DẠNG 40. KHỐI NÓN

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

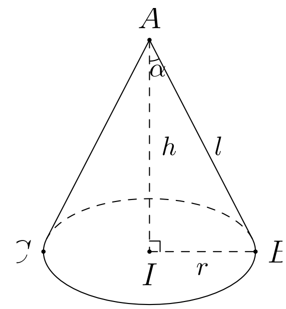
a) **Các yếu tố cơ bản của hình nón**

(a) Chiều cao: h.

(b) Bán kính đường tròn đáy: r.

(c) Độ dài đường sinh: l.

(d) Góc ở đỉnh: $2\alpha\,(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.



b) **Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón:** $l^2 = h^2 + R^2$.

c) **Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác:** Cho ΔAIB vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

(a) Đường thẳng AI gọi là trục, A là đỉnh, AI gọi là đường cao và AB gọi là đường sinh của hình nón.

(b) Hình tròn tâm I, bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

d) **Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón:** Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì ta có

(a) Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = \pi r l$

(b) Diện tích đáy (hình tròn): $S_{\text{đ}} = \pi r^2$;

(c) Diện tích toàn phần hình nón: $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đ}}$;

(d) Thể tích khối nón: $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{đ}} h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 l$.

e) **Thiết diện của hình nón** (N) **khi cắt bởi mặt phẳng** (P)

⋄ TH1. (P) đi qua đỉnh của hình nón (N):

i. Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón (N) theo một đường sinh thì ta gọi (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

ii. Nếu (P) cắt hình nón (N) theo 2 đường sinh thì thiết diện là tam giác cân.

iii. Đặc biệt, nếu (P) đi qua trục của mặt nón (N) thì thiết diện là tam giác cân có cạnh bên l và cạnh đáy $2r$.

⋄ TH2. (P) không đi qua đỉnh của hình nón (N):

i. Nếu (P) vuông góc với trục hình nón thì giao tuyến là một đường tròn.

ii. Nếu (P) song song với 2 đường sinh hình nón thì giao tuyến là 2 nhánh của một hypebol.

iii. Nếu (P) song song với một đường sinh hình nón thì giao tuyến là một đường parabol.

f) **Công thức tính độ dài cung tròn có số đo $a°$, bán kính R là $l = \dfrac{\pi R a}{180}$.**

g) **Tính chất ΔABC đều cạnh a:**

(a) Độ dài đường cao, đường trung tuyến: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

(b) Diện tích tam giác: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. B. 32π. C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

a) **DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán tính thể tích của khối nón tròn xoay.

b) **HƯỚNG GIẢI:**

B1: Tìm bán kính hình tròn đáy

B2: Áp dụng công thức tính thể tích.

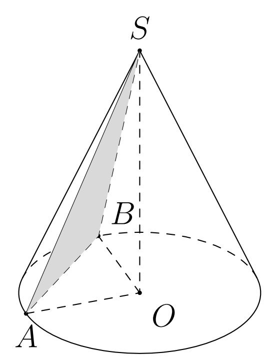
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow SA^2 = 36$.

Ta có: $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{36-20} = 4$.

Thể tích của khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 4^2 2\sqrt{5} = \dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.



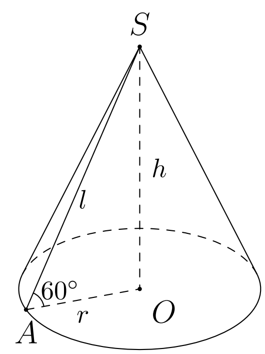
Chọn phương án A

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Hình nón có chiều cao $3\sqrt{3}$ cm, góc giữa một đường sinh và mặt đáy bằng 60°. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đó.

(A) $S_{\text{tp}} = 18\pi\ \text{cm}^2$. (B) $S_{\text{tp}} = 81\pi\ \text{cm}^2$. (C) $S_{\text{tp}} = 27\pi\ \text{cm}^2$. (D) $S_{\text{tp}} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Lời giải.



Tam giác SAO vuông tại O có $r = h\cot 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ cm.

Độ dài đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$ cm.

Khi đó diện tích xung quanh hình nón $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi\ \text{cm}^2$.

Diện tích đáy: $S_{\text{đ}} = \pi r^2 = \pi.3^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$.

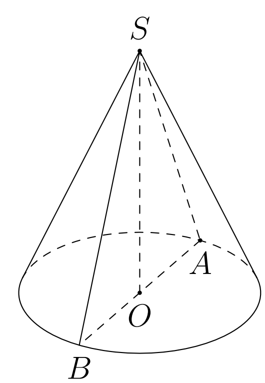
Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = S_{\text{đ}} + S_{\text{xq}} = 9\pi + 18\pi = 27\pi\ \text{cm}^2$.

Chọn phương án (C)

Câu 2. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60°, diện tích xung quanh bằng $18a^2\pi$. Thể tích Vcủa khối nón đã cho bằng

(A) $9\pi a^3\sqrt{3}$. (B) $3\pi a^3\sqrt{3}$. (C) $9\pi a^3$. (D) $3\pi a^3$.

Lời giải.



Hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° nên $\widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

ΔSAO vuông tại O nên $SA = \dfrac{AO}{\sin 30^\circ} = 2AO$.

Khi đó, diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot AO \cdot SA = \pi \cdot AO \cdot 2AO = 2\pi \cdot AO^2.$$

Theo bài ra $S_{\text{xq}} = 18a^2\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi \cdot AO^2}{\sqrt{3}} = 18a^2\pi \Leftrightarrow AO^2 = 9a^2 \Leftrightarrow AO = 3a$.

ΔSAO vuông tại $O \Rightarrow SO = \dfrac{AO}{\tan 30^\circ} = 3a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (3a)^2 \cdot 3a\sqrt{3} = 9\pi a^3\sqrt{3}$.

