DẠNG 41. LÔGARIT

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) **Định nghĩa logarit:**
Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1, \alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

b) **Các tính chất logarit:** Cho ba số thực dương a, b, c với $0 < a, b, c \neq 1$.
$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$; $\log_a b - \log_a c = \dfrac{\log_a b}{\log_a c}$.
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_a a}$; $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c\cdot$

c) **Phương trình mũ cơ bản nhất** $\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (0 < a \neq 1; b > 0)\,.}$

d) **Cách giải phương trình mũ có dạng** $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$ trong đó $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ là hệ số, cơ số $0 < a, b \neq 1$.
B1: Biến đổi phương trình về dạng: $2\alpha_1 \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\dfrac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0 \quad (*)$.
B2: Đặt ẩn phụ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = t, t > 0$, phương trình $(*)$ trở thành $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.
B3: Giải tìm t thỏa mãn $t > 0$.
B4: Giải phương trình mũ cơ bản $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = t$. Tìm được x.

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\log_2 \dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. PHÂN TÍCH ĐỀ: Đây là dạng tính toán liên quan đến logarit dùng định nghĩa, đẳng thức. Tìm 2 ẩn khi cho 2 phương trình.
2. XÂY DỰNG CHƯƠNG TRÌNH GIẢI.
B1: Đặt $m = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y)$, biểu thị $x, y, 2x + y$ theo m.
B2: Lập phương trình ẩn m. Giải phương trình tìm m.
B3: Lập tỉ số $\dfrac{x}{y}$. Từ đó suy ra giá trị của $\dfrac{x}{y}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

$\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y) = m \Rightarrow \begin{cases} x = 9^m \\ y = 6^m \\ 2x + y = 4^m \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 9^m + 6^m = 4^m \Leftrightarrow 2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2m} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^m - 1 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^m = \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{9^m}{6^m} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^m \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án B

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **C** $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

$\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b) = m \Rightarrow \begin{cases} a = 4^m \\ b = 6^m \\ a + b = 9^m \end{cases} \Rightarrow 4^m + 6^m = 9^m \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2m} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^m - 1 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{6}\right)^m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn phương án B

Câu 2. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$ Tính tỉ số $T = \dfrac{a}{b}$

A $T = \dfrac{5}{4}$. **B** $T = \dfrac{2}{3}$. **C** $T = \dfrac{3}{2}$. **D** $T = \dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

$\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25}\dfrac{2a-b}{3} = m \Rightarrow \begin{cases} a = 16^m \\ b = 20^m \\ \dfrac{2a-b}{3} = 25^m \end{cases} \Rightarrow 2{\cdot}16^m - 20^m = 3{\cdot}25^m \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2m} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^m - 3 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^m = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{16}{20}\right)^m = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow T = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn phương án C

Câu 3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x+y)$. Tính tỉ số $\dfrac{y}{x}$

A $\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x+y) = m \Rightarrow \begin{cases} x = (\sqrt{10})^m \\ y = (\sqrt{15})^m \\ x + y = 5^m \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{10})^m + (\sqrt{15})^m = 5^m \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{m}{2}} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{m}{2}} = 1 (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^t + \left(\dfrac{3}{5}\right)^t \Rightarrow f(t) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^t \ln\dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^t \ln\dfrac{3}{5} < 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình $f(t)=0$ có duy nhất 1 nghiệm.
Từ (1) ta có $f(m)=f(2)$ nên $m=2$ là một nghiệm của (1) nên (1) có nghiệm duy nhất $m=2$.
Do đó $\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}\right)^2=\dfrac{3}{2}$.
Chọn phương án A

Câu 4. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_4 a=\log_{25} b=\log\dfrac{4b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$?

A) $\dfrac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$. B) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. C) $\dfrac{a}{b}=6+2\sqrt{5}$. D) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải.

Đặt $\log_4 a=\log_{25} b=\log\dfrac{4b-a}{2}=t$, ta có:

$$\begin{cases} a=4^t \\ b=25^t \\ \dfrac{4b-a}{2}=10^t \end{cases} \Rightarrow 4\cdot 25^t-4^t=2\cdot 10^t \Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{4}{25}\right)^t=2\cdot\left(\dfrac{10}{25}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2t}+2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^t-4=0.$$

Đặt $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t=y>0$, ta có $y^2+2y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1-\sqrt{5} \\ y=-1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow y=-1+\sqrt{5}$.

Từ đó $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t=-1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{4^t}{25^t}=(\sqrt{5}-1)^2 \Rightarrow \dfrac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$.

Chọn phương án A

Câu 5. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{20}^a=\log_8^b=\log_{125}(5a+12b)$. Tính $P=\dfrac{a+b}{b}$.

A) $P=3$. B) $P=4$. C) $P=2$. D) $P=8$.

Lời giải.

