DẠNG 30. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- **Khái niệm số phức.**
  Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$. Trong đó $a, b \in \mathbb{R}$; a là phần thực, b là phần ảo.

- **Hai số phức bằng nhau.**
  Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c; d \in \mathbb{R})$. Khi đó $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$

- **Phép cộng số phức.**
  Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c; d \in \mathbb{R})$.
  Khi đó $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$; $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

- **Số phức liên hợp.**
  Số phức liên hợp của $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$ là $\overline{z} = a - bi$.

- **Mô-đun của số phức.**
  Với $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

A -2. **B** $2i$. **C** 2. **D** $-2i$.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng tìm phần ảo của số phức.
2. HƯỚNG GIẢI:

   B1: $z_2 = 1 - i \Rightarrow \overline{z_2}$.

   B2: Tính $z_1 + \overline{z_2} = a + bi$.

   B3: Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2} = a + bi$ là b.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:
Ta có $z_2 = 1 - i \Rightarrow \overline{z_2} = 1 + i$. Do đó $z_1 + \overline{z_2} = -3 + i + 1 + i = -2 + 2i$.
Vậy phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ là 2.
Chọn phương án C

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 4i$ và $z_2 = 1 - 3i$. Phần ảo của số phức $z_1 + i\overline{z_2}$ bằng

(A) 5. (B) $3i$. (C) $-5i$. (D) -3.

Lời giải.

Ta có $z_2 = 1 - 3i \Rightarrow \overline{z_2} = 1 + 3i \Rightarrow i\overline{z_2} = i(1 + 3i) = 3i^2 + i = -3 + i$.

Suy ra $z_1 + i\overline{z_2} = 2 - 4i + (-3 + i) = -1 - 3i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1 + i\overline{z_2}$ là -3.

Chọn phương án (D)

Câu 2. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 8i$ và $z_2 = 5 + 6i$. Phần ảo của số phức liên hợp $z = z_2 - i\overline{z_1}$ bằng

(A) 5. (B) $5i$. (C) -5. (D) $-5i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 - 8i \Rightarrow \overline{z}_1 = 1 + 8i \Rightarrow i\overline{z}_1 = i(1 + 8i) = 8i^2 + i = -8 + i$.

Suy ra $z = z_2 - i\overline{z_1} = 5 + 6i - (-8 + i) = 13 + 5i \Rightarrow \overline{z} = 13 - 5i$.

Vậy phần ảo của số phức liên hợp $z = z_2 - i\overline{z_1}$ là -5.

Chọn phương án (C)

Câu 3. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 6i$. Phần ảo của số phức $z = iz_1 - \overline{z_2}$ bằng

(A) $-4i$. (B) -4. (C) $8i$. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 2 + 3i \Rightarrow iz_1 = i(2 + 3i) = 3i^2 + 2i = -3 + 2i$.

$z_2 = 6i \Rightarrow \overline{z}_2 = -6i \Rightarrow z = iz_1 - \overline{z_2} = -3 + 2i - (-6i) = -3 + 8i$.

Vậy phần ảo của số phức $z = iz_1 - \overline{z_2}$ là 8.

Chọn phương án (D)

Câu 4. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức liên hợp $z = 3z_1 - 2z_2$.

(A) 12. (B) -12. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $z = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = (3 + 6i) + (-4 + 6i) = -1 + 12i$.

Số phức liên hợp của số phức $z = 3z_1 - 2z_2$ là $\overline{z} = -1 - 12i$.

Vậy phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 3z_1 - 2z_2$ là -12.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức liên hợp của số phức $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2}$ là

(A) $54 + 26i$. (B) $54 - 30i$. (C) $-54 - 26i$. (D) $54 - 26i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 5 - 2i \Rightarrow \overline{z_1} = 5 + 2i$; $z_2 = 3 - 4i \Rightarrow \overline{z}_2 = 3 + 4i$.

Suy ra $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2} = 5 + 2i + 3 - 4i + 2(5 - 2i)(3 + 4i) = 8 - 2i + 2(23 + 14i) = 54 + 26i$.

Vậy số phức liên hợp của số phức $w = \overline{z_1} + z_2 + 2z_1\overline{z_2}$ là $\overline{w} = 54 - 26i$.

Chọn phương án (D)

Câu 6. Cho số phức $z = 5 - 3i$. Phần thực của số phức $w = 1 + \overline{z} + (\overline{z})^2$ bằng

(A) 22. (B) -22. (C) 33. (D) -33.

Lời giải.

Ta có $z = 5 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 5 + 3i \Rightarrow (\overline{z})^2 = (5 + 3i)^2 = 25 + 30i + 9i^2 = 16 + 30i$.

Suy ra $w = 1 + \overline{z} + (\overline{z})^2 = 1 + 5 + 3i + 16 + 30i = 22 + 33i$.