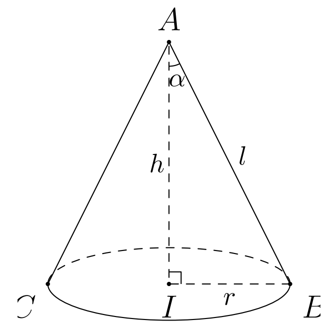
Chọn phương án (A)

Câu 3. Một hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích đáy của hình nón bằng $4\pi a^2$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

(A) $S_{\text{xq}} = 32\pi a^2$. (B) $S_{\text{xq}} = 4\pi a^2$. (C) $S_{\text{xq}} = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. (D) $S_{\text{xq}} = 8\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình nón: $S = \pi r^2 = 4\pi \cdot a^2 \Leftrightarrow r = 2a$. Hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính nên $l = 2r = 4a$.
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot 2a \cdot 4a = 8\pi a^2$.



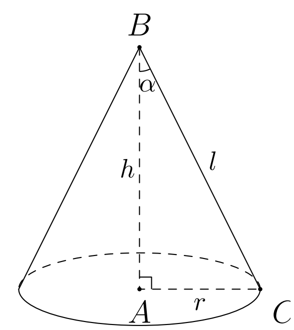
Chọn phương án D

Câu 4. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{10}$. **B** $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{6}$. **C** $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{6}}{3}$. **D** $S_{\text{xq}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$ nên $BC = a\sqrt{3}$.
Khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB ta được hình nón có chiều cao $h = AB = a$, bán kính đường tròn đáy $r = AC = a\sqrt{2}$ và đường sinh $l = BC = a\sqrt{3}$.
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \pi a^2\sqrt{6}$.



Chọn phương án B

Câu 5. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, gọi M là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối nón tạo thành khi cho tam giác ABC quay quanh AM.

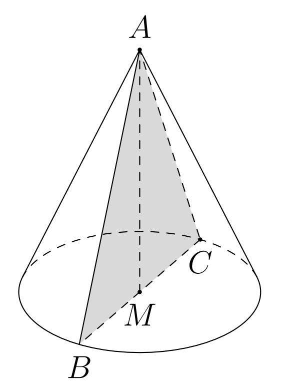
A $V = \pi a^3\sqrt{3}$. **B** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$. **C** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Lời giải.

Khi quay ΔABC quanh cạnh AM ta được hình nón có

- chiều cao $h = AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$,
- bán kính đường tròn đáy $r = \dfrac{BC}{2} = a$.

Khi đó thể tích khối nón tạo thành $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi . a^2 . a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

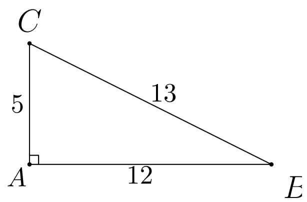


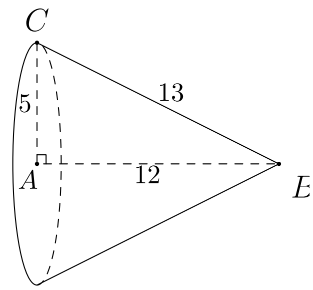
Chọn phương án C

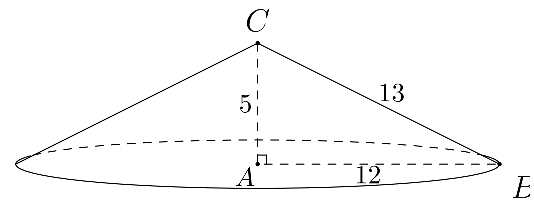
Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 12$, $AC = 5$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{12}$. Ⓑ $\dfrac{12}{5}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{25}{144}$.

Lời giải.







Khi quay ΔABC quanh cạnh AB ta được khối nón có chiều cao $h_1 = AB = 12$, bán kính đường tròn đáy $r_1 = AC = 5$. Thể tích khối nón $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12$.

Khi quay ΔABC quanh cạnh AC ta được khối nón có chiều cao $h_2 = AC = 5$, bán kính đường tròn đáy $r_2 = AB = 12$. Thể tích khối nón $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5$.

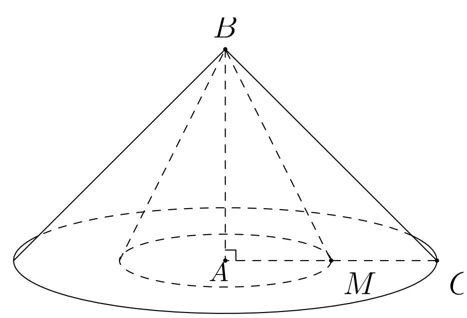
Ta có: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{\frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5} = \dfrac{5}{12}$.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi quay quanh AB, các đường gấp khúc AMB, ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1, S_2. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

Ⓐ $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{8\sqrt{13}}{13}$. Ⓑ $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{13}}{8}$. Ⓓ $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



ΔABC vuông tại A nên $AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $BC = \dfrac{AC}{\cos 60^\circ} = 2a$.

M là trung điểm $AC \Rightarrow AM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

ΔABM vuông tại A $\Rightarrow$ $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Khi quay đường gấp khúc AMB quanh cạnh AB ta được hình nón có chiều cao $h_1 = AB = a\sqrt{3}$, bán kính đường tròn đáy $r_1 = AM = \dfrac{a}{2}$ và độ dài đường sinh $l_1 = BM = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_1 = \pi r_1 l_1 = \pi . \dfrac{a}{2} . \dfrac{a\sqrt{13}}{2} = \dfrac{\pi a^2 \sqrt{13}}{4}$.

Khi quay đường gấp khúc ACB quanh cạnh AB ta được hình nón có chiều cao $h_2 = AB = a\sqrt{3}$, bán kính đường tròn đáy $r_2 = AC = a$ và độ dài đường sinh $l_1 = BC = 2a$. Diện tích xung quanh của hình nón $S_2 = \pi r_2 l_2 = \pi . a . 2a = 2\pi a^2$.

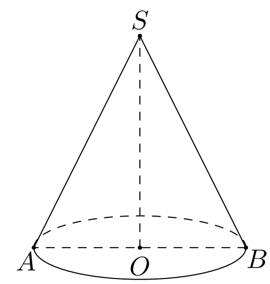
Do đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{13}}{8}$.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 8. Cắt hình nón có chiều cao h bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân. Biết diện tích xung quanh của hình nón là $8\pi\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

(A) $\dfrac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{64\pi}{3}$. (C) 8π. (D) $16\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có: $h = SO$.

ΔSAB vuông cân tại S nên bán kính đường tròn đáy của hình nón $r = h$.

