CHƯƠNG 4 – SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. SỐ PHỨC

1. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

> *Một **số phức** là một biểu thức dạng* a + bi *trong đó* a, b *là các số thực và số* i *thỏa mãn* $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết z = a + bi.
> i *được gọi là **đơn vị ảo***, a *được gọi là **phần thực*** *và* b *được gọi là **phần ảo*** *của số phức* z = a + bi.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

☞ ***Chú ý***:

1. Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là:
   $$a + 0i = a,\ a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$
2. Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là thuần ảo):
   $$z = 0 + bi = bi\ (b \in \mathbb{R});\ i = 0 + 1i = 1i.$$
3. Số 0 = 0 + 0i = 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2

> ***Hai số phức*** $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i\ (a', b' \in \mathbb{R})$ ***bằng nhau*** *nếu và chỉ nếu*:
> $$a = a',\ \ b = b'.$$
> Khi đó, ta viết z = z'.

2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC

Mỗi số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b). Khi đó, ta thường viết M(a + bi) hay M(z). Gốc O biểu diễn số 0.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức được gọi là *mặt phẳng phức*.

- Trục Ox gọi là trục thực.
- Trục Oy gọi là trục ảo.

3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

Định nghĩa 3

> ***Tổng của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ *là số phức*
> $$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta công các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Tính chất của phép cộng số phức

1. *Tính chất kết hợp*:
   $$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

2. *Tính chất giao hoán*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. *Cộng với* 0:

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có:

$$z + (-z) = -z + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là ***số đối*** của số phức z.

Định nghĩa 4

> ***Hiệu của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) *là tổng của* z_1 với $-z_2$, tức là:
>
> $$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm M(a; b) cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó, nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

- $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$.
- $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$.

4. PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

Định nghĩa 5

> ***Tích của hai số phức*** $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) *là số phức*
>
> $$z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i.$$

☞ ***Nhận xét***: Từ định nghĩa, ta có:

- Với mọi số thực k, và mọi số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có $k(a + bi) = ka + kbi$.
- $0z = 0$ với mọi số phức z.

Tính chất của phép nhân số phức

1. *Tính chất giao hoán*:

$$z_1z_2 = z_2z_1 \text{ với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

2. *Tính chất kết hợp*:

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

3. *Nhân với* 1:

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

4. Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng):

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 6

> ***Số phức liên hợp*** *của* $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *là* $a - bi$ *và được kí hiệu bởi* $\overline{z}$.

Như vậy, ta có:

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

☞ ***Nhận xét***: Từ định nghĩa ta thấy:

1. Số phức liên hợp của $\overline{z}$ lại là z, tức là $\overline{\overline{z}} = z$. Vì thế người ta còn nói z và $\overline{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.
2. Số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục Ox.

Tính chất

1. Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có:
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ ;\ \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\ .$$
2. Với mọi số phức z, số $z.\overline{z}$ luôn là một số thực, và nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:
$$z.\overline{z} = a^2 + b^2.$$

<u>Định nghĩa 7</u>

> ***Môđun của số phức*** $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *là số thực không âm* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *và được kí là* $|z|$.

Như vậy, nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì:
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

☞ ***Nhận xét***:

1. Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
2. $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

6. PHÉP CHIA CHO SỐ PHỨC KHÁC 0

<u>Định nghĩa 8</u>

> ***Số nghịch đảo*** *của số phức* z *khác* 0 *là số* $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
>
> ***Thương*** $\frac{z'}{z}$ *của phép chia số phức* z' *cho số phức* z *khác* 0 *là tích của* z' *với số phức nghịch đảo của z, tức là* $\frac{z'}{z} = z'.z^{-1}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$.

☞ ***Chú ý***: Có thể viết $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}$ nên để tính $\frac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử và mẫu số với $\overline{z}$ và để ý rằng $z\overline{z} = |z|^2$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z} = 1.z^{-1} = z^{-1}$.

2. Thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw = z'$. Từ đó, có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

II. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

> *Cho số phức* w. *Mỗi số phức* z *thỏa mãn* $z^2 = w$ *được gọi là một* ***căn bậc hai*** *của* w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình:

$z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

☞ ***Chú ý 1***: Để tìm căn bậc hai của số phức w, ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu w là số thực (tức là w = a):

- Với $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Với $a < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

Trường hợp 2: Nếu $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$) thì $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của w khi và chỉ khi:

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Ghi nhớ về căn bậc hai của số phức w:

- $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$.
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt:

- Số thực dương a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Số thực âm a có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho phương trình:

$Ax^2 + Bx + C = 0$, với A, B, C là những số phức và $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$, ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

Đặc biệt:

- Nếu Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

- Nếu Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$.

☞ ***Chú ý 2***: 1. Mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau).

2. Mọi phương trình bậc n:

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$$

trong đó $A_0, A_1, ..., A_n$ là n + 1 số phức cho trước, $A_0 \neq 0$ và n là một số nguyên dương luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

III. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC – ỨNG DỤNG

1. SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa 1

(*Acgumen của số phức* $z \neq 0$): *Cho số phức* $z \neq 0$. *Gọi* M *là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu* Ox, *tia cuối* OM *được gọi là một acgumen của z.*

☞ ***Chú ý***:

1. Nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có cùng acgumen.

Định nghĩa 2

(*Dạng lượng giác của số phức*): *Dạng* $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, *trong đó* $r > 0$ *được gọi là* ***dạng lượng giác*** *của số phức* $z \neq 0$. *Còn dạng* $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) *được gọi là* ***dạng đại số*** *của số phức* z.

