CHƯƠNG 3 – PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

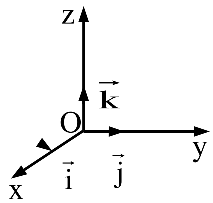
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1

> *Hệ gồm ba trục* Ox, Oy, Oz *đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ trong không gian.*



Kí hiệu Oxyz hoặc (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị lần lượt nằm trên ba trục đó.

- Điểm O được gọi là ***gốc tọa độ***.
- Trục Ox được gọi là ***trục hoành***, trục Oy được gọi ***là trục tung***, trục Oz được gọi là ***trục cao***.

Ta chú ý rằng:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

2. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

Ta có $\vec{v}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Nếu $\vec{v}(x; y; z)$ thì $x = \vec{v}.\vec{i}$, $y = \vec{v}.\vec{j}$, $z = \vec{v}.\vec{k}$.

Các tính chất: Đối với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ ta có các kết quả sau:

1). $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

2). $\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1)$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

3). $\alpha\vec{v}_1 \pm \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 \pm \beta x_2; \alpha y_1 \pm \beta y_2; \alpha z_1 \pm \beta z_2)$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4). $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

5). $|\vec{v}_1| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

6). $\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

7). $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

3. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Ta có M(x; y; z) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

☞ ***Chú ý***: Ta có các kết quả:

$M \equiv O \Leftrightarrow x = y = z = 0.$

$M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là M(x; y; 0).
$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là M(0; y; z).
$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là M(x; 0; z).

$M \in Ox \Leftrightarrow y = 0$ và $z = 0$, tức là M(x; 0; 0).
$M \in Oy \Leftrightarrow x = 0$ và $z = 0$, tức là M(0; y; 0).
$M \in Oz \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$, tức là M(0; 0; z).

4. LIÊN HỆ GIỮA TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ HAI ĐIỂM MÚT

Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

b. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

5. TÍCH CÓ HƯỚNG (HAY TÍCH VECTƠ) CỦA HAI VECTƠ

<u>Định nghĩa 2</u>

Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ *và* $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ *kí hiệu* $\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]$ *là một vectơ* $\vec{v}$ *được xác định bởi*:

$$\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Các tính chất của tích có hướng: Ta có:

a. Vectơ $\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]$ vuông góc với hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, tức là:

$$\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\vec{v}_1 = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\vec{v}_2 = 0.$$

b. $\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]\right| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, trong đó α là góc giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

c. $\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] = \vec{0}$ khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ cùng phương.

<u>Ứng dung của của tích có hướng</u>

Diện tích hình bình hành: Diện tích của hình bình hành ABCD được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}),$$

Diện tích tam giác: Diện tích của ΔABC được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}).$$

Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

Định lí: *Điều kiện cần và đủ để ba vectơ* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *và* $\vec{v}_3$ *đồng phẳng là:*

$$\left[\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right].\vec{v}_3 = 0.$$

Thể tích hình hộp: Thể tích V của hình hộp ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi công thức:

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA_1}\right|.$$

Thể tích tứ diện: Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|.$$

6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt cầu* (S) *có tâm* I(a; b; c) *và bán kính* R *có phương trình*:

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc của mặt cầu.*

Vậy, ta được:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

☞ ***Chú ý***: Ta có:

- Mặt cầu tâm O bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Mặt cầu đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt* (S) *có phương trình*:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \qquad (2)$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ *là phương trình của mặt cầu tâm* I(a; b; c) *và bán kính* $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt cầu.*

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Định lí: *Trong không gian* Oxyz, *mặt phẳng* (P) *đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *và có vtpt* $\vec{n}$ (A; B; C) *có phương trình*:

$$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Vậy, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A;B;C) \end{cases} \Leftrightarrow (P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng trong không gian Oxyz là:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (1)$$

Khi đó, nó nhận vectơ $\vec{n}(A; B; C)$ làm một vtpt.

2. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

1. Nếu D = 0, mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ.
2. Nếu $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P): $By + Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Ox.

   Tương tự:

   - Mặt phẳng (P): $Ax + Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Oy.
   - Mặt phẳng (P): $Ax + By + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Oz.
3. Nếu $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P): $Cz + D = 0$ chứa hoặc song song với trục Ox và Oy nên nó song song hoặc trùng với mặt phẳng xOy.

   Tương tự:

   - Mặt phẳng (P): $Ax + D = 0$ song song hoặc trùng với mặt phẳng yOz.
   - Mặt phẳng (P): $By + D = 0$ song song hoặc trùng với mặt phẳng xOz.

   Đặc biệt, các phương trình $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ theo thứ tự là phương trình của các mặt phẳng tọa độ yOz, xOz, xOy.
4. Nếu $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ thì bằng cách đặt:

$$a = -\frac{D}{A}, \ b = -\frac{D}{B}, \ c = -\frac{D}{C} \Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2)$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P). Mặt phẳng đó cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).

Vậy, ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(a;0;0) \\ \text{Qua } B(0;b;0) \\ \text{Qua } C(0;0;c) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, điều kiện $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, điều kiện $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$,

khi đó vectơ $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ theo thứ tự là vtpt của (P_1) và (P_2), do đó:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P_1) \equiv (P_2)$.

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P_1) // (P_2)$.

c. Nếu $A_1: B_1: C_1 \neq A_2: B_2: C_2$ thì $(P_1) \cap (P_2) = \{(d)\}$.

4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó, khoảng cách từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian Oxyz, đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$ có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ – ***Phương trình tham số.***

$$(d): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ với $abc \neq 0$ – ***Phương trình chính tắc.***

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

hoặc $(d): \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

☞ ***Chú ý***: Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có phương trình:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, có vtpt $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1; C_1)$,

(P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, có vtpt $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2; C_2)$

với điều kiện $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$. (*)

Điều kiện (*) chứng tỏ (P_1) và (P_2) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng (d) gồm những điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

- (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$.
- (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

Khi đó, xét ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ ta có kết quả:

1. (d_1) và (d_2) đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0.$$

2. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và các vtcp của chúng không cùng phương. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \text{ và } \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] \neq \vec{0}.$$

3. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và (d_1), (d_2) không có điểm chung. Như vậy:

$$(d_1) \,//\, (d_2) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] = \vec{0} \text{ và } \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}.$$

4. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và (d_1), (d_2) có điểm chung. Như vậy:

$$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right] = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}.$$

5. (d_1) và (d_2) chéo nhau khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng. Như vậy:

$$(d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

Khi đó, khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu biết phương trình của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thì cũng có thể xét vị trí tương đối của chúng bằng cách giải hệ gồm các phương trình xác định (d_1) và (d_2) để ìthỏa mãn giao điểm và khi đó:

a. Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì (d_1) và (d_2) cắt nhau.
b. Nếu hệ có vô số nghiệm thì (d_1) và (d_2) trùng nhau.
c. Nếu hệ vô nghiệm thì (d_1) và (d_2) song song hoặc chéo nhau, song song nếu hai vtcp của chúng cùng phương, chéo nhau nếu hai vectơ đó không cùng phương.

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}$ và đi qua điểm M_0. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

4. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}$ $(a_1; b_1; c_1)$ và (d_2) có vtcp là $\overrightarrow{u_2}$ $(a_2; b_2; c_2)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

☞ ***Chú ý***: Điều kiện cần và đủ để $(d_1) \perp (d_2)$ là:

$$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (A; B; C).
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng toán 1: Tọa độ của điểm, vectơ và các yếu tố liên quan

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong phần:

- Tọa độ của vectơ.
- Tọa độ của điểm.
- Liên hệ giữa tọa độ vectơ và tọa độ hai điểm mút.
- Tích có hướng của hai vectơ và các ứng dụng

Thí dụ 1. *Cho ba điểm* A(1; 2; 3), B(3; 5; 4), C(3; 0; 5).

a. *Chứng minh* A, B, C *là ba đỉnh của một tam giác.*

b. *Tính chu vi, diện tích của* ΔABC.

c. *Tìm toạ độ điểm* D *để* ABCD *là hình bình hành và tính côsin góc giữa hai vectơ* $\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{BD}$.

d. *Tính độ dài đường cao* h_A *của* ΔABC *kẻ từ* A.

e. *Tính các góc của* ΔABC.

f. *Xác định toạ độ trực tâm* H *của* ΔABC.

g. *Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$ và $\overrightarrow{AC}(2; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Ta lần lượt có:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = \sqrt{2^2+3^2+1^2} + \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} + \sqrt{(-5)^2+1^2}$$
$$= \sqrt{14} + \sqrt{12} + \sqrt{26}.$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}|(8; -2; -10)| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+(-2)^2+(-10)^2} = \sqrt{42}.$$

c. Giả sử D(x; y; z), để ABCD là hình bình hành điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2; 3; 1) = (3 - x; -y; 5 - z)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 - x \\ 3 = -y \\ 1 = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; -3; 4).$$
$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BD}|} = \frac{12}{\sqrt{12}.\sqrt{68}} = \frac{\sqrt{51}}{17}.$$

d. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_A.BC \Leftrightarrow h_A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{42}}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{273}}{13}.$$

e. Ta lần lượt có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = 0 \Leftrightarrow A = 90^0,$$
$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{51}}{13} \text{ và } \cos C = \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{\sqrt{118}}{13}.$$

f. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử H(x; y; z) là trực tâm ΔABC, ta có điều kiện:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1;\ y-2;\ z-3).(0;\ -5;\ 1) = 0 \\ (x-3;\ y-5;\ z-4).(2;\ -2;\ 2) = 0 \\ (8;\ -2;\ -10).(x-1;\ y-2;\ z-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5(y-2) + z - 3 = 0 \\ 2(x-3) - 2(y-5) + 2(z-4) = 0 \\ 8(x-1) - 2(y-2) - 10(z-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy, ta được trực tâm H(1; 2; 3).

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên trực tâm H ≡ A, tức là H(1; 2; 3).

g. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 18 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5/2 \\ z = 9/2 \end{cases}.$$

Vậy, ta được tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là trung điểm của BC, tức là $I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên (tam giác trong không gian) các em học sinh có thể ôn tập được hầu hết kiến thức trong bài học "*Hệ tọa độ trong không gian*", và trong đó với các câu f), g):

- Ở cách 1, chúng ta nhận được phương pháp chung để thực các yêu cầu của bài toán.
- Ở cách 2, bằng việc đánh giá được dạng đặc biệt của ΔABC chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

Thí dụ 2. *Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm* A(5; 3; −1), B(2; 3; −4), C(1; 2; 0), D(3; 1; −2).

a. *Tìm tọa độ các điểm* A_1, A_2 *theo thứ tự là các điểm đối xứng với điểm* A *qua mặt phẳng* (Oxy) *và trục* Oy.
b. *Chứng minh rằng* A, B, C, D *là bốn đỉnh của một hình tứ diện.*
c. *Tính thể tích khối tứ diện* ABCD.
d. *Chứng minh rằng hình chóp* D.ABC *là hình chóp đều.*
e. *Tìm tọa độ chân đường cao* H *của hình chóp* D.ABC.
f. *Chứng minh rằng tứ diện* ABCD *có các cạnh đối vuông góc với nhau.*
g. *Tìm tọa độ điểm* I *cách đều bốn điểm* A, B, C, D.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt:

- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm E(5; 3; 0). Từ đó, vì E là trung điểm của AA_1 nên $A_1(5; 3; 1)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oy là điểm F(0; 3; 0). Từ đó, vì F là trung điểm của AA_2 nên $A_2(-5; 3; 1)$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng ta sẽ đi chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$ không đồng phẳng.

Giả sử trái lại, tức là ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng, khi đó sẽ tồn tại cặp số thức α, β sao cho:

$$\overrightarrow{DA} = \alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\alpha - 2\beta \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 1 = -2\alpha + 2\beta \end{cases}, \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow$ Ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$, từ đó suy ra:

$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.(-2) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.1 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.2 = 27 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Ba véctơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

c. Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}\right| = \frac{9}{2}$.

d. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} DA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ DB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \\ DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \end{cases} \Rightarrow DA = DB = DC.$$

Tương tự, ta cũng có AB = BC = CA = $3\sqrt{2}$.

Vậy, hình chóp D.ABC là hình chóp đều.

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC), ta có điều kiện:

$$\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 4x + y - z = 15 \\ x - 5y - z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 8/3 \\ z = -5/3 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Vậy, ta được $H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy ra chân đường cao H của hình chóp D.ABC chính là trọng tâm của ΔABC, do đó:

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Leftrightarrow H\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

f. Với cặp cạnh AD và BC, ta có:

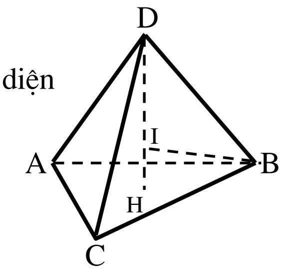
$$\overrightarrow{DA}(2; 2; 1),\ \overrightarrow{BC}(-1; -1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có AB ⊥ CD và AC ⊥ BD.

Vậy, tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau.

g. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, ta có:



$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ AI = DI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ 4x + y - z = 15 \\ 4x + 4y + 2z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 7/2 \\ z = -3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy tâm I(x; y; z) thuộc DH sao cho ID = IB, tức là ta có:

$$\begin{cases} DI^2 = BI^2 \\ \overrightarrow{DI} // \overrightarrow{HI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ \dfrac{x-3}{x-\frac{8}{3}} = \dfrac{y-1}{y-\frac{8}{3}} = \dfrac{z+2}{z+\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 4z = -15 \\ 5x + y = 16 \\ x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 7/2 \\ z = -3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên (khối đa diện) các em học sinh đã ôn tập được các kiến thức trong bài học "*Hệ tọa độ trong không gian*", và trong đó:

- Ở câu b), chúng ta nhận được hai phương pháp để chứng minh bốn điểm không đồng phẳng (tương ứng với ba vectơ không đồng phẳng) và thông thường chúng ta sử dụng cách 2 trong bài thi. Và đặc biệt giá trị $\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}$ được xác định rất nhanh và chính xác với các em học sinh biết sử dụng máy tính Casio fx – 570MS.
- Ở câu e), cách 1 trình bày phương pháp chung cho mọi dạng tứ diện và cách 2 được đề xuất dựa trên dạng đặc biệt của tứ diện ABCD. Và các em học sinh cần nhớ thêm rằng chúng ta còn có một cách chung khác bằng việc thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

  Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

  Bước 3: Khi đó, điểm H chính là giao điểm của đường thẳng (d) với mặt phẳng (ABC).
- Hai cách sử dụng trong câu g) với ý tương tượng tự như câu e). Tuy nhiên, các em học sinh cũng có thể thực hiện như sau:

  Bước 1: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm).

  Bước 2: Từ kết quả ở bước 1, chúng ta nhận được tọa độ tâm I.

Dạng toán 2: Phương trình mặt cầu

Phương pháp

Với phương trình cho dưới ***dạng chính tắc***:

(S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$, với $k > 0$

ta lần lượt có:

- Bán kính bằng $R = \sqrt{k}$.
- Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ y - b = 0 \\ z - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \Rightarrow I(a;\ b;\ c).$$

Với phương trình cho dưới ***dạng tổng quát*** ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (1)$$

Bước 2: Để (1) là phương trình mặt cầu điều kiện là:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bước 3: Khi đó (S) có thuộc tính:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Cho họ mặt cong* (S_m) *có phương trình*:

$$(S_m): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - m)^2 = m^2 - 2m + 5.$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để* (S_m) *là một họ mặt cầu.*
b. *Tìm mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong họ* (S_m).
c. *Chứng tỏ rằng họ* (S_m) *luôn chứa một đường tròn cố định.*

Giải

a. Để (S_m) một họ mặt cầu điều kiện là:

$$m^2 - 2m + 5 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 4 > 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m thì (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(2; 1; m) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{(m-1)^2 + 4} \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$R^2 = (m - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow R_{min} = 2, \text{ đạt được khi } m = 1.$$

Vậy, trong họ (S_m) mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất bằng 2.

c. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (S_m) luôn đi qua, ta có:

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - m)^2 = m^2 - 2m + 5, \forall m$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - z_0)m + (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z_0 = 0 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 4 \end{cases}.$$

Vậy, họ (S_m) luôn chứa đường tròn (C) có tâm $I_0(2;\ 1;\ 1)$ và bán kính $R_0 = 2$ nằm trong mặt phẳng (P_0): $z = 1$.

☞ ***Chú ý***: Thông qua lời giải câu c) các em học sinh hãy tổng kết để có được phương pháp thực hiện yêu cầu "*Chứng tỏ rằng họ mặt cầu* (S_m) *luôn chứa một đường tròn cố định*".

Thí dụ 2. *Cho họ mặt cong* (S_m) *có phương trình*:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0.$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để* (S_m) *là một họ mặt cầu.*

b. *Chứng minh rằng tâm của họ* (S_m) *luôn nằm trên một Parabol* (P) *cố định trong mặt phẳng* Oxy, *khi* m *thay đổi.*

c. *Trong mặt phẳng* Oxy, *gọi* F *là tiêu điểm của* (P). *Giả sử đường thẳng* (d) *đi qua* F *tạo với chiều dương của trục* Ox *một góc* α *và cắt* (P) *tại hai điểm* M, N.

- *Tìm toạ độ trung điểm* E *của đoạn* MN *theo* α.
- *Từ đó suy ra quỹ tích* E *khi* α *thay đổi.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$(x - m^2)^2 + (y - 2m)^2 + z^2 = m^4 - 4m^2 + 4.$$

Từ đó, để phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu điều kiện là:

$$m^4 - 4m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bkính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

Cách 2: Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$$m^4 + 4m^2 - 8m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bkính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$I_m: \begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy, trong mặt phẳng Oxy tâm I_m luôn nằm trên Parabol (P): $y^2 = 4x$.

c. Trong mặt phẳng Oxy, xét Parabol

(P): $y^2 = 4x$, có tiêu điểm F(1; 0).

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α có dạng:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } F(1;0) \\ \text{hệ số góc } k = \tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = (x - 1)\tan\alpha.$$

- Toạ độ giao điểm M, N của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = (x-1)\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2\tan^2\alpha - 2(\tan^2\alpha + 2)x + \tan^2\alpha = 0. \ (1)$$

Ta có:

$$\Delta' = (\tan^2\alpha + 2)^2 - \tan^4\alpha = 4\tan^2\alpha + 4 > 0, \forall\alpha$$

do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_M; y_M)$, $N(x_M; y_M)$ có hoành độ thoả mãn:

$$x_M + x_N = \frac{2(\tan^2\alpha + 2)}{\tan^2\alpha}.$$

- Gọi $E(x_E, y_E)$ là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \\ y_E = (x_E - 1)\tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2(\tan^2\alpha + 2)}{\tan^2\alpha} - 2\right]\tan\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{\tan^2\alpha + 2}{\tan^2\alpha} \\ y_E = \dfrac{2}{\tan\alpha} \end{cases}. \qquad (I)$$

Khử α từ hệ (I) ta được $y_E^2 = 4x_E - 2$

Vậy, quĩ tích trung điểm E của đoạn MN thuộc Parabol (P_1) cú phương trình $y^2 = 4x - 2$ trong mặt phẳng Oxy.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), việc trình bày theo hai cách chỉ có tính minh họa, bởi trong thực tế chúng ta thường sử dụng cách 2.
- Ở câu b), chúng ta sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai.
- Ở câu c), các em học sinh đã thấy được mối liên hệ giữa hình học giải tích trong mặt phẳng với hình học giải tích trong không gian.

Dạng toán 3: Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp

Gọi (S) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

Khi đó:

1. Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, R, điều kiện R > 0. Tuy nhiên, trong trường hợp này chúng ta thường chia nó thành hai phần, bao gồm:
   - Xác định bán kính R của mặt cầu.
   - Xác tâm I(a; b; c) của mặt cầu.

   Từ đó, chúng ta nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu.
2. Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, d, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☞ ***Chú ý***: 1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình mặt cầu.

Thí dụ 1. *Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau*:

a. *Đường kính* AB *với* A(3; −4; 5), B(−5; 2; 1).

b. *Tâm* I(3; −2; 1) *và đi qua điểm* C(−2; 3; 1).

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm } AB \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(-1; -1; 3) \\ R = \sqrt{29} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 29$.

Cách 2: Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3; y + 4; z - 5).(x + 5; y - 2; z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) + (y + 4)(y - 2) + (z - 5)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MAB$ vuông tại $M \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 + (x + 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 116$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Đi qua } C \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; -2; 1) \\ \text{Bán kính } R = IC = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I(3; –2; 1) có phương trình:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = R^2.$$

Điểm C(–2; 3; 1) ∈ (S) điều kiện là:

$$(-2 - 3)^2 + (3 + 2)^2 + (1 - 1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 50.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm I(3; –2; 1) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + d = 0.$$

Điểm C(–2; 3; 1) ∈ (S) điều kiện là:

$$4 + 9 + 1 + 12 + 12 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 36 = 0$.

Cách 4: Ta có:

$$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow IM^2 = IA^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), với cách 1 chúng ta đi xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R, từ đó sử dụng công thức để nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu (S). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).
- Ở câu b), cách 1 có ý tương tương tự như trong câu a). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng các dạng phương trình có sẵn của mặt cầu và ở đó giá trị của tham số còn lại (R hoặc d) được xác định thông qua điều kiện C thuộc (S). Cách 4 chúng ta sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).

Thí dụ 2. *Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm* A(1; 2; 2), B(0; 1; 0) và tâm I thuộc trục Oz.

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

- Điểm A(1; 2; 2) ∈ (S) nên:

$$1 + 4 + (2 - c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (c - 2)^2 + 5 = R^2. \quad (1)$$

- Điểm B(0; 1; 0) ∈ (S) nên:

$$1 + (-c)^2 = R^2 \Leftrightarrow c^2 + 1 = R^2. \quad (2)$$

Lấy (2) – (1), ta được:

$$4c - 8 = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

Thay c = 2 vào (2), ta được $R^2 = 5$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cy + d = 0, \text{ với } c^2 - d > 0.$$

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9 - 4c + d = 0 \\ 1 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0.$$

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có điều kiện là:

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 1 + 4 + (2 - c)^2 = 1 + (-c)^2 \Leftrightarrow c = 2.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0;0;2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Trung điểm của AB là điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$, ta có điều kiện là:

$$IM \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - c\right)(-1; -1; -2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 2(1 - c) = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0;0;2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

☞ ***Chú ý***: Ngoài bốn cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng (d) chúng ta còn có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua E là trung điểm của AB} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 2: Tâm {I} = (P) ∩ (d), nên toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 3: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Thí dụ 3. *Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A(2; 1; 1), B(1; 1; 0), C(0; 2; 4) *và có tâm nằm trên mặt phẳng* (Oyz).

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì tâm I(a; b; c) thuộc mặt phẳng (Oxy) nên a = 0. (1)

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6 - 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 2 - 2a - 2b + d = 0 \\ 20 - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b - d = 2 \\ 4b + 8c - d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) suy ra I(0; b; c).

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có điều kiện là:

$$AI = BI = IC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (b-1)^2 + c^2 \\ 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = (b-2)^2 + (c-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b + 3c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;0) \\ \text{Bán kính } R = IA = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

☞ ***Chú ý***: Ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của ΔABC để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Bước 1: Ta có:

- Nếu ΔABC đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trọng tâm H của ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm H của BC.

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua H và vuông góc với với mặt phẳng (ABC).