ΔSOB vuông tại O nên độ dài đường sinh của hình nón: $SB = \sqrt{h^2 + r^2} = h\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S = \pi rl = \pi.h.h\sqrt{2} = \pi h^2\sqrt{2}$.

Theo bài ra: $S = 8\pi\sqrt{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$.

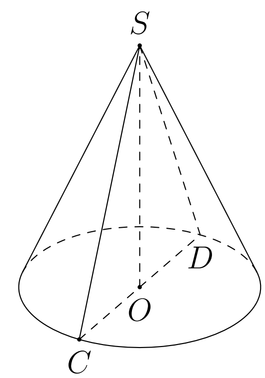
Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot h^3 = \dfrac{16\pi\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án (A)

Câu 9. Thiết diện qua trục của một khối nón (N) là một tam giác vuông cân và có diện tích bằng $2a^2$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

(A) $S_{\text{xq}} = 2\pi a^2\sqrt{2}$. (B) $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{2}$. (C) $S_{\text{xq}} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. (D) $S_{\text{xq}} = 2a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Giả sử thiết diện qua trục của (N) là ΔSCD.

Ta có ΔSCD vuông cân tại S và có diện tích bằng $2a^2$ nên

$\dfrac{1}{2}SC^2 = 2a^2 \Rightarrow SC = 2a$.

$OC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{SC\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

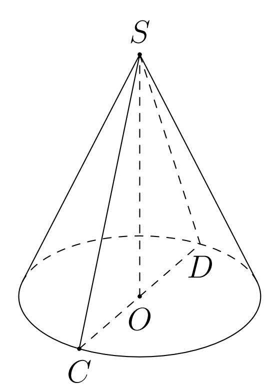
Diện tích xung quanh của hình nón $S_{\text{xq}} = \pi rl = \pi \cdot OC \cdot SC = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\pi a^2\sqrt{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 10. Thiết diện qua trục của một khối nón (N) là một tam giác đều và có diện tích bằng $4\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối nón (N).

(A) $\dfrac{8\pi}{3}$. (B) $V = 8\pi\sqrt{3}$. (C) $V = 8\pi$. (D) $V = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Giả sử thiết diện qua trục của (N) là ΔSCD.

Ta có ΔSCD đều và có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

$S_{\Delta SCD} = \dfrac{SC^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow SC = 4 = CD$.

Tam giác SCD đều, có chiều cao SO nên

$SO = \dfrac{SC\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$;

$OC = \dfrac{CD}{2} = 2$.

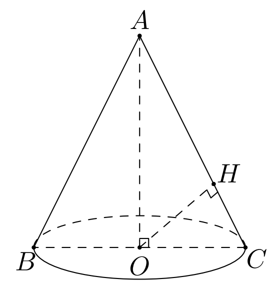
Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi OC^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 11. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều và khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến đường sinh bằng $\frac{a}{2}$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón.

A $\frac{2\pi a^2}{3}$. **B** $\frac{\pi a^2(3+2\sqrt{3})}{9}$. **C** πa^2. **D** $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Giả sử thiết diện qua trục của khối nón (N) là ΔABC.

Gọi O là tâm của (N) và H là hình chiếu của O trên AC. Theo bài ra ta có: $OH = \frac{a}{2}$.

Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ACO} = 60^\circ$.

ΔOHC vuông tại $H \Rightarrow OC = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ΔAOC vuông tại $O \Rightarrow AO = OC.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a;\ AC = BC = 2OC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy của hình nón: $S = \pi OC^2 = \frac{\pi a^2}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{\text{xq}} = \pi \cdot OC \cdot AC = \frac{2\pi a^2}{3}$.

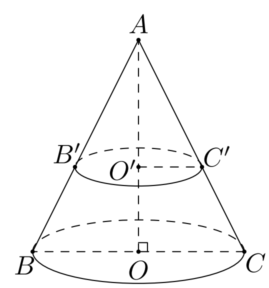
Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón: $S_{\text{tp}} = S + S_{\text{xq}} = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{2\pi a^2}{3} = \pi a^2$.

Chọn phương án C

Câu 12. Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $6a$. Thiết diện song song với đáy cách đáy một đoạn bằng $2a$ có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tích khối nón (N) là

A $648\pi a^3$. **B** $162\pi a^3$. **C** $486\pi a^3$. **D** $108\pi a^3$.

Lời giải.



Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón (N).

Ta có $h = AO = 6a; r = OC$.

Thiết diện song song với đáy của hình nón (N) là đường tròn tâm O'.

Theo bài ra ra có: thiết diện cách đáy một đoạn bằng $2a \Rightarrow OO' = 2a$.

Gọi h', r' lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón có đỉnh là đỉnh của (N) và đáy là đường tròn thiết diện.

$\Rightarrow h' = AO' = AO - OO' = 4a; r' = O'C'$.

Hơn nữa, diện tích đường tròn (O'): $S_{(O')} = 36\pi a^2 \Leftrightarrow \pi(r')^2 = 36\pi a^2 \Leftrightarrow r' = 6a$.

Theo định lý Ta-let, ta có chiều cao và bán kính đáy: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r = \frac{hr'}{h'} = \frac{6a \cdot 6a}{4a} = 9a$.

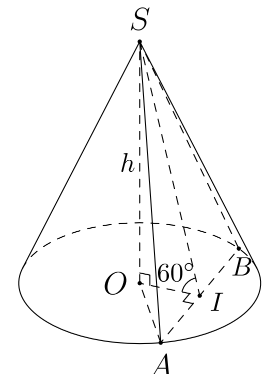
Vậy thể tích của khối nón (N) là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (9a)^2 \cdot 6a = 162\pi a^3$.

Chọn phương án B

Câu 13. Một hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O và $SO = h$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Biết diện tích thiết diện bằng $\dfrac{h^2}{3}$. Tính thể tích V của khối nón.

Ⓐ $V = \dfrac{5\pi h^3}{12}$. Ⓑ $V = \dfrac{17\pi h^3}{144}$. Ⓒ $V = \dfrac{17\pi h^3}{48}$. Ⓓ $V = \dfrac{5\pi h^3}{36}$.

Lời giải.



