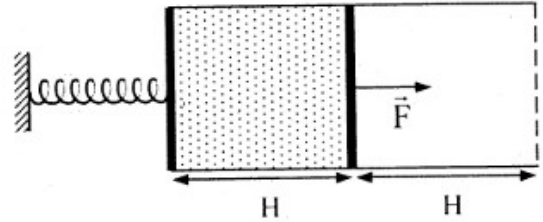


## 2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

### Chuyên đề 8. CHẤT KHÍ

1. Cho một ống hình trụ tiết diện  $S$  nằm ngang được ngăn với bên ngoài bằng hai pittông. Pittông thứ nhất được nối với lò xo như hình vẽ.

Ban đầu lò xo không biến dạng, áp suất khí giữa hai pittông bằng áp suất bên ngoài  $p_0$ . Khoảng cách giữa hai pittông là  $H$  và bằng nửa chiều dài hình trụ. Tác dụng lên pittông thứ hai một lực  $F$  để nó chuyển động từ từ sang bên phải. Tính  $F$  khi pittông thứ hai dừng lại ở biên phải của ống hình trụ.



*(Trích đề Olympic 30-4, 2007)*

#### Bài giải

Gọi  $x$  là độ dịch chuyển của pittông trái,  $p$  áp suất khí giữa hai pittông. Điều kiện cân bằng của hai pittông:

$$+ \text{Pittông trái: } p_0 S - pS - kx = 0 \quad (1)$$

$$+ \text{Pittông phải: } F + pS - p_0 S = 0 \quad (2)$$

- Vì quá trình là đẳng nhiệt nên áp dụng định luật Bôilơ – Mariot:  $p_0 V_0 = pV$

$$\Leftrightarrow p_0 S H = p(2H - x)S \quad (3)$$

$$- \text{Từ (3): } p = \frac{p_0 H}{2H - x} \quad (4)$$

$$- \text{Từ (1) và (2): } F = kx, \text{ thay vào (4) ta được: } p = \frac{p_0 k H}{2kH - F}$$

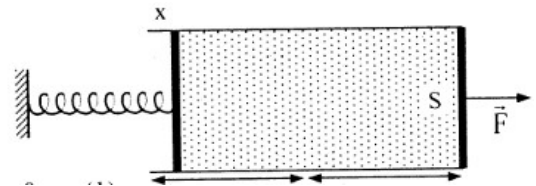
$$- \text{Thay } p = \frac{p_0 k H}{2kH - F} \text{ vào (2), ta được: } F + \frac{p_0 k H}{2kH - F} S - p_0 S = 0$$

$$\Rightarrow F^2 - (p_0 S + 2kH)F + p_0 S k H = 0$$

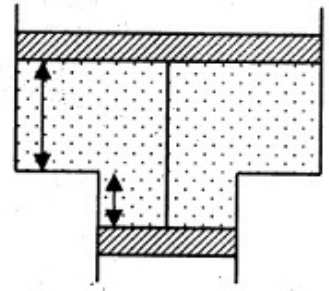
$$- \text{Giải phương trình trên theo } F, \text{ ta được: } F = \frac{p_0 S}{2} + kH \pm \sqrt{\frac{p_0^2 S}{4} + k^2 H^2}$$

Vậy: Để pittông thứ hai dừng lại ở biên phải của ống hình trụ thì

$$F = \frac{p_0 S}{2} + kH \pm \sqrt{\frac{p_0^2 S}{4} + k^2 H^2}$$



2. Một xilanh đặt thẳng đứng có tiết diện thay đổi như hình vẽ. Giữa hai pittông có  $n$  mol không khí. Khối lượng và diện tích tiết diện các pittông lần lượt là  $m_1, m_2, S_1, S_2$ . Các pittông được nối với nhau bằng một thanh nhẹ có chiều dài không đổi và trùng với trục của xilanh. Khi tăng nhiệt độ khí trong xilanh thêm  $\Delta T$  thì các pittông dịch chuyển bao nhiêu.



Cho áp suất khí quyển là  $p_0$  và bỏ qua khối lượng khí trong xilanh so với khối lượng pittông. Bỏ qua ma sát giữa xilanh và pittông.