Đặt $\log_{20}^a=\log_8^b=\log_{125}(5a+12b)=x$.

Có $\begin{cases} a=20^x \\ b=8^x \\ 5a+12b=125^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x & (1) \\ 5\cdot 20^x+12\cdot 8^x=125^x & (2). \end{cases}$

$$(2)\Leftrightarrow 5\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^x+12=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x}-5\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-12=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^x=3.$$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=3$.

Suy ra $P=\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a}{b}+1=4$.

Chọn phương án B

Câu 6. Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $\log_3 a=\log_6 b=\log_2(a+b)$. Giá trị $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ bằng

A) 18. B) 45. C) 27. D) 36.

Lời giải.

Đặt $t=\log_3 a=\log_6 b=\log_2(a+b)\Rightarrow\begin{cases}a=3^t\\ b=6^t\\ a+b=2^t\end{cases}\Rightarrow 3^t+6^t=2^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t+3^t=1.\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^t+3^t$ trên $\mathbb{R}$, có $f(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^t\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3^t\cdot\ln 3>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $(1)\Leftrightarrow f(t)=f(-1)\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=45.$

Chọn phương án B

Câu 7. Cho $\log_{27}5=a;\log_8 7=b;\log_2 3=c$. Giá trị của $\log_{12}35$ bằng

(A) $\frac{3b+2ac}{c+3}$. (B) $\frac{3b+2ac}{c+2}$. (C) $\frac{3b+3ac}{c+1}$. (D) $\frac{3b+3ac}{c+2}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{27}5=a\Rightarrow\log_3 5=3a,\log_8 7=b\Rightarrow\log_2 7=3b$.

$\log_2 5=\log_2 3\cdot\log_3 5=3ac$, $\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}=\frac{3b}{c}$.

$\log_{12}35=\log_{12}7+\log_{12}5=\frac{1}{\log_7 12}+\frac{1}{\log_5 12}=\frac{1}{2\log_7 2+\log_7 3}+\frac{1}{2\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_3 7}}+\frac{1}{2\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_3 5}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3b}+\frac{c}{3b}}+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3ac}+\frac{1}{3a}}=\frac{3b+3ac}{c+2}.$

Chọn phương án D

Câu 8. Cho a,b,c là ba số thực dương, khác 1 và $abc\neq 1$. Biết $\log_a 3=2$, $\log_b 3=\frac{1}{4}$ và $\log_{abc}3=\frac{2}{15}$. Khi đó, giá trị của $\log_c 3$ bằng bao nhiêu?

(A) $\log_c 3=\frac{1}{2}$. (B) $\log_c 3=2$. (C) $\log_c 3=3$. (D) $\log_c 3=\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a 3=2\Rightarrow\log_3 a=\frac{1}{2}$, $\log_b 3=\frac{1}{4}\Rightarrow\log_3 b=4$.

Khi đó ta có $\log_{abc}3=\frac{2}{15}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c}=\frac{2}{15}$

$\Leftrightarrow\frac{2}{9+2\log_3 c}=\frac{2}{15}\Leftrightarrow 4\log_3 c+18=30\Leftrightarrow\log_3 c=3\Leftrightarrow\log_c 3=\frac{1}{3}$.

Vậy $\log_c 3=\frac{1}{3}$.

Chọn phương án D

Câu 9. Cho $\log_3 a=log_4 b=log_{12}c=log_{13}(a+b+c)$. Giá trị $\log_{abc}144$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

(A) $(-1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(1;2)$. (D) $(2;3)$.

Lời giải.

Giả sử: $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12}=\log_{13}(a+b+c)=x$

Khi đó ta có: $\begin{cases} a = 3^x \\ b = 4^x \\ c = 12^x \\ a+b+c = 13^x \end{cases} \Rightarrow 3^x + 4^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{13}\right)^x + \left(\dfrac{4}{13}\right)^x + \left(\dfrac{12}{13}\right)^x = 1 \quad (*)$

Ta thấy $\left(\dfrac{3}{13}\right)^x + \left(\dfrac{4}{13}\right)^x + \left(\dfrac{12}{13}\right)^x$ là hàm liên tục nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 1$ nên (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$ hay $a = 9; b = 16, c = 144 \Rightarrow \log_{abc} 144 = \log_{9.16\cdot 144} 144 = \dfrac{1}{\log_{144} 144 \cdot 16 \cdot 9} \in (0;1)$.

Chọn phương án B

Câu 10. Cho x, y, z là các số thực dương tùy ý khác 1 và xyz khác 1. Đặt $a = \log_x y, b = \log_z y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\log_{xyz}\left(y^3z^2\right) = \dfrac{3ab+2b}{ab+a+b}$.
(B) $\log_{xyz}\left(y^3z^2\right) = \dfrac{3ab+2a}{a+b+1}$.
(C) $\log_{xyz}\left(y^3z^2\right) = \dfrac{3ab+2a}{ab+a+b}$.
(D) $\log_{xyz}\left(y^3z^2\right) = \dfrac{3ab+2b}{a+b+1}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_{xyz}\left(y^3z^2\right) = 3\log_{xyz} y + 2\log_{xyz} z$.