(P) cắt đường tròn đáy của hình nón lần lượt tại A và B. Khi đó $(P) = (SAB)$.

Gọi I là trung điểm của AB. ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OI \perp AB$.

Mặt khác $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là $\widehat{SIO} = 60°$.

ΔSOI vuông tại $O \Rightarrow OI = \dfrac{SO}{\tan 60°} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$; $SI = \dfrac{SO}{\sin 60°} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích thiết diện bằng $\dfrac{h^2}{3} \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \dfrac{h^2}{3}$.

Do đó, $AB = \dfrac{2S_{\Delta SAB}}{SI} = \dfrac{2.\dfrac{h^2}{3}}{\dfrac{2h\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{h\sqrt{3}}{6}$.

ΔOIA vuông tại $I \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{h\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{h\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{h\sqrt{15}}{6}$.

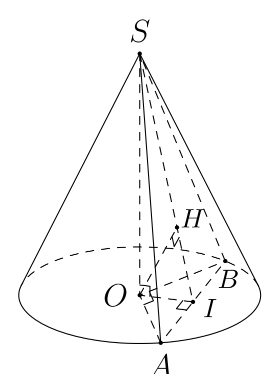
Vậy thể tích của khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{h\sqrt{15}}{6}\right)^2 \cdot h = \dfrac{5\pi h^3}{36}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 14. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O và $SO = 4$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S và cắt đường tròn đáy của hình nón lần lượt tại A, B sao cho $\widehat{AOB} = 90°$. Biết khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng thiết diện là $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

Ⓐ $S_{\text{xq}} = 8\pi\sqrt{3}$. Ⓑ $S_{\text{xq}} = 4\pi\sqrt{3}$. Ⓒ $S_{\text{xq}} = 6\pi$. Ⓓ $S_{\text{xq}} = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB; H là hình chiếu của O trên SI.

ΔOAB vuông cân tại $O \Rightarrow OI \perp AB$.

Mặt khác $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

$OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O; (SAB)) = OH = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

ΔSOI vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow OI = 2$.

ΔOAB vuông cân tại $O \Rightarrow AB = 2OI = 4$; $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

ΔSOA vuông tại $O \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6}$.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{\text{xq}} = \pi \cdot OA \cdot SO = \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\pi\sqrt{3}$.

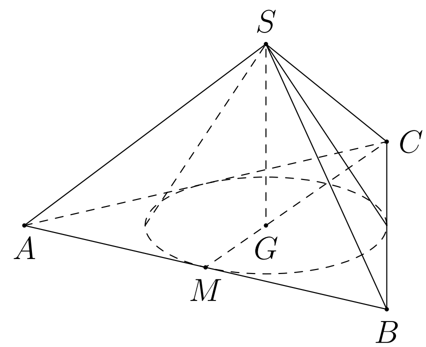
Chọn phương án (A)

Câu 15. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều có cạnh $2a$.

(A) $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2}{3}$. **(B)** $S_{tp} = \dfrac{4\pi a^2}{3}$. **(C)** $S_{tp} = \pi a^2$. **(D)** $S_{tp} = \dfrac{2\pi a^2}{3}$.

Lời giải.

Hình nón nội tiếp tứ diện đều $SABC$ có



- Bán kính đường tròn đáy $r = MG = \dfrac{1}{3}MC = \dfrac{AC\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Độ dài đường sinh: $l = SM = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = \pi a^2$.

Diện tích đường tròn đáy: $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{3}$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S + S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3} + \pi a^2 = \dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Chọn phương án (B)

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

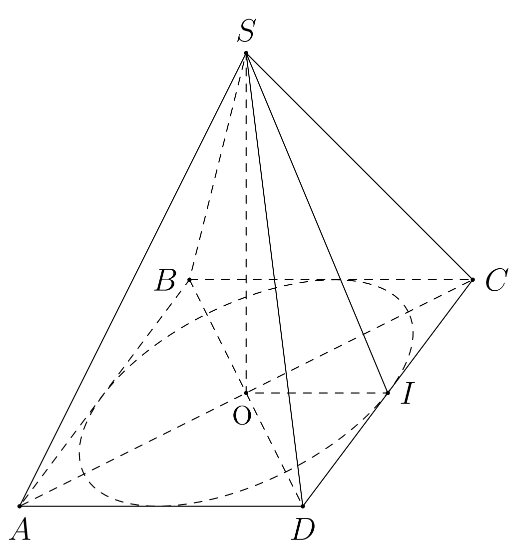
(A) $V = \dfrac{\pi}{16}$. **(B)** $V = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}$. **(C)** $V = \dfrac{\pi}{48}$. **(D)** $V = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải.

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = BD = 1$.

Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có bán kính đường tròn đáy $r = OI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, chiều cao $h = SO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó thể tích khối nón tạo thành $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{48}$.

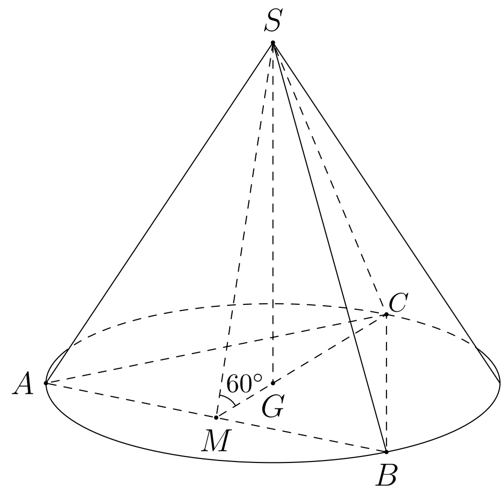


Chọn phương án (C)

Câu 17. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có chiều cao bằng h, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(A) $S_{\text{xq}} = 2\pi h^2\sqrt{7}$. (B) $S_{\text{xq}} = \dfrac{2\pi h^2\sqrt{3}}{3}$. (C) $S_{\text{xq}} = \dfrac{2\pi h^2\sqrt{7}}{3}$. (D) $S_{\text{xq}} = \dfrac{4\pi h^2}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AB; G là trọng tâm ΔABC.

Khi đó, $SG \perp (ABC)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa (SAB) với mặt phẳng đáy là $\widehat{SMC} = 60°$.