☞ ***Nhận xét***: Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0 cho trước, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: ***Tìm* r**: đó là môđun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

Bước 2: ***Tìm*** $\boldsymbol{\varphi}$: đó là acgumen của z, φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Chúng ta tổng kết hai bước thực hiện trên bằng phép biến đổi:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi + i.\sin\varphi\right).$$

☞ ***Chú ý***:

1. $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i.\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$).

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$).
3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

2. NHÂN VÀ CHIA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định lí: Nếu $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ và $z' = r'(\cos\varphi' + i.\sin\varphi')$ với $r, r' \geq 0$ thì :

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i.\sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i.\sin(\varphi - \varphi')] \text{ khi } r' > 0.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu các điểm M, M' biểu diễn theo thứ tự các số phức z, z' khác 0 thì acgumen của $\frac{z}{z'}$ là số đo góc lượng giác tia đầu OM', tia cuối OM.

3. CÔNG THỨC MOA–VRƠ (MOIVRE) VÀ ỨNG DỤNG

Công thức moa–vrơ: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$[r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi).$$

Khi $r = 1$, ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi.$$

Ứng dụng vào lượng giác: Ta có:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos3\varphi + i.\sin3\varphi.$$

Mặt khác, sử dụng khai triển lũy thừa bậc ba ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi.(i.\sin\varphi) + 3\cos\varphi.(i.\sin\varphi)^2 + \sin^3\varphi.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$
$$\sin3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác: Số phức $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là:

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i.\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right].$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

§1. SỐ PHỨC

Dạng toán 1: Số phức và thuộc tính của nó

Phương pháp

Với số phức $z = a + bi$, các dạng câu hỏi thường được đặt ra là:

Dạng 1: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z. Khi đó, ta có ngay:

- Phần thực bằng a.
- Phần ảo bằng b.

☞**Chú ý**: Một câu hỏi ngược là "*Khi nào số phức* a + bi *là số thực, số ảo hoặc bằng* 0", khi đó ta sử dụng kết quả trong phần chú ý sau định nghĩa 1.

Dạng 2: Hãy biểu diễn hình học số phức z
Khi đó, ta sử dụng điểm M(a; b) để biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

☞ **Chú ý**: Một câu hỏi ngược là "*Xác định số phức được biểu diễn bởi điểm* M(a; b)", khi đó ta có ngay số z = a + bi.

Dạng 3: Tính môđun của số phức z, khi đó, ta có ngay $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 4: Tìm số đối của số phức z, khi đó, ta có ngay $-z = -a - bi$.

Dạng 5: Tìm số phức liên hợp của z, khi đó, ta có ngay $\bar{z} = a - bi$.

Dạng 6: Tìm số phức nghịch đảo của z, khi đó, ta có ngay $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Thí dụ 1. *Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một tam giác đều có tâm là gốc toạ độ* O *trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số* −i.

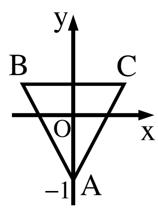
✍ *Giải*

Giả sử tam giác đều ABC (như trong hình vẽ) thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó giả sử đỉnh A(0; −1) biểu diễn số phức −i.

Gọi a là độ dài cạnh ΔABC, ta có $\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = AO = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.

Từ đó suy ra

- Đỉnh $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ là số phức $z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.
- Đỉnh $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ là số phức $z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.



Dạng toán 2: Các phép toán về số phức

Phương pháp

Sử dụng định nghĩa cùng với tính chất của các phép toán (cộng, trừ nhân, chia) trên tập số phức.

Chúng ta có các hằng đẳng thức:

$$a^2 + b^2 = a^2 - (bi)^2 = \underbrace{(a + bi)}_{z}(a - bi) = z.\bar{z}.$$

$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$; $(a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$.

$(a + bi)^3 = a^3 - 3a + (3a^2b - b^3)i$; $(a - bi)^3 = a^3 + 3a - (3a^2b + b^3)i$.

Thí dụ 1. *Tìm phần thực phần ảo của số phức* $z = (x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ (*với* $x, y \in \mathbb{R}$).*Với* x, y *nào thì số phức đó là số thực* ?

Giải

a. Ta biến đổi:

$$z = (x^2 + 2xyi - y^2) - (2x + 2yi) + 5 = x^2 - y^2 - 2x + 5 + 2y(x - 1)i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $x^2 - y^2 - 2x + 5$ và phần ảo bằng $2y(x - 1)$.

b. Số phức đã cho là số thực điều kiện là:

$$2y(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } y = 0.$$

Thí dụ 2. *Tìm phần thực phần ảo và môđun của số phức* $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3-2i}$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \frac{(3+2i)(1+i)}{2} + \frac{(1-i)(3+2i)}{13} = \frac{1+5i}{2} + \frac{5-i}{13} = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $\frac{23}{26}$, phần ảo bằng $\frac{63}{26}$ và môđun bằng $\frac{\sqrt{4498}}{26}$.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \frac{(3+2i)(3-2i) + (1-i)^2}{(1-i)(3-2i)} = \frac{13-2i}{1-5i} = \frac{(13-2i)(1+5i)}{26}$$

$$= \frac{1}{26}(23+63i) = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i.$$

Vậy nó có phần thực bằng $\frac{23}{26}$, phần ảo bằng $\frac{63}{26}$ và môđun bằng $\frac{\sqrt{4498}}{26}$.