$= \dfrac{3}{\log_y(xyz)} + \dfrac{2}{\log_z(xyz)}$.

$= \dfrac{3}{\log_y x + \log_y z + 1} + \dfrac{2}{\log_z x + \log_z y + 1}$.

$= \dfrac{3}{\log_y x + \log_y z + 1} + \dfrac{2}{\log_z y \cdot \log_y x + \log_z y + 1}$.

$= \dfrac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + 1} + \dfrac{2}{\dfrac{b}{a} + b + 1} = \dfrac{3ab}{ab+a+b} + \dfrac{2a}{ab+a+b} = \dfrac{3ab+2a}{ab+a+b}$

Chọn phương án C

Câu 11. Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2, log_b(ca) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

(A) $\dfrac{6}{5}$.
(B) $\dfrac{8}{7}$.
(C) $\dfrac{10}{9}$.
(D) $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

$\log_a(bc) = 2 \Leftrightarrow bc = a^2$.

$log_b(ca) = 4 \Leftrightarrow ac = b^4$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{bc}{ac} = \dfrac{a^2}{b^4} \\ abc^2 = a^2b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = b^5 \\ c^2 = ab^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{\frac{3}{5}} \\ c = a^{\frac{7}{5}} \end{cases}$ (do $a, b, c > 0$).

Khi đó: $\log_c(ab) = \log_{a^{\frac{7}{5}}}\left(a \cdot a^{\frac{3}{5}}\right) = \log_{a^{\frac{7}{5}}}\left(a^{\frac{8}{5}}\right) = \dfrac{8}{7}$.

Chọn phương án B

Câu 12. Biết $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị $P = a + b$ là

(A) $P=14$. (B) $P=13$. (C) $P=15$. (D) $P=16$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{4x^2-4x+1}{x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)^2}{x}>0 \Leftrightarrow x>0, x\neq \dfrac{1}{2}$.

$\log_2 \dfrac{4x^2-4x+1}{x}=6x-4x^2 \Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2-\log_2 x=-(2x-1)^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_2(2x)+2x(1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f(t)=\dfrac{1}{\ln 2\cdot t}+1>0$ với $t>0$ suy ra $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Xét $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, từ (1) ta có $f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow(2x-1)^2=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}(l) \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}. \end{array}\right.$

Xét $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, từ (1) ta có $f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow(2x-1)^2=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}(l). \end{array}\right.$

Do đó, phương trình $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Suy ra $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}(9+\sqrt{5})$. Suy ra $a=9, b=5\Rightarrow P=a+b=14$.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Biết $a=\log_{30}10$, $b=\log_{30}150$ và $\log_{2000}15000=\dfrac{x_1a+y_1b+z_1}{x_2a+y_2b+z_2}$ với $x_1;y_1;z_1;x_2;y_2;z_2$ là các số nguyên, tính $S=\dfrac{x_1}{x_2}$.

(A) $S=\dfrac{1}{2}$. (B) $S=2$. (C) $S=\dfrac{2}{3}$. (D) $S=1$.

Lời giải.

Ta có $\log_{2000}15000=\dfrac{\log_{30}15000}{\log_{30}2000}=\dfrac{\log_{30}150+2\log_{30}10}{\log_{30}2+3\log_{30}10}\quad(1)$.

Ta có $a=\log_{30}10=\log_{30}5+\log_{30}2\Rightarrow\log_{30}2=a-\log_{30}5\quad(2)$.

$b=\log_{30}150=1+\log_{30}5\Rightarrow\log_{30}5=b-1$ thay vào (2) ta được $\log_{30}2=a-b+1$.

Ta có $\log_{2000}1500=\dfrac{b+2a}{a-b+1+3a}=\dfrac{2a+b}{4a-b+1}$.

Suy ra $S=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn phương án (A)

Câu 14. Cho các số thực dương x,y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y).\end{cases}$

Giá trị của x^2+xy-y^2 bằng

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

ĐK: $x > y$.

Ta có $\begin{cases} \log_x y = \log_y x \\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = \dfrac{1}{\log_x y} \\ \log_x(x-y) = \log_y(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x}(n) \\ x = y(l) \end{array}\right. \\ \log_x(x-y) = \log_{x^{-1}}(x+y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \log_x(x-y) + \log_x(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \log_x\left(x^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 2.$

Chọn phương án D

Câu 15. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = 100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

A 10^{164}. **B** 10^{100}. **C** 10^{200}. **D** 10^{144}.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{\log a} + \sqrt{\log b} + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = 100$

$\Leftrightarrow \log a + \log b + 2\sqrt{\log a} + 2\sqrt{\log b} = 200 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log a}+1\right)^2 + \left(\sqrt{\log b}+1\right)^2 = 202 = 81 + 121(*)$.