(Trích đề thi Trại hè Hùng Vương, 2015)

### Bài giải

- Các lực tác dụng lên hệ (khí + hai pittông) gồm:

+ Trọng lực:  $F_g = (m_1 + m_2)g$

+ Áp lực của không khí lên hai pittông:  $F_1 = p_0 S_1; F_2 = p_0 S_2$

+ Phản lực của phần thành pittông nằm ngang:  $F = p(S_1 - S_2)$

+ Khi trạng thái cân bằng của hệ được thiết lập:  $F_g + F_1 = F + F_2$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)g + p_0 S_1 = p_0 S_2 + p(S_1 - S_2)$$

$$\Rightarrow p = p_0 + \frac{m_1 + m_2}{S_1 - S_2}g = \text{const} \quad (1)$$

- Nhận xét: Áp suất khí trong xilanh không đổi vì trạng thái cân bằng được duy trì.

- Vì áp suất khí trong xilanh không đổi nên khi tăng nhiệt độ, thể tích khí tăng, do đó hệ đi lên một đoạn  $x$ .

Ta có:

$$\frac{h_1 S_1 + h_2 S_2}{T} = \frac{(h_1 + x)S_1 + (h_2 - x)S_2}{T + \Delta T}$$

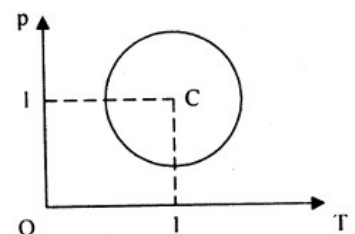
$$\Leftrightarrow (h_1 S_1 + h_2 S_2)\Delta T = T(S_1 - S_2)x \quad (2)$$

- Mặt khác:  $\frac{(h_1 S_1 + h_2 S_2)p}{T} = nR \Rightarrow T = \frac{(h_1 S_1 + h_2 S_2)p}{nR} \quad (3)$

- Giải hệ (1), (2) và (3), ta được:  $x = \frac{nR\Delta T}{p_0(S_1 - S_2) + (m_1 + m_2)g}$

Vậy : Độ dịch chuyển của các pittông là :  $x = \frac{nR\Delta T}{p_0(S_1 - S_2) + (m_1 + m_2)g}$

3. Một lượng khí lí tưởng thực hiện một chu trình được biểu diễn trong hệ tọa độ  $p - T$  có dạng là một đường tròn như hình vẽ. Đơn vị của các trục được lựa chọn là  $p_c$  và  $T_c$ . Nhiệt độ thấp nhất trong chu trình là  $T_0$ . Tìm tỉ số giữa khối lượng riêng lớn nhất  $\rho_1$  và nhỏ nhất  $\rho_2$  của lượng khí đó khi thay đổi trạng thái



theo chu trình trên.

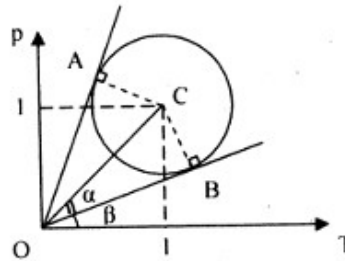
### Bài giải

- Từ O, kẻ các đường đẳng tích qua 2 điểm A và B trên đường tròn. Ta thấy, thể tích lớn nhất của chất khí này là  $V_B$  và nhỏ nhất là  $V_A$ .

- Với lượng khí xác định:  $m = pV \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

- Theo phương trình trạng thái của khí lí tưởng, ta có:  $\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_B T_A}{p_A T_B} = \frac{\left(\frac{p_B}{p_C}\right) \left(\frac{T_A}{T_C}\right)}{\left(\frac{T_B}{T_C}\right) \left(\frac{p_A}{p_C}\right)} = \tan^2 \beta$$



- Mặt khác:  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \left( \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right)^2$$

- Từ hình vẽ, ta có:  $\tan \alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{r}{OB}$ , (r : bán kính vòng tròn)

- Ngoài ra :  $OC = \sqrt{2} \Rightarrow OB = \sqrt{2 - r^2}$

- Thay vào công thức trên :  $\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 - r\sqrt{2 - r^2}}{1 + r\sqrt{2 - r^2}}$

