

DẠNG 23.**LIÊN QUAN GIAO ĐIỂM TỪ HAI ĐỒ THỊ****1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Định lý: Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số điểm chung của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$: cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ thu được từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, đồng thời xóa bỏ phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành.

Đồ thị hàm $y = f(|x|)$: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ thu được từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía bên phải trục tung và lấy đối xứng phần đồ thị ở bên phải trục tung qua trục tung, đồng thời xóa bỏ phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở bên trái trục tung.

Tập giá trị của hàm lượng giác $y = \sin x; y = \cos x$ là $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			1		0		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

(A) 2.

(B) 0.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dựa vào sự tương giao của hai đồ thị để tìm số nghiệm của phương trình khi cho trước bảng biến thiên của hàm số.

B1: Biến đổi phương trình tương đương với $f(x) = \frac{2}{3}$.

B2: Vẽ đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ cắt ngang qua bảng biến thiên.

B3: Xác định được số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{2}{3}$, từ đó kết luận về số nghiệm của phương trình.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			1		0		$+\infty$

$y = -\frac{2}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = \frac{2}{3}$.

Ta thấy đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$	
		-4			-4			

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 10 = 0$ là

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$	

$y = -\frac{10}{3}$

-4

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = -\frac{10}{3}$.

Ta thấy đường thẳng $y = -\frac{10}{3}$ có bốn điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(B)**

Câu 2.

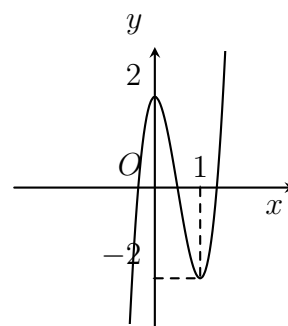
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 1 = 0$ là

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

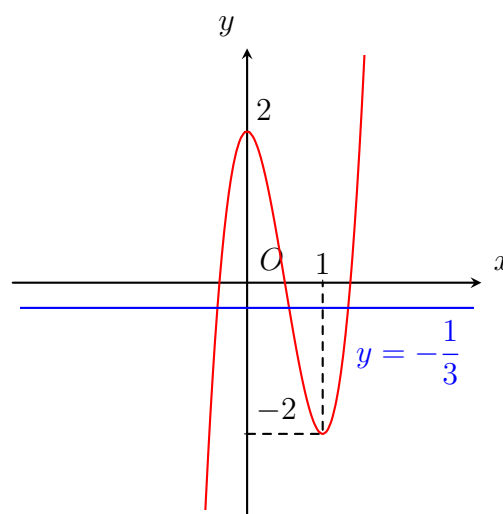
(D) 3.



Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = -\frac{1}{3}$.

Ta thấy đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$ có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.



Chọn phương án **(D)**

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - e = 0$ là

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = \frac{e}{3}$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $f(x) = \frac{e}{3}$ là số giao điểm của hai đồ thị (C): $y = f(x)$ và (d): $y = \frac{e}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng $y = \frac{e}{3}$ có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Do đó phương trình $3f(x) - e = 0$ có 3 nghiệm.

Chọn phương án (C)

Câu 4.

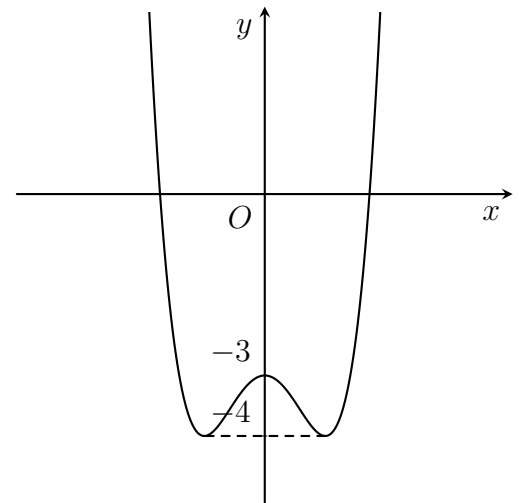
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(x) - m + 1 = 0$ với $m > 4$ là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 1.



Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = m - 1$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $f(x) = m - 1$ là số giao điểm của hai đồ thị (C): $y = f(x)$ và (d): $y = m - 1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng $y = m - 1 > 3$ có hai điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Do đó phương trình $f(x) - m + 1 = 0$ với $m > 4$ có 2 nghiệm.