Mà $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương nên.

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\log a} + 1 = 9 \\ \sqrt{\log b} + 1 = 11 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\log a} + 1 = 11 \\ \sqrt{\log b} + 1 = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log a = 64 \\ \log b = 100 \end{cases} \\ \begin{cases} \log a = 100 \\ \log b = 64 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 10^{64} \\ b = 10^{100} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 10^{100} \\ b = 10^{64}. \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy: $P = ab = 10^{64} \cdot 10^{100} = 10^{164}$.

Chọn phương án A

Câu 16. Cho $\log_9 5 = a; \log_4 7 = b; \log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \dfrac{mb + nac}{pc + q}$. Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$

A 27. **B** 25. **C** 23. **D** 29.

Lời giải.

Ta có $\log_{24} 175 = \log_{24} 7 \cdot 5^2 = \log_{24} 7 + 2\log_{24} 5 = \dfrac{1}{\log_7 24} + \dfrac{2}{\log_5 24} =$.

$\dfrac{1}{\log_7 3 + \log_7 2^3} + \dfrac{2}{\log_5 3 + \log_5 2^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 7} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 5}} =$.

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7 \cdot \log_3 2} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 3 \cdot \log_3 5}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2b \cdot \dfrac{1}{c}} + \dfrac{3}{2b}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{2a} + \dfrac{3}{c \cdot 2a}} =$.

$\dfrac{1}{\dfrac{c}{2b} + \dfrac{3}{2b}} + \dfrac{2}{\dfrac{c}{2ac} + \dfrac{3}{2ac}} = \dfrac{2b}{c+3} + \dfrac{4ac}{c+3} = \dfrac{2b + 4ac}{c+3}$.

$A = m + 2n + 3p + 4q = 2 + 8 + 3 + 12 = 25$.

Chọn phương án B

Câu 17. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2-6y^2=xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

(A) $M=\dfrac{1}{4}$. (B) $M=1$. (C) $M=\dfrac{1}{2}$. (D) $M=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x^2-6y^2=xy \Leftrightarrow x^2-xy-6y^2=0 \quad (*)$.

Do x, y là các số thực dương lớn hơn 1 nên ta chia cả 2 vế của $(*)$ cho y^2 ta được

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=3\\ \dfrac{x}{y}=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3y(n)\\ x=-2y(l)\end{array}\right.$. Vậy $x=3y$ (1).

Mặt khác $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}12xy}{\log_{12}(x+3y)^2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có $M=\dfrac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2}=1$.

Chọn phương án (B)

Câu 18. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e))=2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

(A) 4. (B) 10. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $x_0=\log(\log e)$.

Có: $f(x_0)=a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6=2$.

Ta có $f(\log(\ln 10))=f\left(\log\left(\dfrac{1}{\log e}\right)\right)=f(-\log(\log e))=f(-x_0)$.

$f(-x_0)=a\ln\left(\sqrt{x_0^2+1}-x_0\right)+b\sin(-x_0)+6=-a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)-b\sin x_0+6$.

$=-\left[a\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+1}\right)+b\sin x_0+6\right]+12=-f(x_0)+12=10$.

Chọn phương án (B)

Câu 19. Cho $9^x+9^{-x}=14$ và $\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a\cdot b$.

(A) $P=10$. (B) $P=-45$. (C) $P=-10$. (D) $P=45$.

Lời giải.

Ta có

$9^x+9^{-x}=14 \Leftrightarrow 3^{2x}+2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-2x}+3^{-2x}=16$.

$\Leftrightarrow \left(3^x+3^{-x}\right)^2=16 \Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=4\cdot$

$\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3\cdot 3^x-3\cdot 3^{-x}}=\dfrac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3\cdot(3^x+3^{-x})}$.

$=\dfrac{6+3\cdot 4}{2-3\cdot 4}=-\dfrac{18}{10}\Rightarrow \dfrac{a}{b}=-\dfrac{9}{5}\Rightarrow ab=-45\cdot$

Chọn phương án (B)

Câu 20. Biết phương trình $27^x-27^{1-x}-16\left(3^x-\dfrac{3}{3^x}\right)+6=0$ có các nghiệm $x=a, x=\log_3 b$ và $x=\log_3 c$ với $a\in\mathbb{Z}, b>c>0$. Tỉ số $\dfrac{b}{c}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A $(3;+\infty)$. **B** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **C** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải.

Ta có

$27^x-27^{1-x}-16\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)+6=0\Leftrightarrow 3^{3x}-27\cdot 3^{-3x}-16\left(3^x-3\cdot 3^{-x}\right)+6=0(1)$.