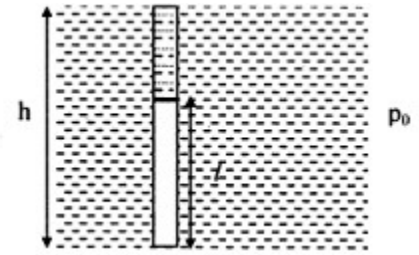
- Ngoài ra, từ hình vẽ ta thấy bán kính ra của chu trình và nhiệt độ thấp nhất  $T_0$  còn có quan hệ:  $r = 1 - \frac{T_0}{T_C}$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) \sqrt{1 + 2 \frac{T_0}{T_C} - \left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}{1 + \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) \sqrt{1 + 2 \frac{T_0}{T_C} - \left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}$$

- Vậy : tỉ số giữa khối lượng riêng lớn nhất  $\rho_1$  và nhỏ nhất  $\rho_2$  của lượng khí đó là :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) \sqrt{1 + 2 \frac{T_0}{T_C} - \left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}{1 + \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) \sqrt{1 + 2 \frac{T_0}{T_C} - \left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}$$

4. Một ống nghiệm chứa khí hidro có nút đậy là một pittông khối lượng không đáng kể, dịch chuyển không ma sát trong ống. Lúc đầu ống ở ngoài không khí có áp suất  $p_0$ . Chiều dài phần ống chứa khí hidro là  $l_0$ . Người ta đặt ống thẳng đứng vào một chậu thủy ngân có khối lượng riêng  $d$ , đáy ống cách mặt thoáng thủy ngân một đoạn  $h > l_0$ .



- a) Tính chiều dài mới  $l$  của phần ống chứa khí hidro? Coi rằng nhiệt độ của khí hidro giữ không đổi và gia tốc trọng trường là  $g$ .
- b) Khi ống ở trong chậu thủy ngân thì cân bằng của pittông là bền hay không bền?

(Trích đề thi chọn đội tuyển đi thi Quốc tế - 1987)

### Bài giải

a) Chiều dài mới  $l$  của phần ống chứa khí hidro

- Áp suất khí trong ống:  $p = p_0 + dg(h - l)$

- Áp dụng định luật Bôilơ – Mariôt, ta được:  $p_0 S l_0 = [p_0 + dg(h - l)] S l$

$$\Leftrightarrow dgl^2 - (p_0 + dgh)l + p_0 l_0 = 0, \Delta = (p_0 + dgh)^2 - 4dgp_0 l_0$$

Vì  $h > l_0 \Rightarrow \Delta > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm:

$$l_1 = \frac{1}{2dg} \left[ (p_0 + dgh) - \sqrt{(p_0 + dgh)^2 - 4dgp_0 l_0} \right]$$

$$\text{Và } l_2 = \frac{1}{2dg} \left[ (p_0 + dgh) + \sqrt{(p_0 + dgh)^2 - 4dgp_0 l_0} \right]$$

Xét hàm  $f(l) = dgl^2 - (p_0 + dgh)l + p_0 l_0$

Khi  $l = h$  thì  $f(h) = dgh^2 - (p_0 + dgh)h + p_0 l_0 = p_0(l_0 - h) < 0$  nên  $l_1 < h < l_2$  (loại nghiệm  $l_2$ )

Vậy: chiều dài mới  $l$  của phần ống chứa khí hidro là:

$$l = \frac{1}{2dg} \left[ (p_0 + dgh) - \sqrt{(p_0 + dgh)^2 - 4dgp_0 l_0} \right]$$

b) Loại cân bằng?

- Xét cân bằng của pittông, ta có:

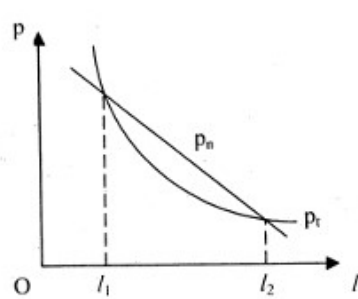
+ Áp suất bên ngoài:  $p_n = [p_0 + dg(h - l)]$

+ Áp suất trong ống ứng với chiều dài  $l$  là:

$$p_t = \frac{p_0 l_0}{l}$$

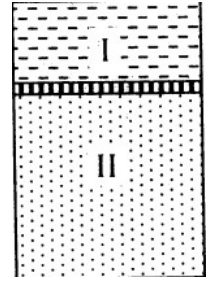
- Khi pittông cân bằng  $p_n = p_t$ , đồ thị  $p_n$  và  $p_t$  trong hệ tọa độ  $pOl$  như hình vẽ. Hai đồ thị này cắt nhau khi

$$l = l_1 = l_2$$



- Khi  $l$  tăng lên một lượng nhỏ thì  $p_n > p_t$  và khi  $l$  giảm thì  $p_n < p_t$  nên cân bằng của pittông là cân bằng bền.