Chọn phương án (A)

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-3	$+\infty$	2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 3 = 0$ là

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số: $y = g(x) = |f(x)|$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
		3		2		

Phương trình đã cho tương đương với $|f(x)| = 3$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $|f(x)| = 3$ là số giao điểm của hai đồ thị (C): $y = |f(x)|$ và (d): $y = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng $y = 3$ có 3 điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án (B)

Câu 6.

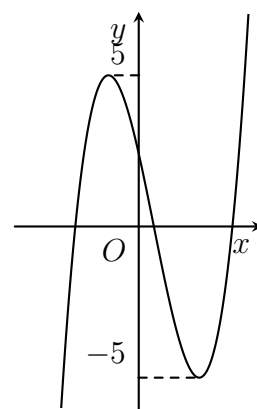
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau. Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 2m + 1 = 0$ với $\frac{1}{2} < m < 3$ là

(A) 5.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 3.



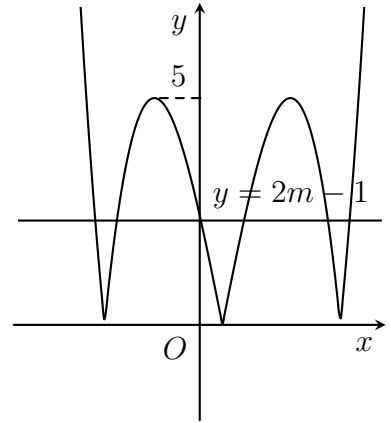
Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số (C): $y = |f(x)|$ Phương trình tương đương $|f(x)| = 2m - 1$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $|f(x)| = 2m - 1$ là số giao điểm của hai đồ thị (C): $y = |f(x)|$ và (d): $y = 2m - 1$.

Ta có $\frac{1}{2} < m < 3 \Rightarrow 0 < 2m - 1 < 5$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng (d): $y = 2m - 1$ có 6 điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = |f(x)| \Rightarrow$ phương trình $|f(x)| = 2m - 1$ có 6 nghiệm phân biệt.



Chọn phương án **C**

Câu 7.

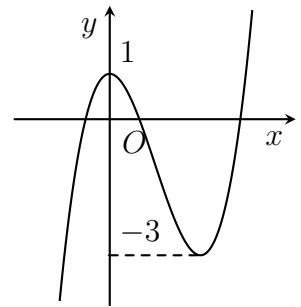
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $3f(|x|) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A 3.

B 2.

C 4.

D 1.



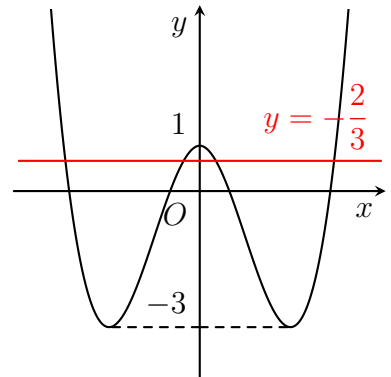
Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số (C): $y = f(|x|)$ như sau. Phương trình đã cho tương đương với $f(|x|) = \frac{2}{3}$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $f(|x|) = \frac{2}{3}$ là số giao điểm của hai đồ thị (C) $y = f(|x|)$ và (d): $y = \frac{2}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ có bốn điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số (C): $y = f(|x|) \Rightarrow f(|x|) = \frac{2}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**



Câu 8. Cho hàm số: $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$\frac{22}{27}$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(|x|) - 1 = 0$ là

A 1.

B 4.

C 3.

D 0.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $f(|x|) = \frac{1}{2}$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình: $f(|x|) = \frac{1}{2}$ là số giao điểm của hai đồ thị $(C)y = f(|x|)$ và

$(d): y = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x) = f(|x|)$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{22}{27}$	2	$\frac{22}{27}$		$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $(C): y = f(|x|)$.

Vậy phương trình $2f(|x|) - 1 = 0$ không có nghiệm.

Chọn phương án **(D)**

Câu 9.

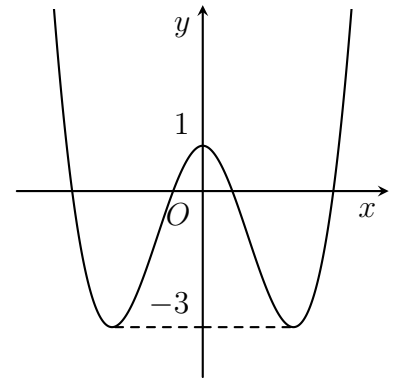
Cho hàm số: $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{1 + f(x)}{3 + 2f(x)} = 2$ là

(A) 2.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 5.