Thí dụ 3. *Tìm điểm biểu diễn các số phức sau*:

a. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2$. b. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^3 - \left(\sqrt{2} - i\right)^3$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} + i^2 + 2 - 2i\sqrt{2} + i^2 = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = (\sqrt{2} + i + \sqrt{2} - i)^2 - 2(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$$

$$= 8 - 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 3: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = (\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)^2 + 2(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)$$

$$= 4i^2 + 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = 2\sqrt{2} + 6i + 3i^2\sqrt{2} + i^3 - (2\sqrt{2} - 6i + 3i^2\sqrt{2} - i^3)$$

$$= 12i + 2i^3 = 12i - 2i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3$$

$$= (\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)^3 + 3(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)$$

$$= 8i^3 + 6i(2 - i^2) = -8i + 18i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Dạng toán 3: Chứng minh tich chất của số phức

Phương pháp

Sử dụng các phép toán trên tập số phức cùng những tính chất của chúng.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng phần thực của số phức z bằng* $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, *phần ảo của số phức z bằng* $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Giải

Với số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(a + bi + \overline{a+bi}) = \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) = a \text{ – là phần thực của z.}$$

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(a + bi - \overline{a+bi})(-i) = b \text{ – là phần ảo của z.}$$

Thí dụ 2. *Gọi* A, B *theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số* $z \neq 0$ *và* $z' = \frac{1+i}{2}z$. *Chứng minh rằng* ΔOAB *là vuông cân* (O *là gốc toạ độ*).

Giải

Ta lần lượt có:

$$OA = \left|\overrightarrow{OA}\right| = |z|, \qquad OB = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\frac{1+i}{2}z\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|,$$

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left|\frac{1+i}{2}z - z\right| = \left|\frac{-1+i}{2}\right||z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$$

Từ đó, suy ra OB = AB và:

$$OB^2 + AB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|z|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|z|\right)^2 = |z|^2 = OA^2 \Leftrightarrow \Delta OAB \text{ là vuông cân tại B.}$$

Dạng toán 4: Tập hợp điểm

Phương pháp

Câu hỏi thường được đặt ra là "*Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện* K".

Khi đó:

Dạng 1: Số phức z thỏa mãn biểu thức về độ dài (môđun). Khi đó, ta sử dụng công thức $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dạng 2: Số phức z là số thực (thực âm hoặc thực dương), số ảo. Khi đó, ta sử dụng kết quả:

a. Để z là số thực điều kiện là b = 0.

b. Để z là số thực âm điều kiện là:

$$\begin{cases} a < 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

c. Để z là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

d. Để z là số ảo điều kiện là a = 0.

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho yêu cầu về tập hợp điểm, bài toán thường được cho dưới dạng một biểu thức phức.

Thí dụ 1. *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho* z^2:

a. *Là số ảo.*
b. *Là số thực âm.*
c. *Là số thực dương.*
d. *Có môđun bằng* 1.

✍ *Giải*

Với số phức z = x + yi (x, y$\in\mathbb{R}$), ta có:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

a. Để z^2 là số ảo điều kiện là:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, tập hợp điểm các điểm M thuộc hai đường phân giác của góc giữa trục thực, trục ảo.

b. Để z^2 là số thực dương điều kiện là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 > 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục Ox (trục thực) trừ gốc O.

c. Để z^2 là số thực âm điều kiện là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 < 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc trục Oy (trục ảo) trừ gốc O.

d. Để z^2 có môđun bằng 1 điều kiện là:

$$\sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường tròn đơn vị.

Thí dụ 2. *Xác định tập hợp các điểm* M *trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn* $(1 + i\sqrt{3})z + 2$, *trong đó* $|z - 1| \leq 2$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi:

$$(1 + i\sqrt{3})z + 2 = x + yi \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z = x - 2 + yi \Leftrightarrow z = \frac{x - 2 + yi}{1 + i\sqrt{3}}$$

Khi đó:

$$|z - 1| = \left|\frac{x - 2 + yi}{1 + i\sqrt{3}} - 1\right| = \left|\frac{x - 3 + i(y + \sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}}\right|$$

$$= \left|\frac{[x - 3 + i(y + \sqrt{3})](1 - i\sqrt{3})}{4}\right| = \left|\frac{x + y\sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})}{4}\right|$$

$$|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow \left|x + y\sqrt{3} + i(y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})\right| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + y\sqrt{3})^2 + (y - x\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4\left[(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2\right]} \leq 8 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Dạng toán 5: Phương trình phức

Phương pháp

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi đại số và các phép toán về số phức.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử số phức cần tìm là $z = a + bi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bước 2: Thay z vào phương trình và sử dụng sử dụng bằng nhau của hai số phức để tìm a, b.

Bước 3: Kết luận về số phức z cần tìm.

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm phức của phương trình*:

a. $\frac{2+i}{1-i}z=\frac{-1+3i}{2+i}$. b. $(iz+1)(\bar{z}-2+i)\left[(2+i)z-z+1\right]=0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{(2+i)(1+i)}{1^2+1^2}z=\frac{(-1+3i)(2-i)}{2^2+1^2} \Leftrightarrow \frac{(1+3i)}{2}z=\frac{1+7i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2}{5}.\frac{1+7i}{1+3i} = \frac{2}{5}.\frac{(1+7i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{22+4i}{25}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $z = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$.

b. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} iz+1=0 & (1) \\ \bar{z}-2+i=0 & (2) \\ (2+i)z-z+1=0 & (3) \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với phương trình (1), ta biến đổi $iz=-1 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{i} = i$.
- Với phương trình (2), ta biến đổi:
  $$\bar{z}=2-i \Leftrightarrow z = 2 + i.$$
- Với phương trình (3), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

  Cách 1: Ta biến đổi (3) về dạng:

  $$(1 + i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1(1-i)}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

  Cách 2: Giả sử $z = a + bi$ ($a, b\in \mathbb{R}$), ta có:

  $$(3) \Leftrightarrow (2 + i)(a + bi) - (a + bi) + 1 = 0$$

  $$\Leftrightarrow 2a - b + (a + 2b)i - (a + bi) + 1 = 0 \Leftrightarrow a - b + 1 + (a + b)i = 0$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+1=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b=-1 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/2 \\ b=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = i$, $z = 2 + i$ và $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẠC HAI

Dạng toán 1: Căn bậc hai của số phức

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần căn bậc hai của số phức và lưu ý tới các trường hợp đặc biệt.

