là:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

Định nghĩa biến cố đối: Cho biến cố A khi đó biến cố "không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

☞ ***Chú ý***: Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

Định lí: Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố giao: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là ***giao của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2A_k$, được gọi là ***giao của*** k ***biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố độc lập: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. k biến cố này được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các biến cố còn lại.

☞ ***Nhận xét***: Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

Quy tắc nhân xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì xác suất để A và B xảy ra là:
   $P(AB) = P(A).P(B)$.
2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau thì:
   $P(A_1A_2A_k) = P(A_1).P(A_2).P(A_k)$.

VI. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

1. KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Định nghĩa: *Đại lượng X được gọi là một **biến ngẫu nhiên rời rạc** nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó, và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.*

2. PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Khi đó bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

trong đó $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, ..., n$.

☞ ***Lưu ý***: Trong bảng trên luôn có $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

3. KÌ VỌNG

Định nghĩa: *Cho* X *là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. ***Kì vọng*** *của* X, *kí hiệu là* E(X) *là một số được tính theo công thức*:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k\ ,$$

trong đó $p_k = P(X = x_k)$ *với* k = 1, 2, ..., n.

Ý nghĩa: E(X) là một con số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.

4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Định nghĩa: Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

a. ***Phương sai*** của X, kí hiệu là V(X) là một số được tính theo công thức:

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k\ ,$$

trong đó $p_k = P(X = x_K)$ với k = 1, 2, ..., n và $\mu = E(X)$.

b. Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$ được gọi là ***độ lệch chuẩn*** của X. Ta có:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}\ .$$

Ý nghĩa: V(X) là một số không âm, nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này cành lớn.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Dạng toán 1: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm số phương án

Phương pháp áp dụng

1. Để sử dụng quy tắc cộng trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Phân tách các phương án thành k nhóm độc lập với nhau: $H_1, H_2,..., H_k$.

   Bước 2: Nếu:
   - H_1 có n_1 cách khác nhau.

   ...
   - H_k có n_k cách khác nhau.

   Bước 3: Khi đó, ta có tất cả $n_1 + ... + n_k$ phương án.

2. Để sử dụng quy tắc nhân trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách một hành động H thành k công việc nhỏ liên tiếp:

$H_1,\ldots, H_k$.

Bước 2: Nếu ta có:

- n_1 cách khác nhau để thực hiện H_1.

...

- Một khi thực hiện xong $H_1,\ldots, H_{k-1}$, ta có n_k cách thực hiện H_k.

Bước 3: Khi đó ta có tất cả:

$n_1 \times\ldots\times n_k$ cách để thực hiện hành động H.

3. Trong nhiều trường hợp chúng ta cần kết hợp cả hai quy tắc để thực hiện bài toán đếm.

Thí dụ 1. *Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.*

a. *Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?*

b. *Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?*

✍ *Giải*

a. Để chọn một trong số 280 + 325 = 605 em đi dự dạ hội của học sinh thành phố ta có ngay 605 cách chọn.

b. Ta thấy:

- Có 280 cách chọn một em nam.
- Có 325 cách chọn một em nữ.

Vậy, có tất cả:

$280 \times 325 = 91000$ cách chọn một nam và một nữ đi dự trại hè.

Thí dụ 2. *Có 5 con đường nối 2 thành phố X và Y, có 4 con đường nối 2 thành phố Y và Z. Muốn đi từ X đến Z thì phải qua Y.*

a. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ X đến Z ?*

b. *Có bao nhiêu cách chọn đường đi và về từ X đến Z rồi về lại X bằng những con đường khác nhau?*

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

- Có 5 cách chọn đường đi từ X đến Y.
- Tiếp theo, có 4 cách chọn đường đi từ Y đến Z.

Do đó, có tất cả:

$5 \times 4 = 20$ cách chọn đường đi từ X đến Z qua Y.

b. Theo kết quả câu a) có 20 cách chọn đường đi.

Khi trở về:

- Từ Z đến Y chỉ còn 3 con đường để chọn, do đó có 3 cách.
- Tiếp theo, từ Y về lại X chỉ còn 4 cách chọn.

Do đó, có tất cả:

$3 \times 4 = 12$ cách chọn đường đi về từ Z đến X qua Y.

Vậy, có tất cả:

$20 \times 12 = 240$ cách

chọn đường đi và về trên tuyến $X \leftrightarrow Z$ qua thành phố Y bằng những con đường khác nhau.

Thí dụ 3. *Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu tới tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi bao nhiêu mật khẩu ?*

✍ *Giải*

Gọi P là tổng số mật khẩu có thể và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số mật khẩu dài, 6, 7, 8 ký tự.

Theo quy tắc cộng ta có:

$P = P_6 + P_7 + P_8$.

Bây giờ chúng ta sẽ tính P_6, P_7, P_8.

- Tính trực tiếp P_6 sẽ rất khó. Để tìm P_6 dễ hơn ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa và không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân số các xâu dài 6 ký tự là 36^6 và số các xâu không chứa các chữ số là 26^6. Vì vậy:

  $P_6 = 36^6 — 26^6 = 1867866560$.
- Hoàn toàn tương tự ta có:

  $P_7 = 36^7 — 26^7 = 70332353920$.

  $P_8 = 36^8 — 26^8 = 2612282842\ 880$.

Vậy, ta được:

$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2684\ 483063360$.

Dạng toán 2: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A

Phương pháp áp dụng

1. Sử dụng quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số gồm k chữ số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Một số gồm k chữ số hình thành từ tập A có dạng:

   $$\overline{\alpha_1...\alpha_k}\text{, với } \alpha_i \in A,\ i = \overline{1,k} \text{ và } \alpha_1 \neq 0.$$

   Bước 2: Đếm số cách chọn cho các α_i, $i = \overline{1,k}$ (không nhất thiết phải theo thứ tự), giả sử bằng n_i.

   Bước 3: Khi đó, số các số gồm k chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

   $n_1.n_2\ldots n_k$.
2. Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Chia tập các số cần đến thành các tập con H_1, H_2, … độc lập với nhau (không giao nhau).

Bước 2: Sử dụng quy tắc nhân đến số phần tử của các tập H_1, H_2, …, giả sử bằng k_1, k_2, …

Bước 3: Khi đó, số các số hình thành từ tập A bằng:

$$k_1 + k_2 + \ldots$$

Thí dụ 1. *Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?*

Giải

Một số gồm 2 chữ số có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2}$, với $\alpha_i \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $\alpha_1 \neq 0$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có:

$$4 \times 5 = 20 \text{ số.}$$

Thí dụ 2. *Cho tập* A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

a. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số gồm có* 9 *chữ số khác nhau* ?

b. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số gồm có* 9 *chữ số khác nhau và chia hết cho* 5 ?

c. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm có* 9 *chữ số khác nhau* ?

Giải

Một số 9 chữ số phân biệt được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2...a_9}, \text{ với } a_1 \in E,\ i = \overline{1,9} \text{ và } a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$

a. Ta có ngay a_1, a_2, …, a_9 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ A, do đó nó là một hoán vị của 9 phần tử. Vậy, từ A có thể lập được:

$P_9 = 9! = 36280$ số thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Số α chia hết cho 5, do đó:

- $a_9 = 5$, tức là có 1 cách chọn.
- a_1, a_2, …, a_8 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ A\{5} do đó nó là một hoán vị của 8 phần tử, do đó có P_8 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số gồm 9 chữ số phân biệt và chia hết cho 5 hình thành từ tập A, bằng:

$1.P_8 = 40320$ số.

c. Số α là số chẵn, do đó:

- $a_9 \in \{2, 4, 6, 8\}$, tức là có 4 cách chọn.
- a_1, a_2, …, a_8 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ A\{a_9} do đó nó là một hoán vị của 8 phần tử, do đó có P_8 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số chẵn gồm 9 chữ số phân biệt hình thành từ tập A, bằng:

$4.P_8 = 161280$ số.

Thí dụ 3. *Cho tập* $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

a. *Có thể lập được bao nhiêu số gồm* 3 *chữ số hình thành từ tập* A.

b. *Có thể lập được bao nhiêu số gồm* 3 *chữ số khác nhau hình thành từ tập* A.

✍ *Giải*

a. Một số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A có dạng $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A bằng:

$3.4.4 = 48$ số.

b. Một số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A\backslash\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$3.3.2 = 18$ số.

☞ ***Chú ý***: Ví dụ tiếp theo minh hoạ cho quy tắc cộng mở rộng.

Thí dụ 4. *Lớp toán rời rạc có* 25 *sinh viên giỏi tin học*, 13 *sinh viên giỏi toán và* 8 *sinh viên giỏi cả toán và tin học. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên, nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc giỏi tin học giỏi cả hai môn ?*

✍ *Giải*

Gọi A là tập các sinh viên giỏi tin học và B là tập các sinh viên giỏi toán học. Khi đó $A \cap B$ là tập các sinh viên giỏi cả toán và tin học.

Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn, nên ta suy ra số sinh viên trong lớp là $|A \cup B|$.

Do vậy:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 — 8 = 30$.

Thí dụ 5. *Bao nhiêu số nguyên không lớn hơn* 1000 *chia hết cho* 7 *hoặc* 11?

✍ *Giải*

Gọi A số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7, và B là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11. Khi đó $|A \cup B|$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11 và A∩B là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho cả 7 và 11.

Ta biết, trong số các số nguyên không lớn hơn 1000 có

- $\lfloor 1000/7 \rfloor$ số nguyên chia hết cho 7
- $\lfloor 1000/11 \rfloor$ chia hết cho 11.
- Vì 7 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số nguyên chia hết cho cả 7 và 11 là số nguyên chia hết cho 7.11. Số các số này là $\lfloor 1000/(7.11) \rfloor$.

Từ đó suy ra:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7.11} \right\rfloor$$

$$= 142 + 90 - 12 = 220.$$

Vậy, có 220 số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

Dạng toán 1: Thực hiện bài toán đếm

Phương pháp áp dụng

1. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Tất cả n phần tử đều có mặt.
   - Mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.
   - Có phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
2. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
   - Có phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
3. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu đặc trưng sau:
   - Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
   - Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

Thí dụ 1. *Cho tập* A = {3, 4, 5, 6, 7}.

a. *Từ* A *có thể lập được bao nhiêu số gồm* 5 *chữ số phân biệt* ?

b. *Tính tổng* S *của tất cả các số được tạo ra trong câu* a).

✍ *Giải*

a. Mỗi số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A ứng với chỉ một hoán vị của 5 phần tử của tập A, và ngược lại.

Vậy, số các số hình thành từ tập A bằng:

$P_5 = 5! = 720$ số.

b. Nhận xét rằng " *Ứng với mỗi số N thuộc tập hợp này, luôn tồn tại một và chỉ một số N□ sao cho tổng N + N□ = 111110* ". Do đó, có tất cả

$\frac{720}{2}$ = 360 cặp số (N, N') mà tổng bằng 111110.

Vậy, tổng S của tất cả các số tạo bởi hoán vị đã cho bằng:

S = 111110 x 360 = 39999600.

☞ ***Nhận xét***: Qua thí dụ trên chúng ta đã làm quen được với dạng toán "*Sử dụng hoán vị để thực hiện bài toán đếm*". Yêu cầu đặt ra ở đây với các em học sinh là hãy định hướng khi nào sử dụng hoán vị để giải.

Thí dụ 2. *Có* n *quả cầu trắng và* n *quả cầu đen, đánh dấu theo các số* 1, 2, 3,..., n. *Có bao nhiêu cách sắp xếp các quả cầu này thành dãy sao cho* 2 *quả cầu cùng màu không nằm cạnh nhau* ?

✍ *Giải*

Ta thấy ngay, có 2 khả năng:

- Các quả cầu trắng chiếm các vị trí lẻ, còn các quả cầu đen chiếm các vị trí chẵn.
- Các quả cầu trắng chiếm các vị trí chẵn, còn các quả cầu đen chiếm vị trí lẻ.

Trong mỗi trường hợp: có n! cách sắp xếp các quả cầu trắng (hoặc đen) nghĩa là có $(n!)^2$ cách sắp xếp.

Vậy số cách sắp xếp các quả cầu sao cho 2 quả cầu cùng màu không nằm cạnh nhau là $2(n!)^2$.

Thí dụ 3. *Tìm số hoán vị của* n *phần tử trong đó có* 2 *phần tử* a *và* b *không đứng cạnh nhau.*

✍ *Giải*

Trước hết, ta có số hoán vị của n phần tử là:

$P_n = n!$

Trong đó kể cả số hoán vị mà 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Ta đi xem có bao nhiêu cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau và dễ thấy rằng:

- Với b đứng bên phải a, khi đó ta có thể chọn cho a tất cả (n – 1) vị trí từ vị trí đầu tiên đến vị trí thứ (n – 1).
- Với a đứng bên phải b, cũng có (n – 1) cách chọn.

Do đó có 2(n – 1) cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau. Ứng với mỗi trường hợp chọn cặp (a, b), ta có (n – 2)! cách sắp xếp (n – 2) vật còn lại vào (n – 2) vị trí còn lại. Do đó, có tất cả:

$$2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$$

hoán vị n vật mà trong đó có 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Suy ra, số hoán vị của n phần tử trong đó 2 phần tử a và b không đứng cạnh nhau là:

$$n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!.$$

Áp dụng: Số các số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó 2 chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau là:

$5! - 2.4! = 120 - 48 = 72$ số.