**Lời giải.**

Ta có $\frac{1 + f(x)}{3 + 2f(x)} = 2 \Rightarrow 2(3 + 2f(x)) = 1 + f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{-5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -\frac{5}{3}$ tại bốn điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Chọn phương án **(B)**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{|f(x)| - 1}{|f(x)| + 1} = \frac{1}{4}$.

Ⓐ 6.

Ⓑ 5.

Ⓒ 4.

Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $\frac{|f(x)| - 1}{|f(x)| + 1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(|f(x)| - 1) = 1 + |f(x)| \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{5}{3}$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 với $x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	2	x_3	$+\infty$	
y'	-	+	0	-	+	0	-	+
y	$+\infty$		2		2		$+\infty$	

$y = \frac{5}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = g(x) = |f(x)|$, ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ tại sáu điểm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$			9		-3	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 9 = 0$ là

Ⓐ 4.

Ⓑ $I = 3$.

Ⓒ 5.

Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $f^2(x) - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ f(x) = -3 \end{cases}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$, phương trình $f(x) = -3$ có 2 nghiệm phân biệt, phương trình $f(x) = 3$ có 3 nghiệm phân biệt (khác 2 nghiệm trên).

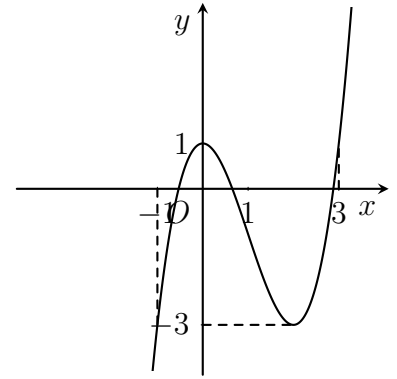
Vậy số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 9 = 0$ là 5.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 12.

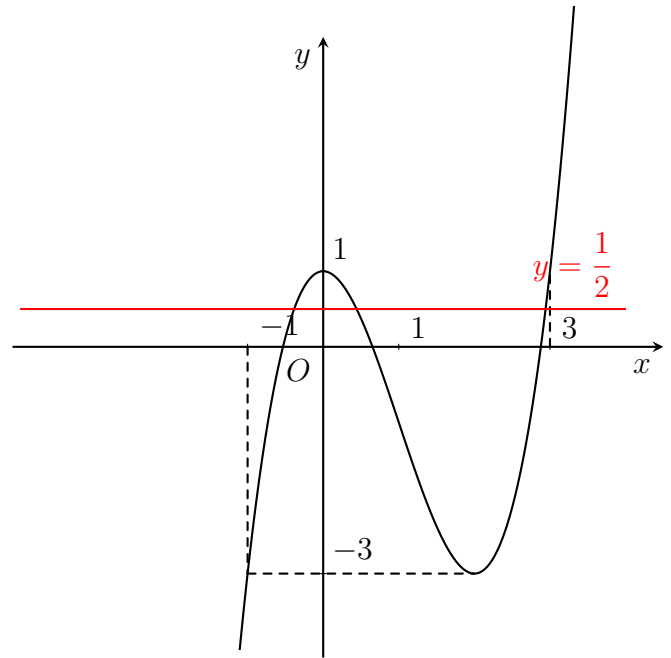
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi m là số nghiệm của phương trình $2f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $m = 6$. (B) $m = 8$. (C) $m = 7$. (D) $m = 9$.



Lời giải.

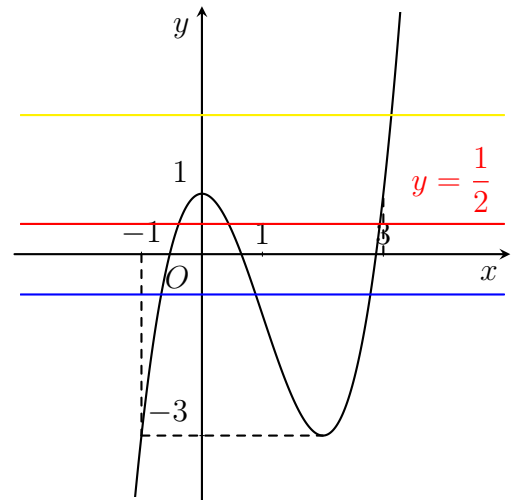
Đặt $f(x) = u$ khi đó nghiệm của phương trình $2f(f(x)) = 1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.