Thí dụ 1. *Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau*:

a. $2\sqrt{2}-3$. b. i.

Giải

a. Số $2\sqrt{2}-3<0$ nên có hai căn bậc hai là:

$$\pm i\sqrt{-\left(2\sqrt{2}-3\right)} = \pm i\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \pm i\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \pm i\left(\sqrt{2}-1\right).$$

b. Giả sử số z = x + yi (x, y$\in\mathbb{R}$) là căn bậc hai của i, tức là ta có:

$i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2x} \\ x^2-\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2x} \\ 4x^4-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, số i có hai căn bậc hai là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Nhận xét: Như vậy, để tìm căn bậc hai của các số phức trên:

- Câu a) chúng ta sử dụng ngay kết quả của trường hợp 1 trong chú ý của phần căn bậc hai.
- Câu b) chúng ta sử dụng thuật toán đã được trình bày trong trường hợp 2 của chú ý của phần căn bậc hai.
  Với số ảo dạng z = bi nếu chúng ta sử dụng đánh giá về dấu của x và y thì sẽ nhanh chóng tìm được nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể hệ trong câu b) sẽ được thực hiện như sau:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm y \\ 2xy=1 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thí dụ 2. *Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau*:

a. 3 + 4i. b. $4+6i\sqrt{5}$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 3 + 4i, tức là ta có:

$$3 + 4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 1 \\ x = -2 \text{ và } y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy, số 3 + 4i có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i)$.

Cách 2: Ta có phân tích:

$$3 + 4i = 3 + 2.2i = 3 + 2.2.i = (2 + i)^2.$$

Vậy, số 3 + 4i có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i)$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $4 + 6i\sqrt{5}$, tức là ta có:

$$4 + 6i\sqrt{5} = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ và } y = \sqrt{5} \\ x = -3 \text{ và } y = -\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy, số $4 + 6i\sqrt{5}$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3 + i\sqrt{5}\right)$.

Cách 2: Ta có phân tích:

$$4 + 6i\sqrt{5} = 4 + 2.3\sqrt{5}i = 4 + 2.3\left(\sqrt{5}i\right) = 3^2 + 2.3\left(\sqrt{5}i\right) + \left(\sqrt{5}i\right)^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2.$$

Vậy, số $4 + 6i\sqrt{5}$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3 + i\sqrt{5}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Ý tưởng cho cách giải 2 trong thí dụ trên với mỗi số phức dạng a + bi (a, b thực khác 0) có thể được giải thích như sau:

Ta viết $bi = 2.\dfrac{b}{2}i$, tới đây cần một phép phân tích số $\dfrac{b}{2}i$ thành hai số b_1 và b_2i sao cho $b_1^2 + \left(b_2 i\right)^2 = a$.

Đối với các em học sinh đã biết vận dụng định lí Viét để nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai thì đây là công việc đơn giản.

Dạng toán 2: Phương trình bậc hai

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần phương trình bậc hai.

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm phức của các phương trình sau*:

a. $z^2 - 2z + 2 = 0.$ b. $z^2 - 2iz + 1 = 0.$

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta' = 1^2 - 2 = -1$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là:

$z_{1,2} = 1 \pm i.$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$(z-1)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z - 1 = \pm i \Leftrightarrow z_{1,2} = 1 \pm i.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = 1 \pm i$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình có $\Delta = (-2i)^2 - 4 = -8 \Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $\pm 2i\sqrt{2}$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_{1,2} = \frac{2i \pm 2i\sqrt{2}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$$

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$z^2 - 2iz - 1 = -2 \Leftrightarrow (z-i)^2 = -2 \Leftrightarrow z - i = \pm i\sqrt{2} \Leftrightarrow z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})i$.

☞ ***Chú ý***: a. Với phương trình bậc hai có biệt số Δ là số phức chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính biệt số $\Delta = a + bi$.

Bước 2: Tìm hai căn bậc hai của Δ (giả sử $\pm\delta$) theo thuật toán đã biết trong dạng toán 1.

Bước 3: Kết luận, phương trình có hai nghiệm:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}.$$

b. Từ đó, ta thấy công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực vẫn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không, vì:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-B+\delta}{2A} + \dfrac{-B-\delta}{2A} = -\dfrac{B}{A} \\ z_1.z_2 = \dfrac{-B+\delta}{2A}.\dfrac{-B-\delta}{2A} = \dfrac{B^2-\delta^2}{4A} = \dfrac{B^2-\Delta}{4A} = \dfrac{4AC}{4A^2} = \dfrac{C}{A} \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Tìm nghiệm phức của các phương trình sau*:

a. $z^2 + (2-i)z - 2i = 0.$ b. $4z^2 - 2z - i\sqrt{3} = 0.$

✍ *Giải*

a. Phương trình có:

$$\Delta = (2-i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2+i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-(2-i)-(2+i)\right] = -2 \text{ và } z_2 = \frac{1}{2}\left[-(2-i)+(2+i)\right] = i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Phương trình có $\Delta' = 1 + 4i\sqrt{3}$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta' = 1 + 4i\sqrt{3}$, tức là ta có:

$$1 + 4\sqrt{3}\,i = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 - \left(2\sqrt{3}/x\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^4 - x^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ (x^2-4)(x^2+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = \sqrt{3} \\ x = -2 \text{ và } y = -\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Tức là, biệt số Δ' có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i\sqrt{3})$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{1}{4}\left[1-(2+i\sqrt{3})\right] = -\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right) \text{ và } z_2 = \frac{1}{4}\left[1+(2+i\sqrt{3})\right] = \frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{3}\right).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ và $z_2 = \frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{3}\right)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để giải các phương trình trên:

- Ở câu a) bằng việc nhận xét được ngay rằng $3 + 4i = (2+i)^2$ chúng ta đã giảm thiểu được các bước tìm căn bâc hai của Δ.
- Câu b) chúng ta cần sử dụng thuật toán để tìm căn bậc hai của Δ'. Tuy nhiên, với những người có kinh nghiệm họ có thể nhẩm được.

Thí dụ 3. *Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng* $4 - i$ *và tích của chúng bằng* $5(1 - i)$.

✍ *Giải*

Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 - i \\ z_1.z_2 = 5(1-i) \end{cases}$$

suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình:

$$z^2 - (4-i)z + 5(1-i) = 0$$

phương trình có $\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$.

Giả sử số $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -5 + 12i$, tức là ta có:

$$-5 + 12i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 3 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{array}\right..$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 3i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{4 - i + (2 + 3i)}{2} = 3 + i; \qquad z_2 = \frac{4 - i - (2 + 3i)}{2} = 1 - 2i.$$

Vậy, hai số cần tìm là $3 + i$ và $1 - 2i$.

Dạng toán 3: Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình bậc cao

Phương pháp

a. ***Đối với phương trình bậc ba*** thì chúng ta cần thực hiện phép nhẩm nghiệm để phân tích đa thức thành nhân tử (tức nhận được một phương trình tích).

b. ***Đối với phương trình bậc bốn*** dạng đặc biệt chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Thí dụ 1. *Giải các phương trình sau và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức):*

a. $z^3 - 1 = 0$. b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Giải

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z_1 = 1,\ z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_1(1; 0)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_3\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trên mặt phẳng phức.

b. Vì tổng các hệ số bằng 0 nên phương trình có một nghiệm bằng 1 nên ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 và chúng theo thứ tự được biểu diễn bằng các điểm $M_1(1; 0)$, $M_2\left(1; \sqrt{3}\right)$ và $M_3\left(1; -\sqrt{3}\right)$ trên mặt phẳng phức.

☞ ***Chú ý***: a. Rất nhiều học sinh khi thực hiện câu a) do thói quen tìm nghiệm thực nên đã chỉ ra nghiệm duy nhất x = 1. Các em học sinh cần ghi nhớ nội dung chú ý 2 trong phần lí thuyết, nên sử dụng hằng đẳng thức để biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích.

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng kết quả a + b + c + d = 0 thì phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ (với a, b, c, d là những số thực) có nghiệm bằng 1, do đó nó được phân tích thành:

$$(z - 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

Tương tự, nếu phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ có:

$$a - b + c - d = 0$$

thì nó có nghiệm bằng −1, do đó nó được phân tích thành:

$$(z + 1)(Az^2 + Bz + C) = 0.$$

c. Các em học sinh hãy chứng minh rằng "*Kết quả trên vẫn đúng với phương trình bậc ba có hệ số phức*".

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau*:

a. $z^4 - 1 = 0$. b. $z^4 + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1 \text{ và } z = \pm i.$$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$z^4 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - i)(z^2 + i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2 = i & (1) \\ z^2 = -i & (2) \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với phương trình (1), giả sử số z = x + yi (x, y$\in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 2i, tức là ta có:

$$i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \text{ và } x, y \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

- Với phương trình (2), giả sử số z = x + yi (x, y$\in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của −i, tức là ta có:

$$-i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = -1 \text{ và } x, y \text{ trái dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$.

☞ ***Nhận xét***: 1. Như vậy, qua ví dụ trên:

a. Ở câu a) chúng ta sử dụng hằng đẳng thức để chuyển phương trình ban đầu về tích của hai phương trình bậc hai.

b. Ở câu b) chúng ta sử dụng tính chất $i^2 = -1$ để làm xuất hiện dạng $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

2. Chúng ta đều biết rằng các phương trình trùng phương dạng:

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

được giải bằng việc sử dụng ẩn phụ $t = z^2$.

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

Dạng toán 1: Dạng lượng giác của của số phức

Phương pháp

Sử dụng kiến thức được trình bày trong nhận xét của phần 1.

Thí dụ 1. *Tìm dạng lượng giác của các số phức* $\bar{z}$, —z, $\frac{1}{z}$, kz ($k \in \mathbb{R}^*$), biết:

a. $z = 1 + i\sqrt{3}$.   b. $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, với $r > 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có:

Môdun $r = \sqrt{1+3} = 2$,

Acgumen φ thỏa mãn $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ và $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ chọn $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Từ đó, suy ra $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$ và khi đó:

$$\bar{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$-z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z.\bar{z}}z = \frac{1}{4}.2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$kz = \begin{cases} 2k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{nếu } k > 0 \\ -2k\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right) & \text{nếu } k < 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Chúng ta thường sử dụng ngay phép biến đổi:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\bar{z} = \overline{1+i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$-z = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\overline{1-i\sqrt{3}}}{1+3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

b. Ta lần lượt có:

- Số phức $\bar{z}$ có môdun r và acgumen bằng $-\varphi$ nên có dạng:
  $\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i.\sin(-\varphi)]$.
- Số phức $-z$ có môdun r và acgumen bằng $\varphi + \pi$ nên có dạng:
  $-z = r[\cos(\varphi + \pi) + i.\sin(\varphi + \pi)]$.
- Số phức $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z.\bar{z}}z$ có môdun $\frac{1}{r^2}r = \frac{1}{r}$ và acgumen bằng φ nên có dạng:
  $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.
- Số phức kz có môdun $|kz| = |k|r$ và acgumen bằng φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ nên có dạng:

$$kz = \begin{cases} kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi) & \text{nếu } k > 0 \\ -kr[\cos(\varphi+\pi) + i.\sin(\varphi+\pi)] & \text{nếu } k < 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Cho hai số phức* $z_1 = 1 + i$ *và* $z_2 = \sqrt{3} + i$.

a. *Tìm dạng lượng giác của* z_1, z_2.

b. *Sử dụng kết quả trong* a) *tính* z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

b. Ta lần lượt có:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}.2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i.\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

☞ ***Chú ý***: Nếu thực hiện các phép toán trên dưới dạng đại số:

a. Ta có:

$$z_1 z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\sqrt{3} - 1\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right)i$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)}{2\sqrt{2}}i\right]$$

từ đó, suy ra $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \sin\dfrac{5\pi}{12}.$

b. Ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1+i)\left(\sqrt{3} - i\right)}{4} = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3} + 1\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)i\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}i\right]$$

từ đó, suy ra $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4} = \cos\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4} = \sin\dfrac{\pi}{12}.$

Dạng toán 2: Các ứng dụng

Phương pháp

Sử dụng dạng lượng giác của số phức để thực hiện các phép toán.

Sử dụng công thức moa–vrơ (moivre) và ứng dụng.

Thí dụ 1. *Tìm dạng lượng giác của các căn bậc hai của số phức*:

$$z = \cos\varphi - i.\sin\varphi.$$

✍ *Giải*

Viết lại số phức z dương dạng chuẩn:

$$z = \cos(-\varphi) - i.\sin(-\varphi)$$

từ đó, suy ra nó có hai căn bậc hai là:

$$\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + i.\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } \cos\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i.\sin\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right).$$

Thí dụ 2. *Tính* $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có dạng lượng giác của các số phức:

$$\frac{i}{1+i} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left(\cos 502\pi + i.\sin 502\pi\right) = \frac{1}{2^{1004}}.$$

Cách 2: Ta có:

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left(\cos 502\pi + i.\sin 502\pi\right) = \frac{1}{2^{1004}}.$$

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: *Tìm điểm biểu diễn các số phức sau*:

a. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2$. b. $z = \left(\sqrt{2} + i\right)^3 - \left(\sqrt{2} - i\right)^3$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} + i^2 + 2 - 2i\sqrt{2} + i^2 = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} - i\right)^2 = (\sqrt{2} + i + \sqrt{2} - i)^2 - 2(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$$

$$= 8 - 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

Cách 3: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2 = (\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)^2 + 2(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)$$

$$= 4i^2 + 2(2 - i^2) = 2.$$

Vậy, điểm M(2; 0) biểu diễn số phức z.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = 2\sqrt{2} + 6i + 3i^2\sqrt{2} + i^3 - (2\sqrt{2} - 6i + 3i^2\sqrt{2} - i^3)$$

$$= 12i + 2i^3 = 12i - 2i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$z = \left(\sqrt{2}+i\right)^3 - \left(\sqrt{2}-i\right)^3 = (\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)^3 + 3(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i-\sqrt{2}+i)$$

$$= 8i^3 + 6i(2 - i^2) = -8i + 18i = 10i.$$

Vậy, điểm N(0; 10) biểu diễn số phức z.

Ví dụ 2: *Tìm môđun của các số phức sau*:

a. $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \dfrac{\sqrt{2}+i}{i}$.

b. $z = 1 + (1 - i) + (1 - i)^2 + (1 - i)^3 + ... + (1 - i)^{19}$.

Giải

a. Ta có:

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}+i}{i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1-i)}{2} + (\sqrt{2}+i)i = \frac{\sqrt{3}-3}{2} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{6-\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

b. Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $q = 1 - i$, ta có:

$u_n = u_1.q^{n-1}$,

$$z = S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{q^{20}-1}{q-1} = \frac{(1-i)^{20}-1}{1-i-1} = \frac{(1-i)^{20}-1}{-i}$$

$$= [(-2i)^{10} - 1]i = (2^{10} - 1)i$$

tức là z có phần thực bằng 0 và phần ảo bằng $2^{10} - 1$ nên $|z| = 2^{10} - 1$.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng*:

a. *Số phức* z *là số ảo khi và chỉ khi* $z = -\overline{z}$.

b. *Với mọi số phức* z, z' *ta có* $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

Giải

a. Từ giả thiết:

$z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = -\overline{a+bi} = -a + bi \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow$ Số phức z là số ảo.

b. Với hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), ta lần lượt có:

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + bi) + (a' + b'i)} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i$$

$$= (a - bi) + (a' - b'i) = \overline{z} + \overline{z'}, \text{ đpcm.}$$

$$\overline{z.z'} = \overline{(a + bi)(a' + b'i)} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$$

$$= (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i) = \overline{z}.\overline{z'}, \text{ đpcm.}$$

<u>Ví dụ 4:</u> *Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số thoả mãn mỗi điều kiện sau:*

a. $|z + \overline{z} + 3| = 4$. b. $(2 - z)(i + \overline{z})$ *là số thực tuỳ ý.*

c. $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i|$. d. $|z^2 - (\overline{z})^2| = 4$.