5. Một xilanh thẳng đứng kín hai đầu, trong xi lanh có một pittông khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát trong lòng xilanh. Ở trên và ở dưới pittông có hai lượng khí như nhau. Ban đầu ở nhiệt độ  $27^\circ\text{C}$  thì tỉ số thể tích phần trên và phần dưới  $\frac{V_1}{V_2} = n = 4$



Hỏi nếu nhiệt độ tăng lên đến  $327^\circ\text{C}$  thì tỉ số thể tích phần trên và phần dưới  $\frac{V'_1}{V'_2}$  là bao nhiêu?

### Bài giải

Ta có:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = n = 4$ , (định luật Bôilơ – Mariôt). Đặt  $\frac{V'_1}{V'_2} = \frac{p'_2}{p'_1} = m$

- Vì pittông cân bằng nên: 
$$\begin{cases} p_1 S + mg = p_2 S \\ p'_1 S + mg = p'_2 S \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1 \Leftrightarrow (n-1)p_1 = (m-1)p'_1$$

$$\Rightarrow \frac{p'_1}{p_1} = \frac{n-1}{m-1} \quad (1)$$

- Mặt khác:  $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} V_1 = \frac{m+1}{m} V'_1$

$$\Rightarrow \frac{V'_1}{V_1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n+1}{m+1} \quad (2)$$

- Áp dụng phương trình trạng thái cho lượng khí trên, ta được:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p'_1 V'_1}{T_2} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p'_1}{p_1} \cdot \frac{V'_1}{V_1} \quad (3)$$

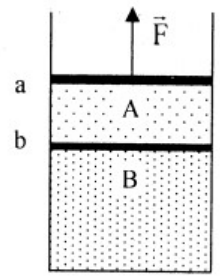
- Thay (1), (2) vào (3):  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n+1}{m+1} \Leftrightarrow 2 = \frac{3}{m-1} \cdot \frac{5m}{4(m+1)}$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 15m - 8 = 0 \Rightarrow m = 2,3$$

Vậy: Khi nhiệt độ tăng lên đến  $327^\circ\text{C}$  thì tỉ số thể tích phần trên và phần dưới là

$$m = \frac{V'_1}{V'_2} = 2,3$$

6. Trong một bình kim loại hình trụ tròn có hai pittông a và b có thể chuyển động không ma sát dọc theo thành bình. Pittông có khối lượng không đáng kể. Tiết diện của mỗi pittông là  $S = 10^{-3} m^2$ . Hai pittông chia thành bình thành hai ngăn A và B như hình vẽ. Hai ngăn A, B chứa cùng một loại khí lí tưởng ở cùng một nhiệt độ. Ở trạng thái cân bằng ở độ cao mỗi ngăn tương ứng là  $h_A = 10 \text{ cm}$ ,  $h_B = 20 \text{ cm}$ .



Tác dụng lên pittông a một lực  $\vec{F}$  làm nó chuyển động từ từ đi lên (hình vẽ). Khi pittông a di chuyển được một đoạn  $\Delta h = 3 \text{ cm}$  thì hai pittông a và b trở lại trạng thái cân bằng. Nhiệt độ khí trong các ngăn A và B không đổi, áp suất khí quyển  $p_o = 10^5 \text{ Pa}$ .

a) Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}$ .

b) Tìm độ dịch chuyển của pittông b.