Bước 3: Tâm {I} = (P) ∩ (d), nên toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 4: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Chúng ta sẽ được thấy cách giải này trong phần đường thẳng.

Thí dụ 4. *Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A(2; 1; 1), B(1; 1; 0), C(0; 2; 4) *và có bán kính bằng* $\sqrt{5}$.

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

ta có ngay $a^2 + b^2 + c^2 - d = 5$. (1)

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6 - 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 2 - 2a - 2b + d = 0 \\ 20 - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - d = 2 \\ a + c = 2 \\ a - b - 4c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \\ d = 12a \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$a^2 + (5a + 1)^2 + (2 - a)^2 - 12a = 5 \Leftrightarrow 27a^2 - 6a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{2}{9}.$$

Khi đó:

- Với a = 0 ta được b = 1, c = 2 và d = 0 nên:

  $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0.$

- Với $a = \frac{2}{9}$ ta được $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ nên:

  $$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) với bán kính bằng $\sqrt{5}$ có phương trình:

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 5.$$

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 = 5 \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = 5 \\ a^2 + (2-b)^2 + (4-c)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = 5 \\ a + c = 2 \\ a - b - 4c = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = 5 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + 25a^2 + (2-a)^2 = 5 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27a^2 - 6a = 0 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow b = 1, c = 2 \text{ và } d = 0 \\ a = \frac{2}{9} \Rightarrow b = \frac{19}{9}, c = \frac{16}{9} \text{ và } d = \frac{8}{3} \end{array}\right.\cdot$$

Khi đó:

- Với a = 0, b = 1, c = 2 và d = 0 ta được:

  (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$.

- Với $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ ta được:

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. *Cho bốn điểm* A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2) *và* D(2; 2; 1).

a. *Chứng tỏ rằng* A, B, C, D *không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện* ABCD.

b. *Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* ABCD.

✍ *Giải*

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD}(1; 1; 0)$, suy ra:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = (1; 0; 0)(1; 1; 0) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow$ A, B, C, D không đồng phẳng.

Ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}| \text{ đvtt.}$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c), khi đó ta có điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 \\ 2z = 3 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm A, B, C, D ∈ (S), ta được:

$$\begin{cases} 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 4b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 9 - 4a - 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ 2a + 4b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b + 4c - d = 6 \\ 4a + 4b + 2c - d = 9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = \dfrac{3}{2} \\ d = 6 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$.

☞ ***Chú ý***: Với câu b), ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D (ngoại tiếp tứ diện ABCD) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của tứ diện ABCD để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Trường hợp 1: Nếu DA = DB = DC thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Dựng đường cao DH⊥(ABC).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó {I} = (DH) ∩ (P).

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Nếu DA⊥(ABC) thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
- Dựng đường thẳng (d) qua K và song song với DA (hoặc (d) ⊥ (ABC)).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó {I} = (d) ∩ (P).

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 3: Nếu $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \dfrac{\pi}{2}$ thì mặt cầu ngoại tiếp DABC có tâm I là trung điểm AB và bán kính R = $\dfrac{AB}{2}$.

Trường hợp 4: Nếu AD và BC có đoạn trung trực chung EF thì:

Bước 1: Ta lần lượt:

- Viết phương trình tham số của đường thẳng (EF) theo t.
- Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm $I \in EF$ (thỏa mãn phương trình tham số của EF).
- Từ điều kiện $IA^2 = IC^2 = R^2$ suy ra giá trị tham số t, từ đó nhận được tọa độ tâm I.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Thí dụ 6. *Viết phương trình mặt cầu*:

a. *Có tâm* I(2; 1; –6) *và tiếp xúc với trục* Ox.

b. *Có tâm* I(2; –1; 4) *và tiếp xúc với mặt phẳng* (Oxy).

c. *Có tâm* O(0; 0; 0) *tiếp xúc với mặt cầu* (T) *có tâm* I(3; —2; 4), *bán kính bằng* 1.

✍ *Giải*

a. Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của I lên Ox, ta có $H_1(2; 0; 0)$.

Để (S) tiếp xúc với trục Ox điều kiện là:

$$R = d(I, Ox) = IH_1 = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;-6) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 37.$$

b. Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) điều kiện là:

$$R = d(I, (Oxy)) = 4.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;-1;4) \\ \text{Bán kính } R = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

c. Để (S) tiếp xúc với mặt cầu (T) có tâm I(3; —2; 4), bán kính bằng 1 điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} R + 1 = OI \\ |R - 1| = OI \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R + 1 = \sqrt{29} \\ |R - 1| = \sqrt{29} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = \sqrt{29} - 1 \\ R = \sqrt{29} + 1 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $R = \sqrt{29} - 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } O(0;0;0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{29} - 1\right)^2.$$

- Với $R = \sqrt{29} + 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } O(0;0;0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{29} + 1\right)^2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua bài toán trên chúng ta đã làm quen với việc viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu. Cụ thể:

- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với đường thẳng (d) khi:
  R = d(I, (d)).
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi:
  R = d(I, (P)).
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt cầu (T) tâm T, bán kính R_T khi:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(S) và (T) tiếp xúc ngoài} \\ \text{(S) và (T) tiếp xúc trong} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R + R_T = IT \\ |R - R_T| = IT \end{array}\right..$$

Thí dụ 7. *Lập phương trình mặt cầu*:

a. *Có tâm nằm trên tia* Ox, *bán kính bằng* 5 *và tiếp xúc với mặt phẳng* (Oyz).

b. *Có bán kính bằng* 2 *và tiếp xúc với* (Oxy) *tại điểm* M(3; 1; 0).

✍ *Giải*

a. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R.

Từ giả thiết suy ra R = 5, ngoài ra:

- (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) điều kiện là:

$$d(I, (Oyz)) = R \Leftrightarrow a = 5.$$

- Tâm nằm trên tia Ox điều kiện là b = c = 0.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(5;0;0) \\ \text{Bán kính } R = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

b. Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm M(3; 1; 0) nên tâm I(3; 1; c).
- Vì R = 2 nên:

$$IM = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2 \Rightarrow I_1(3; 1; 2) \text{ và } I_2(3; 1; -2).$$

Khi đó:

- Với tâm $I_1(3; 1; 2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(3;1;2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

- Với tâm $I_2(3; 1; -2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(3;1;-2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

<u>Dạng toán 1:</u> Phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

là phương trình của một mặt phẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ mặt phẳng (P_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số mặt phẳng của họ (P_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng cố định.

<u>Thí dụ 1.</u> *Cho phương trình*:

$$mx + m(m-1)y - (m^2-1)z - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của m để phương trình* (1) *là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ* (P_m).

b. *Tìm điểm cố định mà họ* (P_m) *luôn đi qua*.

c. *Giả sử* (P_m) *với* $m \neq 0, \pm 1$ *cắt các trục toạ độ tại* A, B, C.
   - *Tính thể tích tứ diện* OABC.
   - *Tìm* m *để* ΔABC *nhận điểm* $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ *làm trọng tâm.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$A^2 + B^2 + C^2 = m^2 + m^2(m-1)^2 + (m^2-1)^2$$
$$= m^2 + (m-1)^2[m^2 + (m+1)^2] > 0, \text{ mọi m}.$$

Vậy, với mọi m phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua, ta có:

$$mx_0 + m(m-1)y_0 - (m^2-1)z_0 - 1 = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow m^2(y_0 - z_0) + m(x_0 - y_0) + z_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 1 \end{cases}.$$

Vậy, họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1; 1; 1)$.

c. Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{1}{m}; 0; 0\right),\ B\left(0; \frac{1}{m(m-1)}; 0\right),\ C\left(0; 0; \frac{1}{1-m^2}\right).$$

Khi đó:

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.\left|\frac{1}{m}\right|.\left|\frac{1}{m(m-1)}\right|.\left|\frac{1}{1-m^2}\right|$$
$$= \frac{1}{6m^2(m-1)^2|m+1|}.$$

- Điểm $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{1-m^2} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m(m-1) = 6 \\ 1 - m^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm điểm cố định mà họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (P_m), khi đó $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \forall m$.

Bước 2: Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0, từ đó nhận được $(x_0; y_0; z_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$(a + b)x + ay + bz - 3(a + b) = 0.$$

a. *Tìm điều kiện của* a, b *để phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ* $(P_{a,b})$.

b. *Giả sử* $(P_{a,b})$ *với* $a, b \neq 0$ *cắt các trục toạ độ tại* A, B, C. *Tìm* a, b *để*:

- ΔABC *nhận điểm* $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ *làm trọng tâm.*
- ΔABC *nhận điểm* $H(2; 1; 1)$ *làm trực tâm.*

- *Tứ diện* OABC *có thể tích nhỏ nhất với* $a > 0, b > 0$.

c. *Chứng tỏ rằng họ* $(P_{a,b})$ *luôn chứa một đường thẳng cố định.*

Giải

a. Xét điều kiện:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Vậy, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Với với $a, b \neq 0$ ta có ngay :

$$A(3; 0; 0),\ B\left(0; \frac{3(a+b)}{a}; 0\right),\ C\left(0; 0; \frac{3(a+b)}{b}\right).$$

Khi đó:

- Điểm $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{a} = 4 \\ \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = b \end{cases} \Leftrightarrow b = 3a.$$

Vậy, với $b = 3a \neq 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Điểm $H(2; 1; 1)$ là trực tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a-b=0 \\ 2(a+b)+a+b-3(a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy, với $a = b \neq 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{9}{2}.\frac{(a+b)^2}{ab} \geq \frac{9}{2}.\frac{2ab}{ab} = 9.$$

Vậy, ta được $\left(V_{O.ABC}\right)_{Min} = 9$, đạt được khi $a = b$.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình mặt phẳng $(P_{a,b})$ dưới dạng:

$(P_{a,b})$: $a(x + y - 3) + b(x + z - 3) = 0$.

Từ đó, suy ra họ $(P_{a,b})$ luôn chứa các điểm có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+z-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Hệ (*) chính là phương trình giao tuyến (d) của hai mặt phẳng cố định:

(P_1): $x + z - 3 = 0$ và (P_2): $x + y - 3 = 0$.

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d).

Cách 2: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua hai điểm M(1; 2; 2) và N(2; 1; 1) nên họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{Qua } N(2;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(1;-1;-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

Cách 3: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua điểm M(1; 2; 2) và có vtpt $\vec{n}(a+b;a;b)$, suy ra:

$$\vec{n}(a+b;a;b).\vec{u}(1;-1;-1) = a + b - a - b = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u},\ \forall a, b \neq 0.$$

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tìm đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng và các em học sinh cần nhớ lại rằng *một đường thẳng* (d) *được hoàn toàn xác định* khi biết nó:

- Là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau – Ứng với cách 1.
- Đi qua hai điểm phân biệt M, N – Ứng với cách 2.
- Đi qua một điểm M và có phương cố định – Ứng với cách 3.

Và câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra đối với các cách 2, cách 3 là việc xác định toạ độ điểm M, N và vectơ $\vec{u}$. Câu trả lời như sau:

- Các điểm M, N có toạ độ thoả mãn hệ (*) và khi biết được toạ độ của cả M, N thì suy ra được toạ độ của vectơ $\vec{u}$.
- Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ có thể được xác định độc lập với M, N dựa trên nhận xét:

$$\begin{cases} (d) \subset (P_1) \\ (d) \subset (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{n_1} - \text{là vtpt của } (P_1) \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{n_2} - \text{là vtpt của } (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

<u>Dạng toán 2:</u> Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Để viết phương trình mặt phẳng (P) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

<u>Cách 1</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ và vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$ của (P).

<u>Bước 2:</u> Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1;n_2;n_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

<u>Cách 2</u>: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta có các kết quả:

1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, luôn có dạng:
   $$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
2. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$, luôn có dạng:
   $$(P): n_1x + n_2y + n_3z + \underline{D} = 0$$
   Để xác định (P), ta cần đi xác định D.
3. Mặt phẳng (P) song song với (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, luôn có dạng:
   $$(P): Ax + By + Cz + \underline{E} = 0$$
   Để xác định (P), ta cần đi xác định E.
4. *Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn*, đó là mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình:
   $$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$
5. Với phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng M, N, P chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:
   Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:
   $$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].$$
   Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:
   $$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$
   Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:
   $$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$
   với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.
   Vì M, N, P thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hệ ba phương trình với bốn ẩn A, B, C, D.
   Biểu diễn ba ẩn theo một ẩn còn lại, rồi thay vào (1) chúng ta nhận được phương trình mặt phẳng (P).

<u>Thí dụ 1.</u> *Viết phương trình mặt phẳng* (P), *biết*:

a. (P) *là mặt phẳng trung trực của đoạn* AB *với* A(1; 1; 2) *và* B(1; −3; 2).

b. (P) *đi qua điểm* C(1; 2; −3) *và song song với mặt phẳng* (Q) *có phương trình* $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

c. (P) *đi qua điểm* D(1; 1; 2) *và có cặp* vtcp $\vec{a}(2; -1, 1)$, $\vec{b}(2; -1; 3)$.

d. (P) *đi qua điểm* E(3; 1; 2) *và vuông góc với hai mặt phẳng*:
$$(R_1): 2x + y + 2z - 10) \text{ và } (R_2): 3x + 2y + z + 8 = 0.$$

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1 (Sử dụng công thức): Gọi I là trung điểm của đoạn AB, suy ra I(1; −1; 2).

Khi đó, mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } I \\ (P) \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(1; -1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(0; -4; 0) \text{ chọn } (0; 1; 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $0.(x - 1) + 1.(y + 1) + 0.(z - 2) = 0 \Leftrightarrow$ (P): $y + 1 = 0$.

Cách 2 (Sử dụng phương pháp quĩ tích): Điểm M(x; y; z) thuộc mặt phẳng (P) khi:

$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$

$\Leftrightarrow 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0$.

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (P) đi qua điểm C(1; 2; −3) nên có phương trình:

  $$(P): A(x - 1) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0 \quad (1)$$

  $\Leftrightarrow$ (P): $Ax + By + Cz - A - 2B + 3C = 0$.

- (P) song song với (Q): $x - 2y + 3z + 1 = 0$ nên:

  $$\frac{A}{1} = \frac{B}{-2} = \frac{C}{3} \neq \frac{-A - 2B + 3C}{1} \Rightarrow \begin{cases} B = -2A \\ C = 3A \end{cases}. \quad (2)$$

Cách 2: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (P) song song với (Q): $x - 2y + 3z + 1 = 0$ nên có phương trình:

  (P): $x - 2y + 3z + \underline{D} = 0$.

- Điểm C thuộc (P), suy ra:

  $1 - 2.2 + 3(-3) + \underline{D} = 0 \Leftrightarrow \underline{D} = 12$.

Vậy, phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Thay (2) vào (1) rồi thực hiện phép đơn giản biểu thức, ta được phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Cách 3: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } C \\ (P) // (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } C(1; 2; -3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $1.(x - 1) - 2.(y - 2) + 3.(z + 3) = 0 \Leftrightarrow$ (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

c. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -4; 0).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } D(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): (x - 1) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y - 3 = 0.$$

d. Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (R_1), (R_2), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(2; 1; 2)$, $\overrightarrow{n_2}(3; 2; 1)$.

Vì (P) vuông góc với (R_1) và (R_2) nên nó nhận $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ làm cặp vtcp, từ đó:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{n_1}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_2}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3; 4; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } E(3;1;2)\\ \text{vtpt } \vec{n}(-3;4;1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 4y - z - 3 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua bài toán:

- Ở câu a), chúng ta nhận được hai phương pháp (có tính minh họa) để viết phương trình mặt phẳng.
- Ở câu b), với ba cách giải đó thì các cách 1 và cách 2 có tính minh họa để các em học sinh hiểu cách khai thác từng giả thiết. Và như vậy, cách 3 luôn là sự lựa chọn khi thực hiện bài thi.
- Câu c), câu d) minh họa việc viết phương trình mặt phẳng khi biết cặp vtcp của nó.

Thí dụ 2. *Cho ba điểm* A(1; 2; 3), B(3; 5; 4), C(3; 0; 5).

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua ba điểm* A, B *và* C.

b. *Lập phương trình mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *làm đường tròn lớn.*

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8; -2; -10) \text{ chọn } \vec{n}(4; -1; -5).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A(1;2;3)\\ \text{vtpt } \vec{n}(4;-1;-5)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 4(x - 1) - (y - 2) - 5(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $4x - y - 5z + 13 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. (1)

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases}A + 2B + 3C + D = 0\\ 3A + 5B + 4C + D = 0\\ 3A + 5C + D = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = -4B\\ C = 5B\\ D = -13B\end{cases}.$$

Thay A, B, C vào (1), ta được:

(P): $-4Bx + By + 5Bz - 13B = 0 \Leftrightarrow$ (P): $4x - y - 5z + 13 = 0$.

b. Mặt cầu (S) có tâm I(x; y; z) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 36 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 39/7 \\ y = 89/14 \\ z = 81/14 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right).$$

Khi đó, mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Đi qua A} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{9338}}{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{39}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{89}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{81}{14}\right)^2 = \frac{667}{14}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, câu a) của thí dụ trên trên đã minh họa hai phương pháp viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước (kiến thức đã được trình bày trong phần chú ý của bài toán 2).

Thí dụ 3. *Cho hai điểm* A(1; –1; 5), B(0; 0; 1).

a. *Tìm điểm* M *thuộc* Oy *sao cho* ΔMAB *cân tại* M.

b. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, B *và song song với trục* Oy.

c. *Lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm* A, B *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*.

✍ *Giải*

a. Với điểm M thuộc Ox thì M(0; y; 0), ta có:

$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (-1)^2 + (y + 1)^2 + (-5)^2 = y^2 + 1$

$\Leftrightarrow 2y = -26 \Leftrightarrow y = -13 \Rightarrow M(0; -13; 0)$.

Vậy, với M(0; –13; 0) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\text{(P)}: \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \text{(P)}: \begin{cases} \text{qua } A(1;-1;5) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{j}\right] = (4;\ 0;\ -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $4x - z + 1 = 0$.

c. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm A, B và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là mặt cầu đường kính AB, ta có:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; 3\right) \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{\sqrt{18}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{(S)}: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{2}.$$

Thí dụ 4. *Cho hai điểm* A(2; 1; −3), B(3; 2; −1) *và mặt phẳng* (Q) *có phương trình* (Q): $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, B *và vuông góc với mặt phẳng* (Q).

b. *Tìm tọa độ điểm* I *thuộc* (Q) *sao cho* I, A, B *thẳng hàng*.

✍ *Giải*

a. Gọi $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q), ta được $\overrightarrow{n_Q}(1;\ 2;\ 3)$.

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(1;1;2) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q}(1;2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (-1;\ -1;\ 1) \text{ chọn } \vec{n}(1;\ 1;\ -1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$\text{(P)}: \begin{cases} \text{qua } A(2;1;-3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow \text{(P)}: x - 2 + y - 1 - (z+3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $x + y - z - 6 = 0$.

b. Giả sử điểm I(x; y; z) thuộc mặt phẳng (Q), vì vectơ $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AB}$.

Suy ra, tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = t \\ z + 3 = 2t \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \\ t + 2 + 2(t+1) + 3(2t-3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I(3; 2; −1).

Thí dụ 5. *Cho điểm* A(2; −2; −4).

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua điểm* A *và chứa trục* Ox.

b. *Tìm điểm* B *thuộc mặt phẳng* (P) *sao cho* ΔOAB *đều.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{OA} \text{ và } \vec{i} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{i}\right] = (0;-4;2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $2y - z = 0$.

b. Giả sử điểm B(x; y; z), ta lần lượt có:

- Điểm $B \in (P)$ nên $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. (1)
- ΔOAB đều, ta được:

$$OA = OB = AB \Leftrightarrow \begin{cases} OB^2 = OA^2 \\ AB^2 = OA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 24 \\ (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 24 \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 24 \\ x - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ 2x^2 + (x-3)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1\left(1+\sqrt{6}; -1-\sqrt{6}; \sqrt{6}-2\right) \\ B_2\left(1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}; -\sqrt{6}-2\right) \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai điểm B_1 và B_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 6. *Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:*

a. *Đi qua điểm* G(1; 2; 3) *và cắt các trục tọa độ tại các điểm* A, B, C *sao cho G là trọng tâm* ΔABC.

b. *Đi qua điểm* H(2; 1; 1) *và cắt các trục tọa độ tại các điểm* A, B, C *sao cho* H *là trực tâm* ΔABC.

c. *Đi qua điểm* M(1; 1; 1) *cắt chiều dương của các trục toạ độ tại ba điểm* A, B, C *sao cho tứ diện* OABC *có thể tích nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

a. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Để G(1; 2; 3) là trọng tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow (P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

b. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (1)$$

Để H(2; 1; 1) là trực tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = c = 6 \end{cases}.$$

Thay a, b, c vào (1), ta được:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow (P): 2x + y + z - 6 = 0.$$

c. Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c > 0, ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Điểm M thuộc (P) nên:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}} \Leftrightarrow abc \geq 27.$$

Thể tích tứ diện OABC, được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.abc \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Vậy, ta được $(V_{OABC})_{Min} = \frac{9}{2}$, đạt được khi:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

và khi đó:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (P): x + y + z - 3 = 0.$$

Dạng toán 3: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

Thí dụ 1. *Cho hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *lần lượt có phương trình là*:

$$(P): x - 3y - 3z + 5 = 0,$$
$$(Q): (m^2 + m + 1)x - 3y + (m + 3)z + 1 = 0.$$

Với giá trị nào của m *thì*:

a. *Hai mặt phẳng đó song song* ?
b. *Hai mặt phẳng đó trùng nhau* ?
c. *Hai mặt phẳng đó cắt nhau* ?
d. *Hai mặt phẳng đó vuông góc* ?

✍ *Giải*

a. Để hai mặt phẳng song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2+m+1}=\frac{-3}{-3}=\frac{-3}{m+3}\neq\frac{5}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m+1=1\\ m+3=-1\\ 1\neq 5\end{cases}\text{, vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng song song với nhau

b. Để hai mặt phẳng trùng nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2+m+1}=\frac{-3}{-3}=\frac{-3}{m+3}=\frac{5}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m+1=1\\ m+3=-1\\ 1=5\end{cases}\text{, vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng trùng nhau

c. Từ kết quả của các câu a) và b) suy ra với mọi m hai mặt phẳng (P) và (Q) luôn cắt nhau.

d. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q), ta được:

$\overrightarrow{n_P}(1; -3; -3)$ và $\overrightarrow{n_Q}(m^2 + m + 1; -3; m + 3)$.

Để hai mặt phẳng vuông góc với nhau điều kiện là:

$\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\Leftrightarrow m^2+m+1-3(-3)-3(m+3)=0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy, với m = 1 thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Thí dụ 2. *Cho hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2) *lần lượt có phương trình là*:

(P_1): $Ax + By + Cz + D = 0$,

(P_2): $Ax + By + Cz + D' = 0$ với $D \neq D'$.

a. *Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).

b. *Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).

Áp dụng với hai mặt phẳng:

(P_1): $x + 2y + 2y + 3 = 0$, (P_2): $2x + 4y + 4y + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng (P_1) và (P_2) song song với nhau.

Lấy điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P_1), ta có:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (1)$$

Khi đó:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M, (P_2)) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \overset{(1)}{=} \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

b. Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + E = 0. \quad (2)$$

Để (P) cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) điều kiện là:

$$\frac{|D_1 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow |D_1 - E| = |D_2 - E|$$

$$\overset{D \neq E}{\Leftrightarrow} E = \frac{1}{2}(D_1 + D_2). \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được (P): $Ax + By + Cz + \frac{1}{2}(D_1 + D_2) = 0$.