Đặt $t=3^x-3\cdot 3^{-x}\Rightarrow t^3=3^{3x}-27\cdot 3^{-3x}-3\left(3^{3x}-3\cdot 3^{-3x}\right)\cdot 3^{3x}\cdot 3\cdot 3^{-3x}$.

$=3^{3x}-27\cdot 3^{-3x}-9\left(3^{3x}-3\cdot 3^{-3x}\right)$.

Khi đó (1) $\Rightarrow t^3-7t+6=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-3\cdot 3^{-x}=1\\3^x-3\cdot 3^{-x}=-3\\3^x-3\cdot 3^{-x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{2x}-3^x-3=0\\3^{2x}+3\cdot 3^x-3=0\\3^{2x}-2\cdot 3^x-3=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\\3^x=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\\3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\\x=\log_3\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{21}-3}\approx 2\cdot 9.$

Chọn phương án D

Câu 21. Cho hai số thực dương a,b thỏa $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A $\frac{1}{2}$. **B** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$

$\Rightarrow \begin{cases}a=4^t\\b=6^t\\a+b=9^t\end{cases}\Rightarrow 4^t+6^t=9^t\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\\left(\frac{2}{3}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(L).\end{array}\right.$

$\frac{a}{b}=\frac{4^t}{6^t}=\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn phương án D

Câu 22. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18\cdot 3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây.

đúng khi đánh giá về a?

A $(a-10)^2=1$. **B** $a=10^2$. **C** $a^2+a+1=2$. **D** $a=\frac{1}{100}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}-18=0$.

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}$, $t>0$.

Ta có $4t^2-t-18=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{9}{4}\\t=-2(L).\end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{100}$.
Vậy $a = \dfrac{1}{100}$.
Chọn phương án D

Câu 23. Tổng các nghiệm của phương trình sau $7^{x-1} = 6\log_7(6x-5) + 1$ bằng

A 2. B 3. C 1. D 10.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \dfrac{5}{6}$.
Đặt $y - 1 = \log_7(6x-5)$ thì ta có hệ phương trình.
$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1)+1 \\ y-1 = \log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y-5 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y$ (2).
Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ với $t > \dfrac{5}{6}$ thì $f(t) = 7^{t-1}\ln 7 + 6 > 0, \forall t > \dfrac{5}{6} \Rightarrow f(t)$ đồng biến nên.
(2) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ khi đó ta có phương trình $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$. (3).
Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$ với $x > \dfrac{5}{6}$ thì $g'(x) = 7^{x-1}(\ln 7) - 6 \Rightarrow g"(x) = 7^{x-1}(\ln 7)^2 > 0, \forall x > \dfrac{5}{6}$.
nên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có không quá hai nghiệm.
Mặt khác $g(1) = g(2) = 0$ nên $x = 1$ và $x = 2$ là 2 nghiệm của phương trình (3).
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.
Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là $1 + 2 = 3$.
Chọn phương án B

Câu 24. Bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$ có tập nghiệm là $S = [a; b] \cup [c; +\infty)$. Tính tổng $a + b + c$?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$.
Bất phương trình đã cho trở thành:
$t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-2x-1) \geq 0$.
TH1: $\begin{cases} t - 9 \geq 0 \\ t - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 9 \\ t - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9 (1) \\ 3^x - 2x - 1 \geq 0 (2). \end{cases}$
Xét bất phương trình (2):
Đặt $g(x) = 3^x - 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$.
$g(x) = 3^x \ln 3 - 2$.
Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g(x) = 0$, $x_0 > 0$.
Khi đó, $g(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.
Xét thấy, $g(x) = 0$ có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$g(x_0)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Ta lại có, (1) $\Leftrightarrow x \geq 2$.

Kết hợp (1) và (2) suy ra, $x \geq 2$. $(*)$.

TH2: $\begin{cases} t-9 \leq 0 \\ t-2x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 9 \\ t-2x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 9(3) \\ 3^x-2x-1 \leq 0(4). \end{cases}$

Xét bất phương trình (4):

Đặt $g(x)=3^x-2x-1$ trên $\mathbb{R}$.

$g(x)=3^x \ln 3-2$.

Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g(x)=0$, $x_0>0$.

Khi đó, $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy, $g(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$g(x_0)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, (4) $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Ta lại có, (3) $\Leftrightarrow x \leq 2$.

Kết hợp (3) và (4) suy ra, $0 \leq x \leq 1$. $(**)$.

Kết hợp $(*)$ và $(**)$ ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S=[0;1] \cup [2;+\infty)$.

Chọn phương án D

Câu 25. Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4 \cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017;2017]$.

A 1284. **B** 4034. **C** 1285. **D** 4035.

Lời giải.

Ta có $2^{\sin^2 x}+3^{cos^2 x}=4 \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=4 \cdot 3^{\sin^2 x}$.