☞ ***Chú ý***:

1. Thí dụ trên đã minh hoạ cho *hoán vị tròn*. Ta phát biểu bài toántổng quát:

   "*Mời n người khách ngồi vào xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi ?*"

   Khi đó:
   - Mời người khách danh dự vào chỗ danh dự.
   - Còn lại $(n - 1)$ người khách ngồi tuỳ ý vào $(n - 1)$ vị trí còn lại.

   Vậy, ta có:

   $(n - 1)!$ cách sắp xếp.

2. Để minh hoạ cho *hoán vị có lặp lại*, ta xét:

   Có n vật sắp xếp vào n vị trí và trong số n vật này có:
   - n_1 vật giống nhau,
   - n_2 vật khác giống nhau,
   - ....
   - n_k vật khác lại giống nhau.

   Số cách sắp xếp n vật nào vào n chỗ là:

   $$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Thí dụ 4. *Với các chữ số* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *ta có thể lập được bao nhiêu số gồm* 8 *chữ số trong đó chữ số* 1 *có mặt* 3 *lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng* 1 *lần*?

✍ *Giải*

Đây là số hoán vị 8 vật trong đó có 3 vật giống nhau (3 chữ số 1). Do đó, số các số thoả mãn là $\frac{8!}{3!}$.

Trong đó, kể cả những số có chữ số 0 tận cùng bên trái. Số các số này có thể xem là số hoán vị 7 vật có 3 vật được lặp lại $\frac{7!}{3!}$.

Do đó, số các số gồm 8 chữ số được viết từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần là:

$$\frac{8!}{3!} - \frac{7!}{3!} = \frac{8.7! - 7!}{3!} = \frac{7.7!}{3!} = 7.4.5.6.7 = 5880 \text{ số.}$$

Thí dụ 5. *Có bao nhiêu số tự nhiên có* 6 *chữ số và chia hết cho* 5 ?

✍ *Giải*

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập $A = \{0, 1,..., 9\}$ có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,6}$ và $a_1 \neq 0$.

Để số tìm được phải chia hết cho 5, ta thấy:

- $a_6 \in \{0, 5\}$ – có 2 cách chọn.

- $a_1 \neq 0$ – có 9 cách chọn.
- Tiếp theo, với các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 đều có 10 cách chọn.

Như vậy, ta được:

$$2 \times 9 \times 10^4 = 1800000 \text{ số.}$$

Thí dụ 6. *Cho tập* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số có* 6 *chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số* 5 ? *Trong các số đó, có bao nhiêu số không chia hết cho* 5 ?

✍ *Giải*

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}, \text{ với } a_i \in A, i = \overline{1,6} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j.$$

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta thấy:

- $5 \in \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ – có 6 cách chọn.
- Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho năm vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 5 của các phần tử của tập $A\backslash\{ 5\}$ – có 8 phần tử.

$$\Rightarrow \text{có } A_8^5 \text{ cách chọn.}$$

Như vậy, ta được:

$$6.A_8^5 = 40320 \text{ số.}$$

Trong các số trên, những số chia hết cho 5 khi $a_6 = 5$, tức là ta có A_8^5 số.

Vậy, số các số tìm thấy không chia hết cho 5 là:

$$6A_8^5 - A_8^5 = 5A_8^5 = 33600 \text{ số.}$$

Thí dụ 7. *Cho tập* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm* 5 *chữ số khác nhau* ?

✍ *Giải*

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_i \in A, i = \overline{1,5} \text{ và } \alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j.$$

Để số tìm được là số chẵn, điều kiện là $a_5 \in \{0, 2, 4\}$. Ta đi xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu $a_5 = 0$ – có 1 cách chọn.

Khi đó, mỗi bộ (a_1, a_2, a_3, a_4) ứng với một chỉnh hợp chập 4 của các phần tử của tập $A\backslash\{0\}$ (có 5 phần tử) nên có A_5^4 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.A_5^4$ số.

Khả năng 2: Nếu $a_5 \in \{ 2, 4\}$ – có 2 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0, a_5\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- Mỗi bộ (a_2, a_3, a_4) ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập $A\backslash\{ a_5, a_1\}$ (có 4 phần tử) nên có A_4^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $2.4.A_4^3$ số.

Khi đó, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$1.A_5^4 + 2.4.A_4^3 = 120 + 192 = 312$ số.

Thí dụ 8. *Cho tập* A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu được bao nhiêu số gồm* 5 *chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số* 5 ?

✍ *Giải*

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,5}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta đi xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu $a_1 = 5$ – có 1 cách chọn.

Khi đó, mỗi bộ (a_2, a_3, a_4, a_5) ứng với một chỉnh hợp chập 4 của các phần tử của tập A\{5} – có 6 phần tử.

$\Rightarrow$ có A_6^4 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1.A_6^4$ số.

Khả năng 2: Nếu $5 \in \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ – có 4 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập A\{0, 5} - có 5 phần tử

  $\Rightarrow$ có 5 cách chọn.

- Mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập A\{ 5, a_1} – có 5 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_5^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $4.5.A_5^3$ số.

Khi đó, số các số gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 5 hình thành từ tập A bằng:

$1.A_6^4 + 4.5.A_5^3 = 6.5.4.3 + 20.5.4.3 = 1560$ số.

☞ ***Chú ý***: Khi đã nắm bắt được bản chất của vấn đề chúng ta có thể trình bày một bài toán đếm theo những lập luận đơn giản hơn.

Thí dụ 9. *Cho tập* A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số gồm* 5 *chữ số khác nhau mà mỗi số luôn có mặt hai chữ số* 1 *và* 7 ?

b. *Trong các số tìm được ở câu* a) *có bao nhiêu số mà hai chữ số* 1 *và* 7 *đứng kề nhau, chữ số* 1 *bên trái chữ số* 7 ?

✍ *Giải*

Một số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,5}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

a. Nhận xét rằng:

- Có A_5^2 cách chọn chữ số 1 và chữ số 7 vào 5 vị trí.
- Có 5 cách chọn chữ số tận cùng bên trái (loại các chữ số 0, 1 và 7).
- Có A_5^2 cách chọn 2 trong 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại.

Do đó, số các số phải tìm là:

$A_5^2 . 5. A_5^2 = 4.5.5.20 = 2000$ số.

b. Nhận xét rằng " *Số cách chọn 2 chữ số 1 và 7 đứng kề nhau, mà chữ số 1 đứng bên trái chữ số 7, trong 1 dãy có 5 vị trí là 4 cách* ".

Ta sẽ xét 2 khả năng sau:

Khả năng 1: Chữ số 1 đứng tận cùng bên trái (hàng chục ngàn) lúc đó chữ số 7 sẽ đứng ở hàng ngàn.

Mỗi bộ số dành cho ba vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập A\{ 1, 7} (có 6 phần tử) nên có A_6^3 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $1. A_6^3$ số.

Khả năng 2: Chữ số 1 đứng ở vị trí khác, tức là có thể ở vị trí hàng ngàn, hàng trăm, hàng chục – có 3 cách chọn.

Tiếp theo:

- a_1 được chọn từ tập A\{0, 1, 5} (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.
- Mỗi bộ số dành cho hai vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập A\{ 1, 7, a_1} (có 5 phần tử) nên có A_5^2 cách chọn.

Như vậy, trong khả năng này, ta được $3.5. A_5^2$ số.

Khi đó, số các số cần tìm bằng:

$1. A_6^3 + 3.5. A_5^2 = 420$ số.

Thí dụ 10. *Cho tập* A = {0, 2, 4, 6, 8}. *Từ tập* A *có thể lập được bao nhiêu số gồm* 3 *chữ số khác nhau* ?

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Sử dụng quy tắc nhân kết hợp với khái niệm chỉnh hợp.

Một số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,3}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Trong đó:

- a_1 được chọn từ tập A\{0} - có 4 phần tử ⇒ có 4 cách chọn.
- Mỗi bộ (a_2, a_3) ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập A\{a_1} – có 4 phần tử ⇒ có A_4^2 cách chọn.

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$4.\ A_4^2 = 48$ số.

Cách 2: Sử dụng khái niệm chỉnh hợp cùng với phép loại bỏ.

Ta thấy ngay, mỗi số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử

Do đó, từ tập A có thể lập được:

$A_5^3 = 5.4.3 = 60$ số gồm 3 chữ số phân biệt.

Trong đó, kể cả những số có chữ số tận cùng bên trái (chữ số hàng trăm) là chữ số 0, ta cần phải loại đi. Có thể xem những số này là những số gồm 2 chữ số khác chữ số 0 chọn từ 4 chữ số 2, 4, 6, 8. Đó chíng là số chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử:

$A_4^2 = 4.3 = 12.$

Khi đó, số các số gồm 3 chữ số phân biệt hình thành từ tập A bằng:

$A_5^3 - A_4^2 = 60 - 12 = 48$ số.

Thí dụ 11. *Với chữ số* 1, 2, 3, 4, 5 *ta có thể lập được bao nhiêu số gồm* 8 *chữ số trong đó có chữ số* 1 *có mặt đúng ba lần, chữ số* 2 *có mặt đúng* 2 *lần và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng* 1 *lần*?

Giải

Đây là số hoán vị 8 vật trong đó có 3 vật giống nhau (3 chữ số 1) có 2 vật khác lại giống nhau (2 chữ số 2). Do đó, số các số thoả mãn là:

$$\frac{8!}{3!2!} = 3360 \text{ số.}$$

Thí dụ 12. *Cho các chữ số* 1, 2,3, 4, 5. *Có bao nhiêu số gồm* 5 *chữ số khác nhau trong đó* 2 *chữ số* 1 *và* 2 *không đứng cạnh nhau*?

Giải

Số gồm 5 chữ số khác nhau được viết từ 5 chữ số đã cho là số hoán vị của 5 vật: $P_5 = 5! = 120$ Số.

Có bao nhiêu cách chọn cặp số (1, 2) đứng cạnh nhau?

Giả sử chữ số 1 đứng bên phải chữ số 2: có 4 cách chọn. Cũng có 4 cách chọn chữ số 2 đứng bên phải chữ số 1. Do đó có 8 cách chọn cặp số (1, 2) đứng cạnh nhau. Ứng với mỗi cặp số (1, 2), ta có $3! = 6$ cách chọn 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn lại. Như vậy có tất cả $8.6 = 48$ số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó 2 chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

Vậy số các số gồm 5 chữ số khác nhau được viết từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 đã cho trong đó 2 chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau là:

$120 - 48 = 72$ số

Thí dụ 13. *Với các chữ số* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *ta có thể lập được bao nhiêu số gồm* 8 *chữ số trong đó chữ số* 1 *có mặt* 3 *lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng* 1 *lần*?

✍ *Giải*

Đây là số hoán vị 8 vật trong đó có 3 vật giống nhau (3 chữ số 1). Do đó, số các số thoả mãn là:

$$\frac{8!}{3!}$$

Trong đó, kể cả những số có chữ số 0 tận cùng bên trái. Số các số này có thể xem là số hoán vị 7 vật có 3 vật được lặp lại:

$$\frac{7!}{3!}.$$

Do đó số các số gồm 8 chữ số được viết từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần là:

$$\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=\frac{8.7!-7!}{3!}=\frac{7.7!}{3!}=7.4.5.6.7=5880 \text{ số.}$$

Thí dụ 14. *Một dạ tiệc có* 10 *nam và* 6 *nữ giỏi khiêu vũ. Người ta chọn có thứ tự* 3 *nam và* 3 *nữ để ghép thành* 3 *cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn*?

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

- Chọn 3 nam trong 10 nam. Vì 3 người này có thể đổi vị trí cho nhau nên số cách chọn là số chỉnh hợp chập 3 của 10, ta được:

$$A_{10}^3=\frac{10\ !}{(10\text{-}3)\ !}=\frac{10\ !}{7\ !}=8.9.10=720 \text{ cách.}$$

- Tương tự: số cách chọn 3 trong 6 nữ là:

$$A_6^3=\frac{6\ !}{3\ !}=4.5.6=120 \text{ cách.}$$

Vậy, số cách chọn 3 cặp là:

$$A_{10}^3.A_6^3 = 86400.$$

Thí dụ 15. *Một cái hộp đựng* 7 *quả cầu trắng và* 3 *quả cầu đỏ. Ta lấy ra* 4 *quả cầu.*

a. *Hỏi có thể có bao nhiêu cách* ?

b. *Trong đó có bao nhiêu cách lấy* 2 *quả cầu đỏ* ?

c. *Có bao nhiêu cách lấy nhiều nhất* 2 *quả cầu đỏ* ?

d. *Ít nhất là* 2 *quả cầu đỏ* ?

✍ *Giải*

a. Mỗi cách lấy ra 4 quả cầu trong số 7 quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 7 phần tử. Do đó, số cách lấy bằng:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ cách.}$$

b. Ta có:

- Với 3 quả cầu đỏ lấy 2 quả, do đó có C_3^2 cách
- Với 7 quả cầu trắng lấy 2 quả, do đó có C_7^2 cách.

Vậy, có tất cả:

$$C_3^2.C_7^2 = 3.21 = 63 \text{ cách.}$$

c. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 1 đỏ và 3 trắng, khi đó có $C_3^1.C_7^3$ cách.
- Chọn 4 trắng, khi đó có C_7^4 cách.

Vậy, có tất cả:

$$C_3^2.C_7^2 + C_3^1.C_7^3 + C_7^4 = 63 + 105 + 35 = 203 \text{ cách.}$$

d. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 3 đỏ và 1 trắng, khi đó có $C_3^3.C_7^1$ cách.