Áp dụng với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2): Trước tiên ta có:

$$(P_2): x + 2y + 2z + \frac{1}{2} = 0.$$

a. Khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$d((P_1), (P_2)) = \frac{\left|\frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

b. Ta có thể trình bày theo ba cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng kết quả trên*): Ta có ngay:

$$(P): x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0.$$

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 2z + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2y + 2z + 3| = \left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

Cách 3: (*Sử dụng tính chất*): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): x + 2y + 2z + D = 0. \qquad (*)$$

Lấy các điểm $A(-3; 0; 0) \in (P_1)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $M\left(-\frac{7}{4}; 0; 0\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức:

$$-\frac{7}{4} + D = 0 \Leftrightarrow D = \frac{7}{4}.$$

Thay $D = \frac{7}{4}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P): $x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0$.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) song song với nhau (giả sử có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (P_1) và (P_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (P_1), (P_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P_1), (P_2) và d((Q), (P_1)) = k.d((Q), (P_2)).
4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
   a. Tiếp xúc với (P_2).
   b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách* d *giữa* (P_1) *và* (P_2)" chúng ta sử dụng kết quả:

$$d = d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2)), \text{ với } M_1 \in (P_1).$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều* (P_1), (P_2)", chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tính chất*): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0. \qquad (*)$$

Bước 2: Lấy các điểm $E_1 \in (P_1)$ và $E_2 \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $E(x_0; y_0; z_0)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \underline{D} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D}.$$

Bước 3: Thay $\underline{D}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P).

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Điểm M(x; y; z) ∈ (P) cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (P)}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P_1), (P_2) *và* d((Q), (P_1)) = k.d((Q), (P_2))", chúng ta sử dụng ý tương trong cách 2 của yêu cầu (2), cụ thể:

Điểm M(x; y; z) ∈ (Q) cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = k.d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2). Toạ độ của điểm M_2 được xác định bằng cách:

$$\begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2.

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu tâm M_2 và bán kính $R = M_1M_2 = d$.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính bằng* r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R. Ta lần lượt:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:
  $M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\vec{n}$.
- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:
  $r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2 \Rightarrow$ Giá trị t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Thí dụ 3. *Cho điểm* $M_1(2; 1; -3)$ *và hai mặt phẳng* (P_1), (P_2) *có phương trình*:

$$(P_1): x + y + 2z + 3 = 0,$$

$$(P_2): x + (m - 2)y + (m - 1)z - 3m = 0.$$

1. *Tìm để* (P_1) *song song với* (P_2).
2. *Với* m *tìm được ở câu* 1) *hãy*:
   a. *Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).
   b. *Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2).
   c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P_1), (P_2) *và* $d((Q), (P_1)) = 2d((Q), (P_2))$.
   d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và tiếp xúc với* (P_2).
   e. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
   f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = 6\sqrt{2}$.

Giải

1. Để hai mặt phẳng (P_1), (P_2) song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{1} = \frac{m-2}{1} = \frac{m-1}{2} \neq \frac{-3m}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

2. Với m = 3 mặt phẳng (P_2): $x + y + 2z - 9 = 0$ và có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$.

a. Ta có ngay:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2)) = \frac{|2 + 1 + 2(-3) - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng tính chất*): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

(P): x + y + 2z + D = 0. (*)

Lấy điểm $N(1; 0; 4) \in (P_2)$, suy ra M_1N có trung điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} + D = 0 \Leftrightarrow D = -3.$$

Thay D = –3 vào (*), ta nhận được phương trình (P): x + y + 2z – 3 = 0.

Cách 2: (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm thì điểm M(x; y; z) ∈ (P) khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + y + 2z + 3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|x + y + 2z - 9|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow |x + y + 2z + 3| = |x + y + 2z - 9| \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

c. Điểm M(x; y; z) ∈ (Q) khi:

$$d(M, (P_1)) = 2d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + y + 2z + 3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2|x + y + 2z - 9|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow |x + y + 2z + 3| = 2|x + y + 2z - 9| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 2z - 21 = 0 \\ x + y + 2z - 5 = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng thoả mãn điều kiện đầu bài là:

(Q_1): x + y + 2z – 21 = 0 và (Q_2): x + y + 2z – 5 = 0.

d. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2), ta có:

$$\begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = t \\ z + 3 = 2t \\ x + y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \\ 6t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M_2(4; 3; 1).$$

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2, tức là:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; 2; -1) \text{ là trung điểm } M_1M_2 \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_1M_2}{2} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

e. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2), theo d) ta có ngay $M_2(4; 3; 1)$.

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } M_2(4; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = M_1M_2 = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 24.$$

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.

Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) thì M_2 chính là tâm của đường tròn (C), ta có:

$$R^2 - r^2 = M_2I^2 = |M_1M_2 - IM_1|^2 = (d-R)^2 \Leftrightarrow 2dR = d^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{d^2+r^2}{2d} = \frac{24+72}{4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} \Rightarrow IM_2 = 2\sqrt{6} = d(I, (P_2)). \qquad (*)$$

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=t \\ y-1=t \\ z+3=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \end{cases}.$$

- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:

$$r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2$$

$$\Leftrightarrow \left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left[\frac{|(t+2)+(t+1)+2(2t-3)-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right]^2 = t^2 + t^2 + (2t)^2$$

$$\Leftrightarrow 72 + 6(t-2)^2 = 6t^2 \Leftrightarrow 96 - 24t = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow I(6; 5; 5).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(6; 5; 5) \\ \text{Bkính } R = M_1I = 4\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 96.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cắt nhau chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (P_1) và (P_2).
2. Viết phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thoả mãn điều kiện K.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
   a. Tiếp xúc với (P_2).
   b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta có ngay:

- (P_1) có vtpt $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1; C_1)$ và (P_2) có vtpT là $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2; C_2)$.

- Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Lưu ý: Để (P_1) $\perp$ (P_2) $\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Với yêu cầu "*Viết phương trình giao tuyến* (d) *của* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases}. \qquad (1)$$

Bước 2: Lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Lấy điểm M$\in$(d) và gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{vtcp } \vec{u}\end{cases}.$$

Cách 2: Lấy hai điểm M và N thuộc (d), ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{Qua } N\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}\text{Qua } M\\ \text{vtcp } \vec{u} = \overrightarrow{MN}\end{cases}.$$

Cách 3: Đặt $x = f_1(t)$ (hoặc $y = f_2(t)$ hoặc $z = f_3(t)$) ($t \in \mathbb{R}$), ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases}x = f_1(t)\\ y = f_2(t), t \in \mathbb{R}\\ z = f_3(t)\end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Lưu ý: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu này chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng trong không gian.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi* (P_1) *và* (P_2)", chúng ta lập luận:

Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Hai mặt phẳng } (Q_1) \text{ và } (Q_2).$$

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta đã được thấy thông qua yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm* A, B *và thoả mãn điều kiện* K" trong dạng toán 2 và sẽ được thấy trong chủ đề về ***đường thẳng***.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.
(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì:
$M_1I = d(I, (P_2)) \Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.
Lưu ý: Với giả thiết này chúng ta còn có thể sử dụng phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1), (Q_2) để xác định toạ độ tâm I.

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì:
$I \in (P_2)) \Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:
$R^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1I^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2$
$\Rightarrow$ Giá trị tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính R = M_1I.

Thí dụ 4. *Cho điểm* $M_1(2; 5; 0)$ *và hai mặt phẳng* (P_1), (P_2) *có phương trình*:

$$(P_1): 3x - 2y - z + 4 = 0, \quad (P_2): x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

a. *Chứng tỏ rằng* (P_1) *cắt* (P_2) *theo giao tuyến* (d). *Tính góc giữa* (P_1), (P_2) *và tìm một vtcp của đường thẳng* (d).
b. *Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi* (P_1) *và* (P_2).
c. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và tiếp xúc với* (P_2).
d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn lớn*.
e. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P_1) *tại điểm* M_1 *và cắt* (P_2) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = \sqrt{21/2}$.

✍ *Giải*

a. Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) theo thứ tự có vtpt $\overrightarrow{n_1}(3; -2; -1)$, $\overrightarrow{n_1}(1; -3; 2)$, suy ra $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương nên (P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến (d).

Ta lần lượt có:

- Côsin góc α tạo bởi (P_1), (P_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|3.1 - 2(-3) - 1.2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

- Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-7; -7; -7)$ chọn $\vec{u}\,(1; 1; 1)$.

Cách 2: Lấy hai điểm A(0; 1; 2) và B(1; 2; 3) thuộc (d), thì vtcp của (d) là $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$.

Cách 3: Đặt x = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 3t - 2y - z + 4 = 0 \\ t - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; 1).$$

b. Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 2y - z + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - 3y + 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y - 3z + 5 = 0 \\ 4x - 5y + z + 3 = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1): $2x + y - 3z + 5 = 0$ và (Q_2): $4x - 5y + z + 3 = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.

(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: (S) tiếp xúc với (P_2) thì:

$$M_1I = d(I, (P_2)) \Leftrightarrow \sqrt{(3t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2} = \frac{|(3t + 2) - 3(-2t + 5) + 2(-t) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 = \frac{|7t - 14|^2}{14} \Leftrightarrow 4t^2 = (t - 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = t - 2 \\ 2t = -t + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 2/3 \end{array}\right.$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = -2$ ta được tâm $I_1(-4 ; 9 ; 2)$, suy ra mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 4)^2 + (y - 9)^2 + (z - 2)^2 = 56.$$

- Với $t_2 = \dfrac{2}{3}$ ta được tâm $I_2\left(4; \dfrac{11}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(4; \dfrac{11}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2): (x-4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: (*Dựa theo kết quả câu* b): (S) tiếp xúc với (P_2) thì tâm I phải thuộc mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2).

Ta lần lượt:

- Với mặt phẳng phân giác (Q_1): $2x + y - 3z + 5 = 0$, suy ra:

  $2(3t + 2) + (-2t + 5) - 3(-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$

  Khi đó, ta được mặt cầu:

  $$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x+4)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 56.$$

- Với mặt phẳng phân giác (Q_2): $4x - 5y + z + 3 = 0$, suy ra:

  $$4(3t + 2) - 5(-2t + 5) + (-t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 21t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

  Khi đó, ta được mặt cầu:

  $$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow (S_2): (x-4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R.
(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Để (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn điều kiện là:

$I \in (P_2)) \Leftrightarrow (3t + 2) - 3(-2t + 5) + 2(-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 7t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) cần dựng được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(8; 1; -2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x-8)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 56.$$

e. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm T(x; y; z) và bán kính R.
(T) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1T \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1T} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1T} = t.\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}.$$

Để (T) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:

$$R^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1T^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 = \frac{|7t-14|^2}{14} + \frac{21}{2} \Leftrightarrow 4t^2 = (t-2)^2 + 3 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -7/3 \end{array}\right..$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = 1$ ta được tâm $T_1(5; 3; -1)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1(5; 3; -1) \\ \text{Bán kính } R = M_1T_1 = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (T_1): (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 14.$$

- Với $t_2 = -\frac{7}{3}$ ta được tâm $T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1T_2 = \sqrt{\frac{686}{9}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x + \frac{15}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{29}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{686}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Với ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có chứa tham số chúng ta thường gặp thêm câu hỏi "*Xác định giá trị của tham số để ba mặt phẳng* (P), (Q) *và* (R) *đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng*". Khi đó, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vtpt $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$, $\overrightarrow{n_R}$ của các mặt phẳng (P), (Q), (R).

Bước 2: Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \\ \overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \end{cases}.$$

Bước 3: Toạ độ điểm chung I của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) là nghiệm hệ phương trình tạo bởi (P), (Q), (R).

Thí dụ 5. *Cho ba mặt phẳng* (P), (Q) *và* (R) *có phương trình*:

(P): $x + y + z - 6 = 0$; (Q): $x - 2y + z = 0$;

(R): $kx + (m - 1)y - z + 2 = 0$.

a. *Xác định giá trị* m *và* k *để ba mặt phẳng đó cùng đi qua một đường thẳng.*

b. *Xác định giá trị* m *và* k *để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng.*

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d) có phương trình:

$$\text{(d)}: \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hai điểm A(4; 2; 0) và B(0; 2; 4) thuộc (d).}$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng điều kiện là:

$$\text{(d)} \in \text{(R)} \Leftrightarrow A \in \text{(R) và } B \in \text{(R)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 2(m-1) + 2 = 0 \\ 2(m-1) - 4 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + m = 0 \\ 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Vậy, với m = 2 và k = −1 ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng.

b. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$, $\overrightarrow{n_R}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), (R), ta được:

$$\overrightarrow{n_P}(1; 1; 1),\ \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 1),\ \overrightarrow{n_R}(k; m-1; -1).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} \\ \overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0 \\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + 1 = 0 \\ k + m - 1 - 1 = 0 \\ k - 2(m-1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + m = 2 \\ k - 2m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = k = 1.$$

Khi đó, toạ độ điểm chung I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2; 3).$$

Vậy, với m = k = 1 thì ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau và có điểm chung là I(1; 2; 3).

<u>Dạng toán 4:</u> Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).
Xác định d = d(I, (P)

<u>Bước 2:</u> So sánh d với R để đưa ra kết luận:

- Nếu d > R ⇔ (P) ∩ (S) = ∅ (Hình 1 trang bên).
- Nếu d = R ⇔ (P) tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2 trang bên).
- Nếu d < R ⇔ (P) ∩ (S) = (C) là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 3 trang bên).

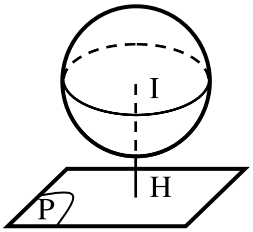
Và trong trường hợp này nếu:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

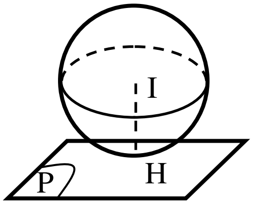
$$(P): Ax + By + Cz + D = 0,$$

thì phương trình đường tròn (C) có phương trình:

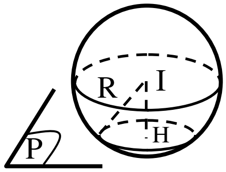
$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

☞ ***Chú ý***: 1. Trong phần này chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới các dạng toán:

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 3: Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 4: Viết phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

2. Trong trường hợp mặt phẳng không cắt mặt cầu, cụ thể với mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) không cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

   1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
      a. Tiếp xúc với (S).
      b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
      c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
   2. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
   3. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
   4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

Ta lần lượt:

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D} \Rightarrow \text{Phương trình (Q).}$$

b. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:

$I \in (Q)) \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D} \Rightarrow$ Phương trình (Q).

c. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r, suy ra:

$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D}$

$\Rightarrow$ Phương trình (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng vuông góc với* (P) *và cắt* (S) *tại hai điểm* B *sao cho* AB *có độ dài lớn nhất*", chúng ta thấy ngay đó là đường thẳng đi qua I và có vtcp $\vec{n}$.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Tìm toạ độ điểm I' đối xứng với I qua (P).

  Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S)", các em học sinh cần có thêm kiến thức về đường thẳng để trình bày theo các bước:

  Bước 1: Gọi (T) là mặt cầu thoả mãn điều kiện đầu bài và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H (H chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P)), suy ra M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}.$$

  Bước 2: Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P).

  Bước 3: Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S).

  Bước 4: Viết phương trình mặt cầu đường kính MH.

Thí dụ 1. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): 2x - 3y + 2z - 3 = 0,$$
$$(S): (x-8)^2 + (y+8)^2 + (z-7)^2 = 68.$$

a. *Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).
c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính bằng* $r = \sqrt{51}$.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).
f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(8; −8; 7) và bán kính $R = 2\sqrt{17}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2.8 - 3.(-8) + 2.7 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 3\sqrt{17} > 2\sqrt{17}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

  (Q): 2x − 3y + 2z + D = 0. (1)

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.8 - 3(-8) + 2.7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow |D + 54| = 34$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -20 \\ D_2 = -88 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -20$ thay vào (1), ta được (Q_1): 2x − 3y + 2z − 20 = 0.
- Với $D_2 = -88$ thay vào (1), ta được (Q_2): 2x − 3y + 2z − 88 = 0.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:

  (R): 2x − 3y + 2z + D = 0.

- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:

  $I \in (R)) \Leftrightarrow 2.8 - 3(-8) + 2.7 + D = 0 \Leftrightarrow D = -54.$

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) có dạng 2x − 3y + 2z − 54 = 0.

d. Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:

  (α): 2x − 3y + 2z + D = 0. (2)

- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{51}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2.8 - 3(-8) + 2.7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{68 - 51}$$

$$\Leftrightarrow |D + 54| = 17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -37 \\ D_2 = -71 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -37$ thay vào (2), ta được (α_1): 2x − 3y + 2z − 37 = 0.
- Với $D_2 = -71$ thay vào (2), ta được (α_2): 2x − 3y + 2z − 71 = 0.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = 2\sqrt{17}$ và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P). Để xác định toạ độ điểm I' ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(2; -3; 2) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1) $\Rightarrow$ I'(–4; 10; –5).

Cách 2: Giả sử I'(x; y; z), suy ra:

$$\begin{cases} II' \perp (P) \\ H \in (P) \text{ với H là trung điểm của } II' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} = t.\overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2.\dfrac{x+8}{2} - 3.\dfrac{y-8}{2} + 2.\dfrac{z+7}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 85 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \\ z = -5 \\ t = -6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1) $\Rightarrow$ I'(–4; 10; –5).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-4; 10; -5) \\ R = 2\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x+4)^2 + (y-10)^2 + (z+5)^2 = 68.$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H, suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính MH.
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(8; -8; 7) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; -3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -8 - 3t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P), suy ra:

$2(8 + 2t) - 3(-8 - 3t) + 2(7 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 17t + 51 = 0 \Leftrightarrow t = -3$

$\Rightarrow$ H(2; 1; 1).

Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S), suy ra:

$$(S): (8 + 2t - 8)^2 + (-8 - 3t + 8)^2 + (7 + 2t - 7)^2 = 68$$

$$\Leftrightarrow 17t^2 = 68 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với t = 2 ta được $M_1(12; -14; 11)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(7; -\dfrac{13}{2}; 6\right) \text{ là trung điểm } M_1H \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_1H}{2} = \sqrt{\dfrac{425}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): (x-7)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 + (z-6)^2 = \frac{425}{4}.$$

- Với t = –2 ta được $M_2(4; -2; 3)$ và mặt cầu đường kính M_2H là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(3; -\dfrac{1}{2}; 2\right) \text{ là trung điểm } M_2H \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{M_2H}{2} = \sqrt{\dfrac{17}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{17}{4}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) tiếp xúc với mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) tại điểm M chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
3. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P).

- Với yêu cầu "*Tìm tọa độ tiếp điểm* M *của* (P) *và* (S)", chúng ta thấy ngay M chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu (2.a) chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *qua* M *và cắt mặt cầu* (S) *tại điểm* N *sao cho* MN *có độ dài lớn nhất*", chúng ta thấy ngay đường thẳng (d) đi qua hai điểm M và I.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Tìm toạ độ điểm I' đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M.

  Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): 2x - y + 2z - 5 = 0, \quad (S): (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9.$$

a. *Chứng tỏ rằng mặt phẳng* (P) *tiếp xúc với mặt cầu* (S). *Tìm toạ độ tiếp điểm* M *của* (P) *và* (S).

b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).

c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*

d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và chia* (S) *thành hai phần có tỉ số thể tích bằng* $\frac{7}{20}$.

e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(3; 0; 4) và bán kính R = 3, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2.3 + 2.4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 = R.$$

Do dó, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Toạ độ tiếp điểm M(x; y; z) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(2; -1; 2) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2t \\ y = -t \\ z - 4 = 2t \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t \\ z = 2t + 4 \\ 9t + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1;\ 1;\ 2).$$

Vậy, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M(1; 1; 2).

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

  (Q): 2x − y + 2z + D = 0.

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.3 + 2.4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow |D + 14| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -5 \text{ (loại)} \\ D_2 = -23 \end{array}\right..$$

Khi đó, với $D_2 = -23$ ta được (Q): $2x - y + 2z - 23 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên N(5; −1; 6).

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

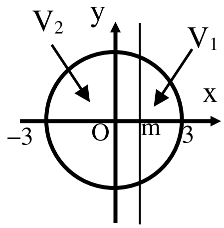
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N(5; -1; 6) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2; -1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 2z - 23 = 0.$$

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
  (R): $2x - y + 2z + D = 0$.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
  $I \in (R)) \Leftrightarrow 2.3 + 2.4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -14$.

Khi đó, với $D = -14$ ta được (R): $2x - y + 2z - 14 = 0$.

d. Trước tiên, trong mặt phẳng Oxy ta xét đường tròn (C) tâm O bán kính R = 3 và đường thẳng x = m (0 < m < 3) (hình bên). Gọi V là thể tích của mặt cầu có bán kính R = 3, ta có:



$$\frac{7}{20} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} \Leftrightarrow 7(V - V_1) = 20V_1$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{7}{27}V \Leftrightarrow \pi\int_m^3 (9 - x^2)dx = \frac{7}{27}.\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Leftrightarrow \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_m^3 = \frac{28}{3} \Leftrightarrow (27 - 9) - \left(9m - \frac{m^3}{3}\right) = \frac{28}{3}$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 27m + 26 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 26) = 0 \overset{0<m<3}{\Leftrightarrow} m = 1.$$

Từ đó, yêu cầu của bài toán được phát biểu lại dưới dạng "*Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cách* I *một khoảng bằng* 1", do đó ta lần lượt:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
  (α): $2x - y + 2z + D = 0$. (2)
- (α) cách I một khoảng bằng 1, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2.3 + 2.4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |D + 14| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -11 \\ D_2 = -17 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -11$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_1): $2x - y + 2z - 11 = 0$.
- Với $D_2 = -17$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_2): $2x - y + 2z - 17 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính R = 3 và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M nên I'(−1; 2; 0).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-1; 2; 0) \\ \text{Bán kính } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) theo thiết diện là đường tròn (C) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của (C).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
   c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C') có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C')).
3. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

- Với yêu cầu "*Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của* (C)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Bán kính r_C của (C) được xác định bởi $r_C = \sqrt{R^2 - d(I, (P))}$.

  Bước 2: Toạ độ tâm của (C) chính là hình chiếu vuông góc M của I trên (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và thoả mãn điều kiện* K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* (C)" chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

  Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

  Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

- Các yêu cầu còn lại được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S).

Thí dụ 3. *Cho mặt phẳng* (P) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(P): x + 2y + 3z - 10 = 0, \quad (S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 56.$$

a. *Chứng tỏ rằng mặt phẳng* (P) *cắt mặt cầu* (S) *theo giao tuyến là đường tròn* (C). *Xác định toạ độ tâm* M *và tính bán kính* r *của* (C).

b. *Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng* (P) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).

c. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*

d. *Viết phương trình mặt phẳng song song với* (P) *và cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* r.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S') *đối xứng với* (S) *qua* (P).
f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (P) *và* (S).