Vậy phần thực của số phức $w = 1 + \overline{z} + (\overline{z})^2$ bằng 22.

Chọn phương án (A)

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i + (1 - i)^3$ và $z_2 = 7 + i$. Phần thực của số phức $w = 2\overline{\overline{z_1}z_2}$ bằng

(A) 9. (B) 2. (C) 18. (D) -74.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 4 - 3i + \left(1 - 3i + 3i^2 - i^3\right) = 4 - 3i + (1 - 3i - 3 + i) = 2 - 5i$.

Suy ra $\overline{z}_1 z_2 = (2 + 5i)(7 + i) = 9 + 37i \Rightarrow \overline{\overline{z_1}z_2} = 9 - 37i$.

Do đó $w = 2(9 - 37i) = 18 - 74i$.

Vậy phần thực của số phức $w = 2\overline{\overline{z_1}z_2}$ bằng 18.

Chọn phương án (C)

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)z = 5(1 + i)^2$. Tổng bình phương phần thực và phần ảo của số phức $w = \overline{z} + iz$ bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $(1 + 2i)z = 5(1 + i)^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{5(1 + i)^2}{1 + 2i} = \dfrac{10i}{1 + 2i} = \dfrac{10i(1 - 2i)}{5} = 4 + 2i$.

Suy ra $w = \overline{z} + iz = (4 - 2i) + i(4 + 2i) = 2 + 2i$.

Vậy số phức w có phần thực bằng 2, phần ảo bằng 2. Suy ra $2^2 + 2^2 = 8$.

Chọn phương án (D)

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \dfrac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w = z + 1 + i$. Tính $P = a^2 + b^2$.

(A) 13. (B) 5. (C) 25. (D) 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i &\Leftrightarrow (2 + i)z = 7 + 8i - \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} \\
&\Leftrightarrow (2 + i)z = 4 + 7i \\
&\Leftrightarrow z = \frac{4 + 7i}{2 + i} = \frac{(4 + 7i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = 3 + 2i.
\end{aligned}$$

Suy ra $w = z + 1 + i = 4 + 3i \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 16 + 9 = 25$.

Chọn phương án (C)

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2\overline{z} = 6 - 3i$. Tìm phần ảo của số phức z.

A 3. **B** -3. **C** $3i$. **D** 2.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$, suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Theo giả thiết, ta có

$$a + bi + 2(a - bi) = 6 - 3i \Leftrightarrow 3a - bi = 6 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ -b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy phần ảo của số phức z là 3.

Chọn phương án A

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $iz = 2(\overline{z} - 1 - i)$. Tính $S = ab$.

A $S = -4$. **B** $S = 4$. **C** $S = 2$. **D** $S = -2$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$, suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Ta có

$$iz = 2(\overline{z} - 1 - i) \Leftrightarrow i(a + bi) = 2(a - bi - 1 - i) \Leftrightarrow -b + ai = 2a - 2 + (-2b - 2)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2a - 2 \\ a = -2b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2. \end{cases}$$

Suy ra $S = ab = -4$.

Chọn phương án A

Câu 12. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z\overline{z} = 10(z + \overline{z})$ và z có phần ảo bằng ba lần phần thực?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$, suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Từ $z\overline{z} = 10(z + \overline{z}) \Leftrightarrow (a + bi)(a - bi) = 10[(a + bi) + (a - bi)] \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 20a$. (1)

Hơn nữa, số phức z có phần ảo bằng ba lần phần thực nên $b = 3a$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 = 20a \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

Vậy có 2 số phức cần tìm là $z = 2 + 6i$ và $z = 0$.

Chọn phương án C

Câu 13. Cho số phức $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$ thỏa $(1 + i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A $P = \dfrac{1}{2}$. **B** $P = 1$. **C** $P = -1$. **D** $P = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $z = a + bi$ $(a; b \in \mathbb{R})$, suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+i)z+2\overline{z}=3+2i &\Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i\\ &\Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=2\\3a-b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $P=a+b=-1$.

Chọn phương án C

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $5\overline{z}+3-i=(-2+5i)z$. Tính $P=\left|3i(z-1)^2\right|$.

A $P=144$. B $P=3\sqrt{2}$. C $P=12$. D $P=0$.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}5\overline{z}+3-i=(-2+5i)z &\Leftrightarrow 5(a-bi)+3-i=(-2+5i)(a+bi)\\ &\Leftrightarrow 5a+3-(5b+1)i=-2a-5b+(5a-2b)i\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}5a+3=-2a-5b\\5b+1=2b-5a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7a+5b+3=0\\5a+3b+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-2.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $z=1-2i$. Do đó $3i(z-1)^2=-12i$. Vậy $P=\left|3i(z-1)^2\right|=|-12i|=12$.

Chọn phương án C

Câu 15. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A $P=-1$. B $P=-5$. C $P=3$. D $P=7$.