Đặt $\sin^2 x=t$ với $t \in [0;1]$, ta có phương trình.

$2^t+\dfrac{3}{3^t}=4 \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^t=4$. Vì hàm số $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $t \in [0;1]$.

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=0$. Do đó $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017;2017]$ nên ta có $-2017 \leq k\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \dfrac{-2017}{\pi} \leq k \leq \dfrac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Chọn phương án C

Câu 26. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

A $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$. B $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. C $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$. D $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x+2y) = t$. Ta có: $\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x+2y = 4^t & (3). \end{cases}$

Khi đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6^t}{9^t} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t + 2\cdot 9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1+\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \text{ (thảo mãn)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1-\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Chọn phương án B

Câu 27. Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là

A 0. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Đk: $x > -3$.

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành.

$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^t + 3\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^t = 1$ (1).

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^t + 3\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Chọn phương án B

Câu 28. Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là

A 0. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 (7)$.

$(7) \Leftrightarrow 27\cdot 3^{3x} + \dfrac{27}{3^{3x}} + 81\cdot 3^x + \dfrac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27\cdot\left(3^{3x} + \dfrac{1}{3^{3x}}\right) + 81\cdot\left(3^x + \dfrac{1}{3^x}\right) = 10^3 \quad (7)$.

Đặt $t = 3^x + \dfrac{1}{3^x} \overset{Cosi}{\geq} 2\sqrt{3^x\cdot\dfrac{1}{3^x}} = 2$

$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \dfrac{1}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + 3\cdot 3^{2x}\cdot\dfrac{1}{3^x} + 3\cdot 3^x\cdot\dfrac{1}{3^{2x}} + \dfrac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \dfrac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$.

Khi đó: $(7) \Leftrightarrow 27\left(t^3 - 3t\right) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \dfrac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \dfrac{10}{3} > 2 (N)$.

Với $t = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \dfrac{1}{3^x} = \dfrac{10}{3} \quad (7)$.

Đặt $y = 3^x > 0$. Khi đó: (7) $\Leftrightarrow y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 (N) \\ y = \dfrac{1}{3} (N). \end{array}\right.$

Với $y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
Với $y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$.
Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là $1 + (-1) = 0$.
Chọn phương án A

Câu 29. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{3^x + 1} \leq 3^{\frac{x}{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3^x + 1}}$.

A $(-\infty; 0) \cup [\log_3 2; +\infty)$. **B** $[0; \log_3 2)$.
C $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. **D** $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có bất phương trình: $\sqrt{3^x + 1} \leq 3^{\frac{x}{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3^x + 1} \leq \sqrt{3^x} + \dfrac{2}{\sqrt{3^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3^x + 1} \leq \dfrac{\sqrt{3^x(3^x + 1)} + 2}{\sqrt{3^x + 1}}$
$\Leftrightarrow 3^x + 1 \leq \sqrt{3^x(3^x + 1)} + 2$ (*).
Đặt $t = 3^x + 1 > 1 \Rightarrow 3^x = t - 1$.
Từ đó bất phương trình (*) $\Leftrightarrow t \leq \sqrt{(t-1)t} + 2 \Leftrightarrow t - 2 \leq \sqrt{(t-1)t}$.

Trường hợp 1. $\begin{cases} 1 < t < 2 \\ (t-1)t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \\ \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t \leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow 1 < 3^x + 1 < 2 \Leftrightarrow 3^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Trường hợp 2. $\begin{cases} t \geq 2 \\ (t-1)t \geq (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - t \geq t^2 - 4t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \geq \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 2 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_3 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Chọn phương án A

Câu 30. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} \dfrac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a + b$.

A $a + b = 14$. **B** $a + b = 3$. **C** $a + b = 21$. **D** $a + b = 34$.

Lời giải.

Ta có $\log_{25} \dfrac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \dfrac{x+y}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = 15^{\log_{25} \frac{x}{2}} \\ \log_9 \dfrac{x + 15^{\log_{25} \frac{x}{2}}}{4} = \log_{25} \dfrac{x}{2}. \end{cases}$

Đặt $t = \log_{25} \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot 25^t$, ta được $2.25^t + 15^t = 4 \cdot 9^t \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2t} + \left(\dfrac{5}{3}\right)^t = 4$
$\Rightarrow t = \log_{\frac{5}{3}} \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{2 \cdot 25^t}{15^t} = 2 \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^t = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2}$.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Do đó $a = 1$, $b = 33$ nên $a + b = 34$.
Chọn phương án D

Câu 31. Biết rằng phương trình $\log_2\left(1 + x^{1009}\right) = 2018\log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $3^{\frac{1}{1008}} < x_0 < 3^{\frac{1}{1006}}$. **B** $x_0 > 3^{\frac{2}{1009}}$. **C** $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$. **D** $3^{\frac{1}{1007}} < x_0 < 1$.