✍ *Giải*

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(2; 0; –2) và bán kính $R = \sqrt{56}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 + 3.(-2) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14} < \sqrt{56}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) lần lượt có:

- Bán kính r được xác định bởi:

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))} = \sqrt{56 - 14} = \sqrt{42}.$$

- Toạ độ tâm M(x; y; z) của (C) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_P} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t.\overrightarrow{n_P}(1; 2; 3) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y = 2t \\ z + 2 = 3t \\ x + 2y + 3z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t \\ z = 3t - 2 \\ 14t - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 2; 1).$$

Vậy, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{42}$ và tâm M(3; 2; 1).

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

(Q): x + 2y + 3z + D = 0. (1)

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 + 3.(-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56} \Leftrightarrow |D - 4| = 28 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = 32 \\ D_2 = -24 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $D_1 = 12$ thay vào (1), ta được (Q_1): x + 2y + 3z + 32 = 0.
- Với $D_2 = -44$ thay vào (1), ta được (Q_2): x + 2y + 3z – 24 = 0.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:

(R): x + 2y + 3z + D = 0.

- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:

$I \in (R)) \Leftrightarrow 2 + 3(-2) + D = 0 \Leftrightarrow D = 4.$

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) cần dựng có dạng x + 2y + 3z + 4 = 0.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:

  (α): $x + 2y + 3z + D = 0$.
- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{42}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2 + 3.(-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56 - 42} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -10 \text{ (loại)} \\ D_2 = 18 \end{array}\right..$$

Khi đó, với $D_2 = 18$ ta được (Q): $x + 2y + 3z + 18 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (α) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên N(1; −2; −5).

Phương trình mặt phẳng (α) được cho bởi:

$$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } N(1; -2; -5) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha): x + 2y + 3z + 18 = 0.$$

e. Mặt cầu (S’) đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = \sqrt{56}$ và tâm I’ là điểm đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M nên I’(4; 4; 4).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S’) cần dựng được cho bởi :

$$(S’): \begin{cases} \text{Tâm } I'(4; 4; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 56.$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại A và M, suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính MA.
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(2; 0; -2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tiếp điểm M của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P), suy ra:

$$(2 + t) + 2.2t + 3(3t - 2) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 2; 1).$$

Tiếp điểm A của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S), suy ra:

$$(S): (2 + t - 2)^2 + (2t)^2 + (-2 + 3t + 2)^2 = 56 \Leftrightarrow 14t^2 = 56 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với t = 2 ta được $A_1(4; 4; 4)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right) \text{ là trung điểm } A_1M \\ \text{Bán kính } R = T_1M = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

- Với $t = -2$ ta được $A_2(0; -4; -8)$ và mặt cầu đường kính A_2M là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(\dfrac{3}{2}; -1; -\dfrac{7}{2}\right) \text{ là trung điểm } A_2M \\ \text{Bán kính } R = T_2M = \sqrt{63/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{63}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng toán 1: Phương trình đường thẳng

Phương pháp

Ta có:

1. Phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là phương trình *tham số* của một đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vectơ vtcp là $\vec{u}(a;b;c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

2. Phương trình:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

với điều kiện $abc \neq 0$ là phương trình *chính tắc* của một đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vectơ vtcp là $\vec{u}(a;b;c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

3. Phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2 \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq \vec{0}.$$

Khi đó, vectơ:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \text{ là một vtcp của (d).}$$

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ (d_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số đường thẳng của họ (d_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định, để thực hiện yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử m từ hệ của phương trình (d), ta được:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m)] + $$
$$+ \beta[A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + D_2(m)] = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β, đưa (2) về dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Bước 3: Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Thí dụ 1. *Cho phương trình*:

$$\begin{cases} x = 2 + (m+1)t \\ y = 1 + (m-1)t \\ z = mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để phương trình trên là phương trình của một họ đường thẳng kí hiệu là* (d_m), *từ đó chỉ ra điểm cố định mà họ* (d_m) *luôn đi qua*.

b. *Điểm* A(3; 1; 1) *có thuộc đường thẳng nào của họ* (d_m) *không*.

c. *Chứng minh rằng họ đường thẳng* (d_m) *luôn thuộc một mặt phẳng* (P) *cố định, tìm phương trình mặt phẳng* (P).

d. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ* (d_m) *và có tâm thuộc mặt phẳng* (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$.

e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = 2\sqrt{6}$ *tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ* (d_m).

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (m + 1)^2 + (m - 1)^2 + m^2 = 3m^2 + 2 > 0, \forall m$$

Vậy với mọi m, phương trình (1) là phương trình tham số của họ đường thẳng (d_m) và dễ nhận thấy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$, ứng với t = 0 khi thay vào phương trình tham số của đường thẳng.

b. Điểm A(3; 1; 1) thuộc một đường thẳng của họ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3 = 2 + (m+1)t \\ 1 = 1 + (m-1)t \\ 1 = mt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt + t = 1 \\ mt - t = 0 \\ mt = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = t = 1.$$

Vậy, điểm A(3; 1; 1) thuộc đường thẳng (d_1) của họ (d_m).

c. Ta lựa chọn một trong ba cách lập luận sau:

Cách 1: Từ hệ (1) bằng cách rút theo t, ta được:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-2}{m+1} \\ t = \dfrac{y-1}{m-1} \\ t = \dfrac{z}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{m+1} = \dfrac{z}{m} \\ \dfrac{y-1}{m-1} = \dfrac{z}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-z-2) = z \\ m(y-z-1) = -z \end{cases} \Rightarrow \frac{x-z-2}{y-z-1} = -1$$

$\Rightarrow x + y - 2z - 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 2: Từ hệ (1) bằng cách cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{cases} x + y = 3 + 2mt \\ z = mt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 + 2mt \\ 2z = 2mt \end{cases} \Rightarrow x + y - 2z - 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 3: Họ (d_m) có vtcp $\vec{u}(m + 1; m - 1; m)$ và với vectơ $\vec{n}(1; 1; -2)$ ta có nhận xét:

$\vec{u}.\vec{n} = (m + 1).1 + (m - 1).1 - 2m = 0, \forall m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}, \forall m.$

Do đó, họ (d_m) thuộc mặt phẳng (P) cố định có phương trình được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - 2z - 3 = 0.$$

d. Mặt cầu (T) cần tìm chính là mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$ và và có tâm thuộc mặt phẳng (Q).

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M_0, suy ra I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Bằng cách thay phương trình tham số của (Δ) vào (Q), ta được:

$2 + t + 1 + t + 2(-2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow$ Tâm T(3 ; 2 ; –2) và bán kính $R = TM_0 = \sqrt{6}$.

Từ đó, ta nhận được phương trình mặt cầu (T) có dạng:

(T): $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 6.$

e. Mặt cầu (S) cần tìm chính là mặt cầu có bán kính $R = 2\sqrt{6}$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm cố định $M_0(2; 1; 0)$.

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P) tại điểm M_0, suy ra I thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M_0(2;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra tâm $I(2 + t; 1 + t; -2t)$.

- (S) tiếp xúc với (P) tại M_0 khi và chỉ khi:

$$M_0I = R \Leftrightarrow M_0I^2 = R^2 \Leftrightarrow 6t^2 = 24 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t = 2$, suy ra tâm $I_1(4; 3; -4)$ khi đó được (S_1) có phương trình là:
  (S_1): $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 24$.
- Với $t = -2$, suy ra tâm $I_2(0; -1; 4)$ khi đó được (S_2) có phương trình là:
  (S_2): $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 24$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của bài toán trên:

a. Ở câu b), bằng việc lựa chọn t = 0 chúng ta nhận được điểm cố định M(1; 0; 2) mà họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua. Và các em học sinh cần linh hoạt trong phép lựa chọn này.

b. Ở câu c), với ba cách:

- ***Cách 1***, chúng ta thực hiện việc chuyển phương trình của họ (d_m) về dạng chính tắc rồi dạng tổng quát (giao tuyến của hai mặt phẳng) và từ đó khử m để nhận được phương trình mặt phẳng cố định (P). Công việc này thực chất là khử dần các tham số t và m.
- ***Cách 2***, chúng ta thực hiện liên tiếp hai phép khử cho các tham số t và mt và đây là cách giải mà các em học sinh hãy ghi nhận để áp dụng cho các bài tập tương tự.
- ***Cách 3***, để tìm được vectơ $\vec{n}$ chúng ta thực hiện như sau:

  Giả sử $\vec{n}(A; B; C)$ và khi đó:

$$\vec{a}.\vec{n} = 0, \forall m \Leftrightarrow A(m + 1) + B(m - 1) + Cm = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow (A + B + C)m + A - B = 0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A \\ C = -2A \end{cases}.$$

  Từ đó, chọn A = 1 ta được $\vec{n}(1; 1; -2)$.

Thí dụ 2. *Cho phương trình*:

$$\frac{x-1}{2m}=\frac{my}{2}=\frac{z+1}{m}. \quad (1)$$

a. *Tìm điều kiện của* m *để phương trình* (1) *là phương trình chính tắc của một đường thẳng, gọi là họ* (d_m).

b. *Tìm điểm cố định mà họ* (d_m) *luôn đi qua*.

c. *Chứng tỏ rằng họ đường thẳng* (d_m) *luôn thuộc một mặt phẳng cố định.*

✍ *Giải*

a. Trước tiên ta cần có điều kiện $m \neq 0$ để chuyển phương trình (1) về dạng:

$$\frac{x-1}{2m}=\frac{y}{\frac{2}{m}}=\frac{z+1}{m}.$$

Khi đó, để phương trình trên là phương trình chính tắc của một đường thẳng điều kiện là:

$$2m.\frac{2}{m}.m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy, với $m \neq 0$ phương trình (1) là phương trình của một đường thẳng.

b. Ta thấy ngay họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1; 0; -1)$.

c. Các đường thẳng thuộc họ (d_m) có vtcp $\vec{u}\left(2m; \frac{2}{m}; m\right)$.

Với vectơ $\vec{n}(1;0;-2)$ ta có nhận xét:

$$\vec{u}.\vec{n} = 2m - 2m = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}, \forall m.$$

Vậy, họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc mặt phẳng cố định (P) có phương trình được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M(1;0;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;0;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2z - 3 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt phẳng (Q) chúng ta còn gặp một dạng toán là "*Tìm đường thẳng cố định luôn thuộc họ mặt phẳng* (Q)". Thí dụ với mặt phẳng (Q): $x + my - 3mz - m - 1 = 0$ ta thực hiện phép biến đổi:

$$(Q): x - 1 + m(y - 3z - 1) = 0$$

Từ đó, suy ra đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x-1=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases}.$$

Như vậy, để chứng minh họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình của họ (P_m) về dạng:

$$f(x, y, z) + mg(x, y, z) = 0.$$

Bước 2: Vậy, họ (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d): \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Dạng toán 2: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp

Để viết phương trình đường thẳng (d), ta sử dụng các kết quả:

Cách 1: Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp hoặc đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt đã được trình bày trong phần phương trình đường thẳng.

Cách 2: Đường thẳng được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) chứa nó. Từ đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Bước 3: Đường thẳng (d) gồm những điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bước 4: Chọn một điểm M_0 thoả mãn hệ (*) và một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Bước 5: Viết dạng phương trình đường thẳng (d) theo yêu cầu của bài toán (trong nhiều trường hợp chúng ta có thể bỏ qua bước 4 nếu bài toán yêu cầu về phương trình tham số của đường thẳng).

Thí dụ 1. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* M(2; −1; 3) *và*:

a. *Song song với đường thẳng* (Δ): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{2z+1}{2}$.

b. *Vuông góc với mặt phẳng* (P): $3x - 2y + z - 6 = 0$.

c. *Song song với hai mặt phẳng*:

(P_1): $2x + 2y + z - 4 = 0$, (P_2): $2x - y - z + 5 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (d) // (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(2; -1; 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(2; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;-1;3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

c. Các mặt phẳng (P_1), (P_2) có vtpt $\overrightarrow{n_1}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{n_2}(2; -1; -1)$.

Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} (d) // (P_1) \\ (d) // (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-1; 4; -6) \text{ chọn } \vec{u}(1; -4; 6).$$

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;-1;3) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;-4;6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: 1. Rất nhiều em học sinh khi thực hiện câu a) mắc phải sai lầm bởi cho rằng đường thẳng (Δ) có một vtcp là $\vec{u}(2;1;2)$.

2. Chúng ta biết rằng giao điểm H của đường thẳng (d) với mặt phẳng (P) trong câu b) chính là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P). Như vậy, chúng ta có thêm một phương pháp để "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) *cho trước*".

3. Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *và vuông góc với hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *cho trước*" chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 3: Khi đó, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Các em học sinh cần lưu ý tới việc bài toán có thể thay đổi điều kiện vuông góc với đường thẳng (d_1) (hoặc (d_2)) bằng yêu cầu song song với mặt phẳng (P_1) (hoặc (P_2)).

Thí dụ 2. *Cho điểm* M(1; 2; 1) *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{2-z}{1}, \quad (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{1}.$$

a. *Tìm góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng* (d_1), (d_2).

b. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A *và vuông góc với cả* (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(1; 1; -1)$ và đi qua điểm $M_1(0; 1; 2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(1; -2; 1)$ và đi qua điểm $M_2(1; 1; 0)$.

Khi đó, ta lần lượt có:

- Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|.\left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{18}}.$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]\right|} = \frac{|(-1; -2; -3)(1; 0; -2)|}{|(-1; -2; -3)|} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

b. Giả sử (d) có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases}(d)\perp(\Delta_1)\\(d)\perp(\Delta_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{v_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{v_2}\end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] = (-1; -2; -3) \text{ chọn } \vec{u}(1; 2; 3).$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M(1;2;1)\\\text{vtcp } \vec{u}(1;2;3)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 1+t\\y = 2+2t,\ t\in\mathbb{R}\\z = 1+3t\end{cases}.$$

☞ ***Chú ý***: 1. Bài toán trên còn có thể thực hiện theo cách:

Bước 1: Tìm các vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Ta lần lượt:

- Viết phương trình mặt phẳng (P_1) qua A và vuông góc với (d_1).
- Viết phương trình mặt phẳng (P_2) qua A và vuông góc với (d_2).

Bước 3: Khi đó (d) chính là giao tuyến của (P_1) với (P_2).
Và từ đây, chúng ta đã biết các cách xác định dạng phương trình cho đường thẳng (d) ở thí dụ 3.

2. Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *cắt hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

<u>Cách 1</u>: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A\\(d_1)\subset(P)\end{cases}.$$

Bước 2: Xác định giao điểm B của (d_2) và (P).

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B, C. Khi đó toạ độ B, C theo thứ tự thoả mãn các phương trình của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thẳng hàng ta xác định được toạ độ B, C.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và B.

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn điều kiện:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn điều kiện:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).
Và từ đây, chúng ta đã biết các cách xác định dạng phương trình cho đường thẳng (d).

Điều kiện đi qua điểm A trong bài toán trên có thể được thay bởi điều kiện song song với một đường thẳng (Δ) hoặc vuông góc với một mặt phẳng.

Thí dụ 3. *Cho mặt phẳng* (P) *và hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(P): 3x + 3y - 4y = 0,$$

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

a. *Tính côsin góc giữa mặt phẳng* (P) *với các đường thẳng* (d_1), (d_2).

b. *Viết phương trình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng* (P) *và cắt cả hai đường thẳng* (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3; 3; -4)$.

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; -2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3; -1; -2)$ và đi qua điểm $M_2(2; 1; 1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi α là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|1.3 + 2.3 + 1(-4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{3^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{476}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{476}} = \sqrt{\frac{451}{476}}.$$

- Gọi β là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\beta = \frac{\left|\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|3.3 - 1.3 - 2(-4)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}.\sqrt{3^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{119}}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{49}{119}} = \sqrt{\frac{70}{119}} = \sqrt{\frac{10}{17}}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 + 3u \\ y = 1 - u \quad (u \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - 2u \end{cases}$$

Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm E ∈ (d_1) suy ra E(1 + t; 3 + 2t; t – 2).
- Điểm F ∈ (d_2) suy ra F(2 + 3u; 1 – u; 1 – 2u).
- Vì EF vuông góc với mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3; 3; -4)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \frac{3u - t + 1}{3} = \frac{-u - 2t - 2}{3} = \frac{-2u - t + 3}{-4} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow E(2; 5; -1).$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2; 5; -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(3; 3; -4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 3t \quad, t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - 4t \end{cases}$$

Cách 2: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng, khi đó (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2), trong đó:

$$(Q_1): \begin{cases} (P) \perp (Q_1) \\ (d_1) \subset (Q_1) \end{cases} \text{ và } (Q_2): \begin{cases} (P) \perp (Q_2) \\ (d_2) \subset (Q_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Phương trình mặt phẳng (Q_2) được cho bởi:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (-10;-6;-12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 11x - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5x + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bằng việc đặt $x = 3t + 2$, ta biến đổi hệ (I) về dạng:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ 11(3t+2) - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5(3t+2) + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa (d_1), ta có:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2} \\ 11x - 7y + 3z + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ z = 2y - 1 \\ 11(5-3y) - 7y + 3(2y-1) + 16 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(-1;2;3)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } F(-1;2;3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Cách 4: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (Q_2) là mặt phẳng song song với (d') và chứa (d_2), ta có:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (-10;-6;-12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

- Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{1}\\ 5x+3y+6z-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+1\\ z=x-3\\ 5x+3(2x+1)+6(x-3)-19=0\end{cases}\Rightarrow E(2;5;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta):\begin{cases}\text{Qua } E(2;5;-1)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4)\end{cases}\Leftrightarrow (\Delta):\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{-4}.$$

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (d) *cho trước*", ví dụ sẽ sau minh hoạ phương pháp thực hiện.

Thí dụ 4. *Cho điểm* M(1; 2; −1) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d):\begin{cases}x=2\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

a. *Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của* M *trên đường thẳng* (d). *Từ đó, suy ra tọa độ điểm* M_1 *đối xứng với* M *qua* (d).
b. *Lập phương trình đường thẳng đi qua* M *vuông góc với* (d) *và cắt* (d).

✍ *Giải*

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (d), suy ra:

$H(2; t; 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(1; t-2; 2-t)$,

$MH\perp(d)\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t-2+t-2=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow H(2; 2; -1)$.

Vì H là trung điểm của MM_1 nên ta có $M_1(3; 2; -1)$.

b. Phương trình đường thẳng đi qua M vuông góc với (d) và cắt (d) là:

$$(\Delta):\begin{cases}\text{Qua } M(1;2;-1)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{MH}(1;0;0)\end{cases}\Leftrightarrow(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=2\\ z=-1\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (Δ) *cho trước*", người ta thường thay điều kiện <u>vuông góc</u> bằng <u>*tạo với* (Δ) *một góc* α</u>,

Thí dụ 5. *Lập phương trình đường thẳng đi qua* A(4; 1; −1) *cắt* (Δ) *và tạo với* (Δ) *một góc bằng* 45^0, *biết*:

$$(\Delta):\begin{cases}x=0\\ y=1+t, t\in\mathbb{R}.\\ z=1+t\end{cases}$$

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:
$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right] = (-2; 4; -4) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(1; -2; 2).$$
- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:
$$\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 2c. \quad (1)$$
- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:
$$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}}$$
$$\Leftrightarrow (b + c)^2 = (2b - 2c)^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow b = 2c \text{ hoặc } c = 2b.$$

Khi đó:

- Với $b = 2c$ thì $a = 2c$ nên $\overrightarrow{u_d}(2c; 2c; c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(2; 2; 1)$, từ đó:
$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
- Với $c = 2b$ thì $a = -2b$ nên $\overrightarrow{u_d}(-2b; b; 2b)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-2; 1; 2)$, từ đó:
$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ), ta lần lượt có:

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ), ta có:
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): y + z = 0.$$
- Vì {H} = (Δ) ∩ (Q) nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow H(0; 0; 0).$$

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$HM = HA \Leftrightarrow HM^2 = HA^2 \Leftrightarrow (1 + t)^2 + (1 + t)^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + t)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+t=-3 \\ 1+t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x=4+2t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x=4-2t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Ta lần lượt có:

- Khoảng cách d từ A đến (Δ) được cho bởi:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \sqrt{18}.$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) và giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$AM = AH\sqrt{2} \Leftrightarrow AM^2 = 2AH^2 \Leftrightarrow (-4)^2 + t^2 + (2 + t)^2 = 2.18$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -4 \text{ hoặc } t_2 = 2.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x=4+2t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x=4-2t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông* *góc với đường thẳng* (d_1) *và cắt đường thẳng* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ví dụ sẽ sau minh hoạ phương pháp thực hiện.

Thí dụ 6. *Cho điểm* A(4; −1; −1) *và hai đường thẳng* (Δ_1) *và* (Δ_2) *có phương trình*:

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (Δ_1), (Δ_2) *chéo nhau.*

b. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A *vuông góc với* (Δ_1) *và cắt* (Δ_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; 2)$.
- Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 8 \Rightarrow (\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ chéo nhau.}$$

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_2) về dạng tham số:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 3 - 2u \\ y = 1 + u \quad (u \in \mathbb{R}). \\ z = 1 + 3u \end{cases}$$

Giả sử (d) cắt (Δ_2) tại điểm N, khi đó:

- Điểm $N \in (\Delta_2)$ suy ra N(3 − 2u; 1 + u; 1 + 3u).
- Điều kiện để (d) vuông góc với đường thẳng (Δ_1) là:

$$\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{v_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{v_1} = 0 \Leftrightarrow 2(-1 - 2u) - (2 + u) + 2 + 3u = 0$$

$$\Leftrightarrow -2u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Rightarrow N(5; 0; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Gọi (R_2) là mặt phẳng đi qua A và chứa (Δ_2) thì:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{v_2} \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (4;-1;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (R_2): 4x - y + 3z - 14 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x - y + 3z - 14 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 2t - y + z - 8 = 0 \\ 4t - y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -5 + t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (d) với vtcp $\vec{u}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_1) \perp (R_1) \end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_2) \subset (R_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (R_1) có vtpt $\overrightarrow{v_1}(2; -1; 1)$.
- Mặt phẳng (R_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$ được cho bởi $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (4; -1; 3)$.
- vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được cho bởi $\vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1; 1; -1)$.

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 3: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Mặt phẳng (R_1) cắt (Δ_2) tại điểm N thì toạ độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{3} \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = 2 \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow N(5; 0; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}.$$

Dạng toán 3: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) (hoặc xác định điều kiện về vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)), ta thường lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (***Phương pháp đại số***): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 2: Biện luận:

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất , khi đó (d) $\cap$ (P) = {A} có toạ độ là nghiệm của hệ.
- Nếu hệ vô nghiệm, khi đó (d) $\cap$ (P) = $\varnothing \Leftrightarrow$ (d) // (P).
- Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó (d) $\subset$ (P).

Cách 2: (***Phương pháp hình học***): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử:

- (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$ và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
- (P) có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.