✍ *Giải*

Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễm bởi điểm $M(x; y)$.

a. Ta có:

$$4 = |x + iy + x - yi + 3| = |2x + 3| \Leftrightarrow 2x + 3 = \pm 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

b. Ta có:

$$w = (2 - z)(i + \overline{z}) = (2 - x - yi)(i + x - yi) = -x^2 - y^2 + 2x + y + (2 - x - 2y)i$$

Để w là số thực điều kiện là:

$$2 - x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.

c. Ta có:

$$2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + yi - i| = |x + yi - x + yi + 2i|$$

$$\Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = |2(y + 1)i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{4(y + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc parabol (P): $y = \frac{x^2}{4}$.

d. Ta có:

$$4 = |z^2 - (\overline{z})^2| = |(x + yi)^2 - (x - yi)^2| = |4xyi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{x}.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc hai hypebol có phương trình $y = \pm\frac{1}{x}$.

<u>Ví dụ 5:</u> *Tìm số phức z thỏa mãn:*

a. $\left|\frac{z - 1}{z - i}\right| = 1$ và $\left|\frac{z - 3i}{z + i}\right| = 1$. b. $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^4 = 1$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt z = x + iy (x, y ∈ ℝ), khi đó ta lần lượt có:

$$1 = \left|\frac{z-1}{z-i}\right| \Leftrightarrow |z - i| = |z - 1| \Leftrightarrow |x + iy - i| = |x + iy - 1|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |x - 1 + iy| \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = y.$$

$$1 = \left|\frac{z-3i}{z+i}\right| \Leftrightarrow |z + i| = |z - 3i| \Leftrightarrow |x + iy + i| = |x + iy - 3i|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y+1)i| = |x + (y-3)| \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 8y = 8 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy, số phức cần tìm là z = 1 + i.

Cách 2: Đặt z = x + iy (x, y ∈ ℝ), khi đó ta lần lượt có nhận xét:

- Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$ (với $z_1 = 1$, $z_2 = i$ theo thứ tự được biểu diễn bởi các điểm A(1; 0), B(0; 1)) là đường trung trực của đoạn AB. Từ đó, suy ra M thuộc đường phân giác góc phần tử thứ nhất, tức là y = x.
- Điều kiện $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$ chứng tỏ z có phần ảo bằng 1 (tức là y = 1).

Vậy, số phức cần tìm là z = 1 + i.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$0 = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - 1 = \left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1\right] = \left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - i^2\right]$$

$$= \left(\frac{z+i}{z-i} - 1\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + 1\right)\left(\frac{z+i}{z-i} - i\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i = z-i \\ z+i = -z+i \\ z+i = (z-i)i \\ z+i = -(z-i)i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ (1-i)z = 1-i \\ (1+i)z = -(1+i) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, số phức cần tìm là z = 0, z = ±1.

Ví dụ 6: *Tìm nghiệm phức của mỗi phương trình sau*:

a. $z^2 + \bar{z} = 0.$ b. $z^2 + |z| = 0.$

✍ *Giải*

a. Đặt z = x + iy (x, y ∈ ℝ), khi đó phương trình có dạng:

$$(x + iy)^2 + x - yi = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ và } x^2-y^2+x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \text{ và } x^2-y^2+x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ và } x^2+x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \text{ và } 4y^2=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ và } x=0 \text{ hoặc } x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \text{ và } y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z = 0, z = -1, z = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

b. Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó phương trình có dạng:

$$(x + iy)^2 + |x + iy| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ và } x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y=0 \text{ và } x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ và } -y^2+\sqrt{y^2}=0 \\ y=0 \text{ và } x^2+\sqrt{x^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ và } y=\pm i \\ y=0 \text{ và } x=0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = 0$, $z = i$ và $z = -i$.

Ví dụ 7: *Tìm các căn bậc hai của số phức* $4+6i\sqrt{5}$.

Giải

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y\in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $4+6i\sqrt{5}$, tức là ta có:

$$4+6i\sqrt{5} = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=4 \\ 2xy=6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2-\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^4-4x^2-45=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3\sqrt{5}}{x} \\ x^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ và } y=\sqrt{5} \\ x=-3 \text{ và } y=-\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Vậy, số $1 + 4\sqrt{3}\, i$ có hai căn bậc hai là $\pm\left(3+i\sqrt{5}\right)$.

Ví dụ 8: Hỏi khi số thực a thay đổi tuỳ ý thì các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của a + 2i vạch nên đường nào ?

Giải

Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y\in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $a + i$, tức là ta có:

$$a + 2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=2 \end{cases}.$$

Từ phương trình 2xy = 2 chứng tỏ điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol $y = \dfrac{1}{x}$. Vì với mỗi điểm (x; y) của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch trên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

Ví dụ 9: *Giải các phương trình sau*:

a. $z^2 - 4i\sqrt{2}z - 6i = 0$.   b. $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$.

Giải

a. Phương trình có:

$$\Delta' = \left(2i\sqrt{2}\right)^2 + 6i = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = 2i\sqrt{2} - (1+3i) = -1 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)i \text{ và } z_1 = 2i\sqrt{2} + (1+3i) = 1 + \left(2\sqrt{2} + 3\right)i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Đặt $t = z^2 + z$, phương trình được chuyển về dạng:

$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -6$.

Ta lần lượt:

- Với t = 2, ta được:

  $z^2 + z = 2 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1$ và $z_2 = -2$.