### Bài giải

a) Độ lớn của lực  $\vec{F}$

- Hai khối khí trong hai ngăn A và B luôn có cùng áp suất và nhiệt độ nên áp dụng định luật Bôilơ - Mariôt cho tổng khối khí trong hai ngăn, ta được:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Leftrightarrow p_o (10 + 20) S = p' (10 + 20 + 3) S$$

$$\Rightarrow p' = \frac{10}{11} p_o$$

- Xét pittông a lúc có tác dụng của lực  $\vec{F}$ . Khi pittông cân bằng, ta có:

$$\vec{F} + \vec{F}' + \vec{F}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow F + p' S - p_o S = 0$$

$$\Rightarrow F = (p_o - p') S = \frac{p_o}{11} S = \frac{10^5}{11} \cdot 10^{-3} = 9,1 \text{ N}$$

Vậy: Độ lớn của lực  $\vec{F}$  tác dụng lên pittông A là  $F = 9,1 \text{ N}$ .

b) Độ dịch chuyển của pittông b

- Vì hai khối khí trong ngăn A và B luôn có cùng áp suất và nhiệt độ nên áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép, ta được:

$$p V_A = \frac{m_A}{\mu} RT; p V_B = \frac{m_B}{\mu} RT \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{m_A}{m_B} = \text{hằng số}$$

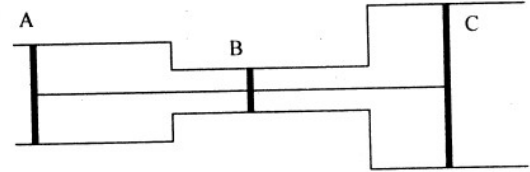
$$\text{- Mặt khác: } \frac{V_A}{V_B} = \frac{V'_A}{V'_B} \Leftrightarrow \frac{h_A}{h_B} = \frac{h_A + (\Delta h - \Delta h_B)}{h_B + \Delta h_B}$$

$$\Rightarrow h_A \cdot \Delta h_B = h_B \Delta h - h_B \Delta h_B$$

$$\Rightarrow \Delta h_B = \frac{h_B}{h_A + h_B} \Delta h = \frac{20}{10 + 20} \cdot 3 = 2 \text{ cm}$$

Vậy: Độ dịch chuyển của pittông b là  $\Delta h_b = 2cm$

7. Ba pittông cách nhiệt A, B, C có tiết diện lần lượt là  $2S$ ,  $S$  và  $3S$  nằm ngang được nối với nhau bằng hai thanh rắn (hình vẽ). Các pittông có thể chuyển động không ma sát với xilanh, chia xilanh làm hai phần. Ban đầu, phần AB có thể tích  $V$  chứa 1 mol khí; phần BC có thể tích  $2V$  chứa 3 mol của cùng một loại khí ở cùng một nhiệt độ  $T$ , hệ cân bằng. Áp suất không khí là  $P_o$ .



a) Tính áp suất khí trong mỗi phần.

b) Nung nóng khí trong phần BC lên nhiệt độ  $2T$ . Tính độ dịch chuyển của các pittông khi có cân bằng mới.

### Bài giải

a) Áp suất khí trong mỗi phần

Gọi  $p_1, p_2$  lần lượt là áp suất khí trong phần AB và BC lúc đầu.

$$\text{Ta có: } p_1V = RT; p_22V = 3RT \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

- Khi hệ cân bằng, ta có:  $p_o2S + p_1S + p_23S = p_o3S + p_2S + p_12S$

$$\Rightarrow 2p_2 - p_1 = p_o \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2): } p_1 = \frac{p_o}{2} \text{ và } p_2 = \frac{3p_o}{4} \quad (3)$$

Vậy: Áp suất khí trong mỗi phần là  $p_1 = \frac{p_o}{2}$  và  $p_2 = \frac{3p_o}{4}$

b) Độ dịch chuyển của các pittông khi có cân bằng mới

Gọi  $x$  là độ dịch chuyển của các pittông khi có sự cân bằng mới;  $p'_1, p'_2$  là áp suất khí trong phần AB và BC;

$V'_1, V'_2$  là thể tích của phần AB và BC lúc sau, ta có:

$$V'_1 = V - 2Sx + Sx = V - Sx$$

$$V'_2 = 2V + 3Sx - Sx = 2(V + Sx)$$

- Áp dụng định luật Bôilơ - Mariôt cho khí trong phần AB, ta được:

$$p_1V = p'_1(V - Sx) \Rightarrow p'_1 = \frac{p_1V}{V - Sx} = \frac{p_oV}{2(V - Sx)} \quad (4)$$

- Áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép cho khí trong phần BC, ta được:

$$p_22V = 3RT; p'_22(V + Sx) = 3R.2T$$

$$\Rightarrow p'_2 = \frac{2p_2V}{V + Sx} = \frac{3p_oV}{2(V + Sx)} \quad (5)$$

- Khi có sự cân bằng mới, ta có:  $\Rightarrow 2p'_2 - p'_1 = p_o \quad (6)$

- Thay (4), (5) vào (6) ta được:  $2 \frac{3p_0V}{V+Sx} - \frac{p_0V}{2(V-Sx)} = p_0$

$$\Leftrightarrow 6V^2 - 6VSx - V^2 - VSx = 2[V^2 - (Sx)^2]$$

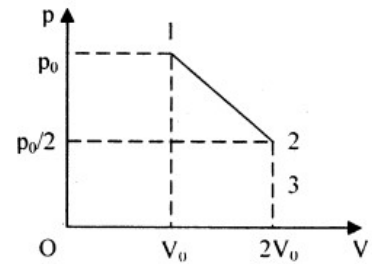
$$\Leftrightarrow 2(Sx)^2 - 7VSx + 3V^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{V}{2S}; x_2 = \frac{3V}{S}$$

- Với  $x_1 = \frac{V}{2S} \Rightarrow V_1' = V_1 - Sx = \frac{V}{2} > 0$  (nhận)

- Với  $x_2 = \frac{3V}{S} \Rightarrow V_1' = V_1 - Sx = -2V < 0$  (loại)

Vậy: Độ dịch chuyển của các pittông khi có cân bằng mới là  $x = \frac{V}{2}$

8. Một mol khí lí tưởng thực hiện quá trình giãn nở từ trạng thái 1 ( $p_0, V_0$ ) đến trạng thái 2 ( $\frac{p_0}{2}, 2V_0$ ) có đồ thị trên hệ tọa độ p-V như hình vẽ. Biểu diễn quá trình ấy trên hệ tọa độ OTp và xác định nhiệt độ cực đại của khối khí trong quá trình đó.



### Bài giải

- Đồ thị p-V là đoạn thẳng nên ta có:  $p = \alpha V + \beta$

+ Điểm 1 ( $p_0, V_0$ ) thuộc đồ thị nên:  $p_0 = \alpha V_0 + \beta$  (1)

+ Điểm 2 ( $\frac{p_0}{2}, 2V_0$ ) thuộc đồ thị nên:  $\frac{p_0}{2} = 2\alpha V_0 + \beta$  (2)

- Từ (1) và (2), ta được:  $\alpha = \frac{-p_0}{2V_0}; \beta = \frac{3p_0}{2} \Rightarrow p = -\frac{p_0}{2V_0}V + \frac{3p_0}{2}$  (3)

- Mặt khác, phương trình trạng thái của 1 mol khí lí tưởng là:  $pV = RT$  (4)

- Từ (3):  $V = \frac{(-2p + 3p_0)V_0}{p_0}$ , từ (4):  $T = \frac{pV}{R}$

$$\Leftrightarrow T = \frac{p(-2p + 3p_0)V_0}{p_0R} = -\frac{2V_0}{Rp_0}p^2 + \frac{3V_0}{R}p$$

- Vì T là hàm bậc hai của p nên đồ thị p-T là một phần của parabol:

+ Khi  $p = p_0$  và  $p = \frac{p_0}{2}$  thì  $T_1 = T_2 = \frac{p_0V_0}{R}$

+ Khi  $T = 0$  thì  $p = 0$  và  $p = \frac{3p_0}{2}$



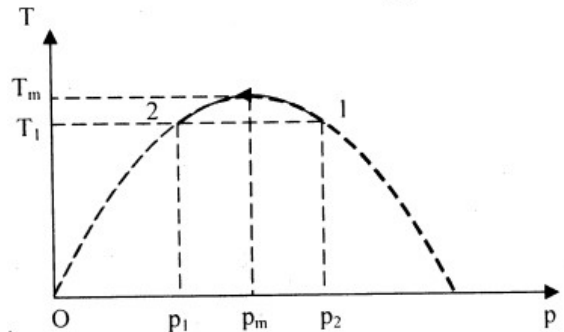
- Ta có:  $T'_{(p)} = \frac{3V_o}{R} - \frac{4V_o}{Rp_o} p \Rightarrow T'_{(p)} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3p_o}{4}$ . Lúc đó:

$$T = T_{max} = -\frac{2V_o}{Rp_o} \left( \frac{3p_o}{4} \right)^2 + \frac{3V_o}{R} \cdot \frac{3p_o}{4} = \frac{9V_o p_o}{8R}$$