Bước 2: Khi đó:

1. Để (d) cắt (P) điều kiện là:
$$\vec{u}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0.$$
2. Để (d) song song với (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}.$$
3. Để (d) nằm trong (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}.$$
Hoặc có thể lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc (d) và thiết lập điều kiện M, N thuộc (P).
4. Để (d) vuông góc với (P) điều kiện là $\vec{u} = k\vec{n}$.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α.
3. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) và (P) tại điểm M.
4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và vuông góc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).
Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).
Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ (a; b; c) là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

- $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0$. (1)
- $g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *và* (P) *tại điểm* M" thì bài toán được chuyển về dạng "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với* (P) *tại điểm* M", đây là dạng toán mà chúng ta đã biết cách thực hiện.
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*", chúng ta có thể lựa chọn một trong các cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số của đường thẳng (Δ) nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Bước 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S), khi đó: toạ độ tâm I thoả mãn phương trình tham số của (Δ).
Sử dụng điều kiện:

$$MI = R \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng* r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} MI \perp (d) \\ MI = R \\ d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Thí dụ 1. *Cho mặt phẳng* (P) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(P): x + 2y + 2z - 5 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *nằm trong mặt phẳng* (P).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d) *và vuông góc với* (P).
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (R) *chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α *có* $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
d. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{18}$ *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M(1; 2; 0) *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn*.
e. *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* $R = \sqrt{3}$ *tiếp xúc với* (d) *tại điểm* N(1; 3; −1) *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn có diện tích bằng* $\dfrac{2\pi}{9}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$1 + 2(2 + t) + 2(-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Tức hệ có vô số nghiệm, do đó (d) nằm trong (P).

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(1; 2; 0) và B(1; 3; –1).

Nhận xét rằng A, B cũng thuộc (P) nên (d) nằm trong (P).

Cách 3: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0;1;-1)$ và đi qua điểm A(1; 2; 0).

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1;2;2)$. Nhận xét rằng:

$\vec{u}.\vec{n} = 1.2 - 1.2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$. (1)

$1 + 2.2 - 5 = 0 \Rightarrow A \in (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) nằm trong (P).

b. Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0;1;-1)$ và đi qua điểm A(1; 2; 0).
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1;2;2)$.

Mặt phẳng (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (4;-1;-1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(4;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 4x - y - z - 2 = 0.$$

c. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a;b;c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow b - c = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

- (R) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ điều kiện là:

$$\frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow (a+4b)^2 = 6(a^2+2b^2) \Leftrightarrow 5a^2 - 8ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b \text{ hoặc } a = -\frac{2}{5}b.$$

Khi đó:

- Với $a = 2b$ thì chọn a = 2 ta được b = c = 1 nên $\overrightarrow{n_R}(2;1;1)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y + z - 4 = 0.$$

- Với $a = -\dfrac{2}{5}b$ thì chọn $a = 2$ ta được $b = c = -5$ nên $\overrightarrow{n_R}(2;-5;-5)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2;-5;-5) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): 2x - 5y - 5z + 8 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ y - 2 - z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = z + 2 \\ (-4z)^2 + z^2 + z^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4z \\ y = z + 2 \\ z = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3,\ y = 3,\ z = 1 \\ x = 5,\ y = 1,\ z = -1 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $I_1(-3; 3; 1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-3; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18.$$

- Với $I_2(5; 1; -1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(5; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó I thuộc đường thẳng (Δ) có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (4; -1; -1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(4; -1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tâm I(1 + 4t; 2 − t; −t) và điều kiện:

$$MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2 \Leftrightarrow 16t^2 + t^2 + t^2 = 18 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với t = −1 thì $I_1(-3; 3; 1)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-3; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18.$$

- Với t = 1 thì $I_2(5; 1; -1)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(5; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Giả sử K(x; y; z) là tâm mặt cầu (T) cần dựng, khi đó ta lần lượt có:

- Vì NK $\perp$ (d) nên:

  $\overrightarrow{NK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow y - 3 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow y = z + 4 = 0.$ (3)

- Vì NK = R nên $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3.$ (4)
- Giả sử đường tròn (C) tạo bởi (T) cắt (P) có bán kính r, ta có :

  $$S_{(C)} = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{9} = \pi r^2 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

  $$d(K, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 2z - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \sqrt{3 - \frac{2}{9}}$$

  $$\Leftrightarrow |x + 2y + 2z - 5| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 10 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right..$$

Từ đó:

- Với x + 2y + 2z = 10 kết hợp với (3) ta được:

  $$\begin{cases} x + 2y + 2z = 10 \\ y = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4z \\ y = z + 4 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

  Thay (I) vào (4) ta được:

  $$(1 - 4z)^2 + (z + 1)^2 + (z + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow 6z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ hoặc } z = \frac{2}{3}.$$

  Khi đó:

  − Với z = 0 thì x = 2 và y = 4 nên $K_1(2; 4; 0)$, suy ra mặt cầu:

  $(T_1): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 3.$

  − Với $z = \frac{2}{3}$ thì $x = -\frac{2}{3}$ và $y = \frac{14}{3}$ nên $K_2\left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}; \frac{2}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

  $$(T_2): \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 3.$$

- Với x + 2y + 2z = 0 kết hợp với (4) ta được:

  $$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z - 8 \\ y = z + 4 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

  Thay (II) vào (4) ta được:

  $$9z^2 + 36z + 40 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \text{ hoặc } z = -\frac{20}{9}.$$

  Khi đó:

  − Với z = −2 thì x = 0 và y = 2 nên $K_3(0; 2; -2)$, suy ra mặt cầu:

  $(T_3): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 3.$

  − Với $z = -\frac{20}{9}$ thì $x = \frac{8}{9}$ và $y = \frac{16}{9}$ nên $K_4\left(\frac{8}{9}; \frac{16}{9}; -\frac{20}{9}\right)$, suy ra mặt cầu:

  $$(T_4): \left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{9}\right)^2 + \left(z + \frac{20}{9}\right)^2 = 3.$$

Vậy, tồn tại bốn mặt cầu (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (d) và (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P).
3. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm M.
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M.

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d) *và* (P)", chúng ta có ngay:

$$d(d, (P)) = d(A, (P)), \text{ với } A \in (d).$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và song song với* (P)", chúng ta có ngay:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \in (d) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Bước 2: Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) // (d) \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α", chúng ta thực hiện tương tự như trong trong hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính MN với N là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

Bước 2: Xác định toạ độ điểm N.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu đường kính MN.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d) *và tiếp xúc với* (P) *tại điểm* M", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại N.
Vì N $\in$ (d) nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

Bước 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với (P).
Vì I $\in$ (Δ) nên thoả mãn phương trình tham số của (Δ).

Bước 3: Thiết lập điều kiện IN $\perp$ (d) và R = IM = IN chúng ta sẽ nhận được toạ độ tâm I và độ dài bán kính R.

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho mặt phẳng* (P) *và đường thẳng (d) có phương trình*:

$$(P): x + y - 6 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *song song với mặt phẳng* (P). *Tính khoảng cách giữa* (d) *và* (P).
b. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và song song với* (P).
c. *Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P).
d. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc* α *có* $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* A(1; 1; 1).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = 2\sqrt{2}$ *tiếp xúc với* (P) *và tiếp xúc với* (d) *tại điểm* A(1; 1; 1).
g. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d) *và tiếp xúc với* (P) *tại điểm* E(5; 1; 1).

✍ *Giải*

Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 0)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0; 0; 1)$ và đi qua điểm M(1; 1; 4).

a. Ta lần lượt:

- Để chứng minh (d) song song với (P) ta có thể trình bày theo các cách sau:
Cách 1: Bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta thấy:
$1 + 1 - 6 = 0$, mâu thuẫn
do đó (d) song song với (P).
Cách 2: Ta có:
$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}. \quad (1)$$

Nhận xét M $\notin$ (P). (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) song song với (P).

- Khoảng cách giữa (d) và (P) được cho bởi:

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, khi đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + y - 2 = 0.$$

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t\ ,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$

Vì {H} = (MH) $\cap$ (P), toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 4 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = 4+t \end{cases}$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-6=0 \\ x-1=k \\ y-1=k \\ z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (R) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = 4+t \end{cases}$$

Cách 3: Gọi (P') với vtpt $\overrightarrow{n'}$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1;\ 1;\ 0).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P') được cho bởi:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\,1;\,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n'}(-1;\,1;\,0) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): x - y = 0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Vậy, đường thẳng (d') luôn có phương trình tham số là:

$$(d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases},\, t \in \mathbb{R}.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a;\,b;\,c)$ thoả mãn điều kiện đầu bài, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là $\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow c = 0$.
- (P) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ điều kiện là:

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(a + b)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0\ a = 2b \text{ hoặc } b = 2a.$$

Khi đó:

- Với a = 2b thì $\overrightarrow{n_R}(2b;\,b;\,0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(2;\,1;\,0)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\,1;\,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2;\,1;\,0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y - 3 = 0.$$

- Với b = 2a thì $\overrightarrow{n_R}(a;\,2a;\,0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1;\,2;\,0)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\,1;\,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;\,2;\,0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 2y - 3 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính AA' với A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A'(x; y; z) bằng việc sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} A' \in (P) \\ AA' \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' \in (P) \\ \overrightarrow{AA'}(x-1;\, y-1;\, z-1) // \vec{n}(1;\,1;\,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1) + (t+1) - 6 = 0 \\ x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(3;\,3;\,1).$$

Cách 2: Phương trình đường thẳng (AA') được cho bởi:

$$(AA'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (AA') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\ 1;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $\{A'\} = (AA') \cap (P)$ nên toạ độ A' được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (AA') vào phương trình của (P), ta được:

$$1 + t + 1 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A'(3;\ 3;\ 1).$$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AA' được xác định bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm } AA' \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AA'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;\ 2;\ 1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm các điểm:

$N(x;\ y;\ z) \in (S) \Leftrightarrow AN \perp A'N \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{A'N} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1;\ y - 1;\ z - 1).(x - 3;\ y - 3;\ z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) + (y - 1)(y - 3) + (z - 1)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm:

$N(x;\ y;\ z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta NAA'$ vuông tại $N \Leftrightarrow AN^2 + A'N^2 = AA'^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(a; b; c), khi đó I thuộc mặt phẳng:

$$(P_A): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (P_A) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\ 1;\ 1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): z - 1 = 0.$$

Ta lần lượt có:

$I \in (P_A) \Rightarrow c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1.$

$AI = R \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 8.$ (*)

$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a + b - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a + b - 6| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 10 - a \\ b = 2 - a \end{array}\right..$

Từ đó:

- Với b = 10 – a thay vào (*) ta được:

  $(a - 1)^2 + (9 - a)^2 = 8 \Leftrightarrow 2a^2 - 20a + 76 = 0$, vô nghiệm.

- Với b = 2 – a thay vào (*) ta được:

  $(a - 1)^2 + (1 - a)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow I_1(3;\ -1;\ 1) \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow I_2(-1;\ 3;\ 1) \end{array}\right..$

Khi đó:

- Với tâm $I_1(3; -1; 1)$ ta được mặt cầu (S_1) có phương trình:
  (S_1): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$.
- Với tâm $I_2(-1; 3; 1)$ ta được mặt cầu (S_2) có phương trình:
  (S_2): $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại F.
Vì $F \in (d)$ nên $F(1; 1; 4 + t)$.
Gọi (Δ) là đường thẳng qua E và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(5;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 5 + u \\ y = 1 + u \\ z = 1 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Vì $I \in (\Delta)$ nên $I(u + 5; u + 1; 1)$, ta lần lượt có:

- Vì $FI \perp (d)$ nên:
  $\overrightarrow{FI} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow F(1; 1; 1)$.
- Vì $FI = IE$ nên:
  $FI^2 = IE^2 \Leftrightarrow (u + 4)^2 + u^2 = u^2 + u^2 \Leftrightarrow 8u + 16 = 0 \Leftrightarrow u = -2$.

Từ đó, mặt cầu (T) với tâm $T(3; -1; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ có dạng:

$$(T): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$$

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (d) và (P).
2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P).
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M.
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P).
8. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P).

Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d) *và* (P)", chúng ta có ngay:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a;b;c)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P)

Bước 2: Lấy điểm M $\in$ (d), từ đó xác định toạ độ điểm H_M là hình chiếu vuông góc của M lên (P).

Bước 3: Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH_M} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *đi qua* A, *nằm trong mặt phẳng* (P) *và vuông góc với đường thẳng* (d)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và vuông góc với (d).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc có số đo nhỏ nhất*", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$$
$$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

- $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0$. (1)
- $g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1), (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$

$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha$.

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right].$$

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R, *tâm thuộc đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I.

Vì $I \in (d)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

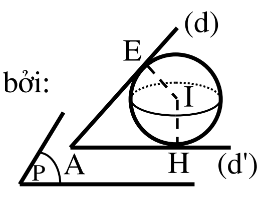
Bước 2: Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là $d(I, (P)) = R \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

- Các yêu cầu (6), (7) được thực hiện tương tự như trong trường hợp (d) song song với (P).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d) *tại điểm* M *và tiếp xúc với* (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt cầu (S) với tâm I cần dựng sẽ tiếp xúc với hình chiếu vuông góc (d') của (d) trên (P).

Bước 2: Ta lần lượt có:



- Mặt phẳng ((d), (d')) với vtpt $\overrightarrow{n'}$ được cho bởi:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{n}, \vec{u}\right].$$

- Đường thẳng (EI) với vtcp $\vec{v}$ được cho bởi:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{n'} \\ \vec{v} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \left[\vec{u}, \vec{n'}\right].$$

- Phương trình đường thẳng (EI) được cho bởi:

$$(EI): \begin{cases} \text{Qua } E \\ \text{vtcp } \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (theo t) của (EI).}$$

Bước 3: Từ đó, vì I thuộc (EI) nên thoả mãn phương trình tham số của (EI), ta có điều kiện:

$EI = IH = d(I, (P)) \Leftrightarrow EI^2 = d^2(I, (P)) \Rightarrow$ Tham số t

$\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R = EI.

Thí dụ 3. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1}, \ (P): 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *cắt mặt phẳng* (P) *tại điểm* A. *Tìm toạ độ* A, *tính góc giữa* (d) *và* (P).
b. *Viết phương trình hình chiếu vuông góc của* (d) *trên* (P).
c. *Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *đi qua* A, *nằm trong mặt phẳng* (P) *và vuông góc với đường thẳng* (d).
d. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tạo với* (P) *một góc có số đo nhỏ nhất*.
e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng* 3, *tâm thuộc đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với* (P).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm M(2; 4; 2) và có vtcp $\vec{u}(1; 3; 1)$.
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (2; 2; 1).

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P):

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1} \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x-2 \\ z = x \\ 2x+2(3x-2)+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vậy, ta thấy (d) cắt (P) tại điểm A(1; 1; 1).

Gọi α là góc tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2.1+2.3+1.1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}.\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M \\ MH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} \text{Qua } M(2;4;2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì {H} = (MH) ∩ (P) nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+t \\ 2(2+2t)+2(4+2t)+(2+t)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ H(0; 2; 1).

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{Qua } H(0;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ x-2=2k \\ y-4=2k \\ z-2=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \\ k=-1 \end{cases} \Rightarrow H(0;2;1).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{Qua } H(0;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 3: Gọi (P') với vtpt $\overrightarrow{n'}$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1;-1;4) \text{ chọn } \overrightarrow{n'}(1;1;-4).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P') được cho bởi:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } M(2;4;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n'}(1;1;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): x + y - 4z + 2 = 0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+y-4z+2=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4z+2=0 \\ x+y+5z-7=0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ x + y - 4z + 2 = 0 \\ x + y + 5z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d_1) cần dựng.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1; -1; 4).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(-1;-1;4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (R) là mặt phẳng thỏa mãn:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A \\ (R) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (R): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(1;3;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x + 3y + z - 5 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t + 3y + z - 5 = 0 \\ 2t + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - 3b.$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{|2a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 11\left[2a + 2b + (-a - 3b)\right]^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 + 130ab + 169b^2 = 0 \Leftrightarrow (5a + 13b)^2 = 0 \Leftrightarrow 5a = -13b.$$

Chọn a = 12 ta được b = –5 và c = 2 nên $\overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

Cách 2: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right] = (-13; 5; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

e. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, vì $I \in (d)$ nên $I(t + 2; 3t + 4; t + 2)$.

Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(t+2) + 2(3t+4) + (t+2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |t + 1| = 1 \Leftrightarrow t_1 = 0 \text{ hoặc } t_2 = -2.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = 0$ thì $I_1(2; 4; 2)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(2; 4; 2) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

- Với $t_2 = -2$ thì $I_2(0; -2; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(0; -2; 0) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Dạng toán 4: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện:

- Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Kiểm tra:

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận (d_1) và (d_2) trùng nhau.

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, thực hiện bước 3.

Bước 3: Xác định $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) chéo nhau.

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2) và song song, cách đều (d_1), (d_2).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng h.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2).
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có ngay:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|},$$

với $M_1 \in (d_1)$, $M_2 \in (d_2)$ và $\overrightarrow{u_2}$ là một vtcp của (d_2).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa hai đường thẳng song song* (d_1) *và* (d_2) ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Bước 3: Vì ba điểm A, M_1, $M_2 \in (P) \Rightarrow$ Phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *thuộc mặt phẳng chứa* (d_1), (d_2) *và song song, cách đều* (d_1), (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.
  Suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

  Bước 2: Đường thẳng (d) được cho bởi:
  $$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa đường thẳng* (d_1) *và cách đường thẳng* (d_2) *một khoảng bằng* h", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

  Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:
  $$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ điều kiện } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

  Bước 3: Vì điểm A, $M_1 \in (P)$ và $d(M_2, (P)) = h$, suy ra phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* E *và tiếp xúc với* (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 3: Gọi F là hình chiếu vuông góc của E trên (d_2) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính EF.

  Bước 4: Ta lần lượt:
  - Tìm toạ độ điểm F.
  - Viết phương trình mặt cầu đường kính EF.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) và *có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).
  Viết phương trình mặt phẳng (R).

  Bước 2: Khi đó:
  - Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
  - Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

  Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S).

  Lưu ý: Chúng ta còn có một phương pháp tổng quát để thực hiện yêu cầu này sẽ được trình bày trong chú ý của hai đường thẳng chéo nhau.

Thí dụ 1. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:
$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{3-z}{2}.$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau. Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2).

b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (d_1) *và* (d_2).

c. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *nằm trong mặt phẳng* (P) *và song song, cách đều* (d_1), (d_2).

d. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d_1) *và cách* (d_2) *một khoảng bằng* 1.

e. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với* (d_1) *và tiếp xúc với* (d_2) *tại điểm* B(3; 0; 1).

f. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; -1; -2)$ và đi qua điểm M_1(2; 1; 1).
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; -1; -2)$ và đi qua điểm M_2(1; 1; 3).

Nhận xét rằng các vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương và điểm M_1 không thuộc (d_2) nên hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Ta có:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 1.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2; 2; 1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + 2y + z - 7 = 0.$$

Cách 2: Lấy thêm điểm A(0; 2; 3) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện A, M_1, M_2 thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} 2B + 3C + D = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C + D = -3A \\ 3C + D = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2C = A \\ 2D = -7A \end{cases} \overset{\text{Chọn } A=2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = B = 2 \\ C = 1 \\ D = -7 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 7 = 0$.

c. Gọi M là trung điểm M_1M_2, suy ra $M\left(\frac{3}{2}; 1; 2\right)$.

Phương trình đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(3/2;\,1;\,2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1}(2;\,-1;\,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-3/2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy thêm điểm A(0; 2; 3) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

(Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì A, M_1 thuộc (Q) nên:

$$\begin{cases} 2B + 3C + D = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A - 2C \\ D = -4A + C \end{cases}.$$

- Để d((d_2), (Q)) = 1 điều kiện là:

$$d(M_2, (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|A + B + 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \Leftrightarrow 4A^2 - 4AC + C^2 = 0 \Leftrightarrow C = 2A.$$

Khi đó chọn A = 1 ta được C = 2, B = −2 và D = −2 nên:

(Q): $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

Cách 2: Từ giả thiết ta thấy:

$$1 = d((d_1), (d_2)) = d((Q), (d_2)) \Rightarrow \begin{cases} (d_1) \subset (Q) \\ (P) \perp (Q) \end{cases}.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_P}\right] = (3;\,-6;\,6) \text{ chọn } \overrightarrow{n_Q}(1;\,-2;\,2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1;-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 2y + 2z - 2 = 0.$$

e. Gọi A là hình chiếu vuông góc của B trên (d_1) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính AB. Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A bằng việc sử dụng một trong các cách sau:

  Cách 1: Ta có:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } B \\ (R) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): \begin{cases} \text{Qua } B(3;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_1}(2;-1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): 2x - y - 2z - 4 = 0.$$

  Vì {A} = (d_1) ∩ (P') nên toạ độ A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 2x - y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 2(2+2t) - (1-t) - 2(1-2t) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/3 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ và } AB = 1.$$

Cách 2: Vì A ∈ (d_1) nên:

$$A(2 + 2t ; 1 - t ; 1 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(1-2t; t-1; 2t).$$

Từ điều kiện $\overrightarrow{AB} \perp (d_1)$ ta có:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2(1-2t) - (t-1) - 2.2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ và } \overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ nên AB = 1.}$$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AB được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{17}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \\ R = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{17}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

f. Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Ta lần lượt:

- Phương trình mặt phẳng (R) được cho bởi:

$$(R): \begin{cases} \text{Qua } M\left(\dfrac{3}{2}; 1; 2\right) \\ \text{vtp } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 2x - 4y + 4z - 7 = 0.$$

Vì {I} = (Δ) ∩ (R) nên toạ độ I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{2} \\ 2x - 4y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 3 \\ 2x - 4y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right)$$

- Độ dài bán kính R của mặt cầu (S) được cho bởi:

$$R = d(I, (d_1)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1I}, \overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \frac{51}{4}.$$

- Phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(-\dfrac{1}{2}; 0; 2\right) \\ R = 51/4 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{2601}{16}.$$

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại M, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa (d_1) và (d_2).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2).

4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1), (d_2) tại điểm M.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).
6. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2).

- Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có ngay:
  - Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$ và (d_2) có vtcp là $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.
  - Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Lưu ý: Để $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Giả sử $(d_1) \cap (d_2) = \{M\}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các vtcp $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_1} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy hai điểm $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$ không trùng với giao điểm M của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì ba điểm $M, M_1, M_2 \in (P)$, suy ra phương trình của (P).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường phân giác của* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).
Lấy điểm $A \in (d_1)$, với $A \ne M$.

Bước 2: Lấy điểm $B \in (d_2)$ thoả mãn AI = BI, Từ đó, nhận được toạ độ hai điểm B_1, B_2.

Bước 3: Ta có:

- Với B_1 thì suy ra toạ độ trung điểm K_1 của AB_1.
  Khi đó, phương trình đường phân giác thứ nhất là:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1} \end{cases}.$$

- Với B_2 thì suy ra toạ độ trung điểm K_2 của AB_2.
  Khi đó, phương trình đường phân giác thứ hai là:

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2} \end{cases}.$$

Lưu ý: Với cách giải này, ta có các lưu ý sau:

1. Ta có kết quả:
   a. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
   b. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
2. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tạo độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).
Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$, với $A, B \neq I$.

Bước 2: Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ M xuống AB.
Ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $t = \frac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AK_1}}{\overline{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_1.$$

  Khi đó, phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi:

$$(IK_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_1} \end{cases}.$$

- Điểm $K_2(x_2; y_2; z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\frac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AK_2}}{\overline{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_2.$$

  Khi đó, phương trình đường phân giác trong được xác định bởi:

$$(IK_2): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_2} \end{cases}.$$

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *tại điểm* M", chúng ta thấy ngay đó chính là "*Mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với mặt phẳng* (P) *tại điểm* M" và đây là dạng toán chúng ta đã biết cách thực hiện.

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
Viết phương trình mặt phẳng (Q).