ΔSMG vuông tại $G \Rightarrow MG = \dfrac{SG}{\tan 60°} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$; $SM = \dfrac{SG}{\sin 60°} = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

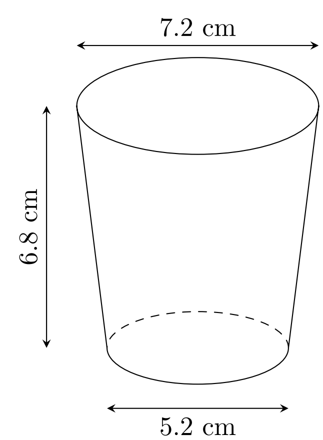
ΔABC đều có $MC = 3MG = h\sqrt{3} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = 2h$. ΔSAM vuông tại $M \Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 + AM^2} = \sqrt{SM^2 + \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(\dfrac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 + \dfrac{(2h)^2}{4}} = \dfrac{h\sqrt{21}}{3}$.

Hình nón ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$ có chiều cao $SG = h$, bán kính đường tròn đáy $r = GC = 2GM = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$, độ dài đường sinh $l = SA = \dfrac{h\sqrt{21}}{3}$.

Khi đó diện tích xung quanh hình nón tạo thành $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{h\sqrt{21}}{3} = \dfrac{2\pi h^2\sqrt{7}}{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 18. Một cốc giấy có dạng hình nón cụt với các kích thước như hình vẽ.



Biết 1 oz = 29,57 ml. Thể tích của cốc gần nhất với con số nào dưới đây?

(A) 7 oz. (B) 28 oz. (C) 3 oz. (D) 4,5 oz.

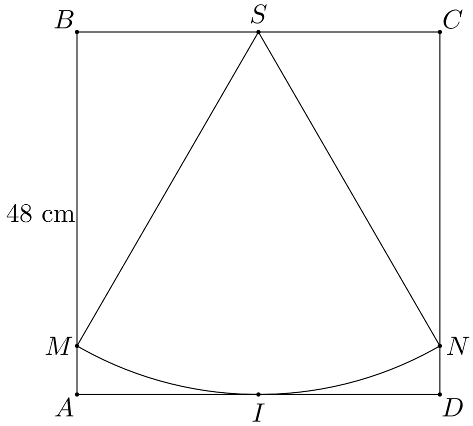
Lời giải.

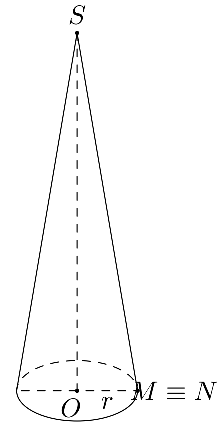
Cốc đã cho có dạng là hình chóp cụt với bán kính 2 đáy lần lượt là $R = 3{,}6$ cm, $r = 2{,}6$ cm và chiều cao $h = 6{,}8$ cm.

Thể tích của cốc là $V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = 207{,}077\ \text{cm}^3 = 207{,}077\ \text{ml} \approx 7$ oz.

Chọn phương án (A)

Câu 19. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 48 cm. Gọi S, I lần lượt là trung điểm của BC, AD. Dùng compa vạch cung tròn MN có tâm là S và bán kính SI (như hình vẽ) rồi cắt tấm bìa theo cung tròn đó. Dán phần hình quạt sao cho cạnh SM và SN trùng nhau thành một cái mũ hình nón không đáy với đỉnh S (giả sử phần mép dán không đáng kể). Tính thể tích V của cái mũ đó.





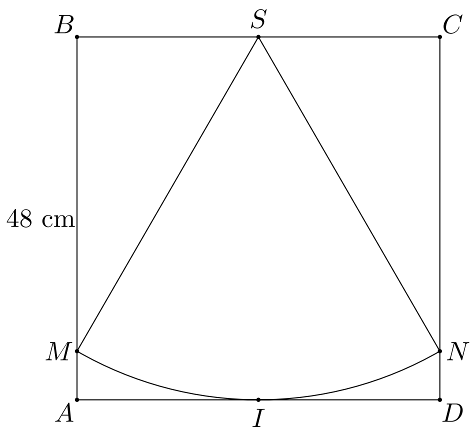
A $V = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{3}$ cm^3.

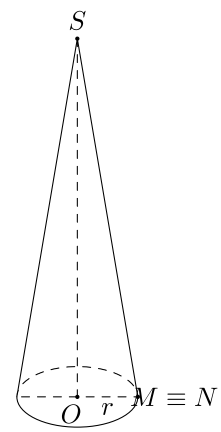
B $V = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{9}$ cm^3.

C $V = 1024\pi$ cm^3.

D $V = 512\pi\sqrt{35}$ cm^3.

Lời giải.





Ta có $MN = SM = SN = 48$ cm nên ΔSMN đều $\Rightarrow \widehat{MSN} = 60^\circ$.

Chu vi đường tròn đáy của cái mũ chính là chiều dài x của dây cung MN. Mặt khác số đo cung MN bằng số đo $\widehat{MSN} = 60^\circ$ nên $x = \dfrac{\pi \cdot 48 \cdot 60}{180} = 16\pi$.

Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của cái mũ, ta có $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{16\pi}{2\pi} = 8$.

Chiều cao của cái phễu $h = \sqrt{SM^2 - r^2} = \sqrt{48^2 - 8^2} = 8\sqrt{35}$.

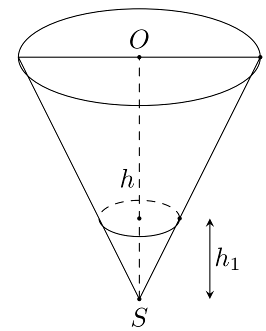
Vậy thể tích cái phễu $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 8^2 \cdot 8\sqrt{35} = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{3}$ cm^3.

Chọn phương án A

Câu 20. Một chiếc ly hình nón chứa đầy rượu có chiều cao 9 cm. Người ta uống đi một phần rượu sao cho chiều cao phần rượu còn lại bằng một phần ba chiều cao ban đầu. Số phần rượu đã được uống là

Ⓐ $\frac{8}{9}$. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{26}{27}$. Ⓓ $\frac{2}{3}$.

Lời giải.



Gọi $h = 9$ cm là chiều cao của ly, R là bán kính miệng ly.