Vậy, có tất cả $C_3^2.C_7^2 + C_3^3.C_7^1 = 63 + 7 = 70$ cách.

Thí dụ 16.

a. *Có bao nhiêu đường chéo trong* 1 đ*a giác lồi* n *cạnh* ?

b. *Một đa giác lồi có bao nhiêu cạnh để số đường chéo bằng* 35 ?

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Mỗi đa giác lồi n cạnh thì có n đỉnh.
- Mỗi đoạn thẳng nối 2 đỉnh bất kỳ, không kể thứ tự, thì hoặc là một cạnh, hoặc là một đường chéo của đa giác đó.

Vậy số đường chéo (ký hiệu là C_n) của đa giác n cạnh bằng $C_n = C_n^2 - n$. (1)

b. Với $C_n = 35$, ta được:

$$C_n^2 - n = 35 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \xleftrightarrow{n\in N^+ \& n\geq 3} n = 10.$$

Vậy, đa giác lồi 10 cạnh sẽ có 35 đường chéo.

Thí dụ 17.

a. *Cho lục giác lồi* ABCDEF. *Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của lục giác đã cho ? Trong đó có bao nhiêu tam giác có cạnh không phải là cạnh của lục giác ?*

b. *Cùng câu hỏi như trên với bát giác lồi* .

c. *Hãy tổng quát hóa*.

✍ *Giải*

a. Cứ 3 đỉnh của hình lục giác lồi thì tạo thành một tam giác. Do đó có:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \text{ tam giác.}$$

Số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của lục giác là $C_6^1.C_3^1 = 6.3 = 18$.

Khi đó, số tam giác có cạnh không phải cạnh của lục giác là 20 – 18 = 2 tam giác

b. Số tam giác có đỉnh là đỉnh của hình bát giác lồi là:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{6.7.8}{6} = 56 \text{ tam giác}$$

Số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của bát giác đã cho là $C_8^1.C_5^1 = 8.5 = 40$ tam giác

Số tam giác có cạnh không phải là cạnh của bát giác là:

56 – 40 = 16 tam giác.

c. Xem đa giác lồi n cạnh A_1, A_2, A_n. Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác là số tổ hợp n chập 3:

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

Số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác gồm 2 loại:

- Số tam giác chỉ có 1 cạnh bằng C_{n-4}^1.
- Số tam giác có 2 cạnh là bằng C_n^1

Suy ra, số tam giác có 1 hoặc 2 cạnh là cạnh của đa giác là:

$$C_n^1 + C_n^1.C_{n-4}^1 = n + n(n-4) = n(n-3) = nC_{n-3}^1 = C_n^1.C_{n-3}^1$$

Vậy, số tam giác có cạnh không phải là cạnh của đa giác là:

$$C_n^3 - C_n^1.C_{n-3}^1 = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - n(n-3)$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)n - 6n(n-3)}{6} = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6}.$$

Dạng toán 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Phương pháp áp dụng

Để thực hiện việc rút gọn biểu thức chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta thường sử dụng công thức phân tích, ngoài ra trong nhiều trường hợp cần vẫn dụng kỹ năng đơn giản dần.

Thí dụ 1. *Rút gọn biểu thức* $A = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!}$.

Giải

Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{4!.5.6}{m(m+1)} . \frac{(m-1)!.m.(m+1)}{4!(m-1)!} = 30.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để rút gọn đẳng thức đã cho chúng ta thực hiện phép phân tích dựa trên:

$$n! = n.(n - 1)...(n - k + 1).(n - k)!.$$

Thí dụ 2. *Rút gọn các biểu thức sau*:

a. $A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$. b. $B_n = \sum_{k=1}^{n} kk!$.

✍ *Giải*

a. Ta có nhận xét:

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

suy ra:

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

b. Ta có nhận xét:

$$k.k! = [(k + 1) - 1].k! = (k + 1)! - k!,$$

suy ra:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} kk! = 2! - 1! + 3! - 2! + ... + (n + 1)! - n! = (n + 1)! - 1.$$

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy để chứng minh đẳng thức đã cho chúng ta thực hiện phép phân tích dựa trên $A_i = A_i^1 - A_i^2$
   và từ đó các nhận tử loại dần nhau. Cần nhớ rằng đây là phép biến đổi cơ bản mà chúng ta đã được làm quen khi tính tổng dãy số.
2. Phương pháp rút gọn biểu thức cho phép chúng ta có thể tính được giá trị của biểu thức, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau.

Thí dụ 3. *Tính giá trị biểu thức*:

$$S = P_1A_2^1 + P_2A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4A_5^4 + P_5A_6^5 - P_1P_2P_3P_4P_5$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$S = 1!\frac{2!}{1!} + 2!\frac{3!}{1!} + 3!\frac{4!}{1!} + 4!\frac{5!}{1!} + 5!\frac{6!}{1!} - 1!2!3!4!5!$$

$$= 1!2! + 2!3! + 3!4! + 4!5! + 5!6! - 1!2!3!4!5!$$

$$= 2 + 12 + 144 + 2880 + 86400 - 34560 = 54878.$$

Thí dụ 4. *Tính giá trị của các biểu thức sau*:

a. $P = \dfrac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} + \dfrac{P_5}{P_2}$. b. $S = \left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$P = \frac{3.4.5 - 4.5}{2!} + \frac{5!}{2!} = 4.5 + 3.4.5 = 80$$

b. Ta có:

$$S = \left(\frac{5\,!}{5\,!} + \frac{4\,!}{3.4.5} + \frac{3\,!}{4.5} + \frac{2!}{5}\right)4.5 = \left(4.5 + \frac{4\,!}{3} + 3\,! + 4.2\right)$$

$= 20 + 8 + 6 + 8 = 42.$

Thí dụ 5. *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$, *với* $6 < n \in \mathbf{N}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$A = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$= (n - 4)(n - 5) + n - 4 = (n - 4)^2.$

☞ ***Chú ý***: Phương pháp rút gọn biểu thức cho phép chúng ta có thể tính được giá trị của biểu thức, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Thí dụ 6. *Rút gọn biểu thức*:

$$M = \frac{\left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2}{(P_3 - 2P_2)}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{P_5}{A_5^4} = \frac{5!}{5!} = 1, \quad \frac{P_4}{A_5^3} = \frac{4!}{3.4.5} = \frac{2}{5}, \quad \frac{P_3}{A_5^2} = \frac{3!}{4.5} = \frac{3}{10}, \quad \frac{P_2}{A_5^1} = \frac{2!}{5} = \frac{2}{5}$$

$P_3 - 2P_2 = 3! - 2.2! = 6 - 4 = 2$

Do đó, ta được:

$$M = \frac{\left(1 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{5}\right)20}{2} = 21$$

Thí dụ 7. *Tính giá trị của các biểu thức*:

a. $A = C_5^3C_4^2 + C_4^2C_3^1 + C_3^1C_3^0$. b. $B = \dfrac{\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3A_5^3}$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$A = \frac{5!}{3!\,2!}.\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{4!}{2!\,2!}.\frac{3!}{1!\,2!} + \frac{3!}{1!\,2!}.\frac{3!}{0!\,3!} = 10.6 + 6.3 + 3.1 = 81.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{\frac{1}{3}\frac{6!}{2!\,4!} - \frac{1}{28}\frac{8!}{3!\,5!} + \frac{1}{65}\frac{15!}{3!\,2!}}{3!\,\frac{5!}{2!}} = \frac{\frac{1}{3}.15 - \frac{1}{28}.56 + \frac{1}{65}.455}{3.120}.$$

$$= \frac{5-2+7}{360} = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện việc tính giá trị của biểu thức chúng ta chỉ cần sử dụng công thức khai triển. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng các hệ thức giữa các số C_n^k.

Thí dụ 8. *Tính giá trị của các biểu thức*:

a. $A = \dfrac{C_{21}^4}{C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}$. b. $B = \dfrac{C_{100}^{98} + C_{1000}^{998}}{C_{1000}^2 + C_{100}^2}$.

✍ *Giải*

a. Sử dụng công thức:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \text{ với } 0 \le k \le n, \text{ và } k, n \in \mathbf{N}$$

ta được:

$$A = \frac{C_{21}^4}{C_{20}^4 + C_{20}^3} = \frac{C_{21}^4}{C_{21}^4} = 1.$$

b. Sử dụng công thức:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ với } 0 \le k \le n, \text{ và } k, n \in \mathbf{N}$$

ta được:

$$B = \frac{C_{100}^2 + C_{1000}^2}{C_{1000}^2 + C_{100}^2} = 1.$$

Dạng toán 3: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta thường sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi.
Cách 2: Sử dụng các đánh giá về bất đẳng thức.
Cách 3: Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp.
Cách 4: Sử dụng phương pháp đếm.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng* $1 + P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = P_n$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$P_k = k! = k.(k-1)! = k.P_{k-1} \Leftrightarrow (k-1)P_{k-1} = P_k - P_{k-1}.$$

Cho k lần lượt các giá trị 2, 3, ..., n ta có:

$$P_1 = P_2 - P_1$$
$$2P_2 = P_3 - P_2$$
....
$$(n-1)P_{n-1} = P_n - P_{n-1}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = -P_1 + P_n = P_n - 1$$
$$\Leftrightarrow 1 + P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = P_n, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng* $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi vế phải, ta có:

$$\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{n}{(n-1)!.n} + \frac{(n-1).n}{(n-2)!.(n-1).n} = \frac{n}{n!} + \frac{(n-1)n}{n!} = \frac{n^2}{n!}, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Biến đổi vế phải, ta có:

$$\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1+n-1}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n^2}{n!}, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để chứng minh đẳng thức trên:

1. Ở cách 1 để chứng minh đẳng thức đã cho chúng ta đã sử dụng các phép biến đổi cho toán tử giai thừa và cụ thể ở đây là:

$$n! = (n-1)!.n, \qquad n! = (n-2)!.(n-1)n$$

2. Ở cách 2, ta sử dụng biến đổi:

$$(n-1)! = (n-2)!.(n-1)$$

để thực hiện phép quy đồng mẫu số.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng* $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^{n}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!}(1 + \frac{1}{k-1})$$
$$= \frac{k(n+k)!}{(k-1)(k-2)!} = \frac{k^2(n+k)!}{k(k-1)(k-2)!} = \frac{k^2(n+k)!}{k!} = k^2 A_{n+k}^{n}, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng* $P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = nk!A_{n+5}^5$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = k!\frac{(n+1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+3)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+5)!}{(n+3)!} \cdot = k!\frac{(n+5)!}{(n-1)!}$$
$$= nk!\frac{(n+5)!}{n!} = nk!A_{n+5}^5, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với các số* r, n *nguyên, không âm và* $0 \le r \le n$ *ta có*:

a. $C_n^r = \dfrac{nC_{n-1}^{r-1}}{r}$.

b. $n.C_n^k = (k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k$, với $0 \le k \le n$, và $k, n \in \mathbf{N}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\frac{nC_{n-1}^{r-1}}{r} = \frac{n}{r}.\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k = (k+1).\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + k.\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= (n-k).\frac{n!}{k!(n-k)!} + k.\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= (n-k+k).\frac{n!}{k!(n-k)!} = n.C_n^k, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy , qua 2 ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với phương pháp chứng minh đẳng thức tổ hợp dựa trên công thức khai triển. thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp gom các toán tử liên kết.

Thí dụ 6. *Chứng minh rằng với* $k, n \in \mathbf{N}$, $3 \le k \le n$ *ta có*:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$VT = C_n^k + C_n^{k-1} + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$$
$$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2})$$
$$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy , chúng ta đã chứng minh đẳng thức tổ hợp bằng việc biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản dựa trên công thức tính ban đầu hoặc công thức phân tách. Tiếp theo, chúng ta minh hoạ ví dụ sử dụng công thức phân tách.

Thí dụ 7. *Chứng minh rằng*:
$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + ... + C_{r-1}^{r-1}, \text{ với } 0 \le r \le n, \text{ và } k, n \in \mathbf{N}.$$

✍ *Giải*

Ta có:
$$VP = (C_n^r - C_{n-1}^r) + (C_{n-1}^r - C_{n-2}^r) + ... + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r = VT, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 8. *Chứng minh rằng* $n! > 2^{n-1}$, *với* $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 3$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Cách 1: (*Sử dụng phương pháp đánh giá*): Ta có nhận xét:
$$\left.\begin{array}{l} 2 \le 2 \\ 2 < 3 \\ ... \\ 2 < n \end{array}\right\} n - 1 \text{ phần tử}$$
suy ra:
$$2^{n-1} < 2.3...n = 1.\ 2.3...n = n!, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp*): Ta lần lượt:

- Với n = 3, ta có:
$$3! > 2^{3-1} \Leftrightarrow 6 > 4, \text{ luôn đúng}$$
Vậy, bất đẳng thức đúng với n = 3.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, tức là ta có:
$$k! > 2^{k-1}, \text{ với } k \in \mathbf{Z}, k \ge 3.$$
- Ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh
$$(k + 1)! > 2^k, \text{ với } k \in \mathbf{Z}, k \ge 3.$$
Thật vậy:
$$(k + 1)! = (k + 1).k! > (k + 1).2^{k-1} \overset{k\ge 3}{>} 2.2^{k-1} = 2^k, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 9. *Chứng minh rằng* $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, với $0 \le k \le n$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng công thức khai triển): Ta có:

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!.(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-k)!} = \frac{(n-1)!.(n-k)}{k!.(n-k)!} + \frac{(n-1)!.k}{k!.(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!.(n-k)!}.[(n-k)+k] = \frac{(n-1)!.n}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = C_n^k\text{, đpcm.}$$

Cách 2: (Dựa trên ý nghĩa): Ta có nhận định rằng " *Tổ hợp chập k của n phần tử (bằng C_n^k) bao gồm những tổ hợp chứa một phần tử cho trước (giả sử là a) và những tổ hợp không chứa a* ".