Bước 2: Khi đó:
- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
- Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *có bán kính* R *tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* E *và tiếp xúc với* (d_2)", chúng ta lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Ta thấy ngay tâm I của mặt cầu (S) thuộc đường thẳng (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R), (T) với:
- (R) là mặt phẳng qua E và vuông góc với (d_1).
- (T) là mặt phẳng qua F và vuông góc với (d_2), biết F thuộc (d_2) sao cho ME = MF.

Từ phân tích đó chúng ta thực hiện bài toán theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (R) qua E và vuông góc với (d_1).

Bước 2: Tìm điểm F thuộc (d_2) sao cho ME = MF.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (T) qua F và vuông góc với (d_2).

Bước 4: Thiết lập phương trình tham số của giao tuyến (a) của hai mặt phẳng (R), (T).

Bước 5: Từ điều kiện tâm I thuộc (a) sao cho IE = R suy ra toạ độ của I.

Bước 6: Viết phương trình mặt cầu (S).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng với tâm I(a; b; c) tiếp xúc với (d_2) tại F, suy ra toạ độ của F thoả mãn phương trình tham số của (d_2).

Bước 2: Ta có các điều kiện:

$$EI = R \Leftrightarrow EI^2 = R^2. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{u_1} = 0. \quad (2)$$

$$ME = MF \Leftrightarrow ME^2 = MF^2 \Rightarrow \text{Toạ độ của F.}$$

Bước 3: Với F tìm được thiết lập điều kiện :

$$\overrightarrow{FI} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\overrightarrow{u_2} = 0. \quad (3)$$

Bước 4: Kết hợp (2) và (3), để thực hiện việc biểu diễn hai trong số ba ẩn a, b, c theo ẩn còn lại. Rồi thay vào (1) chúng ta sẽ nhận được toạ độ của tâm I.

Bước 5: Viết phương trình mặt cầu tâm I bán kính R.

Thí dụ 2. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

a. *Chứng minh rằng* (d_1) *cắt* (d_2) *tại điểm* M. *Tìm toạ độ của* M *và tính góc giữa* (d_1), (d_2).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (d_1) *và* (d_2).
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* (d_1) *và tạo với* (d_2) *một góc lớn nhất*.
d. *Viết phương trình mặt phẳng* (R) *chứa* (d_1) *và tạo với* (d_2) *một góc* α *biết* $\sin\alpha = 4/9$.
e. *Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi* (d_1) *và* (d_2).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{17}$ *tiếp xúc với* (d_1), (d_2) *tại điểm* M.
g. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(-1; -1; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm $M_2(3; 2; 4)$.

a. Bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào (d_1), ta được:

$$\begin{cases} -1 + 2t = 3 + 2u \\ -1 + 2t = 2 + u \\ 1 + t = 4 + 2u \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{M(1; 1; 2)\}.$$

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{8}{9}$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (3; -2; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 2y - 2z + 3 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện M, M_1, M_2 thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} A+B+2C+D=0 \\ -A-B+C+D=0 \\ 3A+2B+4C+D=0 \end{cases} \overset{\text{Chọn } A=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B+2C+D=-1 \\ -B+C+D=1 \\ 2B+4C+D=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C=\dfrac{2}{3} \\ D=1 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P): $3x - 2y - 2z + 3 = 0$.

c. Ta có nhận xét:

$g((d_2), (Q)) \le g((d_2), (d_1))$

do đó $\text{Max}[g((d_2), (Q))] = g((d_2), (d_1))$ đạt được khi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d_2) trên (Q), tức là:

$$(Q) \perp ((d_1), (d_2)) = (P) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}\right] = (2; -7; 10).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(2;-7;10) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - 7y + 10z - 15 = 0.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d_1) thuộc (R) nên:

  $\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 2b.$ (1)

- Vì $g((d_2), (R)) = \alpha$ có $\sin\alpha = \dfrac{4}{9}$ nên:

$$\frac{4}{9} = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|2a+b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 16(a^2 + b^2 + c^2) = 9(2a + b + 2c)^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 16(a^2+b^2) + 16(-2a-2b)^2 = 9\left[2a+b+2(-2a-2b)\right]$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 + 20ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2a \text{ hoặc } b = 22a.$$

Khi đó:

- Với $b = -2a$ thì $c = 2a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; -2a; 2a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; -2; 2)$, từ đó ta được:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

- Với $b = 22a$ thì $c = -46a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; 22a; -46a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; 22; -46)$, từ đó ta được:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1;22;-46) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 22y - 46z + 69 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi $N \in (d_2)$ sao cho $MN = MM_1$, ta lần lượt có:

$N(3 + 2u; 2 + u; 4 + 2u)$,

$MN^2 = MM_1^2 \Leftrightarrow (2u + 2)^2 + (u + 1)^2 + (2u + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow 9(u + 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow u + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow u_1 = 0$ hoặc $u_2 = -2$.

Khi đó:

- Với $u_1 = 0$ thì $N_1(3; 2; 4)$ và trung điểm của M_1N_1 là $K_1\left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_1):

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1}(0; 1/2; -1/2) \text{ chọn vtcp } (0; 1; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $u_2 = -2$ thì $N_2(-1; 0; 0)$ và trung điểm của M_1N_2 là $K_2\left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_2):

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2}\left(2; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ chọn vtcp } (4; 3; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

f. Mặt cầu (S) cần dựng với tâm I sẽ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại M.

Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì tâm I thuộc (Δ) nên $I(1 + 3t; 1 - 2t; 2 - 2t)$, từ đó:

$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 17 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t_{1,2} = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $t_1 = 1$ thì $I_1(4; -1; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(4; -1; 0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 17.$$

- Với $t_2 = -1$ thì $I_2(-2; 3; 4)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-2; 3; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Ta lần lượt:

- Với đường phân giác (Δ_1) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1):

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_1}(4; 3; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): 4x + 3y + 3z - 13 = 0.$$

Khi đó, ta có:

a. Toạ độ tâm T_1 của mặt cầu (T_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ 4x + 3y + 3z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 0 \\ z = 19 \\ v = 9 \end{cases} \Rightarrow T_1(-11; 0; 19).$$

b. Bán kính R_1 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_1, (d_1)) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{M_1T_1}, \overrightarrow{u_1} \right] \right\|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} = \sqrt{424}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_1) như sau:

$$(T_1): (x + 11)^2 + y^2 + (z - 19)^2 = 424.$$

- Với đường phân giác (Δ_2) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_2):

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_2}(0; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): y - z + 1 = 0.$$

Khi đó, ta có:

c. Toạ độ tâm T_2 của mặt cầu (T_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2(-2; 0; 1).$$

d. Bán kính R_2 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_2, (d_1)) = \frac{\left\| \left[\overrightarrow{M_1T_2}, \overrightarrow{u_1} \right] \right\|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} = \sqrt{2}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_2) như sau:

$$(T_2): (x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1), (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q_1) chứa (d_1) và song song với (d_2).

4. Viết phương trình các mặt phẳng (Q_1), (Q_2) theo thứ tự chứa (d_1), (d_2) và song song với nhau.
5. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1), (d_2).
6. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2).
8. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

- Với yêu cầu "*Tính góc giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta thực hiện tương tự như trong phần chú ý về hai đường thẳng cắt nhau.
- Với yêu cầu "*Tính khoảng cách giữa* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có kết quả:
  - (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$.
  - (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

  Khi đó, khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

  Ngoài ra, còn có thể sử dụng kết quả trong yêu cầu (3) hoặc yêu cầu (6).
- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q_1) *chứa* (d_1) *và song song với* (d_2)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2) và lấy điểm $M_1 \in (d_1)$.

Bước 2: Mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song và cách đều hai đường thẳng chéo nhau* (d_1) *và* (d_2) *cho trước*", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2).

Lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$, suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

Bước 2: Mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình đường vuông góc chung của* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

Bước 2: Chuyển phương trình (d_1) và (d_2) về dạng tham số, suy ra tọa độ của A, B theo phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

Bước 3: Từ điều kiện:

$$\begin{cases}(d)\perp(d_1)\\(d)\perp(d_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\\u\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Toạ độ A, B

Bước 4: Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d):\ \begin{cases}\text{qua B}\\\text{vtcp }\overrightarrow{AB}\end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{u_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1\in(d_1)\\\text{Cặp vtcp }\vec{u}\text{ và }\overrightarrow{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{qua } M_1\in(d_1)\\\text{vtpt }\overrightarrow{n_1}=[\vec{u},\overrightarrow{u_1}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_1)$.

Bước 3: Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2):\ \begin{cases}\text{Qua } M_2\in(d_2)\\\text{Cặp vtcp }\vec{u}\text{ và }\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow(P_2):\ \begin{cases}\text{qua } M_2\in(d_2)\\\text{vtpt }\overrightarrow{n_2}=[\vec{u},\overrightarrow{u_2}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_2)$.

Bước 4: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases}\Rightarrow\text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{u_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1\in(d_1)\\\text{Cặp vtcp }\vec{u}\text{ và }\overrightarrow{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{qua } M_1\in(d_1)\\\text{vtpt }\overrightarrow{n_1}=[\vec{u},\overrightarrow{u_1}]\end{cases}$$

$\Rightarrow (P_1)$.

Bước 3: Giả sử $(d)\cap(d_2)=\{B\}$ suy ra $(P_1)\cap(d_2)=\{B\}\Rightarrow$ toạ độ B.

Bước 4: Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 4: (Áp dụng trong trường hợp hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P_1) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Dựng mặt phẳng (P_2) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả* (d_1) *và* (d_2)", chúng ta đi viết phương trình mặt cầu đường kính AB với A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

- Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu* (S) *tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (Δ), (d_1) và (d_2) về dạng tham số và tìm các vtcp tương ứng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$.

Bước 2: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra toạ độ I, A, B theo các phương trình tham số.

Bước 3: Ta có điều kiện:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp (d_1) \\ \overrightarrow{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{u_2} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Toạ độ } I \\ R = IA \end{cases}$$

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Thí dụ 3. *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *có phương trình*:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = t, t \in \mathbb{R}, \\ z = 1 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0 \quad\quad ,u \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

a. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* (d_1), (d_2) *chéo nhau. Tính khoảng cách và góc giữa chúng.*

b. *Viết phương trình các mặt phẳng* (Q_1), (Q_2) *theo thứ tự chứa* (d_1), (d_2) *và song song với nhau.*
c. *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *song song và cách đều* (d_1), (d_2).
d. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* A(0; 1; 0) *cắt cả* (d_1), (d_2).
e. *Viết phương trình đường thẳng cắt cả* (d_1), (d_2) *và song song với đường thẳng* $(\Delta_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
f. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* B(2; 1; 2) *và vuông góc với cả* (d_1), (d_2).
g. *Viết phương trình đường vuông góc chung của* (d_1) *và* (d_2).
h. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả* (d_1) *và* (d_2).
i. *Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả* (d_1), (d_2) *và có tâm thuộc đường thẳng* $(\Delta_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.
j. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính* $R = \sqrt{5}/2$ *tiếp xúc với* (d_1) *tại điểm* C_1(1; 1; 1) *và tiếp xúc với* (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(0; 1; 0)$ và đi qua điểm M_1(1; 0; 1).
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 0; 0)$ và đi qua điểm M_2(1; 0; 2).

Nhận xét rằng:

$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 1 \Rightarrow$ (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 1.$$

Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

b. Gọi $\vec{n}$ là vectơ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0; 0; -1) \text{ chọn } \vec{n}(0; 0; 1).$$

Khi đó, ta lần lượt có:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1; 0; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): z - 1 = 0;\ (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1; 0; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): z - 2 = 0.$$

c. Gọi M là trung điểm M_1M_2 thì $M\left(1; 0; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M\left(1; 0; 3/2\right) \\ \text{vtpt } \vec{n}(0; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2z - 3 = 0.$$

d. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm M, N. Khi đó:

- Điểm $M \in (d_1)$ suy ra M(1; t; 1) và $\overrightarrow{AM}(1; t-1; 1)$.
- Điểm $N \in (d_2)$ suy ra N(1 + u; 0; 2) và $\overrightarrow{AN}(u+1; -1; 2)$.
- Ba điểm A, M, N thẳng hàng ta được:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k(u+1) \\ t - 1 = -k \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ u = 1 \end{cases} \Rightarrow N\left(2; 0; 2\right).$$

Khi đó, đường thẳng (a) được cho bởi:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}\left(2; -1; 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 2: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng, khi đó (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_1) \subset (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1) được cho bởi:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = (-1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x - z = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_2) được cho bởi:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2): 2y + z - 2 = 0.$

Vậy, đường thẳng (a) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Bằng việc đặt y = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} y = t \\ x - z = 0 \\ 2t + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (a) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (a) với vtcp $\overrightarrow{u_a}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_1) \subset (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (P_1) có vtpt $\overrightarrow{n_1}$ được cho bởi:

  $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1)$.

- Mặt phẳng (P_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$ được cho bởi:

  $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1)$.

- vtcp $\overrightarrow{u_a}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:

  $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-2; 1; -2)$ chọn $\vec{u}(2; -1; 2)$.

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \vec{u}\left(2;-1;2\right) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 3: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_2) tại N.

- Gọi (P_1) là trình mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1) \end{cases}$$

  $\Leftrightarrow$ (P_1): $x - z = 0$.

- Tọa độ điểm N được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P_1), ta được:

  $1 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow N\left(2;0;2\right)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (a) có dạng:

$$(a): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}\left(2;-1;2\right) \end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Cách 4: Giả sử (a) là đường thẳng cần dựng và (a) cắt (d_1) tại M.

- Gọi (P_2) là trình mặt phẳng qua A và chứa (d_2), ta có:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A(0;1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}] = (0;2;1) \end{cases}$$

  $\Leftrightarrow$ (P_2): $2y + z - 2 = 0$.

- Tọa độ điểm N được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (P_1), ta được:

  $2t + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (a) có dạng:

$$\text{(a): }\begin{cases}\text{Qua } A(0;1;0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM}\left(1;-1/2;1\right) \text{ chọn } (2;\, -1;\, 1)\end{cases} \Leftrightarrow (a): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}.$$

e. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm E $\in$ (d_1) suy ra E(1; t; 1).
- Điểm F $\in$ (d_2) suy ra F(1 + u; 0; 2).
- Vì EF song song với đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{u_{\Delta 1}} \Leftrightarrow \frac{u}{1}=\frac{-t}{-1}=\frac{1}{1} \Rightarrow t = u = 1 \Rightarrow E(1;\, 1;\, 1).$$

Khi đó, đường thẳng (b) được cho bởi:

$$\text{(b): }\begin{cases}\text{Qua } E(1;1;1)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}\left(1;-1;1\right)\end{cases} \Leftrightarrow (b): \begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 2: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng, khi đó (b) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases}(\Delta_1)//(R_1)\\ (d_1)\subset(R_1)\end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases}(\Delta_1)//(R_2)\\ (d_2)\subset(R_2)\end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (R_1) được cho bởi:

$$(R_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;0;1)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases} \Leftrightarrow (R_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;0;1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R1}}=[\overrightarrow{u_{\Delta 1}},\ \overrightarrow{u_1}]=(-1;0;1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (R_1): x − z = 0.

- Phương trình mặt phẳng (R_2) được cho bởi:

$$(R_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(1;0;2)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(1;0;2)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R2}}=[\overrightarrow{n_{\Delta 1}},\ \overrightarrow{u_1}]=(0;1;1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (R_2): y + z − 2 = 0.

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}x-z=0\\ y+z-2=0\end{cases}. \qquad (2)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases}x=t\\ t-z=0\\ y+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=2-t\\ z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (b) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (R_1) là mặt phẳng song song với (Δ_1) và chứa (d_1), ta có:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R1}} = [\overrightarrow{u_{\Delta 1}}, \overrightarrow{u_1}] = (-1;0;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (R_1)$: $x - z = 0$.

- Tọa độ điểm F được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (R_1), ta được:

$$1 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow F(2;0;2).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (b) có dạng:

$$(b): \begin{cases} \text{Qua } F(2;0;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (b): \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Cách 4: Giả sử (b) là đường thẳng cần dựng và (b) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (R_1) là mặt phẳng song song với (Δ_1) và chứa (d_2), ta có:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{R2}} = [\overrightarrow{n_{\Delta 1}}, \overrightarrow{u_1}] = (0;1;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (R_2)$: $y + z - 2 = 0$.

- Tọa độ điểm E được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào phương trình (R_2), ta được:

$$t + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow E(1;1;1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (b) có dạng:

$$(b): \begin{cases} \text{Qua } E(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta 1}}(1;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (b): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

f. Giả sử (c) là đường thẳng cần dựng và (c) có vtcp $\overrightarrow{u_c}$, ta có:

$$\begin{cases} (c) \perp (d_1) \\ (c) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_c} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_c} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_c} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;0;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (c) có dạng:

$$(c): \begin{cases} \text{Qua } B(2;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_c}(0;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (c): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

g. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) thì:

$$P(1;t;1) \text{ và } Q(1+u;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(u;-t;1).$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = u = 0 \Rightarrow P(1;0;1) \text{ và } Q(1;0;2).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } P(1;\ 0;\ 1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{PQ}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ 0;\ -1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi (α_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (1;\ 0;\ 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (α_1): $x - 1 = 0$.

- Gọi (α_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ -1;\ 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (α_2): $y = 0$.

Vì (d) chính là giao tuyến của (α_1) và (α_2) nên đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt z = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} z = t \\ x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

Cách 3: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_2) tại Q, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ 0;\ -1).$$

Ta lần lượt:

- Gọi (α_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (1;\ 0;\ 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (α_1): $x - 1 = 0$.

- Tọa độ điểm Q được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào phương trình (α_1), ta được:

$x = 1 \Rightarrow Q(1;\ 0;\ 2)$.

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } Q(1;\ 0;\ 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Cách 4: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_1) tại P, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ 0;\ -1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi (α_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0;\ -1;\ 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (α_2): y = 0.

- Tọa độ điểm P được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d_1) vào phương trình (α_2), ta được:

$$y = 0 \Rightarrow P(1;\ 0;\ 1).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } P(1;\ 0;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d):\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Cách 5: Từ kết quả câu a) ((d_1) và (d_2) vuông góc với nhau), ta lần lượt có:

- Gọi (β_1) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (d_2), khi đó:

$$(\beta_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;0;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_2}(1;\ 0;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (\beta_1): x - 1 = 0.$$

- Gọi (β_2) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (d_1), khi đó:

$$(\beta_2): \begin{cases} \text{qua } M_2(1;0;2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_2}(0;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (\beta_2): y = 0.$$

Vì (d) chính là giao tuyến của (β_1) và (β_2) nên đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \qquad (**)$$

Bằng việc đặt z = t, ta biến đổi hệ (**) về dạng:

$$\begin{cases} z = t \\ x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

h. Mặt cầu (S) đường kính PQ với P, Q theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) chính là mặt cầu cần dựng. Để viết phương trình mặt cầu (S) ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) với đường kính PQ có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm PQ} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(1;\ 0;\ 3/2\right) \\ R = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x-1\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính PQ gồm:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow PM \perp QM \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{QM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1; y; z - 1).(x - 1; y; z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1) + y.y + (z - 1)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính PQ gồm:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MPQ$ vuông tại $M \Leftrightarrow PM^2 + QM^2 = PQ^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 3 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

i. Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_2) về dạng tham số:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + v \\ y = v \\ z = 1 + v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại D_1 và D_2, suy ra:

$I(1 + v; v; 1 + v)$, $D_1(1; t; 1)$, $D_2(1 + u; 0; 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{D_1I}(v; v - t; v)$ và $\overrightarrow{D_2I}(u - v; -v; 1 - v)$.

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại D_1 khi:

  $D_1I \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1I} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1I}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow v - t = 0 \Leftrightarrow v = t \Rightarrow \overrightarrow{D_1I}(v; 0; v)$.

- (S) tiếp xúc với (d_2) tại D_2 khi:

  $D_2I \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{D_2I} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_2I}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v \Rightarrow \overrightarrow{D_2I}(0; -v; 1 - v)$.

- (S) tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:

  $D_1I = D_2I \Leftrightarrow D_1I^2 = D_2I^2$

  $\Leftrightarrow v^2 + v^2 = (-v)^2 + (1 - v)^2 \Leftrightarrow 1 - 2v = 0 \Leftrightarrow t = u = v = \dfrac{1}{2}$

  $\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \left|\overrightarrow{D_1I}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

j. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và tiếp xúc với (d_2) tại C_2, suy ra:

$$C_2(1 + u; 0; 2) \Rightarrow \overrightarrow{C_1I}(a-1; b-1; c-1) \text{ và } \overrightarrow{C_2I}(a-u-1; b; c-2).$$

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại C_1 khi:
$$C_1I \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1I} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1I}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$
- (S) tiếp xúc với (d_2) tại C_2 khi:
$$C_2I \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{C_2I} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_2I}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow a - u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = a - 1.$$
- (S) có bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:
$$R = C_1I = C_2I \Leftrightarrow R^2 = C_1I^2 = C_2I^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = (a-u-1)^2 + b^2 + (c-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = (a-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (c-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} = 1 + (c-2)^2 \\ (a-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (c-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c^2 - 16c + 15 = 0 \quad (*) \\ (a-1)^2 = 4 - 2c \end{cases}$$

Phương trình (*) có các nghiệm $c_1 = \frac{3}{2}$ và $c_2 = \frac{5}{2}$. Khi đó:

- Với $c_1 = \frac{3}{2}$ thì:
$$(a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 1 \\ a - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \end{array}\right..$$
  Từ đó:
  - Với $a_1 = 2$ ta được tâm $I_1\left(2; 1; \frac{3}{2}\right)$ nên có mặt cầu:
  $$(S_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$
  - Với $a_2 = 0$ ta được tâm $I_2\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$ nên có mặt cầu:
  $$(S_2): x^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$
- Với $c_1 = \frac{5}{2}$ thì $(a-1)^2 = -1$, vô nghiệm.

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Dạng toán 5:</u> Vị trí tương đối của mặt cầu với đường thẳng

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

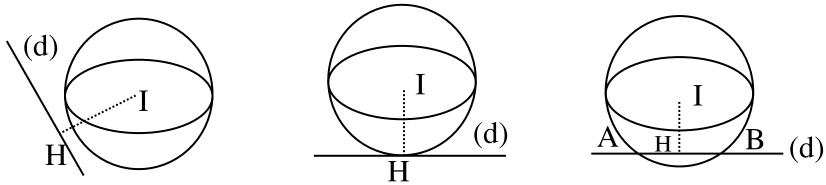
Cách 1: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S), từ đó tính:

$$d = d(I, (d)).$$

<u>Bước 2:</u> So sánh d với R để đưa ra kết luận:

- Nếu $d > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1 *Hình 2* *Hình 3*

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

<u>Bước 2:</u> Thay x, y, z của (d) vào (S), ta được:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (1)$$

<u>Bước 3:</u> Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $t_0 \Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ với $A(x(t_1); y(t_1); z(t_1))$ và $B(x(t_2); y(t_2); z(t_2))$.

Với các bài toán không chứa tham số, khi sử dụng cách 1 chúng ta dễ dàng kết luận được về vị trí tương đối của (d) và (S), tuy nhiên:

- Trong trường hợp $(d) \cap (S) = \{A, B\}$ hoặc $(d) \cap (S) = \{M\}$ chúng ta không nhận được toạ độ của A, B và M.
- Với các bài toán có chứa tham số khi sử dụng cách 1 sẽ rất phức tạp, do vậy, tốt nhất hãy chọn cách 2.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) tại hai điểm A, B chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm toạ độ A, B (hoặc độ dài đoạn AB).
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B.

4. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
    a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
    b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
    c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính.
7. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

- Với yêu cầu (1) thì trong phần xét vị trí tương đối giữa (d) và (S) chúng ta sử dụng cách 2.
- Với yêu cầu (2) thì đường thẳng (Δ) cần dựng sẽ đi qua I và song song với (d).
- Với yêu cầu (3) thì chúng ta có ngay:
    - Mặt phẳng (P_A) đi qua A và có vtpt $\overrightarrow{IA}$.
    - Mặt phẳng (P_B) đi qua B và có vtpt $\overrightarrow{IB}$.

  Lưu ý: Nếu chỉ với yêu cầu tính góc α giữa (P_A), (P_B) thì $\alpha = g(IA, IB)$.

- Với yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$.
- Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

Bước 2: Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên:
$$(P): ax + by + cz + \underline{D} = 0.$$

Bước 3: Ta lần lượt:

a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:
$d(I, (P)) = R \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:
$I \in (P)) \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P).

c. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:
$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

- Với yêu cầu (5), gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì (Q) = (I, (d)) = (IAB) và chúng ta đã biết hai cách để viết được phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

- Với yêu cầu (6), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi H là trung điểm AB, suy ra toạ độ của H.

Bước 2: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì IH ⊥ (Q). Do đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } H \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IH} \end{cases}.$$

- Với yêu cầu (7), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, giả sử:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Vì (Q) chứa (d) nên A, B thuộc (Q). (1)

Bước 2: Để (Q) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) chúng ta nhận được giá trị tương ứng của A, B, C, D.

Thí dụ 1. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2},$$

$$(S): (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *cắt mặt cầu* (S) *tại hai điểm* A, B. *Tính độ dài* AB.

b. *Viết phương trình đường thẳng* (Δ) *song song với* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *tại hai điểm* E, F *sao cho* EF *có độ dài lớn nhất*.

c. *Viết phương trình các mặt phẳng* (P_A), (P_B) *tiếp xúc với* (S) *theo thứ tự tại các điểm* A, B. *Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng* (P_A), (P_B).

d. *Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với* (d) *và*:
   a. *Tiếp xúc với mặt cầu* (S).
   b. *Cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là đường tròn lớn của* (S).
   c. *Cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn* (C) *có diện tích bằng* 18π.

e. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn lớn của* (S).

f. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn nhận* AB *làm đường kính*.

g. *Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và cắt mặt cầu* (S) *theo thiết diện là một đường tròn* (C) *có bán kính bằng* $r = \sqrt{54/5}$.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm M(1; 2; −1).
- Mặt cầu (S) có tâm I(4; −1; 2) và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$$(2t - 3)^2 + (t + 3)^2 + (2t - 3)^2 = 27 \Leftrightarrow 9t^2 - 18t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow A(1; 2; -1) \\ t = 2 \Rightarrow B(5; 4; 3) \end{array}\right..$$

Khi đó:

$$AB^2 = (5 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = 36 \Leftrightarrow AB = 6.$$

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$d = d(I, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MI}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3\sqrt{2} < R \Rightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}.$$

Khi đó, với là trung điểm AB thì:

$$AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 6.$$

b. Đường thẳng (Δ) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F biết EF có độ dài lớn nhất khi (Δ) đi qua tâm I của mặt cầu (S). Do đó, ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } I(4; -1; 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{2}.$$

c. Ta lần lượt có:

- Mặt phẳng (P_A) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A là:

$$(P_A): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-3; 3; -3) \text{ chọn } (1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): x - y + z + 2 = 0.$$

- Mặt phẳng (P_B) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B là:

$$(P_B): \begin{cases} \text{Qua } B(5; 4; 3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IB}(1; 5; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_B): x + 5y - z - 22 = 0.$$

Khi đó, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{|1 - 5 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}.\sqrt{1 + 25 + 1}} = \frac{5}{9}.$$

d. Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên có vtpt là $\vec{u}$ do đó có phương trình:

(P): $2x + y + 2z + D = 0$.

a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|8 - 1 + 4 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |D + 11| = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow D = -11 \pm 9\sqrt{3}.$$

Khi đó:

- Với $D = -11 + 9\sqrt{3}$, ta được mặt phẳng (P_1): $2x + y + 2z - 11 + 9\sqrt{3} = 0$.
- Với $D = -11 + 9\sqrt{3}$, ta được mặt phẳng (P_2): $2x + y + 2z - 11 - 9\sqrt{3} = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:

$$I \in (P)) \Leftrightarrow 2.4 - 1 + 2.2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -11.$$

Vậy, ta được phương trình mặt phẳng (P): $2x + y + 2z - 11 = 0$.

c. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có:

$$S_{(C)} = 18\pi \Leftrightarrow \pi.r^2 = 18\pi \Leftrightarrow r = 3\sqrt{2}.$$

Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính $r = 3\sqrt{2}$ điều kiện là:

$$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|8 - 1 + 4 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 9 \Leftrightarrow D = -2 \text{ hoặc } D = -20.$$

Khi đó:

- Với $D = -2$, ta được mặt phẳng (P_3): $2x + y + 2z - 2 = 0$.
- Với $D = -20$, ta được mặt phẳng (P_4): $2x + y + 2z - 20 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_3) và (P_4) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) thì (Q) = (IAB). Tới đây, chúng ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (Q), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right] = (18; 0; -18) \text{ chọn } \vec{n}(1; 0; -1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; -1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 0; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - z - 2 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \qquad (1)$$

Vì I, A, B thuộc (Q), ta được:

$$\begin{cases} 4A - B + 2C + D = 0 \\ A + 2B - C + D = 0 \\ 5A + 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = -A \\ D = -2A \end{cases}.$$

Thay B, C, D vào (1), ta được:

$$(Q): Ax - Az - 2A = 0 \Leftrightarrow (Q): x - z - 2 = 0.$$

f. Gọi H là trung điểm AB, suy ra H(3; 3; 1).

Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng thì (R) vuông góc với IH, do đó:

$$(R): \begin{cases} \text{Qua } H(3; 3; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{HI}(1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x - 4y + z + 8 = 0.$$

g. Giả sử mặt phẳng (T) cần dựng có phương trình:

(T): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì A, B thuộc (T), ta được:

$$\begin{cases} A + 2B - C + D = 0 \\ 5A + 4B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B - C + D = 0 \\ 4A + 2B + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -2A - 2C \\ D = 3A + 5C \end{cases}.$$

Để (T) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{\frac{54}{5}}$ điều kiện là:

$$d(I, (T)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|4A - B + 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{54}{5}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4A - (-2A - 2C) + 2C + (3A + 5C)|}{\sqrt{A^2 + (-2A - 2C)^2 + C^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(9A + 9C)^2 = 81(5A^2 + 8AC + 5C^2) \Leftrightarrow 2AC = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } C = 0.$$

Khi đó:

- Với $A = 0$ thì $B = -2C$ và $D = 5C$, ta được mặt phẳng:

  (T_1): $-2Cy + Cz + 5C = 0 \Leftrightarrow (T_1)$: $2y - z - 5 = 0$.
- Với $C = 0$ thì $B = -2A$ và $D = 3A$, ta được mặt phẳng:

  (T_2): $Ax - 2Ay + 3A = 0 \Leftrightarrow (T_2)$: $x - 2y + 3 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) (tâm I, bán kính R) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm toạ độ tiếp điểm A.
2. Viết phương trình đường thẳng song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
7. Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

8. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
9. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc α.

- Với yêu các cầu (1), (2), (3), (6), chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết trong phần chú ý về trường hợp đường thẳng cắt mặt cầu.
- Với yêu các cầu (4) ta thấy ngay mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua A và có vtpt là $\overrightarrow{IA}$.
- Với yêu các cầu (7) ta thực hiện viết phương trình đường thẳng (IA).
- Với yêu các cầu (8), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Giả sử đường thẳng (d') cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases} (d') \perp (d) \\ (d') \perp IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right].$$

Bước 4: Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'} \end{cases}.$$

- Với yêu các cầu (9), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ (a; b; c), ta có:

- $\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA} = 0$. (1)
- $g((\Delta), (d)) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \cos\alpha$. (2)

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Bước 4: Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng* (d) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu* (S) *tại điểm* A. *Tìm toạ độ tiếp điểm* A.
b. *Viết phương trình mặt phẳng chứa* (d) *và tiếp xúc với* (S).
c. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *và cắt mặt cầu* (S) *tại điểm* B *sao cho* AB *có độ dài lớn nhất.*
d. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *tiếp xúc với* (S) *và vuông góc với đường thẳng* (d).

e. *Viết phương trình đường thẳng qua* A *tiếp xúc với* (S) *và tạo với đường thẳng* (d) *một góc* 30^0.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 1; 2)$ và đi qua điểm M(1; 2; 4).
- Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 1) và bán kính $R = \sqrt{3}$.

a. Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + (2t + 3)^2 = 3 \Leftrightarrow 6t^2 + 12t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(0; 1; 2).$$

Vậy, đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A(0; 1; 2).

b. Giả sử (P) là mặt phẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z + 1 = 0.$$

c. Giả sử (d_1) là đường thẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } I \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d’) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases} (d') \perp (d) \\ (d') \perp IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right] = (3; -3; 0) \text{ chọn } \overrightarrow{u'}(1; -1; 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d’) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(1; -1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

e. Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(a; b; c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b.$$

$$g((\Delta), (d)) = 30^0 \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \cos 30^0 \Leftrightarrow \frac{|a.1 + b.1 + c.2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[a + b + 2(a + b)\right]^2 = 9\left[a^2 + b^2 + (a + b)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } a = 0.$$

Khi đó:

- Với b = 0 thì a = c ta được $\overrightarrow{u_\Delta}(a; 0; a)$ chọn $\overrightarrow{u_\Delta}(1; 0; 1)$, từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(1; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với a = 0 thì c = b ta được $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; b; b) chọn $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; 1; 1), từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
3. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
4. Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Giả sử các tiếp điểm là T_1, T_2, hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

- Với các yêu cầu (1), (2), (3), chúng ta thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
- Với các yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước lớn sau:

Bước 1: Lập phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) chứa (d) và tiếp xúc với (S).

Bước 2: Tìm toạ độ các tiếp điểm T_1, T_2 với cách hiểu chúng chính là hình chiếu vuông góc của I trên các mặt phẳng (P_1), (P_2).

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

Thí dụ 3. *Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình*:

$$(d): \frac{x-3}{9} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}, \quad (S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 14.$$

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* (d) *không cắt mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng* (d) *và tiếp xúc với mặt cầu* (S).
c. *Giả sử các tiếp điểm của* (S) *với các mặt phẳng trong câu* b) *là* T_1, T_2, *hãy viết phương trình đường thẳng* (T_1T_2).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(9; 3; 5)$ và đi qua điểm M(3; 2; −1).

- Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính $R = \sqrt{14}$.

a. Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$(3 + 9t)^2 + (3t + 1)^2 + (5t - 3)^2 = 14 \Leftrightarrow 125t^2 + 30t + 5 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S).

b. Lấy thêm điểm N(–6; –1; –6) thuộc (d) và giả sử mặt phẳng (P) cần dựng có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì M, N thuộc (P) nên:

$$\begin{cases} 3A + 2B - C + D = 0 \\ -6A - B - 6C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5C = -9A - 3B \\ 5D = -24A - 13B \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

- Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|B + 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow (B + 2C + D)^2 = 14(A^2 + B^2 + C^2).$$

Để tiện tính toán, ta nhân hai vế của đẳng thức trên với 25:

$$(5B + 10C + 5D)^2 = 350(A^2 + B^2) + 14(5C)^2. \quad (1)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$2A^2 + 3AB - 2B^2 = 0 \Leftrightarrow A = -2B$ hoặc $B = 2A$.

Khi đó:

a. Với $B = 2A$ thì chọn $A = 1$ suy ra $B = 2$, $C = -3$, $D = -10$, ta được:

(P_1): $x + 2y - 3z - 10 = 0$.

b. Với $A = -2B$ thì chọn $B = -1$ suy ra $A = 2$, $C = -3$, $D = -7$, ta được:

(P_2): $2x - y - 3z - 7 = 0$.

Vậy, có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta lần lượt có:

- Xác định toạ độ T_1: Phương trình đường thẳng (IT_1) được cho bởi:

$$(IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (IT_1) \perp (P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I(0;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_1}(1;2;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $(IT_1) \cap (P_1) = \{T_1\}$, do đó:

$t + 2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_1(1; 3; -1)$.

- Xác định toạ độ T_2: Phương trình đường thẳng (IT_2) được cho bởi:

$$(IT_2): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (IT_2) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} \text{Qua } I(0;1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_2}(2;-1;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Vì $(IT_2) \cap (P_2) = \{T_2\}$, do đó:

$$4t - (1 - t) - 3(2 - 3t) - 7 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_2(2;\ 0;\ -1).$$

- Phương trình đường thẳng (T_1T_2) được cho bởi:

$$(T_1T_2): \begin{cases} \text{Qua } T_1(1;\ 3;\ -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{T_1T_2}(1;\ -3;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (T_1T_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

<u>Dạng toán 6:</u> (***Điểm và đường thẳng***): Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

<u>Cách 1</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (có vtcp } \vec{u}(a;\ b;\ c)\text{)}.$$

<u>Bước 2:</u> Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + at;\ y_0 + bt;\ z_0 + ct)$

<u>Bước 3:</u> Thiết lập tính chất K cho điểm M.

<u>Cách 2</u>: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng thường gặp:

1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất (hoặc được phát biểu dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (d)").

Khi đó, nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 + (z_0 + ct)^2 = At^2 + Bt + C \geq \frac{\Delta}{4A}.$$

Vậy, ta được $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = -\frac{\Delta}{4A}$ đạt được khi $t = -\frac{b}{2A} \Rightarrow M$.

2. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d). Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

$$AM \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị } t \Rightarrow \text{Toạ độ } H.$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

  Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases}.$$

  Bước 3: Hình chiếu vuông góc M của A lên đường thẳng (d) là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm M thuộc (d) sao cho độ dài AM ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

  Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện M là trung điểm của AA_1.

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

  Bước 1: Xác định vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d).

  Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{x+x_A}{2}; \dfrac{y+y_A}{2}; \dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (d) và cắt (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

  Bước 2: Suy ra đường thẳng (AM) là đường thẳng cần dựng.

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

  Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng (d).

  Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).

  Bước 3: Đường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

  Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AM} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) thì ta có:

$$R = d(A, (d)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A \\ \text{Bán kính } R \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Cho điểm* A(2; 6; 2) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

a. *Tìm trên đường thẳng* (d) *điểm* $M(x_M; y_M; z_M)$ *sao cho tổng* $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. *Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* A *lên đường thẳng* (d).

c. *Tìm tọa độ điểm* A_1 *đối xứng với điểm* A *qua đường thẳng* (d).

d. *Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm* A *vuông góc với* (d) *và cắt* (d).

e. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (d).

f. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và cắt đường thẳng* (d) *tại hai điểm* E, F *sao cho* EF = 6.

✍ *Giải*

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Điểm M ∈ (d), suy ra M(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t).

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (3 - 2t)^2 + (1 + t)^2 + (1 + 2t)^2 = 9t^2 - 6t + 11$$
$$= (3t - 1)^2 + 10 \geq 10.$$

Từ đó, suy ra $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 10$ đạt được khi:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Toạ độ điểm } M\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Vì H ∈ (d) nên H(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t), suy ra $\overrightarrow{AH}(1 - 2t; t - 5; 2t - 1)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) điều kiện là:

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2(1 - 2t) + (t - 5) + 2(2t - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtpt } \vec{u}(-2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - y - 2z + 6 = 0.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 9t - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(0; -2; 4)$.

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$ và giả sử điểm $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+2}{2}; \dfrac{y+6}{2}; \dfrac{z+2}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = 3 - 2t \\ \dfrac{y+6}{2} = 1 + t \\ \dfrac{z+2}{2} = 1 + 2t \\ -2(x-2) + (y-6) + 2(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 2t - 4 \\ z = 4t \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(0; -2; 4).$$

d. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Gọi (d') là đường thẳng cần dựng thì:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{Qua H} \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(1; 4; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Gọi (d') có vtcp $\overrightarrow{u'}$ là đường thẳng cần dựng.

Lấy điểm B(3; 1; 1) thuộc (d) và gọi (P) = (A, (d)) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (-9; 0; -9) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(1; 0; 1).$$

Khi đó, ta nhận thấy:

$$\begin{cases} (d') \subset (P) \\ (d') \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1; -4; 1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(-1;\ -4;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = AH = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1;\ 2;\ -2)$ và đi qua điểm B(3; 1; 1). Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d), ta có:

$$R = d(A, (d)) = \sqrt{18}.$$

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R = AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{AH^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R = AE = \sqrt{AM^2 + EM^2}\ \sqrt{d^2(A, (d)) + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 6;\ 2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

☞ ***Chú ý***: Tiếp tục ứng dụng hình chiếu vuông góc của điểm trên đường thẳng chúng ta xét các dạng toán sau:

- *Cho hai điểm* A, B *và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:

  a. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

  b. $MA^2 + MB^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Khi đó:

a. Chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2MI.$$

Từ đó, ta thấy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

Bước 2: Tìm toạ độ của M.

b. Ta có thể lựa chọn các cách giải sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Từ đó, ta thấy $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

Bước 2: Tìm toạ độ của M.

Cách 2**:** Sử dụng phương trình tham số (giả sử là t) của đường thẳng (d) chúng ta biến đổi biểu thức $MA^2 + MB^2$ về dạng (ta luôn có $a > 0$):

$$MA^2 + MB^2 = at^2 + bt + c \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Từ đó, ta thấy $(MA^2 + MB^2)_{Min} = -\frac{\Delta}{4a}$, đạt được khi $t = -\frac{b}{2a}$, suy ra toạ độ điểm M.

- Mở rộng với ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hoặc tứ diện ABCD) chúng ta sử dụng trọng tâm G của ΔABC ((hoặc trọng tâm G của tứ diện ABCD)). Cụ thể "*Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:

a. $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. $MA^2 + MB^2 + MC^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Ở đây, chúng ta thực hiện phép biến đổi:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

<u>Dạng toán 7:</u> (***Điểm và mặt phẳng***): Để tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

<u>Cách 1</u>: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt phẳng.

<u>Cách 2</u>: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(P) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng thường gặp:

1. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P). Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì:

  <u>Bước 1:</u> Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

  <u>Bước 2:</u> Giả sử H(x; y; z) là chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của H.}$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì:

  <u>Bước 1:</u> Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

  <u>Bước 2:</u> Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (d).}$$

  <u>Bước 3:</u> Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (P), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm H thuộc (P) sao cho độ dài AH ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  <u>Bước 1:</u> Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

  <u>Bước 2:</u> Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

  <u>Bước 1:</u> Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

  <u>Bước 2:</u> Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc } (P) \\ AA_1 \perp (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+x_A}{2}; \dfrac{y+y_A}{2}; \dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} // \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AH} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

$$R = d(A, (P)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M(x_M; y_M; z_M) sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất bởi nó được phát biểu lại dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (P)").
- Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, suy ra toạ độ của I.

Bước 2: Nhận xét rằng $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}\right| = 2MI$.

Từ đó:

$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Bước 3: Xác định toạ độ điểm M.

2. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho:

a. MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

b. | MA − MB | đạt giá trị lớn nhất.

Thí dụ 1. *Cho hai điểm* A(1; 1; −1), B(−1; 3; −1) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình* x + y + 2z − 6 = 0.

a. *Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* A *lên mặt phẳng* (P).

b. *Tìm tọa độ điểm* A_1 *đối xứng với điểm* A *qua mặt phẳng* (P).

c. *Tìm trên mặt phẳng* (P) *điểm* M(x_M; y_M; z_M) *sao cho tổng* $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

d. *Tìm trên* (P) *điểm* N *sao cho* $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

e. *Tìm trên* (P) *điểm* E *sao cho* EA + EB *đạt giá trị nhỏ nhất.*

f. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (P).

g. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua* A *và tiếp xúc với* (P).
h. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua* A *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn lớn.*
i. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và cắt* (P) *theo thiết diện là đường tròn* (C) *có bán kính* $r = 3\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$.

Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH}(x-1;\ y-1;\ z+1) // \vec{n}(1; 1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - 6 = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x - y = 0 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 2; 1).$$

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$. Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; -1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \\ x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 2; 1).$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(3; 3; 3)$.

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$ và giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (P)} \\ AA_1 \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+1}{2}; \dfrac{y+1}{2}; \dfrac{z-1}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} // \vec{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+1}{2} + 2.\dfrac{z-1}{2} - 6 = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1(3; 3; 3).$$

c. Nhận xét rằng $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 + (z_M - 0)^2 = OM^2$.

Từ đó, suy ra:

$$\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} \Leftrightarrow \text{OM nhỏ nhất} \Leftrightarrow \text{M là hình chiếu vuông góc của O trên (P).}$$

Gọi (Δ) là đường thẳng thoả mãn:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua O} \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua O}(0;\ 0;\ 0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 1;\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{M\} = (\Delta) \cap (P)$ nên bằng cách phương trình tham số của (Δ) vào phương trình của (P), ta được:

$$t + t + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1;\ 1;\ 2).$$

Vậy, với điểm M(1; 1; 2) thì $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 6$.

d. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra I(1; 3; 1). Nhận xét rằng:

$$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right| = \left|2\overrightarrow{NI}\right| = 2NI.$$

Từ đó:

$$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow \text{NI nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow \text{N là hình chiếu vuông góc của I trên (P).}$$

- Xác định toạ độ điểm N: Gọi (d’) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua I} \\ (d') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua I}(1;\ 3;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 1;\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

Vì $\{N\} = (d') \cap (P)$ nên bằng cách phương trình tham số của (d’) vào phương trình của (P), ta được:

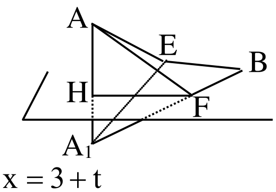
$$(1 + t) + (3 + t) + 2(1 + 2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow N(1;\ 3;\ 1).$$

Vậy, với điểm N(0; 1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. (Dựa vào kết quả câu b): Nhận xét rằng:

$$t_A.t_B = -6.(-6) = 36 > 0 \Leftrightarrow \text{A, B ở về cùng một phía với (P).}$$

Phân tích: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) và $\{F\} = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm E bất kỳ thuộc (P), ta có:



$$EA + EB = EA_1 + EB \geq A_1B = FA + FB.$$

Vậy, ta được EA + EB nhỏ nhất khi $E \equiv F$.

Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B): \begin{cases} \text{Qua } A_1(3;\ 3;\ 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-4;\ 0;\ -4) \text{ chọn } (1;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Khi đó, để tìm toạ độ F ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

$$3 + t + 3 + 2(3 + t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow F(1;\ 3;\ 2).$$

Vậy, điểm E(1; 3; 1) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=AH=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

Cách 2: (Độc lập với câu a): Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

$$R = d(A, (P)) = \sqrt{6}.$$

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=AH=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

g. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và tiếp xúc với (P) chính là mặt cầu đường kính AH, ta có ngay:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AH} \\ \text{Bán kính } R=\dfrac{AH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}; 2\right) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{6}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}.$$

h. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là đường tròn tâm H và bán kính AH nên:

$$(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6.$$

i. Mặt cầu (T) cần dựng có bán kính là:

$$R^2 = d(A, (P)) + r^2 = 6 + 18 = 24 \Leftrightarrow R = \sqrt{24}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1; 1; -1) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{24} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 24.$$

Dạng toán 8: (***Điểm và mặt cầu***): Để tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) thoả mãn điều kiện K.