Lời giải.
Điều kiện: $x > 0$.
Đặt $t = \log_2\left(1 + x^{1009}\right) = 2018\log_3 x$. Khi đó $t > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + x^{1009} = 2^t \\ x^{2018} = 3^t \end{cases} \Rightarrow \left(2^t - 1\right)^2 = 3^t \Leftrightarrow 2^t - 1 = (\sqrt{3})^t \Leftrightarrow (\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1\ (*).$$

Ta thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t$ luôn nghịch biến và liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 1$ nên phương trình (*) có duy nhất một nghiệm $t = 2$
$\Rightarrow x^{1009} = 3$ hay $x_0 = 3^{\frac{1}{1009}}$.
Mà $0 < \frac{1}{1009} < \frac{1}{1008}$ nên $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$.
Chọn phương án C

Câu 32. Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2018\pi)$?

A 2018 nghiệm. **B** 1008 nghiệm. **C** 2017 nghiệm. **D** 1009 nghiệm.

Lời giải.
Đk: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ cos x > 0. \end{cases}$

$2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x)$
$\Leftrightarrow \log_3 cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x)$
$\Leftrightarrow \log_3 cos^2 x - \log_3\left(1 - \cos^2 x\right) = \log_2(\cos x)$.
Đặt $t = \log_2\cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$.
Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \log_3 \frac{2^{2t}}{1 - 2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t$ hay $\left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$.
Hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác $f(-1) = 1$ nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình.
Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$.
$\log_2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$.

$$x \in (0; 2018\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{6} < k < \frac{6053}{6} \\ \frac{1}{6} < k < \frac{6055}{6}. \end{array}\right.$$

Vậy trong khoảng $(0; 2018\pi)$ có $1009 \cdot 2 = 2018$ nghiệm.
Chọn phương án A

Câu 33. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt.
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 19.

Lời giải.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$.

Đặt $t = \log_3(2u_5 - 63) \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases}$ (với $n = 5$) $\Rightarrow 1 = 3^t - 2 \cdot 2^t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow$ $u_n = 8n - 4$. Khi đó $u_5 = 36$.

Với $u_n = 8n - 4$ và $u_5 = 36$, ta có: $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2 \cdot 36 - 63) = 2\log_4(8n - 4 - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3 9 = 2\log_4 4 \Leftrightarrow 2 = 2$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n - 4) = 8$. Vậy (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 4$, công sai $d = 8$

$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = 4n^2$.

Do đó $\dfrac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \dfrac{(8n-4) \cdot 16n^2}{(16n-4) \cdot 4n^2} < \dfrac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

Chọn phương án (A)

Câu 34. Số nghiệm của phương trình $\log_3 \left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5 \left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

ĐK: $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

Đặt $t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$

$\Rightarrow \log_3|t| = \log_5(t+2)$.

Đặt $\log_3|t| = \log_5(t+2) = u$.

$\begin{cases} \log_3|t| = u \\ \log_5(t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$

$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^u + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^u = 1 & (2). \end{array}\right.$

Xét (1): $5^u + 3^u = 2$.

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Xét (2): $\left(\dfrac{3}{5}\right)^u + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^u = 1$.

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

BÌNH LUẬN.

Cho $f(x) = g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Chọn phương án (B)

Câu 35. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:
$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)\left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016\right)$ 0.

Ⓐ 12,3. Ⓑ 12. Ⓒ 12,1. Ⓓ 12,2.

Lời giải.

Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Ta có $24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016=\left(x^3-x^2\right)^2+\left(x^3-1\right)^2+22x^6+26x^4+1997x^2+2015>0$, $\forall x$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log^2_{\frac{22}{3}}x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)\leq 0.$$

Đặt $t=\log_x\frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$$\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}\leq\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-t)^2+1^2}\leq\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Đặt $\vec{u}=\left(t-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v}=(1-t;1)$. Ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{t-\frac{1}{2}}{1-t}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2t-1=3-3t\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{5}\Rightarrow x=\left(\dfrac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}}=12{,}06\approx 12{,}1$.

Nghiệm trên thỏa điều kiện.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 36. Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4.3^{\log\left(100x^2\right)}+9\cdot 4^{\log(10x)}=13\cdot 6^{1+\log x}$.

Ⓐ 100. Ⓑ 10. Ⓒ 1. Ⓓ $\frac{1}{10}$.

Lời giải.

ĐK: $x>0$.

PT $\Leftrightarrow 4\cdot 3^{2\cdot\log(10x)}+9\cdot 2^{2\cdot\log(10x)}=13\cdot 6^{\log(10x)}\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log(10x)}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}+9=0$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}>0$ thì phương trình trở thành:

$$4t^2-13t+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=1\\\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log(10x)=0\\\log(10x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{10}\\x=10.\end{array}\right.$$

Suy ra tích các nghiệm bằng 1.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 37. Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\leq 351\cdot\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(3;\sqrt{10}\right)$. (B) $(-4;2)$. (C) $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. (D) $\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{49}{5}\right)$.