Trong đó:

- Các tổ hợp có chứa a được lập từ cách chọn (k − 1) vật trong (n − 1) vật còn lại. Như vậy có C_{n-1}^{k-1} tổ hợp chứa a.
- Các tổ hợp không chứa a được lập từ cách chọn k vật trong (n − 1) vật, sau khi đã loại a ra. Như vậy có C_{n-1}^{k} tổ hợp không chứa a.

Do đó, ta được:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\text{, đpcm.}$$

<u>Dạng toán 4:</u> Giải phương trình, bất phương trình và hệ chứa các toán tử về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Phương pháp áp dụng

Để giải phương trình, bất phương trình chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện việc đơn giản biểu thức hoán vị để chuyển phương trình, bất phương trình về dạng đại số quen thuộc.

Cách 2: Đánh giá thông qua giá trị cận trên hoặc cận dưới.

<u>Thí dụ 1.</u> *Giải phương trình* $P_2x^2 - P_3x = 8$.

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2x^2 - 6x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = −1 và x = 4.

<u>Thí dụ 2.</u> *Giải các phương trình sau*:

a. $A_x^2 = 12$. b. $A_x^3 = 24$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $2 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(x-1) - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 4.

b. Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (**)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(x-1)(x-2) - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + x + 6) = 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 4.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua lời giải của thí dụ trên chúng ta thấy ngay việc thiết lập điều kiện cho ẩn trong phương trình là rất quan trọng, nó giúp chúng ta loại bỏ được các nghiệm ngoại lai. Ngoài ra trong nhiều trường hợp nó còn giúp chúng ta thực hiện phép biến đổi nhanh hơn, ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Thí dụ 3. *Tìm n nguyên, dương biết rằng*:

a. $A_n^3 = 20n$. b. $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $3 \le n \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$n(n-1)(n-2) = 20n \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (n-1)(n-2) = 20$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} n = 6.$$

Vậy, phương trình có nghiệm n = 6.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} 5 \le n \in N \\ 4 \le n-2 \in N \end{cases} \Leftrightarrow 6 \le n \in \mathbf{N}. \qquad (**)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 18.\frac{(n-2)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{n.(n-1)}{n-5} = 18 \Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 9 \\ n = 10 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm n = 9 và n = 10.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua lời giải của thí dụ trên chúng ta thấy:

a. Trong câu a), dựa vào điều kiện (*) ta thực hiện giản ước cả hai vế cho $n \ne 0$, từ đó nhận được một phương trình bậc hai.
b. Trong câu b), vì tồn tại nhiều toán tử chỉnh hợp nên cần thiết phải đặt hệ điều kiện để cho mỗi toán tử chỉnh hợp có mặt trong phương trình đều có nghĩa.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các phương trình chứa đồng thời các toán tử chỉnh hợp và hoán vị.

Thí dụ 4. *Tìm* n *nguyên, dương biết rằng* $P_{n+3} = 720A_n^5 P_{n-5}$.

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} n+3 \in N \\ 5 \le n \in N \\ n-5 \in N \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le n \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(n + 3)! = 720.\frac{n!}{(n-5)!}.(n - 5)! \Leftrightarrow (n + 3)(n + 2)(n + 1) = 720$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 11n - 714 = 0 \Leftrightarrow (n - 7)(n^2 + 13n + 12) \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy, phương trình có nghiệm n = 7.

Thí dụ 5. *Giải bất phương trình* $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$.

✍ *Giải*

Điều kiện $5 \le n \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5(n-2)!}{4!(n-4)!} < 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 4)(n - 1)! - 4(n - 1)! - 30(n - 2)! < 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 2)! [(n - 4)(n - 1) - 4(n - 1) - 30] < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < 11 \Leftrightarrow 5 \le n < 11$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta nhận được nghiệm của bất phương trình là:

n = 5; n = 6; n = 7; n = 8; n = 9; n = 10.

Thí dụ 6. *Giải bất phương trình* $\frac{C_{x-1}^{x-3}}{A_{x+1}^4} < \frac{1}{14P_3}$.

✍ *Giải*

Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{\dfrac{(x-1)!}{(x-3)!\,2!}}{\dfrac{(x+1)!}{(x-3)!}} < \frac{1}{14.3!} \Leftrightarrow \frac{(x-1)!}{2(x+1)!} < \frac{1}{84} \Leftrightarrow \frac{1}{2x(x+1)} < \frac{1}{84}$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) > 42 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x \ge 6.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $6 \le x \in \mathbf{N}$.

Thí dụ 7. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Điều kiện x, y ∈ **N** và $1 \le x \le y$. (*)

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{y\,!}{(y-x)\,!\,(x-1)!} + \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = 126 \\ (x+1)! = 6! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!(x+1)}{(y-x)!x!} = 126 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!\,6}{(y-5)\,!\,5!} = 126 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 21.5! \Leftrightarrow y = 7.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm x = 5 và y = 7.

Thí dụ 8. (HVBCVT 98). *Tìm* x, y ∈ $\mathbf{Z}^+$ *để* $\dfrac{C_{x+1}^{y}}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}$.

✍ *Giải*

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \le y \le x+1 \\ 0 \le y+1 \le x \\ 0 \le y-1 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 1 \\ x \ge y+1 \end{cases}.$$

a. Xét phương trình:

$$\frac{C_{x+1}^{y}}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{6}.\frac{(x+1)!}{y!.(x+1-y)!} = \frac{1}{5}.\frac{x!}{(y+1)!.(x-y-1)!}$$

$$\Leftrightarrow 5(x + 1)(y + 1) = 6(x - y)(x - y + 1). \quad (1)$$

b. Xét phương trình:

$$\frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}.\frac{x!}{(y+1)!.(x-y-1)!} = \frac{1}{2}.\frac{x!}{(y-1)!.(x-y+1)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y)(x - y + 1) = 5y(y + 1). \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$5(x + 1)(y + 1) = 3.\ 5y(y + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 3y \Leftrightarrow x = 3y - 1. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) được:

$$2(3y - 1 - y)(3y - 1 - y + 1) = 5y(y + 1) \Leftrightarrow 3y^2 = 9y \Leftrightarrow y = 3 \text{ và } x = 8$$

Vậy, nghiệm của hệ là x = 8 và y = 3.

§3. NHỊ THỨC NIU – TƠN

Dạng toán 1: Khai triển nhị thức

Phương pháp áp dụng

Sử dụng kết quả:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

trong đó các C_n^k, với k = 0, 1, ..., n có giá trị được tính bằng công thức tổ hợp hoặc sử dụng tam giác Pascal hoặc máy tính Fx – 570MS, cụ thể:

Để tính C_n^k, ta ấn n $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ k.

Thí dụ 1. *Thực hiện khai triển*:

a. $\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^8$.   b. $\dfrac{1}{27}\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$.

Giải

a. Ta có:

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8 = C_8^0 x^8 + C_8^1 x^7.\frac{1}{2x} + ... + C_8^8.\left(\frac{1}{2x}\right)^8$$

$$= x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 7x^2 + \frac{35}{8} + \frac{7}{4x^2} + \frac{7}{16x^4} + \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{256x^8}$$

b. Ta có:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6 = C_6^0\left(\sqrt{3}\right)^6 - C_6^1\left(\sqrt{3}\right)^5.\sqrt{15} + ... + C_6^6\left(\sqrt{15}\right)^6$$

$$= 3^3 C_6^0 - 3^3\sqrt{5}C_6^1 + ... + 3^3.5^3 C_6^6$$

Do đó, ta được:

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6 = C_6^0 - \sqrt{5}C_6^1 + 5C_6^2 - 5\sqrt{5}C_6^3 + 25C_6^4 - 25\sqrt{5}C_6^5 + 125C_6^6$$

$$= 1 - 6\sqrt{5} + 75 - 100\sqrt{5} + 375 - 150\sqrt{5} + 125$$

$$= 576 - 256\sqrt{5} = 64(9 - 4\sqrt{5}).$$

Dạng toán 2: Giá trị của hệ số trong khai triển Niutơn

Phương pháp áp dụng

Với các yêu cầu về hệ số trong khai triển Newton, ta cần lưu ý:

1. Với khai triển nhị thức:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k \text{ thì hệ số của } a^{n-k}.b^k \text{ là } C_n^k.$$

2. Với khai triển nhị thức:

$$(x^\alpha + x^\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^\alpha)^{n-k}.(x^\beta)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{\alpha(n-k)+\beta k}$$

Khi đó:

- Hệ số của x^t trong khai triển trên là C_n^k với k là nghiệm của phương trình:

$$\alpha(n - k) + \beta k = t.$$

- Đặc biệt, khi t = 0 đó chính là số hạng không phụ thuộc x.

<u>Dạng toán 3:</u> Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

Phương pháp áp dụng

Sử dụng dạng khai triển Niutơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.

<u>Thí dụ 1.</u> *Tính giá trị của các biểu thức sau*:

a. $S = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6$.

b. $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(1 + x)^6 = C_6^0 + C_6^1x + C_6^2x^2 + ... + C_6^6x^6. \quad (1)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$2^6 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 \Leftrightarrow S = 2^6 = 64.$$

b. Ta có:

$$(1 + x)^5 = C_5^0 + C_5^1x + C_5^2x^2 + ... + C_5^5x^5. \quad (2)$$

Thay x = 2 vào (2), ta được:

$$3^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5 \Leftrightarrow T = 3^5 = 243.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

1. Trong câu a), chúng ta đã sử dụng lại một khai triển Newton dạng $(1 + x)^6$. Tuy nhiên, cũng có thể sử dụng ngay kết quả đã biết là:
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$
2. Trong câu b), vì các toán tử đều được viết dưới dạng tổng quát là $2^kC_5^k$ tương ứng với $C_5^kx^k$, do đó chúng ta đã xuất phát bằng khai triển $(1 + x)^5$ rồi thay x = 2. Như vậy:
   a. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $C_n^ka^k$ ta sử dụng khai triển dạng $(1 + x)^n$ rồi thay x = a.
   b. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $(-1)^kC_n^ka^k$ ta sử dụng khai triển dạng $(1 - x)^n$ rồi thay x = a.
   c. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $C_n^ka^{n-k}$ ta sử dụng khai triển dạng $(x + 1)^n$ rồi thay x = a.
   d. Nếu các toán tử trong biểu thức đều có dạng tổng quát $(-1)^kC_n^ka^{n-k}$ ta sử dụng khai triển dạng $(x - 1)^n$ rồi thay x = a.
3. Người ta có thể phát triển thêm cho câu b), với yêu cầu tính:

$$R = 2^8 C_5^0 + 2^9 C_5^1 + 2^{10} C_5^2 + 2^{11} C_5^3 + 2^{12} C_5^4 + 2^{13} C_5^5.$$

Khi đó, ta thấy ngay rằng:

$$R = 2^8(C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5)$$
$$= 2^8.T = 62208.$$

Điều này, gợi ý cho các em học sinh cần có mở rộng cho các dạng khai triển $k(1 + x)^n$ và $k(1 - x)^n$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*:

$$C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + ... + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$$

✍ *Giải*

Điều kiện Với $10 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$C_x^x + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + ... + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1024$$

$$\Leftrightarrow C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + ... + C_x^8 + C_x^9 + C_x^{10} = 1024 \Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow x = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 10$.