Thể tích ly hình nón: $V = \frac{1}{3}.\pi R^2.9 = 3\pi R^2$.

Ký hiệu $h_1 = \frac{1}{3}h = 3$cm là chiều cao và r là bán kính đường tròn tạo bởi mép rượu còn lại trong ly.

Thể tích phần rượu còn lại: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 3 = \pi r^2$.

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi r^2}{3\pi R^2} = \frac{1}{3}(\frac{r}{R})^2$.

Mặt khác $\frac{r}{R} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_1 = \frac{V}{27}$.

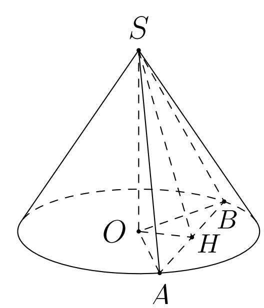
Thể tích phần rượu đã uống: $V_2 = V - V_1 = \frac{26}{27}V$.

Chọn phương án C

Câu 21. Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ $\frac{2\pi}{3}$. . Ⓑ $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $5\pi\sqrt{3}$. . Ⓓ $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có: $h = SO = \sqrt{3}$ và SAB là tam giác đều.

$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow SB = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔSOB vuông tại O, ta có: $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}$.

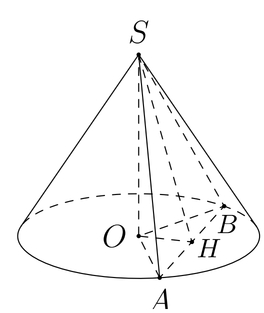
Vậy $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

Chọn phương án B

Câu 22. Cho hình nón có chiều cao bằng 4. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

Ⓐ 36π. . Ⓑ 15π. Ⓒ 12π. Ⓓ 45π.

Lời giải.



Ta có: $h = SO = 4$ và SAB là tam giác đều.

$S_{\Delta SAB} = \frac{SB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SB = 5$.

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

Chọn phương án C

Câu 23. Cho hình nón có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A $\dfrac{2\sqrt{5}\pi}{3}$. **B** $2\sqrt{5}\pi$. **C** 10π. **D** $\dfrac{10\pi}{3}$.

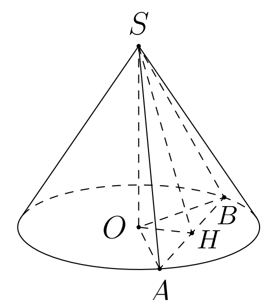
Lời giải.

Ta có $r = OB = \sqrt{5}$ và SAB là tam giác đều.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{SB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SB = 3.$

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = 2.$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot 2 = \dfrac{10\pi}{3}.$



Chọn phương án D

Câu 24. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A $9\pi\sqrt{3}$. **B** $3\pi\sqrt{3}$. **C** $27\sqrt{3}\pi$. **D** 18π.

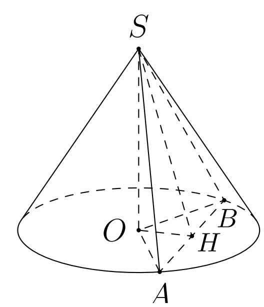
Lời giải.

Ta có $r = OB = 3$ và SAB là tam giác đều.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{SB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow SB = 6.$

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}.$



Chọn phương án A

Câu 25. Cho hình nón có chiều cao bằng 2. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $4\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh của khối nón đã cho bằng

A $8\pi\sqrt{3}$. **B** $4\pi\sqrt{3}$. **C** 24π. **D** $16\pi\sqrt{3}$.

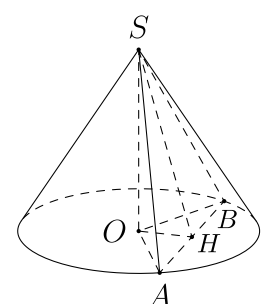
Lời giải.

Ta có: $h = SO = 2$ và SAB là tam giác đều.

$S_{\triangle SAB} = \dfrac{SB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow SB = 4.$

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$

Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\pi\sqrt{3}.$

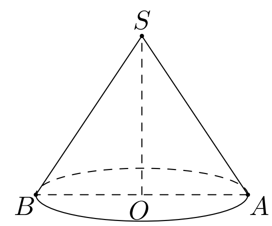


Chọn phương án A

Câu 26. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $3\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của khối nón đã cho bằng

A $9\pi\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{9\pi\sqrt{2}}{2}$. **C** 9π. **D** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải.



Ta có: $AB = 3\sqrt{2}$ và SAB là tam giác vuông cân tại S.

Xét ΔSAB vuông cân tại S ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2SA^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow SA = 3$.

$r = OA = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

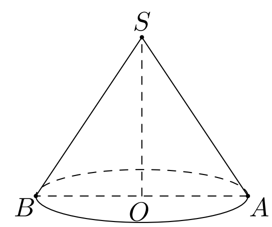
Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 27. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một tam giác đều có diện tích bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A $\dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3}$. **B** $2\pi\sqrt{6}$. **C** 24π. **D** $16\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: SAB là tam giác đều.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{SA^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow SA = 2\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{6}; OA = \sqrt{2}$.

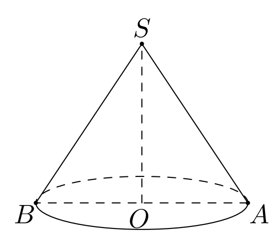
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{6} = \dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Chọn phương án A

Câu 28. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120°. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một tam giác cân có diện tích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A $\dfrac{375\pi\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{4}$. **C** $\dfrac{25\pi\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{25\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Ta có: SAB là tam giác cân tại S và góc ASB bằng 120°.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{1}{2}SA^2 \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 5\sqrt{2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O có: $SO = SA \cdot cos 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}; OA = SA \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

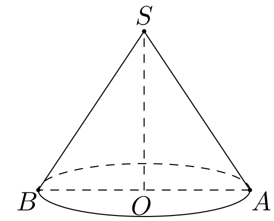
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{125\pi\sqrt{2}}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 29. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác vuông cân có diện tích bằng $\dfrac{9}{2}$. Diện tích toàn phần của khối nón đã cho bằng

A $\pi \cdot \dfrac{6 + 3\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{9\pi}{2}$. **C** $\dfrac{9\pi\sqrt{2}}{2}$. **D** $\pi \cdot \dfrac{9 + 9\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Ta có: SAB là tam giác vuông cân tại S.