Dựa vào đồ thị ta có $f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = u_1 \\ f(x) = u_2 \text{ với } u_1 \in (-1; 0), \\ f(x) = u_3 \end{cases}$

$u_2 \in (0; 1), u_3 \in (1; 3)$.

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y = u_1, y = u_2, y = u_3$. Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ có 7 nghiệm.



Chọn phương án (C)

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Phương trình $f(x^2 - 3) = 5$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 2.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 - 3 \Rightarrow$ phương trình $f(x^2 - 3) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = 3 + u_1 > 6 \end{cases}, u_1 > 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3 + u_1} \end{cases} \Rightarrow$ phương trình: $f(x^2 - 3) = 5$ có hai nghiệm âm phân biệt.

Chọn phương án (D)

Câu 14.

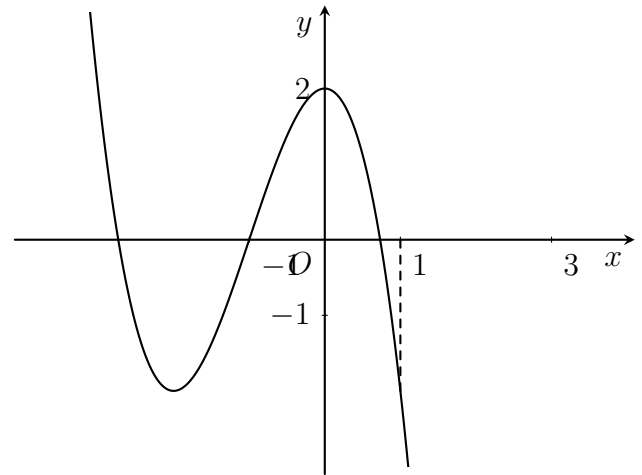
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f(\cos x - 1) = 1$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.



Lời giải.

Đặt: $u = \cos x - 1; u \in [-2; 0]$, phương trình trở thành: $f(u) = 1$.

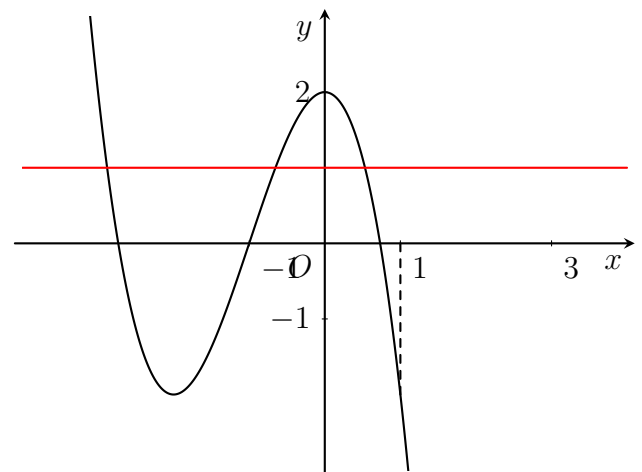
Từ đồ thị hàm số ta thấy: $f(u) = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u = u_1 \in (-1; 0) (TM) \\ u = u_2 \in (0; 1) (L) \\ u = u \end{cases}$$

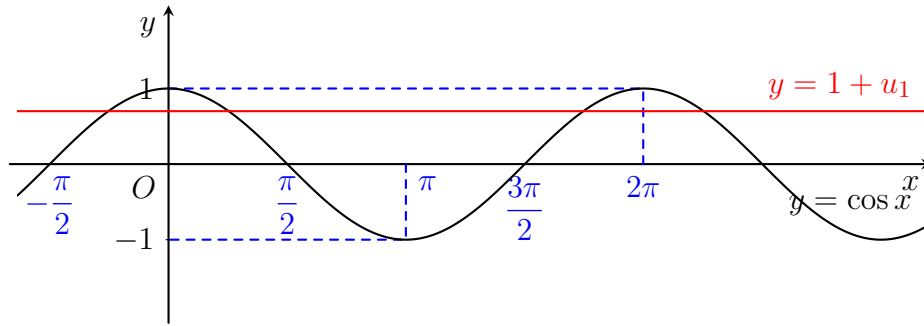
$$u = u_2 \in (0; 1) (L)$$

$$u = u \quad 3 < -2(L).$$

Với $u = u_1 \in (-1; 0) \Rightarrow \cos x = 1 + u_1 \in (0; 1)$.