Thí dụ 3. *Tính giá trị của các biểu thức sau*:

a. $S_1 = 2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + C_n^n$.

b. $S_2 = 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + ... + C_n^n$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$(2 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-1} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-1} = 3^n. \quad (1)$$

$$(2 - 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-1}(-1)^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-1}(-1)^i = 1. \quad (2)$$

Suy ra:

- (1) + (2), ta được:

$$2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + C_n^n = \frac{3^n + 1}{2}. \quad (3)$$

- (1) − (2), ta được:

$$2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + ... + C_n^n = \frac{3^n - 1}{2}. \quad (4)$$

Thí dụ 4. *Tính giá trị của các biểu thức sau*:

a. $A = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + \dots + C_8^8$.

b. $B = 2^9.5^9 C_9^0 - 2^8.5^8.3 C_9^1 + \dots + 3^9 C_9^9$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (*Dựa trên nhận xét của ví dụ 1*) Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$A = 6^8 C_8^0 + 6^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8.$$

Ta có:

$$(x + 1)^8 = x^8 C_8^0 + x^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8. \quad (1)$$

Thay x = 6 vào (1), ta được:

$$7^8 = 6^8 C_8^0 + 6^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

Cách 2: Ta có:

$$(2x + 1)^8 = (2x)^8 C_8^0 + (2x)^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8. \quad (2)$$

Thay x = 3 vào (2), ta được:

$$7^8 = 2^8.3^8 C_8^0 + 2^7.3^7 C_8^1 + \ldots + C_8^8 \Leftrightarrow A = 7^8 = 5764801.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (*Dựa trên nhận xét của ví dụ 1*) Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$B = 10^9 C_9^0 - 10^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9.$$

Ta có:

$$(x - 3)^9 = x^9 C_9^0 - x^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9.. \quad (3)$$

Thay x = 10 vào (3), ta được:

$$7^9 = 10^9 C_9^0 + 10^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9 \Leftrightarrow B = 7^9 = 40353607.$$

Cách 2: Ta có:

$$(2x - 3)^8 = (2x)^9 C_9^0 - (2x)^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9. \quad (4)$$

Thay x = 5 vào (4), ta được:

$$7^9 = 2^9.5^9 C_9^0 - 2^8.5^8.3 C_9^1 + \ldots + 3^9 C_9^9 \Leftrightarrow B = 7^9 = 40353607.$$

Thí dụ 5. *Rút gọn các biểu thức*:

a. $A = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}$. b. $B = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + \ldots - C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (1) và (2), ta được:

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \quad (3)$$

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \quad (4)$$

a. Trừ (1) cho (2) vế theo vế, ta được:

$$2(C_{2n}^{1} + C_{2n}^{3} + ... + C_{2n}^{2n-1}) = 2^{2n} \Leftrightarrow A = 2^{2n-1}.$$

b. Cộng (1) cho (2) vế theo vế, ta được:

$$2(C_{2n}^{0} + C_{2n}^{2} + ... + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n} \Leftrightarrow B = 2^{2n-1}.$$

Thí dụ 6. *Tính giá trị của biểu thức sau*:

$$S = C_{2002}^{0} C_{2002}^{2001} + C_{2002}^{1} C_{2001}^{2000} + ... + C_{2002}^{k} C_{2002-k}^{2001-k} + ... + C_{2002}^{2001} C_{1}^{0}.$$

Giải

Ta xét:

$$C_{2002}^{k} C_{2002-k}^{2001-k} = \frac{2002!}{k!.(2002-k)!} . \frac{(2002-k)!}{(2001-k)!} = \frac{2002!}{k!.(2001-k)!}$$

$$= \frac{.2002.2001!}{k!.(2001-k)!} = 2002 C_{2001}^{k}.$$

Từ đó S được viết lại dưới dạng:

$$S = 2002(C_{2001}^{0} + C_{2001}^{1} + ... + C_{2001}^{2001}) = 2002(1+1)^{2001} = 1001.2^{2002}.$$

Dạng toán 4: Sử dụng khai triển Niutơn chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tổ hợp

Phương pháp áp dụng

Sử dụng dạng khai triển Niutơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Các phép biến đổi đại số.
- Phép đánh giá cho bất đẳng thức cùng với các phương pháp chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức đơn.

Thí dụ 1. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + ... + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n C_n^n = 5^n.$$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay x = 4 vào (1), ta được:

$$5^n = 1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + ... + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n C_n^n, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 2. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1},$$

với giả thiết $C_n^m = 0$ *nếu* $m > n$ *và* $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ *nếu* $m \le n$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n + ... \quad (1)$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n + ... \quad (2)$$

Suy ra:

- (1) + (2), ta được:

$$2^n = 2(C_n^0 + C_n^2 + ...) \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + ... = 2^{n-1}. \quad (3)$$

- (1) – (2), ta được:

$$2^n = 2(C_n^1 + C_n^3 + ...) \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}. \quad (4)$$

Từ (3), (4), suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng nếu* $a + b = 1$ *thì với mọi số tự nhiên* n *ta có*:

$$a^n + b^n \ge \frac{1}{2^{n-1}}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} + x \\ b = \dfrac{1}{2} - x \end{cases}.$$

Suy ra:

$$a^n + b^n = \left(\frac{1}{2} + x\right)^n + \left(\frac{1}{2} - x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^k}{2^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k x^k}{2^{n-k}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{C_n^2 x^2}{2^{n-1}} + \frac{C_n^4 x^4}{2^{n-3}} + ... \ge \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ đpcm.}$$

Thí dụ 4. *Với* n, k *là số nguyên dương và* $1 \le k \le n$, *chứng minh rằng*:

$$C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k} = 0.$$

✍ *Giải*

Với mọi x, và với k là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + ... + C_k^k x^k$$

$$\Leftrightarrow C_n^k (1 + x)^k = C_k^0 C_n^k + C_k^1 C_n^k x + C_k^2 C_n^k x^2 + ... + C_k^k C_n^k x^k. \quad (1)$$

Ta có:

$$C_k^m . C_n^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} . \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} . \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = C_n^m . C_{n-m}^{k-m}.$$

Do đó (1) có dạng:

$$C_n^k (1+x)^k = C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} x + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} x^2 + ... + C_n^k C_0^{n-k} x^k. \quad (2)$$

Thay $x = -1$ vào (2), ta được:

$$0 = C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k}$$, đpcm.

§4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Dạng toán 1: Mô tả không gian mẫu

Phương pháp áp dụng

Yêu cầu được chuyển thành đếm số phần tử của một tập hợp, từ đó mô tả tập hợp này bằng phương pháp liệt kê.

Thí dụ 1. Không gian mẫu của phép thử "*Gieo một con súc sắc*" là tập hợp:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Với biến cố A: "*Số chấm trên mặt xuất hiện là số lẻ*" sẽ được mô tả bởi tập hợp $\Omega_A = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$.

Thí dụ 2. *Hãy mô tả không gian mẫu* Ω *khi*:

a. *Tung ba đồng xu.*

b. *Lấy ngẫu nhiên từng quả cầu trong hộp kín có* 3 *quả cầu đánh số* 1, 2, 3 *ra và xếp thành một hàng ngang để được một số có* 3 *chữ số*.

✍ *Giải*

a. Ta thấy:

- Đồng xu thứ nhất có 2 khả năng (S; N).
- Đồng xu thứ hai có 2 khả năng (S; N).
- Đồng xu thứ ba có 2 khả năng (S; N).

Theo qui tắc nhân suy ra Ω có 2 x 2 x 2 = 8 phần tử.

Cụ thể là:

Ω = {SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN}.

b. Ta có nhay $\Omega = \{123, 132, 231, 213, 312, 321\}$.

Dạng toán 2: Mô tả không gian biến cố

Phương pháp áp dụng

Yêu cầu được chuyển thành đếm số phần tử của một tập hợp con, từ đó mô tả tập hợp này bằng phương pháp liệt kê.

Thí dụ 1. *Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất.*

a. *Mô tả không gian mẫu* Ω.

b. *Xác định các biến cố sau*:

A: "*Số chấm trên mặt xuất hiện là số lẻ*".

B: "*Xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn* 4".

C: "*Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho* 3".

✍ *Giải*

a. Không gian mẫu của phép thử "*Gieo một con súc sắc*" là tập hợp:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b. Với biến cố:

- A: "Số chấm trên mặt xuất hiện là số lẻ" sẽ được mô tả bởi tập hợp:

  $\Omega_A = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$.
- B: "Xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 4" sẽ được mô tả bởi tập hợp:

  $\Omega_B = \{5, 6\} \subset \Omega$.
- C: "Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3" sẽ được mô tả bởi tập hợp:

  $\Omega_A = \{3, 6\} \subset \Omega$.

Dạng toán 3: Tính xác suất của biến cố

Phương pháp áp dụng

Sử dụng phương pháp đã được trình bày trong phần chú ý.

Thí dụ 1. *Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn* 50.

a. *Mô tả không gian mẫu.*
b. *Gọi* A *là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho* A.
c. *Tính xác suất của* A.
d. *Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn* 4.

Giải

a. Không gian mẫu là:

$\Omega = \{1, 2, ..., 50\}$ – có 50 phần tử.

b. Biến cố A: " Số được chọn là số nguyên tố " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ – có 15 phần tử.

c. Từ kết quả câu a) và câu b), ta có:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{15}{50} = 0,3.$$

Thí dụ 2. *Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn* 9. *Tính xác suất để*:

a. *Số được chọn là số nguyên tố.*
b. *Số được chọn chia hết cho* 3.

Giải

Ta có không gian mẫu là:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – có 8 phần tử.

a. Biến cố A: " Số được chọn là số nguyên tố " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7\}$ – có 4 phần tử.

Khi đó:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

b. Biến cố B: "Số được chọn chia hết cho 3" được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_B = \{3, 6\}$ – có 2 phần tử.

Khi đó:

$$P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0{,}25.$$

Thí dụ 3. *Một cái túi có 4 quả cầu màu đỏ, 6 quả cầu màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.*

✍ *Giải*

Không gian mẫu là Ω có số phần tử là $C_{10}^4 = 210$ (chọn 4 quả cầu từ có 4 + 6 = 10 quả cầu).

Biến cố A: "4 quả cầu quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh" được mô tả bởi tập hợp Ω_A, với:

$$\Omega_A = Đ_1 + Đ_2 + Đ_3,$$

trong đó:

- $Đ_1$ là số bộ 4 quả cầu có 1 quả cầu đỏ, có $4.C_6^3$ phần tử.
- $Đ_2$ là số bộ 4 quả cầu có 2 quả cầu đỏ, có $C_4^2.C_6^2$ phần tử.
- $Đ_2$ là số bộ 4 quả cầu có 3 quả cầu đỏ, có $C_4^3.6$ phần tử.

suy ra, số phần tử của tập Ω_A là:

$$4.C_6^3 + C_4^2.C_6^2 + C_4^3.6 = 194$$

Khi đó:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{194}{210} = \frac{97}{105}.$$

§5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Dạng toán 1: Quan hệ giữa các biến cố

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa.

Thí dụ 1. *Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường PT Newton, gọi:*

A *là biến cố* "*Học sinh đó học lớp* 10".

B *là biến cố* "*Học sinh đó học lớp* 11".

C *là biến cố* "*Học sinh đó học lớp* 12".

Khi đó:

- $A \cup B$ là biến cố "Học sinh đó học lớp 10 hoặc học lớp 11".
- $A \cup B \cup C$ là biến cố "Học sinh đó học lớp 10 hoặc học lớp 11 hoặc học lớp 11" hoặc " Học sinh đó học ở trường THPT Việt Đức".

Dạng toán 2: Các phép toán trên biến cố

Phương pháp áp dụng

a. ***Biến cố hợp***: Cho hai biến cố A và B, biến cố C được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Kí hiệu $C = A \cup B$.

Như vậy, nếu Ω_A, Ω_B lần lượt là các kết quả thuận lợi cho A và B thì ta có $\Omega_C = \Omega_A \cup \Omega_B$ là tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố hợp $A \cup B$.

Một cách tổng quát: cho n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ biến cố hợp của n biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$. Kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ xảy ra khi có ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra $(1 \le i \le n)$.

Nhận xét nếu A, $\overline{A}$ là hai biến cố đối lập thì ta có $\Omega_A \cup \Omega_{\overline{A}} = \Omega$.

b. ***Biến cố giao***: Cho hai biến cố A và B, biến cố giao kí hiệu là $A \cap B$ hay AB xảy ra khi A, B đồng thời xảy ra.
Gọi Ω_A, Ω_B là tập các kết quả thuận lợi cho A và B thì $\Omega_A \cap \Omega_B$ là tập các kết quả thuận lợi cho biến cố giao AB.

Thí dụ 1. *Hai xạ thủ độc lập bắn vào hai bia. Gọi* A_1: "*Xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia*", A_2: "*Xạ thủ thứ hai bắn trúng bia*", X: "*Hai xạ thủ cùng bắn trúng*", Y: "*Hai xạ thủ cùng bắn trượt*", Z: "*Có bia bị trúng đạn*", K: "*Có đúng một xạ thủ bắn trúng*".

Khi đó, ta có:

$$X = A_1A_2; Z = A_1 \cup A_2; Y = \overline{A_1}\,\overline{A_2}; K = A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2$$

Thí dụ 2. *Gieo một con súc sắc hai lần. Gọi* A *là biến cố lần thứ nhất xuất hiện mặt chẵn chấm,* B *là biến cố lần thứ hai xuất hiện mặt chẵn chấm,* C *là biến cố tổng số chấm của hai lần gieo là một số chẵn. Hãy biểu diễn* C *theo* A, B, $\overline{A}, \overline{B}$.

✍ *Giải*

Ta có tổng số chấm của 2 lần gieo là số chẵn. Nếu hai lần gieo cùng xuất hiện mặt chẵn chấm hoặc hai lần gieo cùng xuất hiện mặt lẻ chấm.

Tức là $C = AB \cup \overline{A}\,\overline{B}$.

Dạng toán 3: Các quy tắc tính xác suất

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa cùng các tính chất.

Thí dụ 1. *Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ* 1 *đến* 9. *Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.*

✍ *Giải*

Nhận xét rằng "Tích của hai số a.b là một số chẵn khi và chỉ khi một trong hai số a, b là số chẵn", từ đó ta gọi:

- A là biến cố "Rút được hai thẻ chẵn"
- B là biến cố "Rút được một thẻ chẵn và một thể lẻ"

Khi đó, biến cố "Tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn" là $A \cup B$.

Ta lần lượt có:

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}, \qquad P(B) = \frac{C_4^1.C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{20}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

Thí dụ 2. *Một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để:*

a. *Chọn được 2 viên bi cùng màu.*
b. *Chọn được 2 viên bi khác màu.*

✍ *Giải*

a. Gọi:

- A là biến cố " Chọn được 2 viên bi đỏ"
- B là biến cố " Chọn được 2 viên bi xanh"
- C là biến cố " Chọn được 2 viên bi cùng màu"

Khi đó:

$C = A \cup B$ và các biến cố A, B xung khắc với nhau.