$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB = \frac{1}{2}SA^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow SA = 3.$

Xét ΔSAB vuông tại S ta có: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

$r = OA = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

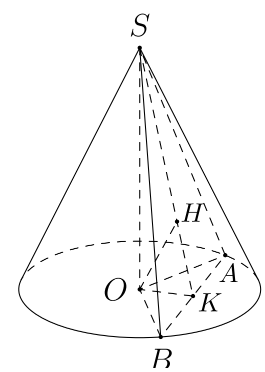
Vậy $S_{tp} = \pi r(l + r) = \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \pi \cdot \frac{9 + 9\sqrt{2}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 30. Cho hình nón có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 4. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\sqrt{3}$. Diện tích của thiết diện bằng

A $4\sqrt{3}$. **B** 4. **C** 8. **D** 16.

Lời giải.



Gọi thiết diện đã cho là tam giác SAB; O là tâm của đường tròn đáy hình nón. Gọi K là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên SK.

Ta có: $OH = \sqrt{3}$ và SAB là tam giác cân tại S.

Xét ΔSOK vuông tại O ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{2^2} \Rightarrow$ $OK = 2\sqrt{3}$.

Xét ΔSOK vuông tại O ta có: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.

Xét ΔOAK vuông tại K ta có: $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$.

$AB = 2AK = 4$.

Vậy $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}SK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

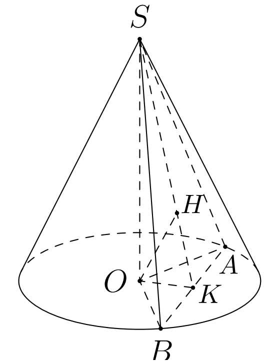
Chọn phương án C

Câu 31. Cho hình nón có chiều cao bằng $8\sqrt{2}$ và bán kính đáy bằng 5. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. Diện tích của thiết diện bằng

A 18. **B** 72. **C** 36. **D** 16.

Lời giải.

Gọi thiết diện đã cho là tam giác SAB; O là tâm của đường tròn đáy hình nón. Gọi K là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên SK.



Ta có: $OH = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ và SAB là tam giác cân tại S.

Xét ΔSOK vuông tại O ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2} - \dfrac{1}{(8\sqrt{2})^2} \Rightarrow OK = 4$.

Xét ΔSOK vuông tại O ta có: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 4^2} = 12$.

Xét ΔOAK vuông tại K ta có: $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$AB = 2AK = 6$.

Vậy $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2}SK \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$.

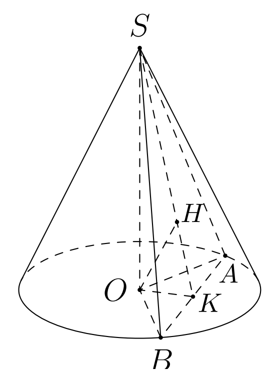
Chọn phương án C

Câu 32. Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $16\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện bằng

A 3. **B** $2\sqrt{3}$. **C** 9. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $h = SO = 6$ và SAB là tam giác đều.



$S_{\triangle SAB} = \dfrac{SA^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow SA = 8$.

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$.

Xét ΔOAK vuông tại K ta có:

$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{OA^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - \left(\dfrac{8}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$.

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{(2\sqrt{3})^2} \Rightarrow OH = 3$.

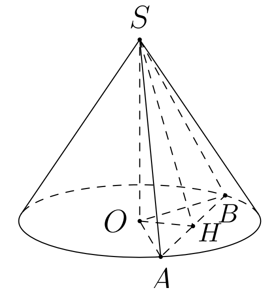
Vậy $OH = 3$.

Chọn phương án A

Câu 33. Cho hình nón có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết khoảng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng $3\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A $27\pi\sqrt{3}$. **B** $54\pi\sqrt{3}$. **C** $108\pi\sqrt{3}$. **D** 54π.

Lời giải.



Ta có: $\mathrm{d}(AB; SO) = OH = 3\sqrt{3}$; SAB là tam giác vuông cân và $\widehat{OSB} = 60^\circ$.

Xét ΔSAB vuông tại S ta có: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = SB \cdot \sqrt{2} \Rightarrow HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $OB = SB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{SB\sqrt{3}}{2}$ (1).

Xét ΔOHB vuông tại H ta có: $OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{SB\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{SB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{27 + \dfrac{SB^2}{2}} \Leftrightarrow SB = 6\sqrt{3} \Rightarrow OB = 9$.

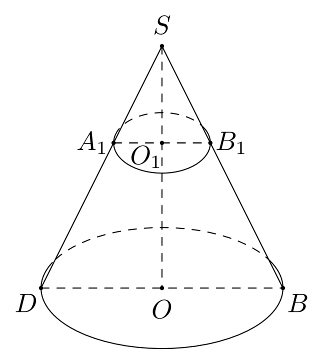
Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} = 54\pi\sqrt{3}$.

Chọn phương án B

Câu 34. Cho hình nón có bán kính đáy bằng R và chiều cao SO. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \dfrac{1}{3}SO$. Gọi V là thể tích của khối nón và V_1 là thể tích của khối nón cụt giới hạn bởi mặt phẳng (P) và đáy của hình nón. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ bằng

A $\dfrac{26}{27}$. **B** $\dfrac{1}{9}$. **C** $\dfrac{1}{27}$. **D** $\dfrac{8}{9}$.

Lời giải.



Ta có: $\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB \Rightarrow \dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{O_1B_1}{OB} = \dfrac{1}{3}$.

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm O_1.

Khi đó $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot O_1B_1^2 \cdot SO_1}{\frac{1}{3}OB^2 \cdot SO} = \left(\dfrac{O_1B_1}{OB}\right)^2 \cdot \dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{1}{27}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V - V_2}{V} = \dfrac{26}{27}$.