Đồ thị hàm $y = \cos x; x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$:



Từ đồ thị ta thấy phương trình $\cos x = 1 + u_1 \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Chọn phương án **(A)**

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

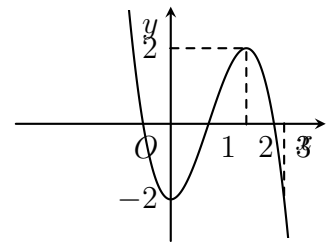
Số nghiệm của phương trình $f\left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 1$ là

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 4.



Lời giải.

Đặt $t = 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$, suy ra $t \geq 1$, ta có phương trình $f(t) = 1$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t) = 1$ có 3 nghiệm t_1, t_2, t_3 với $t_1 < 1 < t_2 < t_3$.

Do $t \geq 1 \Rightarrow$ phương trình $f(t) = 1$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$\Rightarrow f\left(2x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

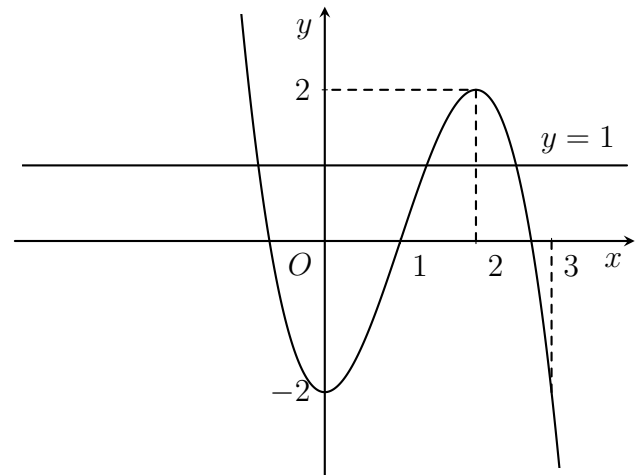
$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = t_2; t_2 \in (1; 2) \\ 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} = t_3; t_3 \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{t_2 - 1}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \right. (a)$$

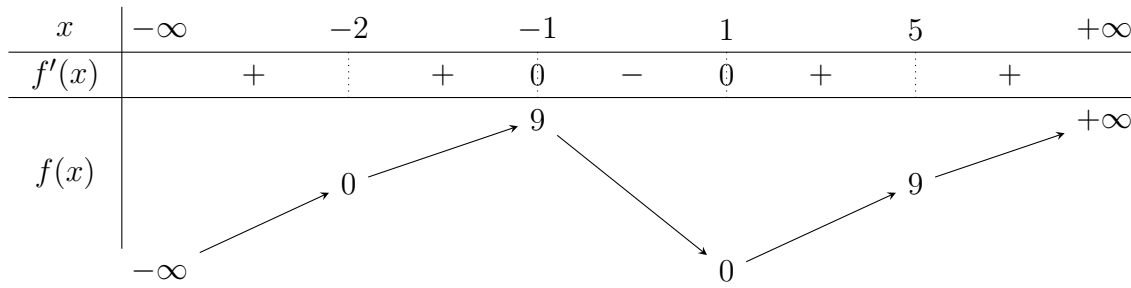
$$\left. \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{t_3 - 1}{2} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \right] (b)$$

Ta thấy từng phương trình (a); (b) cho ta hai nghiệm phân biệt và các nghiệm của hai phương trình khác nhau nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(D)**



Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2 - 3 \sin x) = f(|m - 2|)$ có nghiệm thực?

(A) 11.

(B) 7.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = 2 - 3 \sin x \Rightarrow t \in [-1; 5], \forall x \in \mathbb{R}$.

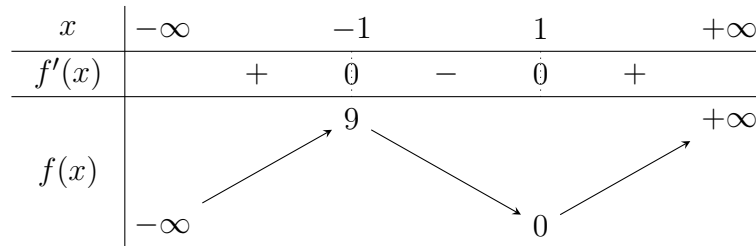
Do đó phương trình $f(2 - 3 \sin x) = f(|m - 2|)$ trở thành: $f(t) = f(|m - 2|)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: phương trình $f(t) = f(|m - 2|)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(|m - 2|) \leq 9 \Leftrightarrow -2 \leq |m - 2| \leq 5 \Leftrightarrow |m - 2| \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 7$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \Rightarrow$ có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án (A)

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi phương trình $|f(3 - 2x) - 2| = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 5.