Ta lần lượt có:

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}, \qquad P(B) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

b. Biến cố "Chọn được 2 viên bi khác màu" chính là $\overline{C}$, từ đó suy ra:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải trên vì có được kết quả từ câu a) nên chúng ta nhanh chóng nhận kết quả cho câu b).
2. Như vậy, khi bài toán chỉ yêu cầu thực hiện câu b) chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:
   Cách 1: Thực hiện như trong ví dụ.
   Cách 2: Ta có:
   - Không gian mẫu là Ω có số phần tử là $C_9^2 = 36$.
   - Biến cố C được mô tả bởi tập hợp Ω_C có số phần tử là 4.5 = 20.

Khi đó:

$$P(C) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Thí dụ 3. *Gieo ba đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để:*

a. *Cả ba đồng xu đều sấp.* b. *Có ít nhất một đồng xu sấp.*

c. *Có đúng một đồng xu sấp.*

✍ *Giải*

Gọi:

- A là biến cố "Đồng xu thứ nhất hiện mặt sấp",
- B là biến cố "Đồng xu thứ hai hiện mặt sấp",
- C là biến cố "Đồng xu thứ ba hiện mặt sấp",

ta thấy ngay A, B, C là ba biến cố đọc lập với nhau.

a. Gọi D là biến cố "Cả ba đồng xu đều sấp", ta có ngay:

$$D = ABC \Rightarrow P(D) = P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

b. Gọi E là biến cố "Có ít nhất một đồng xu sấp", ta thấy ngay E là biến cố đối của biến cố "Cả ba đồng xu đều ngửa" (là biến cố $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$). Suy ra:

$$P(E) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

c. Gọi F là biến cố "Có đúng một đồng xu sấp", ta thấy ngay:

$$F = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$\Rightarrow P(F) = P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(C)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

§6. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Dạng toán 4: Biến ngẫu nhiên rời rạc – bảng phân phối xác xuất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa.

Thí dụ 1. *Một cuộc điều tra được tiến hành như sau: Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trên đường và hỏi xem gia đình bạn đó có bao nhiêu người. Gọi X là số người trong gia đình bạn học sinh đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không ? Vì sao ?*

✍ *Giải*

Ta thấy X là biến ngẫu nhiên rời rạc, bởi:

- Giá trị của X là một số thuộc tập {1, 2, 3, 4, ...}.
- Giá trị của X là ngẫu nhiên và không dự đoán trước được.

Thí dụ 2. Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,09	0,3	0,3	0,2	0,1

Tính xác suất để:

a. Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi.

b. Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi.

✍ *Giải*

a. Xác suất để trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi là:

$$P(X \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= 0,01 + 0,09 + 0,3 + 0,3 + 0,2 = 0,9.$$

b. Xác suất để trên trang sách có ít nhất 2 lỗi:

$$P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0,3 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,9.$$

Dạng toán 5: Kỳ vọng, Phương sai và độ lệch chuẩn

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa.

Thí dụ 1. *Số ca cấp cứu ở một bệnh viện vào tối thứ 7 là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất như sau:*

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng, nếu có hơn 2 ca cấp cứu thì phải tăng cường thêm bác sĩ trực.

a. *Tính xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ 7.*

b. *Tính xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ 7.*

c. *Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc* X.

✍ *Giải*

a. Xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ 7 là:

$$P = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35.$$

b. Xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ 7 là:

$$P = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,85.$$

c. Ta lần lượt có:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 2{,}05.$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k = 1{,}85.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}85}.$$

☞ ***Chú ý***: Cũng có thể lập luận heo cách:

$$P = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Thí dụ 2. *Một nhóm có 7 người trong đó gồm 4 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ trong 3 người được chọn.*

a. *Lập bảng phân bố xác suất của* X.

b. *Tính* E(X) *và* V(X).

✍ *Giải*

a. X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị {0, 1, 2, 3}.

Để lập bảng phân bố xác suất của X ta cần tính:

$P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$

Số trường hợp có thể xảy ra là $C_7^3 = 35$.

Ta lần lượt có:

- $P(X = 0)$ là xác suất chọn không có nữ (có 3 nam).

  Số cách chọn 3 nam $C_4^3 = 4$, suy ra $P(X = 0) = \frac{4}{35}$.
- $P(X = 1)$ là xác suất chọn 1 nữ.

  Số cách chọn là $C_4^2\, C_3^1 = 6.3 = 18$, suy ra $P(X = 1) = \frac{18}{35}$.
- $P(X = 2)$ là xác suất chọn 2 nữ.

  Số cách chọn là $C_4^1\, C_3^2 = 4.3 = 12$, suy ra $P(X = 2) = \frac{12}{35}$.
- $P(X = 3)$ là xác suất chọn 3 nữ.

  Số cách chọn là $C_3^3 = 1$, suy ra $P(X = 3) = \frac{1}{35}$.

Từ đó, ta có bảng phân bố xác suất:

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

a. Ta lần lượt có:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = \frac{9}{7} \text{ và } V(X) \approx 0{,}49.$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Cho tập* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a. *Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập* E ?

b. *Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập* E, *trong đó các chữ số* 3, 4, 5 *đứng cạnh nhau* ?

c. *Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập* E, *bắt đầu bằng* 123 ?

✍ *Giải*

a. Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập E ứng với chỉ một hoán vị của 7 phần tử của tập E, và ngược lại.

Vậy, số các số phải tìm bằng:

$P_7 = 7! = 5040$ số.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Các số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Giả sử $\alpha = (3, 4, 5)$ là bộ ba chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó các chữ số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau (theo thứ tự đó) ứng với chỉ một hoán vị của 5 phần tử của tập F = {1, 2, α, 6, 7}, và ngược lại.

Vậy số các số phải tìm bằng:

$P_5 = 5! = 120$ số.

Trường hợp 2: Các số 3, 4, 5 đứng cạnh nhau theo thứ tự bất kỳ.

Ta biết rằng có 3! cách chọn các bộ 3 chữ số (3, 4, 5) đứng cạnh nhau và theo thứ tự bất kỳ.

Vậy số các số phải tìm bằng:

$3!.P_5 = 720$ số.

c. Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng 123, ứng với chỉ một hoàn vị của 4 chữ số (4, 5, 6, 7).

Vậy số các số phải tìm bằng:

$P_4 = 4! = 24$ số.

Ví dụ 2: *Cho tập hợp* A = {1, 2, 3,..., n} *với* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. *Hỏi có bao nhiêu cặp* (x; y) *với* $x \in A$, $y \in A$ và $x > y$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện phép đếm:

- Với tập A ta có thể lập được $n.n = n^2$ cặp (x; y).
- Trong số cặp trên có n cặp thoả mãn x = y.
- Số cặp thoả mãn x > y và x < y là bằng nhau.

Từ đó, suy ra số cặp (x; y) thoả mãn x > y bằng $\frac{n^2 - n}{2}$.

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện phép đếm:

- Với $x = n$ ta sẽ có $n - 1$ cách chọn y để $x > y$.
- Với $x = n - 1$ ta sẽ có $n - 2$ cách chọn y để $x > y$.

...

- Với $x = 2$ ta sẽ có 1 cách chọn y để $x > y$.

Vậy, số cách chọn bằng:

$$(n-1) + (n-2) + ... + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ví dụ 3: *Ông X có 11 người bạn. Ông ta muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có 2 người không muốn gặp mặt nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu cách mời ?*

✍ *Giải*

Có 2 khả năng:

- Ông X chỉ mời 1 trong 2 người đó và mời thêm 4 trong số 9 người còn lại, khi đó ta có:

$$2C_9^4 = 2.\frac{9!}{4!\ 5!} = \frac{2.6.7.8.9}{24} = 252 \text{ cách.}$$

- Ông X không mời ai trong hai người đó cả mà chỉ mời 5 trong 9 người bạn kia, khi đó ta có:

$$C_9^5 = 126 \text{ cách.}$$

Vậy, số cách mời tất cả là:

$252 + 126 = 378$ cách.

☞ ***Chú ý***: Rất nhiều em học sinh khi giải ví dụ trên bỏ quên mất khả năng thứ 2.

Ví dụ 4: *Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là 1 số lẻ.*

✍ *Giải*

Xét số có 5 chữ số $\alpha = \overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$, để α có tổng các chữ số là một số lẻ, có hai khả năng xảy ra:

- Nếu $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ chẵn thì $\alpha_5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- Nếu $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ lẻ thì $\alpha_5 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Mặt khác, số các số có 4 chữ số $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ bằng $9.10.10.10 = 9.10^3$ và mỗi số đó sinh 5 số có 5 chữ số mà tổng các chữ số là một số lẻ.

Vậy có tất cả $5.\ 9.10^3 = 45000$ số.

Ví dụ 5: *Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 .*

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

- Các số có 6 chữ số chia hết cho 9 là:

100008, 100017, 100026, 100035,...,999999

- Các số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 lập thành một cấp số cộng với:

  $u_1 = 100017$, $u_n = 999999$ và $d = 18$

Do đó:

$100017 + (n - 1).18 = 999999 \Leftrightarrow n = 50000.$

Vậy, có 50000 số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 .

Ví dụ 6: *Với các chữ số* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

a. *Lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số, chữ số* 5 *có mặt đúng* 4 *lần, các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng* 1 *lần* ?

b. *Lập được bao nhiêu số có* 10 *chữ số mà trong mỗi số chữ số* 2 *có mặt đúng* 3 *lần, chữ số* 4 *có mặt đúng* 2 *lần và các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng* 1 *lần* ?

✍ *Giải*

a. Một trong các số phải lập có dạng 5105523456

Số các số có thể có chính là số hoán vị 10 chữ số của số trên, với chữ số 5 được lặp lại 4 lần $\frac{10!}{4!}$

Trong đó kể cả những số có chữ số 0 đứng tận cùng bên trái dạng: 0535125456 (*) mà ta phải loại đi.

Số các số có dạng (*) bằng số hoán vị của 9 chữ số (không có chữ số 0) trong đó chữ số 5 lặp lại 4 lần $\frac{9!}{4!}$

Do đó: Số các số phải tìm là:

$$\frac{10!}{4!} - \frac{9!}{4!} = \frac{10! - 9!}{4!} = \frac{9.9!}{4!} = 9.9.8.7.6.5 = 136080 \text{ số}$$

Vậy, có 136080 số

b. Một trong các số phải tìm có dạng: 3502462142 (*)

Số các số có thể có bằng số hoán vị của 10 chữ số của (*), trong đó chữ số 2 lặp lại 3 lần, chữ số 4 lặp lại 2 lần $\frac{10!}{3!2!}$.

Kể cả những số có chữ số 0 đứng tận cùng bên trái, dạng 0231425246 (**) mà ta phải bỏ đi.

Số các số có dạng (**) bằng hoán vị của 9 chữ số (không kể chữ số 0) trong đó chữ số 2 lặp lại 3 lần, chữ số 4 lặp lại 2 lần $\frac{9!}{3!2!}$.

Do đó, số các số phải tìm là:

$$\frac{10!}{3!2!} - \frac{9!}{3!2!} = \frac{10! - 9!}{3!2!} = \frac{9.9!}{3!2!} = 9.9.8.7.6.5.2 = 272160 \text{ số.}$$

Vậy có 272160 số.

Ví dụ 7: *Có bao nhiêu cách chia n vật khác nhau thành* k *nhóm mà nhóm thứ nhất có* n_1 *vật, nhóm thứ hai có* n_2 *vật,..., nhóm thứ* k *có* n_k *vật và hai nhóm bất kì không chứa vật nào chung* ?

✍ *Giải*

Ta có:

- Số cách chọn n_1 trong n vật bằng $C_n^{n_1}$.
- Số vật còn lại là $n - n_1$. Có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách chọn n_2 vật trong $(n - n_1)$ vật.
- Số vật còn lại sau lần chọn thứ hai là $n - n_1 - n_2$. Có $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ cách chọn n_3 vật trong $(n - n_1 - n_2)$.

  ...
- Số cách chọn n_k vật trong $(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1})$ vật bằng

  $C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k}$.

Do đó, số cách chia n vật thành k nhóm n_1 vật, n_2 vật, …, n_k vật phân li mà tổng bằng n là:

$$C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.C_{n-n_1-n_2}^{n_3}...C_{n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}}^{n_k}$$

$$= \frac{n\,!}{n_1!(n-n_1)!}.\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}.\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}$$

$$...\frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

☞ ***Chú ý***: Đáp số của ví dụ trên chính là hoán vị n vật trong đó có n_1 vật lặp lại; n_2 vật khác lặp lại; ... , n_k vật khác lặp lại:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Ví dụ 8: *Gieo* 1 *con xúc sắc* 6 *mặt* k *lần.*

a. *Có bao nhiêu kết quả khác nhau* ?

b. *Có bao nhiêu kết quả, trong đó mặt* 1 *điểm không lần nào xuất hiện* ?

✍ *Giải*

Đặt E = {1, 2, 3, 4, 5} là tập các số điểm trên 6 mặt xúc sắc.

a. Một kết quả của k lần gieo con xúc sắc ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k)$ có k phần tử , trong đó $\alpha_i \in E$, $i = \overline{1,k}$, α_i chỉ số điểm trên mặt xúc sắc ở lần gieo thứ i.