Chọn phương án A

Câu 35. Cho hình nón có chiều cao $SO = 7$. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \dfrac{1}{3}SO$ được thiết diện có diện tích bằng 16π. Thể tích của khối nón đã cho là

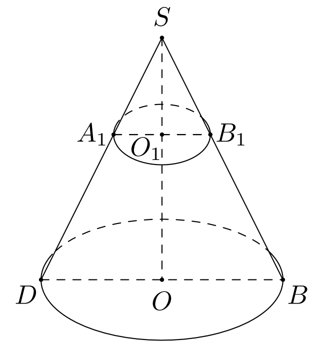
A 28π. **B** 84π. **C** 588π. **D** 336π.

Lời giải.

Ta có: $SO = 7$ và $O_1B_1 = 4$.

$\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB \Rightarrow \dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{O_1B_1}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{SO \cdot O_1B_1}{SO_1} = \dfrac{3 \cdot 4}{1} = 12$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi OB^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 7 = 336\pi$.



Chọn phương án (D)

Câu 36. Cho hình tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $CA = 2a; SA = a\sqrt{5}$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S và vuông góc với đáy. Thể tích của khối nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

(A) $2\pi a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $SO \perp AB \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

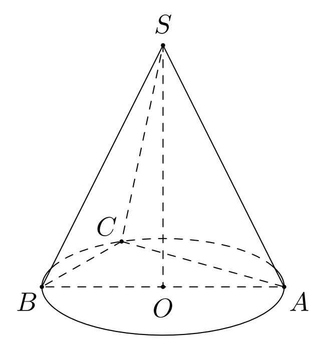
ΔABC vuông cân tại $C \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm O của AB.

Xét ΔABC vuông tại C ta có: $AB = \sqrt{CB^2 + CA^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra $OA = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(a\sqrt{2})^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn phương án (D)

Câu 37. Cho hình nón chiều cao bằng $2a$. Thiết diện song song và cách mặt đáy một đoạn bằng a có diện tích bằng $\dfrac{9}{4}\pi a^2$. Diện tích xung quanh của hình nón là

(A) $6\pi a^2\sqrt{13}$. (B) $3\pi a^2\sqrt{13}$. (C) $6\pi a^2$. (D) $12\pi a^3$.

Lời giải.

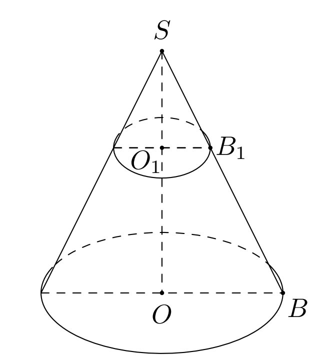
Ta có: $O_1O = a$ và $O_1B_1 = \dfrac{3a}{2}$.

$SO_1 = SO - O_1O = a$.

$\Delta SO_1B_1 \sim \Delta SOB \Rightarrow \dfrac{SO_1}{SO} = \dfrac{O_1B_1}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{SO \cdot O_1B_1}{SO_1} = \dfrac{2a \cdot \dfrac{3a}{2}}{a} = 3a$.

Xét ΔSOB vuông tại O ta có: $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{(2a)^2 + (3a)^2} = a\sqrt{13}$.

Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 3a \cdot a\sqrt{13} = 3\pi a^2\sqrt{13}$.



Chọn phương án (B)

Câu 38. Cho hình nón có chiều cao bằng 5 và độ dài đường sinh bằng 8. Thể tích của khối trụ có đường cao trùng với đường cao của hình nón và một đáy trùng với đáy của hình nón là

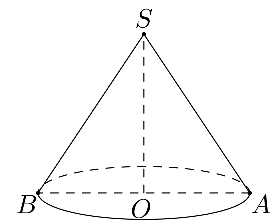
(A) 195π. (B) $5\pi\sqrt{39}$. (C) $\dfrac{5\pi\sqrt{39}}{3}$. (D) $16\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $h = SO = 5; l = SA = 8$.

Xét ΔSOA vuông tại O ta có: $r = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (\sqrt{39})^2 \cdot 5 = 195\pi$.



Chọn phương án (A)

Câu 39. Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao bằng 4 và đáy là hình tròn tâm O, bán kính bằng 3. Một mặt phẳng (α) qua S cắt đường tròn đáy của hình nón (N) tại hai điểm A, B với $AB = 5$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

(A) $\dfrac{176}{75}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{33}}{44}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{33}}{15}$. (D) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên SK. $(SOK) \perp (SAB)$.

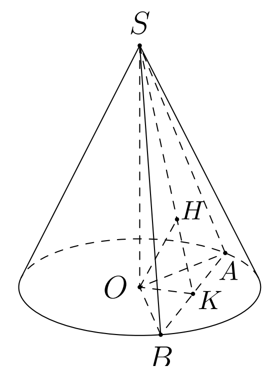
Suy ra $OH \perp (SAB)$.

Ta có: $h = SO = 4; r = OA = 3$ và SAB là tam giác cân.

$AK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Xét ΔOAK vuông tại K ta có: $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{4^2} \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{33}}{15}$.



Vậy $\mathrm{d}\left(O; (\alpha)\right) = OH = \dfrac{4\sqrt{33}}{15}$.

Chọn phương án (C)

Câu 40. Cho hình tứ diện đều $SABC$ cạnh a. Thể tích của khối nón nội tiếp khối tứ diện đã cho là

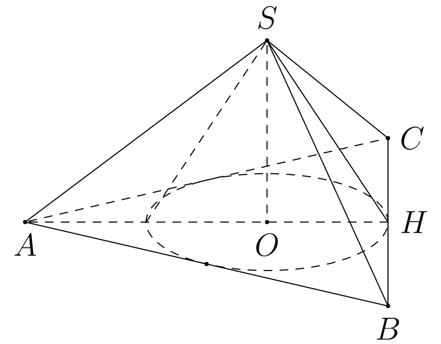
(A) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$. (B) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{36}$. (C) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}$. (D) $\dfrac{\pi a^3}{36}$.

Lời giải.

Ta có $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$r = OH = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$.



Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. B	5. C	6. A	7. C	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. D	14. A	15. B	16. C	17. C	18. A	19. A	20. C
21. B	22. C	23. D	24. A	25. A	26. B	27. A	28. B	29. D	30. C
31. C	32. A	33. B	34. A	35. D	36. D	37. B	38. A	39. C	40. A