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

***Cách 1*:** Sử dụng phương trình ban đầu của mặt cầu.

***Cách 2*:** Thiết lập điều kiện để M là giao điểm của một đối tượng khác đối với mặt cầu (thường là đường thẳng).

Thí dụ 1. *Cho điểm* $A(2; 3; 4)$ *và mặt cầu* $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

a. *Chứng tỏ rằng điểm* A *nằm ngoài mặt cầu* (S).

b. *Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A cắt (S) tại hai điểm* B, C *sao cho* BC *có độ dài lớn nhất.*

c. *Tìm điểm* M *thuộc* (S) *sao cho* MA *đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*
d. *Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với* (S) *và cách* A *một khoảng lớn nhất.*
e. *Viết phương trình mặt cầu tâm* A *và tiếp xúc với* (S).
f. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đi qua* A *và tiếp xúc với* (S).
g. *Viết phương trình mặt cầu có bán kính lớn nhất, đi qua* A *và tiếp xúc với* (S).

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính $R = \sqrt{3}$, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + (3 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 12 \Leftrightarrow IA = 2\sqrt{3} > R.$$

Vậy, điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

b. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(0;\ 1;\ 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;\ 2;\ 2) \text{ chọn } (1;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$MA \geq |IA - IM| = |IA - R| = \left|2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow MA_{Min} = \sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

$$MA \leq IA + IM = IA + R = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow MA_{Max} = 3\sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

Tức trong cả hai trường hợp {M} = (IA) ∩ (S) = (d) ∩ (S).

Thay phương trình tham số của (d) vào (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + t^2 = 3 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1;\ 2;\ 3) \\ M_2(-1;\ 0;\ 1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AM_1 = \sqrt{3} \\ AM_2 = 3\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, ta có kết luận:

- $MA_{Min} = \sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_1(1;\ 2;\ 3)$.
- $MA_{Max} = 3\sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_2(-1;\ 0;\ 1)$.

d. Mặt phẳng (P) cần dựng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất chính là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm M_2, do đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_2(-1;\ 0;\ 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(3;\ 3;\ 3) \text{ chọn } (1;\ 1;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y + z = 0.$$

e. Mặt cầu tâm A có thể tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài với (S), nên ta có:

- Mặt cầu (T_1) tâm A tiếp xúc ngoài với (S) được cho bởi:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } A(2;\ 3;\ 4) \\ \text{Bán kính } R = AM_1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow (T_1): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 3.$$

- Mặt cầu (T_2) tâm A tiếp xúc trong với (S) được cho bởi:

$$(T_2):\begin{cases}\text{Tâm } A(2;\,3;\,4)\\ \text{Bán kính } R = AM_2 = 3\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow (T_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 27.$$

f. Mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_1, do đó:

$$(S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1 \text{ là trung điểm } AM_1\\ \text{Bán kính } R_1 = \dfrac{AM_1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)\\ \text{Bán kính } R_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_1): \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

g. Mặt cầu (S_2) có bán kính lớn nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_2, do đó:

$$(S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2 \text{ là trung điểm } AM_2\\ \text{Bán kính } R_2 = \dfrac{AM_2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)\\ \text{Bán kính } R_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu điểm A nằm trong hoặc nằm trên mặt cầu (S) thì mọi đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua A đều cắt (S). Nhận định này gợi ý một cách chứng minh đường thẳng hoặc mặt phẳng cắt mặt cầu.

Thí dụ 2. *Cho điểm* A(2; 1; 2) *và mặt cầu* (S) *có phương trình*:

$$(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

a. *Chứng tỏ rằng mọi đường thẳng đi qua điểm* A *đều cắt mặt cầu* (S).
b. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua* A *cắt* (S) *theo thiết diện là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.*
c. *Viết phương trình đường thẳng đi qua* A *cắt* (S) *tại hai điểm* B, C *sao cho* BC *có độ dài lớn nhất.*
d. *Viết phương trình đường thẳng đi qua* A *vuông góc với đường thẳng* $(\Delta): \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$ *và cắt* (S) *tại hai điểm* E, F *sao cho* $EF = 3\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 1) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 5 \Leftrightarrow IA = \sqrt{5} < R.$$

Vậy, mọi đường thẳng đi qua điểm A đều cắt mặt cầu (S).

b. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có nhận xét:

$$r^2 = R^2 - d^2(I, (P)) \le R^2 - IA^2 = 4 \Leftrightarrow r \le 2.$$

Suy ra $r_{Min} = 2$, đạt được khi $d(I, (P)) = IA \Leftrightarrow IA \perp (P)$.

Do đó, mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(2;\,1;\,2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;\,0;\,1) \end{cases} \Leftrightarrow (P)\text{: } 2x + z - 6 = 0.$$

c. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;\,1;\,2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;\,0;\,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a;\,b;\,c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (Δ) với vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(2;\,-1;\,1)$ khi:

  $$\vec{u} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = 2a + c.$$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

  $$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;\,1;\,2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(a;\,b;\,c) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 2 + ct \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

- Toạ độ các điểm E, F được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

  $$(at + 2)^2 + b^2t^2 + (ct + 1)^2 = 9$$
  $$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2(2a + c)t - 4 = 0. \qquad (1)$$

  Phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn:

  $$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{2(2a+c)}{a^2+b^2+c^2} \\ t_1t_2 = -\dfrac{4}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

- Với $E(at_1 + 2;\, bt_1 + 1;\, ct_1 + 2)$ và $F(at_2 + 2;\, bt_2 + 1;\, ct_2 + 2)$ thì:

  $$EF = 3\sqrt{2}$$
  $$\Leftrightarrow 18 = EF^2 = (at_1 - at_2)^2 + (bt_1 - bt_2)^2 + (ct_1 - ct_2)^2$$
  $$= (a^2 + b^2 + c^2)(t_1 - t_2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2]$$
  $$= \left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{4(2a+c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} + \frac{16}{a^2+b^2+c^2}\right] = \frac{4(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + 16$$
  $$\Leftrightarrow 1 = \frac{2(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 + (2a + c)^2 = 2(2a + c)^2$$
  $$\Leftrightarrow 3a^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -\frac{4}{3}c.$$

Khi đó:

- Với a = 0 thì b = c nên $\vec{u}(0; c; c)$ chọn $\vec{u}(0; 1; 1)$, do đó ta được:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $a = -\frac{4}{3}c$ thì $b = -\frac{5}{3}c$ nên $\vec{u}\left(-\frac{4}{3}c; -\frac{5}{3}c; c\right)$ chọn $\vec{u}(4; 5; -3)$, do đó ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 3. Cho điểm A(4; 2; 2) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm A nằm trên mặt cầu (S).
b. Tìm điểm B thuộc (S) sao cho AB đạt giá trị lớn nhất.
c. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A.
d. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và vuông góc với vectơ $\vec{v}(-1; 0; 1)$.
e. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và tạo với đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{2}$ một góc 45^0.
f. Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $(a): \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và cắt (S) tại điểm B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$.

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(2; 1; 0) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow IA = 3 = R.$$

Vậy, điểm A nằm trên mặt cầu (S).

b. Điểm B thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi AB là một đường kính của (S), do đó B đối xứng với A qua tâm I, suy ra B(0; 0; −2).

c. Mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(4; 2; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + y + 2z - 14 = 0.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{IA} \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{IA}, \vec{v}\right] = (-1; 4; -1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(4;\ 2;\ 2)\\ \text{vtcp } \vec{u}(-1;\ 4;\ -1)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=4-t\\ y=2+4t\\ z=2-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

e. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\ b;\ c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d) tiếp xúc với (S) tại A nên:

$$\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IA}=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0\Leftrightarrow b=-2a-2c.$$

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:

$$\cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|-a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 9[a^2+(-2a-2c)^2+c^2]=2[-a+2(-2a-2c)+2c]^2$$

$$\Leftrightarrow 9[5a^2+8ac+5c^2]=2(-5a-2c)^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2+32bc-37c^2=0\Leftrightarrow a=-c \text{ hoặc } a=\frac{37}{5}c.$$

Khi đó:

- Với $a=-c$ thì $b=0$ nên $\overrightarrow{u_d}(-c;\ 0;\ c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-1;\ 0;\ 1)$, từ đó:

$$(d_1):\begin{cases}\text{Qua } A(4;2;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-1;0;1)\end{cases}\Leftrightarrow (d_1):\begin{cases}x=4-t\\ y=2\\ z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- Với $a=\frac{37}{5}c$ thì $b=-\frac{84}{5}c$ nên $\overrightarrow{u_d}\left(\frac{37}{5}c;\ -\frac{84}{5}c;\ c\right)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(37;\ -84;\ 5)$, từ đó:

$$(d_2):\begin{cases}\text{Qua } A(4;2;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(37;-84;5)\end{cases}\Leftrightarrow (d_2):\begin{cases}x=4+37t\\ y=2-84t\\ z=2+5t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a;\ b;\ c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (a) với vtcp $\overrightarrow{u_a}(-1;\ 2;\ 1)$ khi:

$$\vec{u}\perp\overrightarrow{u_a}\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_a}=0\Leftrightarrow -a+2b+c=0\Leftrightarrow a=2b+c.$$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(4;\ 2;\ 2)\\ \text{vtcp } \vec{u}(a;\ b;\ c)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=4+at\\ y=2+bt\\ z=2+ct\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- Toạ độ điểm B (B ≠ A) được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

  $(at + 2)^2 + (bt + 1)^2 + (ct + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2(2a + b + 2c)t = 0$

  $\overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t = -\dfrac{2(2a+b+2c)}{a^2+b^2+c^2}$.
- Với A(4; 2; 2) và B(at + 4; bt + 2; ct + 2) thì:

  $AB = 2\sqrt{5}$

  $\Leftrightarrow 20 = AB^2 = a^2t^2 + b^2t^2 + (c^2t^2 = (a^2 + b^2 + c^2)t^2$

  $= \left(a^2+b^2+c^2\right).\dfrac{4(2a+b+2c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} = \dfrac{4(2a+b+2c)^2}{a^2+b^2+c^2}$

  $\Leftrightarrow 5[(2b + c)^2 + b^2 + c^2] = [2(2b + c) + b + 2c]^2$

  $\Leftrightarrow 5(5b^2 + 4cb + 2c^2) = (5b + 4c)^2 \Leftrightarrow 6c^2 + 20bc = 0 \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = -\dfrac{10}{3}b$.

Khi đó:
- Với c = 0 thì a = 2b nên $\vec{u}(2b; b; 0)$ chọn $\vec{u}(2; 1; 0)$, do đó ta được:

  $(d_1): \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 2+t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
- Với $c = -\dfrac{10}{3}b$ thì $a = -\dfrac{4}{3}b$ nên $\vec{u}\left(-\dfrac{4}{3}b; b; -\dfrac{10}{3}b\right)$ chọn $\vec{u}(4; -3; 10)$, do đó ta được:

  $(d_2): \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-2}{10}$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: (Đề thi đại học khối B – 2003): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hai điểm* A(2; 0; 0), B(0; 0; 8) *và điểm* C *sao cho* $\overrightarrow{AC}(0; 6; 0)$. *Tính khoảng cách từ trung điểm* I *của* BC *đến đường thẳng* OA.

Giải

Giả sử C(x; y;, z) suy ra:

$(0; 6; 0) = (x - 2; y; z) \Rightarrow C(2; 6; 0) \Rightarrow I(1; 3; 4)$.

$d(I, OA) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}]\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} = 5.$

Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho ba điểm* A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) *và mặt phẳng* (P): x + y + z – 2 = 0. *Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A, B, C *và có tâm thuộc mặt phẳng* (P).

✍ *Giải*

1. Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

   (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

- Điểm $A \in (S) \Leftrightarrow 5 - 4a - 2c + d = 0$. (1)
- Điểm $B \in (S) \Leftrightarrow 1 - 2a + d = 0$. (2)
- Điểm $C \in (S) \Leftrightarrow 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0$. (3)
- Tâm $I(a; b; c) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c - 2 = 0$. (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), (4), ta được

$a = 1, b = 0, c = 1, d = 1$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Ví dụ 3: (Đề thi đại học khối A – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho đường thẳng* (d) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1};\ (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

a. *Tìm toạ độ điểm* I *thuộc* (d) *sao cho khoảng cách từ* I *tới* (P) *bằng* 2.
b. *Tìm toạ độ giao điểm* A *của* (d) *và* (P). *Viết phương trình tham số của đường thẳng* (Δ) *nằm trong mặt phẳng* (P), *biết* (Δ) *đi qua* A *và vuông góc với* (d).

✍ *Giải*

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Với giả thiết $I \in (d)$ suy ra $I(1 - t; 2t - 3; 3 + t)$.

Với điều kiện $d(I, P) = 2$, ta được:

$$\frac{|2(1-t) + (2t-3) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right..$$

- Với t = 4, ta được $I_1(-3; 5; 7)$.
- Với t = –2, ta được $I_2(3; -7; 1)$.

Vậy, tồn tại hai điểm I_1, I_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$2(1 - t) + (2t - 3) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0; -1; 4)$.

Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ), vtpt của (P), ta có

$\vec{a}(-1; 2; 1)$ và $\vec{n}(2; 1; -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}(\Delta)\subset(P)\\(\Delta)\perp(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{b}\perp\vec{n}\\\vec{b}\perp\vec{a}\end{cases}\Leftrightarrow \vec{b}=[\vec{n},\ \vec{a}]=(5;\,0;\,5)\text{ chọn }\vec{b}(1;\,0;\,1).$$

Khi đó:

$$(\Delta):\begin{cases}\text{qua } A(0,-1,4)\\\text{vtct } \vec{b}(1,0,1)\end{cases}\Leftrightarrow(\Delta):\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 4: (Đề thi đại học khối D – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hai đường thẳng*

$$(d_1):\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}\text{ và }(d_2):\begin{cases}x+y-z-2=0\\x+3y-12=0\end{cases}.$$

a. *Chứng minh rằng* (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa cả hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2).
b. *Mặt phẳng toạ độ* Oxz *cắt hai đường thẳng* d_1, d_2 *lần lượt tại các điểm* A, B. *Tính diện tích* ΔOAB, *với* O *là gốc toạ độ.*

✍ *Giải*

a. Ta có:
- (d_1) có vtcp $\vec{a_1}(3;\,-1;\,2)$ và đi qua điểm $M_1(1;\,-2;\,-1)$.
- (d_2) có vtcp $\vec{a_2}(3;\,-1;\,2)$ và đi qua điểm $M_2(0;\,4;\,2)$.

Nhận xét rằng $\vec{a_1}=\vec{a_2}$ và điểm $M_1\notin(d_2)$.
Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.
Để lập phương trình mặt phẳng (P) chúng ta có hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng chùm mặt phẳng*): Mặt phẳng (P) chứa (d_2) nên có dạng:

$$(P):\ A(x+y-z-2)+B(x+3y-12)=0.\qquad(1)$$

Để (P) chứa (d_1) điều kiện là:

$$M_1\in(P)\Leftrightarrow A(1-2+1-2)+B(1-6-12)=0\Leftrightarrow A=-\frac{17}{2}B.\qquad(2)$$

Thay (2) vào (1), ta được (P): $15x+11y-17z-10=0$.

Cách 2: Ta có ngay:

$$(P):\begin{cases}\text{qua } M_1\\\text{cặp vtcp } \vec{a_1}\text{ và }\overrightarrow{M_1M_2}\end{cases}\Leftrightarrow(P):\begin{cases}\text{qua } M_1(1,-2,-1)\\\text{vtpt } \vec{n}=[\vec{a_1},\overrightarrow{M_1M_2}]=(15,11,-17)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(P):\ 15(x-1)+11(y+2)-17(z+1)=0\Leftrightarrow(P):\ 15x+11y-17z-10=0.$$

b. Ta lần lượt có:
- Toạ độ của A là nghiệm của hệ tạo bởi (d_1) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=0\\z=-5\end{cases}\Rightarrow A(-5;\,0;\,-5).$$

- Toạ độ của B là nghiệm của hệ tạo bởi (d_2) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12; 0; 10).$$

Khi đó, diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(-5; 0; -5), (12; 0; 10)]\right| = 5 \text{ đvdt}.$$

<u>Ví dụ 5:</u> (Đề thi đại học khối A – 2002): *Trong không gian* Oxyz, *cho* 2 *đường thẳng*:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}, (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (Δ_1) *và song song với* (Δ_2).
b. *Cho điểm* M(2; 1; 4). *Tìm toạ độ điểm* H *thuộc* (Δ_2) *sao cho độ dài* MH *ngắn nhất*.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

a. (P) chứa (Δ_1) ⇔ (P) thuộc chùm tạo bởi (Δ_1), có dạng:

(P): A(x – 2y + z – 4) + B(x + 2y – 2z + 4) = 0

⇔ (P): (B + A)x + 2(B – A)y + (A – 2B)z – 4A + 4B = 0

⇒ vtpt $\overrightarrow{n_P}$ (B + A; 2B – 2A; A – 2B).

Gọi $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (Δ_2), ta được $\overrightarrow{a_2}$ (1; 1; 2).

Vì (P)//(Δ_2) nên:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_2} = 0 \Leftrightarrow 1.(B+A) + 1.2(B-A) + 2.(A-2B) = 0 \Leftrightarrow B = A.$$

Vậy, ta được (P): 2x – z = 0.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để H∈(Δ_2): MH_{Min} ⇔ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2)

Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\vec{a}_2$ (1; 1; 2).

Vì H ∈ (Δ_2) nên:

H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) ⇒ $\overrightarrow{MH}$ (t – 1; 1 + t; 2t – 3),

MH ⊥ (Δ_2) ⇔ $\overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}_2 = 0$

⇔ 1.(t – 1) + 1.(1 + t) + 2.(2t – 3) = 0 ⇔ t = 1 ⇒ H(2; 3; 3).

Cách 2: Để H∈(Δ_2): MH_{Min}

⇔ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2) ⇔ H = (Q)∩(Δ_2),

trong đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua M} \\ (Q) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } M(2,1,4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(1,1,2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x = y + 2z - 11 = 0.$$

Bằng cách thay x, y, z từ (Δ_2) vào (Q), ta được t = 1 nên H(2; 3; 3).

Ví dụ 6: (Đề thi đại học khối B – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho* A(–4; –2; 4) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 1 - t \\ z = 4t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) *đi qua điểm* A, *cắt và vuông góc với đường thẳng* (d).

✍ *Giải*

1. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1; 4)$, lấy điểm B(– 3; 1; – 1)∈(d).

Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{chứa (d)} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (1, -2, -1) \end{cases}$$

⇔ (P_1): x – 2y – z + 4 = 0.

Gọi (P_2) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_2) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2, -1, 4) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 2x - y + 4z - 10 = 0.$$

Nhận xét rằng, (Δ) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) do đó có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + 4z - 10 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1; 4)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d), suy ra:

$H(2t - 3; 1 - t; 4t - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(2t + 1; 3 - t; 4t - 5)$,

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t + 1) - (3 - t) + 4(4t - 5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AH}(3; 2; -1)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua A}(-4, -2, 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(3, 2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x + 4}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 4}{-1}.$$

Ví dụ 7: (Đề thi đại học khối A – 2003): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình hộp chữ nhật* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *có* A *trùng với gốc của hệ toạ độ*, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A_1(0; 0; b) *với* a, b > 0. *Gọi* G *là trung điểm cạnh* CC_1.

a. *Tính thể tích khối tứ diện* BDA_1M *theo* a *và* b.

b. *Xác định tỉ số* $\frac{a}{b}$ *để* $(A_1BD) \perp (MBD)$.

✍ *Giải*

Từ giả thiết suy ra C(a; a; 0) và C_1(a; a; b) ⇒ M(a; a; $\frac{b}{2}$).

a. Ta có ngay:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA_1}].\overrightarrow{BM}\right|. \qquad (1)$$

trong đó:

$$\overrightarrow{BD}(-a; a; 0),\ \overrightarrow{BA_1}(-a; 0; b),\ \overrightarrow{BM}(0; a; \frac{b}{2}),\ [\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA_1}] = (ab; ab; a^2).$$

Từ đó, suy ra:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|(ab; ab; a^2).(0; a; \frac{b}{2})\right| = \frac{a^2b}{4}.$$

b. Gọi $\vec{n}_{A_1BD}$, $\vec{n}_{MBD}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (A_1BD) và (MBD), ta có ngay:

$$\vec{n}_{A_1BD} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA_1}] = (ab; ab; a^2), \qquad \vec{n}_{MBD} = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = (\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2)$$

Để (A_1BD) ⊥ (MBD) điều kiện là:

$$\vec{n}_{A_1BD} \perp \vec{n}_{MBD} \Leftrightarrow \vec{n}_{A_1BD}.\vec{n}_{MBD} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy, với a = b thoả mãn điều kiện đầu bài.

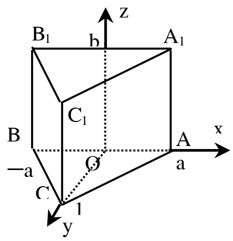
Ví dụ 8: (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABCA_1B_1C_1$. *Biết* A(a; 0; 0), B(– a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(–a; 0; b), a > 0, b > 0. *Gọi* M *là trung điểm cạnh* SC.

a. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1.

b. *Cho* a, b *thay đổi nhưng luôn thoả mãn* a + b = 4. *Tìm* a, b, *để khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1 *lớn nhất*.

✍ *Giải*

Ta có A_1(a; 0; b), C_1(0; 1; b).



a. Ta có:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{|[\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{AC_1}].\overrightarrow{CC_1}|}{|[\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{AC_1}]|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $d_{max} = \sqrt{2}$, đạt được khi $a = b \overset{a+b=4}{\Leftrightarrow} a = b = 2$.

Ví dụ 9: (Đề thi đại học khối B – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B_1(4; 0; 4).

a. *Tìm toạ độ các đỉnh* A_1, C_1.

b. *Viết phương trình mặt cầu có tâm* A *và tiếp xúc với mặt phẳng* (BCC_1B_1).

c. *Gọi* M *là trung điểm của* A_1B_1. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, M *và song song với* BC_1.

d. *Mặt phẳng* (P) *cắt đường thẳng* (A_1C_1) *tại* N. *Tính độ dài đoạn* MN.

✍ *Giải*

a. $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$.

b. Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) được cho bởi:

$$(BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{BC} \text{ vµ } \overrightarrow{BB_1} \end{cases} \Leftrightarrow (BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B(4, 0, 0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (3, 4, 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3(x - 4) + 4y = 0 \Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3x + 4y - 12 = 0.$

Mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) khi:

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|4.(-3) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu S(A, R) có dạng:

$$(S): x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}.$$

c. Ta có $M(2; -\frac{3}{2}; 4)$ và khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{AM} \text{ vµ } \overrightarrow{BC_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (1, 4, -2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): x + 4(y + 3) - 2z = 0 \Leftrightarrow (P): x + 4y - 2z + 12 = 0.$

d. Phương trình tham số của đường thẳng (A_1C_1) được cho bởi:

$$(A_1C_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0, -3, 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1C_1}(0, 6, 0) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1C_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}, \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (A_1C_1) vào phương trình của (P) ta được:

$0 + 4(-3 + t) - 2.4 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(0; -1; 4)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-1 + \frac{3}{2})^2 + (4 - 4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$