Vậy, mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k)$ là phần tử của tích Đềcác $\underbrace{E \times ... \times E}_{\text{k lan}} = E^{(k)}$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$| E^{(k)} | = |E|^k = 6^k$ cách.

b. Một kết quả của k lần gieo con xúc sắc, trong đó mặt 1 điểm không lần nào xuất hiện, ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k)$ có k phần tử , trong đó $\alpha_i \in E_1 = E \backslash \{1\}$, $i = \overline{1,k}$, α_i chỉ số điểm trên mặt xúc sắc ở lần gieo thứ i.

Vậy, mỗi bộ (α_1, α_2, ...α_k) là phần tử của tích Đềcác $\underbrace{E_1 \times ... \times E_1}_{k\ lan} = E_1^{(k)}$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$|E_1^{(k)}| = |E_1|^k = 5^k$ cách.

Ví dụ 9: *Số* 210 *có bao nhiêu ước số.*

✍ *Giải*

Phân tích 210 ra thừa số nguyên tố 210 = 2.3.5.7

Đặt E = {2, 3, 5, 7}.

Khi đó, từ E ta xây dựng được các ước số của 210 khác 1 .

Vậy, số ước số của 210 bằng số tập con của tập E, và bằng

$2^4 = 16$.

Tổng quát hoá: Để tìm số các ước của số A, ta thực hiện theo các bước sau:

Phân tích A ra thành tích thừa số nguyên tố:

$A = p_1...p_k$, với $p_i \neq 1$, $i = \overline{1,k}$ và đôi một khác nhau.

Đặt tập E = {p_1, ..., p_k}.

Khi đó, từ E ta xây dựng được các ước số của A khác 1, do đó số ước số của A bằng số tập con của tập E, và bằng 2^k.

☞ ***Chú ý***: Bạn đọc sẽ thắc mắc tập con $\varnothing$ sẽ ứng với ước nào của A, câu trả lời là ứng với ước 1.

Ví dụ 10: *Xem hoán vị của* 3 *chữ số* 1, 2, 3, 4. *Tính tổng* S *của tất cả các số tạo thành bởi hoán vị đó.*

✍ *Giải*

Đặt E = {1, 2, 3, 4}.

Từ tập E có thể lập được:

4! = 24 số gồm 4 chữ số khác nhau.

Nhận xét rằng, các số 1, 2, 3, 4 xuất hiện ở các hàng đơn vị hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn 6 lần, từ đó:

$$S = 10^3.6.(1 + 2 + 3 + 4) + 10^2.6.(1 + 2 + 3 + 4) + 10.6.(1 + 2 + 3 + 4) + 6.(1 + 2 + 3 + 4) = 66660.$$

Ví dụ 11: *Rút gọn biểu thức* $S = P_1A_2^1 + P_2A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4A_5^4 + P_5A_6^5 - P_1P_2P_3P_4P_5$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$S = 1!\frac{2!}{1!} + 2!\frac{3!}{1!} + 3!\frac{4!}{1!} + 4!\frac{5!}{1!} + 5!\frac{6!}{1!} - 1!2!3!4!5!$$

$$= 1!2! + 2!3! + 3!4! + 4!5! + 5!6! - 1!2!3!4!5!$$

$$= 2 + 12 + 144 + 2880 + 86400 - 34560 = 54878.$$

Ví dụ 12: *Rút gọn biểu thức*:

a. $A = \frac{n!}{(n-3)!A_n^2} - \frac{P_{n+1}}{(n+2)!}$. b. $B = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\frac{n!}{(n-3)!A_n^2} = \frac{n!}{(n-3)!\frac{n!}{(n-2)!}} = \frac{n!(n-2)!}{(n-3)!n!} = n-2$$

$$\frac{P_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}$$

Khi đó:

$$A = (n-2) - \frac{1}{(n+2)} = \frac{(n-2)(n+2)-1}{n+2} = \frac{n^2-5}{n+2}.$$

b. Ta lần lượt có:

$$C_n^1 = n,\ 2\frac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\frac{\frac{n!}{2!.(n-2)!}}{\frac{n!}{1!.(n-1)!}} = n-1, ..., n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{\frac{n!}{(n-1)!.1!}} = 1,$$

suy ra:

$$B = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để giảm thiểu độ phức tạp của biểu thức cần biến đổi chúng ta đã lựa chọn việc biến đổi từng phần.

Ví dụ 13: *Chứng minh rằng*:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + ... + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}. \quad (*)$$

Giải

Trước hết, ta nhớ rằng:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Với k = 1, đẳng thức (*) có dạng:

$$C_n^n + C_{n+1}^n = C_{n+2}^{n+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{(n+1)!}{n!.(n+1-n)!} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!.(n+2-n-1)!}$$

$\Leftrightarrow$ 1 + n + 1 = n + 2, luôn đúng.

Vậy, đẳng thức đúng với n = 1.

Giả sử đẳng thức đúng với k = m, tức là ta có:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + ... + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1} \quad (1)$$

ta cần đi chứng minh nó cũng đúng với k = m + 1, tức là cần chứng minh:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + ... + C_{n+m}^n + C_{n+m+1}^n = C_{n+m+2}^{n+1}.$$

Thật vậy, với kết quả từ (1), ta được:

$$VT = C_{n+m+1}^{n+1} + C_{n+m+1}^n = C_{n+m+2}^{n+1} = VP, \text{ đpcm.}$$

(ĐHQG Khối D 99): Chứng minh rằng với k, n $\in$ **N**, $2 \le k \le n$ luôn có: $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Ta có:

$$VP = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1).\frac{(n-2)!}{(k-2)!.(n-k)!}$$

$$= \frac{n!.k.(k-1)}{k.(k-1).(k-2)!.(n-k)!} = k(k-1).\frac{n!}{k!.(n-k)!} = k(k-1)C_n^k.$$

Ví dụ 14: (ĐHQG TPHCM Khối D 97): *Chứng minh rằng với* k, n $\in$ **N**, $4 \le k \le n$ *ta có*:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

✍ *Giải*

Áp dụng công thức biến đổi:

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}, \text{ với } 0 \le r \le n.$$

Ta có:

$$VT = C_n^k + C_n^{k-1} + 3(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + 3(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$$

$$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$$

$$= C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1} + 2(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) + C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$$

$$= C_{n+2}^k + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2} = C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}$$

$$= C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} = C_{n+4}^k, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 15: *Chứng minh đẳng thức*:

$$2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$$

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + \left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}. \quad (1)$$

$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} =$$

$$= \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 2\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 16: *Chứng minh rằng* $C_{m-1}^{p-1}+C_{m-2}^{p-1}+C_{m-3}^{p-1}+...+C_{p}^{p-1}+C_{p-1}^{p-1}=C_{m}^{p}$.

✍ *Giải*

Áp dụng công thức:

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$$

Ta có:

$$C_{m-1}^{p-1}=C_{m-1}^{p}=C_{m}^{p}$$

$$C_{m-2}^{p-1}+C_{m-2}^{p}=C_{m-1}^{p}$$

....

$$C_{m-1}^{p-1}+C_{m-3}^{p}=C_{m-2}^{p}$$

$$C_{p}^{p-1}+C_{p}^{p-3}=C_{p+1}^{p}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$C_{m-1}^{p-1}+C_{m-2}^{p-1}+C_{m-3}^{p-1}+...+C_{p}^{p-1}+C_{p}^{p}=C_{m}^{p}. \qquad (*)$$

Vì $C_p^p=1=C_{p-1}^{p-1}$ thay vào (*), ta có đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 17: (ĐHQG Khối A 2000): *Chứng minh rằng*:

$$C_{2001}^{k}+C_{2001}^{k+1}\le C_{2001}^{1000}+C_{2001}^{1001} \text{ với } 0\le k\le 1000,\ k\in \mathbf{N}.$$

✍ *Giải*

Biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$C_{2002}^{k+1}\le C_{2002}^{1001}.$$

Ta xét dãy số:

$$u_k=C_{2002}^{k+1} \text{ với } 0\le k\le 1000,\ k\in \mathbf{N}.$$

Ta đi chứng minh dãy $\{u_k\}$ đơn điệu tăng, thật vậy:

$$u_{k+1}>u_k=C_{2002}^{k+2}>C_{2002}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2002!}{(k+2)!.(2000-k)!}>\frac{2002!}{(k+1)!.(2000-k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+2}>\frac{1}{2001-k}\Leftrightarrow 1999>2k\Leftrightarrow k\le 999$$

$$\Rightarrow u_k\le u_{999}\Leftrightarrow C_{2002}^{k+1}\le C_{2002}^{1000}<C_{2002}^{1001}$$

$$\Leftrightarrow C_{2002}^{k+1}\le C_{2002}^{1001}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 18: *Cho dãy* (S_m), $m\in \mathbf{N}$ *và* $m\ge 4$, *xác định như sau*:

$$S_4 = 1;$$

$$S_{m+1}=S_m+1(m-2)+2(m-3)+3(m-4)+...+(m-2).1$$

Chứng minh rằng $S_m=C_m^4$.

✍ *Giải*

Theo giả thiết:

$S_4 = 1 = C_4^4$.

Tiếp theo, ta biến đổi biểu thức:

$$A = 1(m-2) = 2(m-3) + 3(m-4) + \ldots + (m-2).1$$
$$= 1[(m-1)-1] + 2[(m-1)-2] + 3[(m-1)-3] + \ldots + (m-2)[(m-1)-(m-2)]$$
$$= (m-1) + 2(m-1) + 3(m-1) + \ldots + (m-2)(m-1) - [1 + 4 + 9 + \ldots + (m-2)^2)]$$
$$= (m-1)[1 + 2 + 3 + \ldots + (m-2)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-2)^2]$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)(m-1)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)(2m-3)}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = C_m^3.$$

Do đó, ta có $S_{m+1} = S_m + C_m^3$, suy ra:

$S_m = S_{m-1} + C_{m-1}^3 = C_{m-1}^3 + C_{m-2}^3 + \ldots + C_3^3$.

Từ đó, bài toán được chuyển về việc chứng minh rằng:

$C_{m-1}^3 + C_{m-2}^3 + \ldots + C_3^3 = C_4^4$. (1)

Đẳng thức (1) được chứng minh bằng phương pháp qui nạp toán học.

☞ ***Chú ý***: Trong lời giải của bài trên, chúng ta đã sử dụng các kết quả:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ví dụ 19: *Chứng minh rằng với* $0 \le k \le n$ *và* $k, n \in \mathbf{Z}$ *luôn có*:

$$C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2.$$

✍ *Giải*

Cố định n, ta xét dãy số:

$u_k = C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n$ với $0 \le k \in \mathbf{Z}$,

khi đó, bất đẳng thức được biểu diễn dưới dạng:

$u_k \le u_0$ với $0 \le k \in \mathbf{Z}$.

Ta đi chứng minh dãy $\{u_k\}$ đơn điệu giảm, thật vậy:

$$u_{k+1} < u_k \Leftrightarrow \frac{(2n+k+1)!}{n!.(n+k+1)!}.\frac{(2n-k-1)!}{n!.(n-k-1)!} < \frac{(2n+k)!}{n!.(n+k)!}.\frac{(2n-k)!}{n!.(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+k+1}{n+k+1} < \frac{2n-k}{n-k} \Leftrightarrow n + 2nk > 0 \text{ luôn đúng.}$$

Suy ra:

$u_k \le u_0$ với $0 \le k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow C_{2n+k}^{n} . C_{2n-k}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2$, đpcm.

Ví dụ 20: *Tìm* $n \in \mathbf{N}$ *sao cho*:

a. $P_{n+5} = 15\, A^k_{n+1}.P_{n+4-k}$.   b. $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)\,!} < \dfrac{15}{(n-1)\,!}$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} n+1 \ge k \\ 0 \le n+4-k \in N \end{cases} \Leftrightarrow n + 1 \ge k \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(n+5)! = 15\frac{(n+4)!}{(n+4-k)!}(n+4-k)! \Leftrightarrow (n+5)! = 15(n+4)!$$

$$\Leftrightarrow n + 5 = 15 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy, với n = 10 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$A_{n+4}^4 = (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$

$$(n+2)\,! = (n-1)!\, n(n+1)(n+2)$$

suy ra:

$$\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)\,!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n-1)\,!\, n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+3)(n+4)}{(n-1)\,!\, n}$$

Khi đó, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{(n+3)(n+4)}{(n-1)\,!.n} < \frac{15}{(n-1)\,!} \Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} n=3 \\ n=4 \\ n=5 \end{array}\right..$$

Vậy, ta tìm được n = 3, n = 4 và n = 5.

Ví dụ 21: (ĐHBK HA Nôi – 2000): *Giải bất phương trình* $\dfrac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \dfrac{6}{x}C_x^3 + 10$.

Giải

Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}.\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!.(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.(2x-1).2x - (x-1).x \le \frac{6}{x}.\frac{(x-2)(x-1)x}{3!} + 10$$

$\Leftrightarrow (2x - 1)x - (x - 1)x \le (x - 2)(x - 1) + 10$

$\Leftrightarrow 3x - 12 \le 0 \Leftrightarrow x \le 4 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 3 \le x \le 4 \overset{x\in N}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là x = 3 và x = 4.

Ví dụ 22: (CĐSP TPHCM 99). *Tìm* $k \in \mathbf{N}$ *biết rằng* $C_{14}^{k} + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$.