Lời giải.

$2.7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\le 351\cdot\sqrt{14^x}$

$\Leftrightarrow 49\cdot 7^x+28\cdot 2^x\le 351\cdot\sqrt{14^x}$

$\Leftrightarrow 49\cdot\sqrt{\dfrac{7^{2x}}{14^x}}+28\cdot\sqrt{\dfrac{2^{2x}}{14^x}}\le 351$

$\Leftrightarrow 49\cdot\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}+28\cdot\sqrt{\dfrac{2^x}{7^x}}\le 351.$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}, t>0$ thì bpt trở thành: $49t+\dfrac{28}{t}\le 351$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{49}\le t\le\dfrac{7}{2}\Rightarrow\dfrac{4}{49}\le\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}\le\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow -4\le x\le 2.$

Khi đó $S=[-4;2]$.

Giá trị $b-2a=10\in\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.

Chọn phương án C

Câu 38. Tập nghiệm của bất phương trình $(2^x-2)^2<(2^x+2)\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$ là

(A) $S=(-\infty;0)$. (B) $S=[1;+\infty)$. (C) $S=[0;1)$. (D) $S=[-3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $2^x-1\ge 0\Leftrightarrow 2^x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0$.

Đặt $\sqrt{2^x-1}=t,(t\ge 0)\Rightarrow 2^x-1=t^2\Leftrightarrow 2^x=t^2+1$.

Bất phương trình trở thành:

$\left(t^2+1-2\right)^2<\left(t^2+1+2\right)(1-t)^2\Leftrightarrow\left(t^2-1\right)^2<\left(t^2+3\right)(1-t)^2$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+1)^2<\left(t^2+3\right)(t-1)^2\Leftrightarrow\begin{cases}(t+1)^2<t^2+3\\ t\ne 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+2t+1<t^2+3\\ t\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<1\\ t\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow t<1.$

Do đó $\sqrt{2^x-1}<1\Leftrightarrow 2^x-1<1\Leftrightarrow 2^x<2\Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp điều kiện: $0\le x<1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[0;1)$.

Chọn phương án C

Câu 39. Bất phương trình $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+2\le 2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$ có tập nghiệm $S=[a;b]$. Khi đó $a+b$ bằng

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 10.

Lời giải.

ĐK: $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{1}{2}\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+2\le 2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+4\le 2\cdot 2^{x^2}+2\cdot 2^{\sqrt{x-1}}$.

Đặt $\begin{cases}u=2^{x^2}\\ v=2^{\sqrt{x-1}}\end{cases}$, điều kiện $\begin{cases}u>0\\ v>0.\end{cases}$

Bất phương trình trở thành.

$uv+4\le 2u+2v \Leftrightarrow (uv-2u)+(4-2v)\le 0 \Leftrightarrow u(v-2)-2(v-2)\le 0 \Leftrightarrow (u-2)(v-2)\le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u-2\ge 0\\ v-2\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}u-2\le 0\\ v-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u\ge 2\\ v\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}u\le 2\\ v\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases}u>0\\ v>0\end{cases}$ ta được.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u\ge 2\\ 0<v\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}0<u\le 2\\ v\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}\ge 2\\ 0<2^{\sqrt{x-1}}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}0<2^{x^2}\le 2\\ 2^{\sqrt{x-1}}\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 1\\ \sqrt{x-1}\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\le 1\\ \sqrt{x-1}\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1\vee x\ge 1\\ x-1\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 1\\ x-1\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1\vee x\ge 1\\ x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 1\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;2]$.

Kết hợp điều kiện $x\ge 1$, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[1;2]$.

Chọn phương án B

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^{x+\log_2 5}$ là

A $S=(-2;1)$. **B** $S=[-1;1]$. **C** $S=(1;5]$. **D** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^{x+\log_2 5} \Leftrightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^x\cdot 5 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x+\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x\le 5$.

Đặt $\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x=t\Rightarrow\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}, (t>0)$, bất phương trình trở thành:

$$t+\frac{1}{t}\le 5\Leftrightarrow t^2-5t+1\le 0\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2}\le t\le\frac{5+\sqrt{21}}{2}.$$

Do đó ta có:

$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\le\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x\le\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-1;1]$.

Chọn phương án B

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. A	5. B	6. B	7. D	8. D	9. B	10. C
11. B	12. A	13. A	14. D	15. A	16. B	17. B	18. B	19. B	20. D
21. D	22. D	23. B	24. D	25. C	26. B	27. B	28. A	29. A	30. D
31. C	32. A	33. A	34. B	35. C	36. C	37. C	38. C	39. B	40. B