- Với t = −6, ta được:

  $z^2 + z = -6 \Leftrightarrow z^2 + z + 6 = 0$.

  Phương trình này có $\Delta = 1 - 24 = -23$ nên có hai nghiệm phân biệt là $z_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ và $z_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

Ví dụ 10: *Cho phương trình* $z^2 - mz - 6i = 0$.

a. *Giải phương trình với* $m = 4i\sqrt{2}$.

b. *Tìm* m *để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng* 5.

Giải

a. Với $m = 4i\sqrt{2}$ phương trình có dạng $z^2 - 4i\sqrt{2}z - 6i = 0$.

Phương trình có:

$$\Delta' = \left(2i\sqrt{2}\right)^2 + 6i = -8 + 6i = (1 + 3i)^2$$

nên nó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = 2i\sqrt{2} - (1+3i) = -1 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)i,$$

$$z_2 = 2i\sqrt{2} + (1+3i) = 1 + \left(2\sqrt{2} + 3\right)i.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $z_1 = -2$ và $z_2 = i$.

b. Giả sử hai nghiệm của phương trình là z_1, z_2, suy ra:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = m \\ z_1.z_2 = -6i \end{cases}.$$

Khi đó:

$$5 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = m^2 + 12i \Leftrightarrow m^2 = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm(3 - 2i).$$

Vậy, với $m = \pm(3 - 2i)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 11:</u> *Tìm số thực* a, b *để có phân tích*:

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 2z^3 - (1 - a)z^2 + (2b - a)z - b.$$

Sử dụng đồng nhất thức, ta được:

$$\begin{cases} 1 - a = 9 \\ 2b - a = 14 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 - 4z + 5).$$

Từ phân tích trên, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} 2z - 1 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2z = 1 \\ (z - 2)^2 = -1 = i^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} \\ z - 2 = \pm i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \pm i \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $z = 2 \pm i$ và $z = \dfrac{1}{2}$.

<u>Ví dụ 12:</u> *Tìm số thực* a, b *để có phân tích*:

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình $z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = z^4 - (2 - a)z^3 - (2a - b + 4)z^2 - (4a + 2b)z - 4b.$$

Sử dụng đồng nhất thức, ta được:

$$\begin{cases} 2 - a = 0 \\ 2a - b + 4 = 4 \\ 4a + 2b = 16 \\ 4b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b).$$

Từ phân tích trên, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} z^2 - 2z - 4 = 0 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z - 1)^2 = 5 \\ (z + 1)^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 = \pm\sqrt{5} \\ z + 1 = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \pm \sqrt{5} \\ z = -1 \pm i\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $z = 1 \pm \sqrt{5}$ và $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Ví dụ 13: *Cho phương trình* $z^4 + pz^2 + q = 0$ *với* p, q *là các số thực. Tìm điều kiện cần và đủ về các số* p, q *để phương trình*:

a. *Chỉ có nghiệm thực.*

b. *Không có nghiệm thực.*

✍ *Giải*

Đặt $t = z^2$, phương trình được biến đổi về dạng $t^2 + pt + q = 0$. (*)

a. Phương trình ban đầu chỉ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

(*) có hai nghiệm không âm ($0 \le t_1 \le t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ -p \ge 0 \\ q \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ p \le 0 \\ q \ge 0 \end{cases}.$$

b. Phương trình ban đầu chỉ không có nghiệm thực khi và chỉ khi:

(*) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm ($t_1 \le t_2 < 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ -p < 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 - 4q < 0 \\ \begin{cases} p^2 - 4q \ge 0 \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy thực hiện "*Tìm điều kiện để phương trình có cả nghiệm thực và nghiệm không thực*".

Ví dụ 14: *Cho các số phức* $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a. *Viết* z_1, z_2, z_3 *dưới dạng lượng giác.*

b. *Từ câu* a) *hãy tính* $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ *và* $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

✍ *Giải*

a. Ta biến đổi:

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$z_2 = -2 - 2i = -2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{7\pi}{12} + i.\sin\frac{7\pi}{12}.$$

b. Ta có:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2-2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-2+2i)}{8} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)i}{4}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ và } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

<u>Ví dụ 15:</u> *Tính* $\left(\frac{5 - 3i\sqrt{3}}{1 + 2i\sqrt{3}}\right)^{2010}$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(5 + 3i\sqrt{3})(1 + 2i\sqrt{3})}{13} = -1 + i\sqrt{3} = -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Từ đó, suy ra:

$$\left(\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}\right)^{2010} = \left\{-2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{2010}$$

$$= (-2)^{2010}\left[\cos\left(-670\pi\right) + i.\sin\left(-670\pi\right)\right] = 2^{2010}.$$

<u>Ví dụ 16:</u> *Viết dạng lượng giác của số phức z và các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau:*

a. $|z| = 3$ *và một acgument của* iz *là* $\frac{5\pi}{4}$.

b. $|z| = \frac{1}{3}$ *và một acgument của* $\frac{\bar{z}}{1+i}$ *là* $-\frac{3\pi}{4}$.

✍ *Giải*

a. Giả sử z = a + bi với môdun r và acgument φ, ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3,$$

$$iz = i(a + bi) = -b + ai \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Từ đó, suy ra $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i.\sin\frac{3\pi}{8}\right); \quad \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i.\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

b. Giả sử z = a + bi với môdun r và acgument φ, ta có:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\bar{z}}{1+i} = \frac{(a - bi)(1 - i)}{2} = \frac{a+b}{2}(1 - i) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Từ đó, suy ra z = $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}\right)$ và các căn bậc hai của z là:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right);\quad \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i.\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$