Lời giải.

Đặt $t = 3 - 2x; t \in \mathbb{R}$, phương trình $|f(3 - 2x) - 2| = 2$ trở thành $|f(t) - 2| = 2$.

Xét phương trình $f(x) = m$.

— Nếu $\begin{cases} m < 0 \\ m > 9 \end{cases}$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

— Nếu $\begin{cases} m = 0 \\ m = 9 \end{cases}$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

— Nếu $0 < m < 9$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $|f(t) - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 2 = -2 \\ f(t) - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 0 \\ f(t) = 4. \end{cases}$

Từ kết quả trên ta suy ra $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = t_1 \in (-\infty; -1) \end{cases};$

$$f(t) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ t = t_3 \in (-1; 1) \\ t = t_4 \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} t = t_1, t_1 \in (-\infty; -1) \\ t = t_2, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ t = t_3, t_3 \in (-1; 1) \\ t = 1 \\ t = t_4, t_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x = t_1, t_1 \in (-\infty; -1) \\ 2 - 3x = t_2, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ 2 - 3x = t_3, t_3 \in (-1; 1) \\ 2 - 3x = 1 \\ 2 - 3x = t_4, t_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - t_1}{3}, t_1 \in (-\infty; -1) \\ x = \frac{2 - t_2}{3}, t_2 \in (-\infty; -1) (t_2 \neq t_1) \\ x = \frac{2 - t_3}{3}, t_3 \in (-1; 1) \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2 - t_4}{3}, t_4 \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Nhận xét các nghiệm trên đều khác nhau.

Vậy phương trình $|f(3 - 2x) - 2| = 2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **(D)**

Câu 18.

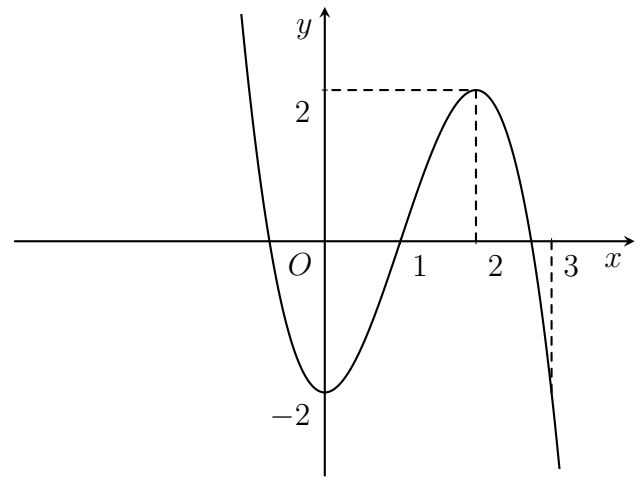
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để phương trình $|f(|x|)| = \log_{\frac{1}{2}} m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

(A) $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

(B) $m > \frac{1}{4}$.

(C) $m < \frac{1}{4}$.

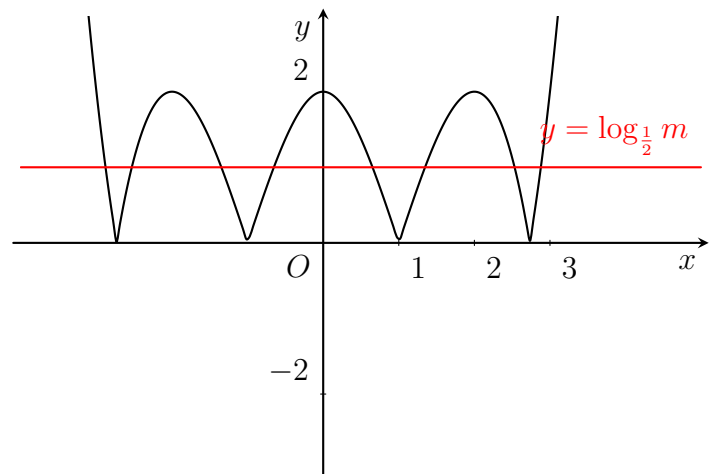
(D) $0 < m < \frac{1}{4}$.