Lời giải.

Với $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$, suy ra $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}z+2+i-|z|(1+i)=0 &\Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=|z|+i|z|\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a+2=|z|\\b+1=|z|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\b+1=\sqrt{a^2+b^2}. & (2)\end{cases}\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào (1) ta được

$$a+2=\sqrt{a^2+(a+1)^2}\Leftrightarrow \begin{cases}a+2>1 \text{ (do } |z|>1)\\a^2-2a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow a=3.$$

Suy ra $b=4$. Do đó $z=3+4i$ có $|z|=5>1$ (thỏa điều kiện $|z|>1$).

Vậy $P=a+b=3+4=7$.

Chọn phương án D

Câu 16. Tìm mô-đun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

Ⓐ $|z|=\frac{1}{2}$. Ⓑ $|z|=2$. Ⓒ $|z|=4$. Ⓓ $|z|=1$.

Lời giải.

Ta có $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow z+3iz=4+|z|+|z|i-4i \Leftrightarrow (1+3i)z=|z|+4+(|z|-4)i$.
Suy ra

$$\begin{aligned}|(1+3i)z|=||z|+4+(|z|-4)i| \Leftrightarrow \sqrt{10}|z| &= \sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}\\ &\Leftrightarrow 10|z|^2=(|z|+4)^2+(|z|-4)^2\\ &\Leftrightarrow 8|z|^2=32 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 17. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2=|z|^2+\overline{z}$?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $\overline{z}=a-bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
Ta có

$$z^2=|z|^2+\overline{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2=a^2+b^2+a-bi \Leftrightarrow 2abi-b^2=b^2+a-bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2ab=-b\\ -b^2=b^2+a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=0\\ a=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ 2b^2+a=0.\end{cases}$$

- $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow z=0$.
- $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=-\frac{a}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\ z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.\end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức thỏa ycbt.
Chọn phương án D

Câu 18. Số phức $z=a+bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\overline{z}-2+5i|=1$. Khi đó $a+b$ là

Ⓐ 9. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Lời giải.

Với $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{Z})$.
Ta có $(1-3i)z=(1-3i)(a+bi)=a+3b+(b-3a)i$.
Vì $(1-3i)z$ là số thực nên $b-3a=0 \Rightarrow b=3a$. (1)

$$|\overline{z}-2+5i|=1 \Leftrightarrow |a-2+(5-b)i|=1 \Leftrightarrow (a-2)^2+(5-b)^2=1. \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có $(a-2)^2+(5-3a)^2=1 \Leftrightarrow 10a^2-34a+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \Rightarrow b=6 \\ a=\dfrac{7}{5} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy $a+b=2+6=8$.

Chọn phương án B

Câu 19. Cho số phức $z=a+bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^2$.

(A) $T=4\sqrt{3}-2$. (B) $T=3+2\sqrt{2}$. (C) $T=3-2\sqrt{2}$. (D) $T=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Với $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có

$$z|z|+2z+i=0 \Leftrightarrow (a+bi)|a+bi|+2(a+bi)+i=0 \Leftrightarrow a\sqrt{a^2+b^2}+2a+b\sqrt{a^2+b^2}i+2bi+i=0$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2+b^2}+2a+\left(b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{a^2+b^2}+2a=0 \\ b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(\sqrt{a^2+b^2}+2\right)=0 \\ b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\sqrt{b^2}+2b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ |b|=-\dfrac{2b+1}{b}. \end{cases}$$

Với $|b|=-\dfrac{2b+1}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=-\dfrac{2b+1}{b} \\ -\dfrac{2b+1}{b}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=-\dfrac{2b+1}{b} \\ -\dfrac{1}{2}\leq b<0 \end{cases} \Leftrightarrow b=1-\sqrt{2}$.

Suy ra $T=a+b^2=3-2\sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 20. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=3\sqrt{2}$ và $(z+2i)^2$ là số thuần ảo?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z+1-3i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=18$. (1)

$$(z+2i)^2=[x+(y+2)i]^2=x^2-(y+2)^2+2x(y+2)i.$$

Theo giả thiết ta có $(z+2i)^2$ là số thuần ảo nên $x^2-(y+2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2 \\ x=-(y+2). \end{array}\right.$

Với $x=y+2$ thay vào (1) ta được phương trình $2y^2=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow z_1=2$.

Với $x=-(y+2)$ thay vào (1) ta được phương trình $2y^2-4y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{5} \\ y=1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} z_2=-3-\sqrt{5}+(1+\sqrt{5})i \\ z_3=-3+\sqrt{5}+(1-\sqrt{5})i. \end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. B	5. D	6. A	7. C	8. D	9. C	10. A
11. A	12. C	13. C	14. C	15. D	16. B	17. D	18. B	19. C	20. C