Giải

Điều kiện $k \le 12$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{14!}{k!.(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!.(12-k)!} = \frac{2.14!}{(k+1)!.(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = 8 \end{array}\right.$, thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, với k = 4 và k = 8 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 23: (ĐHNN HN – 99) *Tìm các số* x *nguyên dương thoả mãn phương trình*:

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

Giải

Điều kiện $3 \le x \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$VT = \frac{x!}{(x-1)!} + \frac{6x!}{2!.(x-2)!} + \frac{6x!}{3!.(x-3)!}$$

$$= x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2) = x^3.$$

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 14x = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 7.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 7.

Ví dụ 24: *Giải phương trình* $\dfrac{A_{x+1}^{y+1}.P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} y+1 \le x+1 \\ x-y \in N \\ x-1 \in N^+ \end{cases} \Leftrightarrow y \le x \text{ và } x, y \in \mathbf{N}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\frac{(x+1)!}{(x-y)!}.(x-y)!}{(x-1)!} = 72 \Leftrightarrow (x+1)x = 72 \Leftrightarrow x^2 + x - 72 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 8.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 8 và $7 \ge y \in \mathbf{N}$.

Ví dụ 25: *Tìm* x *và* y, *biết* $\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1$.

Giải

Điều kiện $3 \le n \in \mathbf{N}$. (*)

Biến đổi hệ thức về dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_x^{y-1} = 10 : 2\\ A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 2 : 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\frac{(x-1)!}{(x-1-y)!} + \frac{y(x-1)!}{(x-y)!}\right] : \frac{x!}{(x+1-y)!} = 5\\ \frac{x!}{(x+1-y)!} : \frac{x!}{(x-y+1)!} = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)!(x-y) + y(x-1)!}{(x-y)!}.\frac{(x-y+1)!}{x!} = 5\\ (y-1)! = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)!(x-y+y)(x-y+1)}{x!} = 5\\ y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y + 1 = 5\\ y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 7\\ y = 3\end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm x = 7 và y = 3.

Ví dụ 26: *Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình*:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

trong đó m *là* 1 *số nguyên dương cho trước*.

Giải

Gọi $S_n(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Ta lần lượt tính $S_1(m)$, $S_2(m)$, $S_3(m)$,...,$S_n(m)$.

- $S_1(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 = m$$

phương trình có 1 nghiệm nguyên dương duy nhất, do đó:

$$S_1(m) = 1 = C_{m-1}^{0}.$$

- $S_2(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 = m$$

Vì x_1 có thể lần lượt các giá trị 1, 2, 3, ..., m – 1 nên phương trình có các nghiệm sau:

(1, m – 1), (2, m – 2), (3, m – 3), ..., (m – 1, 1), có tất cả (m – 1) nghiệm nguyên dương, do đó:

$$S_2(m) = m - 1 = C_{m-1}^1$$

- $S_3(m)$ là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 = m. \qquad (*)$$

Với $x_1 = 1$, ta có:

$$x_2 + x_3 = m - 1 \qquad (1)$$

Theo trên, số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng:

$$S_2(m - 1) = m - 2$$

Với $x_1 = 2$, ta có:

$$x_2 + x_3 = m - 2 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên dương của (2) bằng:

$$S_2(m - 2) = m - 3$$

…

Với $x_1 = m - 2$, ta có:

$$x_2 + x_3 = 2$$

ta được $S_2(2) = 1$.

Do đó, số nghiệm nguyên dương của (*) bằng

$$S_3(m) = S_2(m - 1) + S_2(m - 2) + ... + S_2(2)$$

$$= (m-2) + 9m - 3) + ... + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} = C_{m-1}^2.$$

Từ đó, ta giả sử số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = m$$

là $S_k(m) = C_{m-1}^{k-1}$.

Ta chứng minh số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = m$$

là $S_{k+1}(m) = C_{m-1}^{k}$ – *Bạn đọc tự chứng minh.*

Ví dụ 27: *Rút gọn các biểu thức sau*:

a. $A = 2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ...$

b. $B = 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + ...$

✍ *Giải*

Ta có:

$$(2x+1)^n = C_n^0 x^n 2^n + C_n^1 x^{n-1} 2^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} 2^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} 2^{n-3} + C_n^4 x^{n-4} 2^{n-4} + ... (1)$$

$$(2x-1)^n = C_n^0 x^n 2^n - C_n^1 x^{n-1} 2^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} 2^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} 2^{n-3} + C_n^4 x^{n-4} 2^{n-4} - ... (2)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$3^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-4} C_n^4 + ... \Leftrightarrow A + B = 3^n \qquad (3)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$1 = 2^n C_n^0 - 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 - 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-4} C_n^4 - ... \Leftrightarrow A - B = 1. \ (4)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (3) và (4), ta được:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(3^n + 1) \\ B = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{cases}.$$

Ví dụ 28: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$3^n[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n] = 2^n.$$

Giải

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1 - x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + ... + (-1)^k C_n^k x^k + ... + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay $x = \frac{1}{3}$ vào (1), ta được:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^n}{3^n} = C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n = 3^n[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n], \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 29: *Chứng minh các đẳng thức sau*:

a. $C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + ... + 6^nC_n^n = 7^n$.

b. $3^{17}C_{17}^0 + 4^13^{16}C_{17}^1 + ... + 4^{17}C_{17}^{17} = 7^{17}$.

Giải

a. Ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n. \quad (1)$$

Thay x = 6 vào (1), ta được:

$$C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + 6^3C_n^3 + ... + 6^nC_n^n = 7^n, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(3x + 4)^{17} = C_{17}^0(3x)^{17} + C_{17}^1(3x)^{16}.4^1 + ... + C_{17}^{17}4^{17}. \quad (2)$$

Thay x = 1 vào (2), ta được:

$$3^{17}C_{17}^0 + 4^13^{16}C_{17}^1 + ... + 4^{17}C_{17}^{17} = 7^{17}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 30: *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*:

$$4^n C_n^0 - 4^{n-1} C_n^1 + 4^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n . C_n^n =$$
$$= C_n^0 + 2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n .$$

Giải

a. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(4 - x)^n = C_n^0 4^n - C_n^1 4^{n-1}.x + C_n^2 4^{n-2}.x^2 + \dots + (-1)^n . C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay x = 1 vào (1), ta được:

$$3^n = 4^n C_n^0 - 4^{n-1} C_n^1 + 4^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n . C_n^n . \quad (2)$$

b. Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n. \quad (3)$$

Thay x = 2 vào (3), ta được:

$$3^n = C_n^0 + 2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n . \quad (4)$$

Từ (2) và (4), suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 31: *Chứng minh rằng với các số* m, n, p *nguyên, dương sao cho* $p \le n$ *và* $p \le m$ *ta có*:

$$C_{n+m}^p = C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \dots + C_n^{p-1} C_m^1 + C_n^p C_m^0 .$$

Giải

Với mọi x, và với n, m là số nguyên dương ta có:

$$(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n . (1 + x)^m . \quad (1)$$

Mặt khác:

- $$(1 + x)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p . \quad (2)$$
- $$(1 + x)^n.(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k . \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k = \sum_{p=0}^{n+m} [(\sum_{k=0}^{p} C_n^k . C_m^{p-k}) x^p]. \quad (3)$$

Do (1) nên các hệ số của x^p, $p = \overline{0, n+m}$ trong các khai triển (2) và (3) bằng nhau. Vậy, ta được:

$$C_{n+m}^p = \sum_{k=0}^{p} C_n^k . C_m^{p-k} \text{ , đpcm.}$$

Nhận xét quan trọng **:**

1. Với p = n = m, ta được:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n .$$

2. Với p = r, N = n + m, ta được:

$$C_N^r = C_{N-m}^0 C_m^r + C_{N-m}^1 C_m^{r-1} + \dots + C_{N-m}^{r-1} C_m^1 + C_{N-m}^r C_m^0 .$$

3. Bạn đọc hãy lấy ý tường trong ví dụ trên áp dụng với khai triển $(1 - x)^{n + m}$, từ đó chứng minh rằng:

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + ... + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$$

Ví dụ 32: *Với* n *là số nguyên, dương và lớn hơn* 1, *chứng minh rằng*:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

✍ *Giải*

Với mọi x, và với n là số nguyên dương ta có $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. (1)

Thay $x = \frac{1}{n}$ vào (1), ta được $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}$.

Ta lần lượt có các đánh giá sau:

- Ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{1} \frac{C_n^k}{n^k} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{n} = 1 + 1 = 2. \quad (2)$$

- Ta có nhận xét sau với $k \geq 2$:

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{n^k.k!.(n-k)!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Áp dụng với $k = \overline{2,n}$, ta nhận được:

$$\frac{C_n^2}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{C_n^3}{n^3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \; ..., \; \frac{C_n^n}{n^n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

suy ra:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} < 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 33: (ĐH Luật HN – 2004): *Một đề thi có* 5 *câu được chọn ra từ một ngân hàng câu hỏi có sẵn gồm* 100 cầu, *một học sinh học thuộc* 80 *câu. Tìm xác suất để học sinh đó rút ngẫu nhiên được một đề thi có* 4 *câu đã học thuộc*?

✍ *Giải*

Gọi A là biến cố "Rút được đề thi có 4 câu đã học thuộc", ta lần lượt có:

- Vì ngân hàng câu hỏi có 100 câu và mỗi đề thi có 5 câu nên có C_{100}^5 cách lập các đề thi, tức là $|\Omega| = C_{100}^5$.
- Học sinh đã học thuộc 80 câu suy ra có C_{80}^4 khả năng chọn ra 4 câu đã học thuộc, tức là $|\Omega_A| = C_{80}^4.C_{20}^1$.

Do vậy $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^4.C_{20}^1}{C_{100}^5}$.

Ví dụ 34: (ĐH Nông nghiệp I – 2003): *Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ.*

a. *Cần chọn một nhóm 4 người làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.*

b. *Tính xác suất để chọn 4 người ngẫu nhiên thì ta được nhóm có đúng 1 học sinh nữ.*

c. *Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm 3 công việc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau? Tính xác suất để mỗi nhóm đi làm việc thì có đúng 1 nữ.*

Giải

a. Vì tổ có 12 người nên số cách chọn 4 người bằng số các tổ hợp chập 4 của 12, tức là có $C_{12}^4 = 495$ (cách chọn).

b. Ta có:

- $C_3^1 = 3$ cách chọn 1 nữ.
- $C_9^3 = 84$ cách chọn 3 nam.

Do đó, có $C_3^1.C_9^3 = 252$ cách chọn 1 nữ và 3 nam.

Vậy, xác suất để chọn ngẫu nhiên một nhóm 4 người trong đó có 3 nam và 1 nữ là:

$$\frac{252}{495} = \frac{28}{55}$$

c. Ta có:

- Có C_{12}^4 cách chọn 4 người làm công việc thứ nhất.
- Có C_8^4 cách chọn 4 người làm công việc thứ hai.
- Có C_4^4 cách chọn 4 người làm công việc thứ ba.

  Do đó, có $C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 34650$ cách chia tổ hợp thành 3 nhóm đi làm 3 công việc khác nhau.

- Với công việc thứ nhất ta có $C_9^3.C_3^1$ cách chọn 3 nam và 1 nữ.
- Với công việc thứ hai ta có $C_6^3.C_2^1$ cách chọn 3 nam và 1 nữ.
- Với công việc thứ ba ta có $C_3^3.C_1^1 = 1$ cách chọn 3 nam và 1 nữ.

Vậy, xác suất:

$$P = \frac{C_9^3.C_3^1.C_6^3.C_2^1.C_3^3.C_1^1}{C_{12}^4.C_8^4.C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

Ví dụ 35: *Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu:*

A *là biến cố* : "*Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng*",

B *là biến cố* : "*Quả lấy từ hộp thứ hai trắng*".

a. *Xét xem* A *và* B *có độc lập không* ?

b. *Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.*

c. *Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.*

✍ *Giải*

Ta có không gian mẫu Ω có số phần tử bằng:

$10 \times 10 = 100$.

a. Ta lần lượt có:

- Số trường hợp lấy 1 quả cầu trắng ở hộp thứ nhất bằng 6. Số trường hợp lấy 1 quả cầu ở hộp thứ hai bằng 10.

  Do đó, với biến cố A, ta có:

  $6 \times 10 = 60$ phần tử.

  Từ đó, suy ra:

  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

- Số trường hợp lấy 1 quả cầu ở hộp thứ nhất bằng 10. Số trường hợp lấy 1 quả cầu trắng ở hộp thứ hai bằng 4.

  Dođó, với biến cố B, ta có:

  $4 \times 10 = 40$ phần tử.

  Từ đó, suy ra:

  $$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

Với biến cố C: " lấy 1 quả cầu trắng ở hộp thứ nhất và lấy 1 quả cầu trắng ở hộp thứ hai" ta có xác suất:

$$P(C) = P(AB) = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

Mặt khác:

$$P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{2}{5} = \frac{6}{25} = P(AB).$$

Vậy, hai biến cố A và B độc lập với nhau.

b. Gọi C là biến cố " hai quả cầu lấy ra cùng màu ", trong đó:

- C_1 là biến cố " hai quả cầu lấy ra màu trằng", ta được:

  C_1 có $6.4 = 24$ phần tử.

  $$P(C_1) = \frac{|C_1|}{|\Omega|} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

- C_2 là biến cố " hai quả cầu lấy ra màu đen", ta được:

  C_2 có $4.6 = 24$ phần tử.

  $$P(C_2) = \frac{|C_2|}{|\Omega|} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

Khi đó:

$$P(C) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

c. Gọi D là biến cố " hai quả cầu lấy ra khác màu ", ta thấy ngay:

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}.$$