Lời giải.

Ta có số nghiệm của phương trình $|f(|x|)| = \log_{\frac{1}{2}} m$ là số giao điểm của hai đồ thị $(C): y = |f(|x|)|$ và đường thẳng $d: y = \log_{\frac{1}{2}} m$.

Ta có đồ thị $(C): y = |f(|x|)|$ như hình vẽ. Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đường thẳng $d: y = \log_{\frac{1}{2}} m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = |f(|x|)|$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} m > 2 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$.

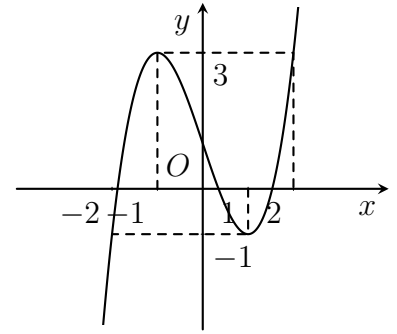


Chọn phương án **(D)**

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- (A) 9. (B) 12. (C) 6. (D) 3.



Lời giải.

Ta có: $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(f(x) - 1) = 0. \end{cases}$

TH1: $f(x) = 0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $-2 < x_1 < -1; 0 < x_2 < 1; 1 < x_3 < 2$.

TH2: $f(f(x) - 1) = 0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a_1, a_1 \in (-2; -1) \\ f(x) - 1 = a_2, a_2 \in (0; 1) \\ f(x) - 1 = a_3, a_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + a_1 \in (-1; 0) \\ f(x) = 1 + a_2 \in (1; 2) \\ f(x) = 1 + a_3 \in (2; 3). \end{cases}$

Xét phương trình $f(x) = a$, từ đồ thị ta nhận thấy:

Nếu $\begin{cases} a < -1 \\ a > 3 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Nếu $\begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Nếu $-1 < a < 3$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Dựa vào kết quả trên suy ra phương trình: $f(f(x) - 1) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt đều khác 3 nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$.

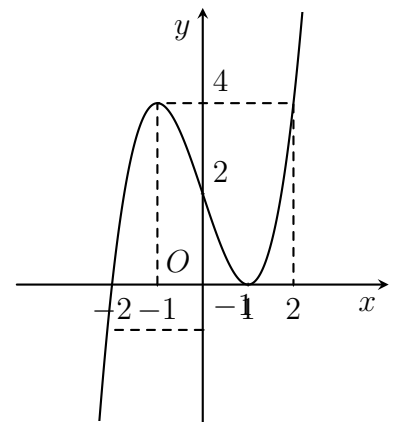
Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(x) \cdot f(f(x) - 1) = 0$ là 12 nghiệm.

Chọn phương án (B)

Câu 20.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Tìm số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

- (A) 8. (B) 4. (C) 6. (D) 5.



Lời giải.

Ta có: $g(x) = f(x) \cdot f[f(x)]$.

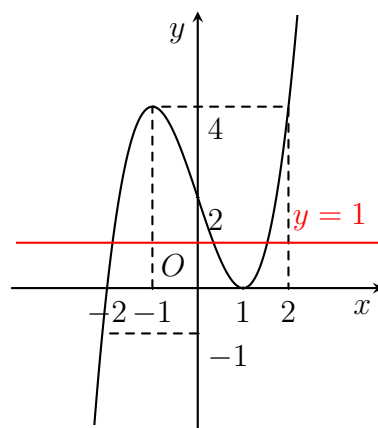
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f[f(x)] = 0(2). \end{cases}$$

TH1: Xét phương trình $f(x) = 0$. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f(x) = 0(1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

TH2: Xét phương trình $f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 1. \end{cases}$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì $f(x) = -1$ có nghiệm duy nhất $x_3 < -2$.

Xét phương trình $f(x) = 1$, dựa vào đồ thị ta thấy số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 1$. Từ đồ thị trên ta thấy đường thẳng $d: y = 1$ cắt đồ thị hàm số: $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-2 < x_4 < -1$; $0 < x_5 < 1$; $1 < x_6 < 2$
 $\Rightarrow$ phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $g(x) = 0$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

 BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. A	5. B	6. C	7. C	8. D	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. A	15. D	16. A	17. D	18. D	19. B	20. C