Vậy:

+ Nhiệt độ cực đại của khối khí trong quá trình trên là  $T_{max} = \frac{9V_o p_o}{8R}$

+ Đồ thị biểu diễn quá trình đó trên hệ tọa độ p-T có dạng như đồ thị sau:



$$T_1 = T_2 = \frac{p_o V_o}{R}$$

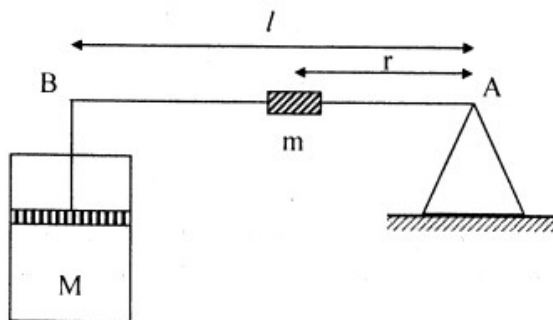
$$T_m = \frac{9V_o p_o}{8R}$$

$$p_1 = \frac{p_o}{2}; p_2 = p_o; p_m = \frac{3p_o}{4}$$

9. Trong một xilanh hình trụ như hình vẽ, được bịt kín bởi một pittông có trọng lượng P chứa một lượng khí có khối lượng mol là  $\mu$  và khối lượng M. Tại tâm của pittông người ta có gắn một thanh B nối với đòn bẩy L và đòn bẩy này có khớp nối tại A. Đốt nóng khối khí sao cho nhiệt độ của nó tăng đều theo thời gian, theo hệ thức:  $T = T_o + const(t - t_o)$ , để pittông vẫn đứng yên vật m cần phải dịch chuyển sang bên trái. Biết độ cao của pittông so với đáy bình là h. Bỏ qua áp suất khí quyển và mọi ma sát.

a) Hãy xác định vị trí của m.

b) Tìm vận tốc chuyển động của m, biết tốc độ đốt nóng  $\alpha = \frac{\Delta T}{\Delta t}$



### Bài giải

a) Xác định vị trí của m

- Khi đốt nóng khí, lực do khí tác dụng lên pittông sẽ tăng nên vật m phải dịch chuyển sang trái để hệ có cân bằng.

- Xét trục quay đi qua điểm A, điều kiện để hệ cân bằng là:

$$M_F = M_p + M_m \Leftrightarrow pSl = Pl + mgr \quad (1)$$

- Áp dụng phương trình trạng thái khí lí tưởng, ta được:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{MRT}{\mu V} = \frac{MRT}{\mu Sh} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta được:  $r = \left( \frac{MRT}{\mu h} - p \right) \frac{1}{mg}$

- Theo đề:  $T = T_o + const(t - t_o)$  nên  $r = \left( \frac{MR}{\mu h} (T_o + const\Delta t) - p \right) \frac{1}{mg}$

Vậy: Để hệ cân bằng, m phải cách A một đoạn

$$r = \left( \frac{MR}{\mu h} (T_o + const\Delta t) - p \right) \frac{1}{mg}$$

b) Vận tốc chuyển động của m

Ta có:  $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$  và  $T = T_o + const\Delta t$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} = const = \alpha$$

$$\text{Và } \Delta r = r - r_o = \left[ \frac{MR}{\mu h} (T_o + \alpha\Delta t) - p \right] \frac{1}{mg} - \left[ \frac{MR}{\mu h} T_o - p \right] \frac{1}{mg}$$

$$\Leftrightarrow \Delta r = \frac{MR}{\mu h} \alpha \Delta t \frac{1}{mg}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{MR\alpha}{\mu hmg}$$

Vậy: Vận tốc chuyển động của m là  $v = \frac{MR\alpha}{\mu hmg}$

**10.** Một bình chứa không khí nén ở áp suất  $P_1 = 1,5 \text{ atm}$  có dung tích không đổi  $V_1 = 30 \text{ l}$ . Nhờ một ống ngăn có khóa, bình được nối với một quả bóng hình cầu, vỏ mỏng và đàn hồi, lúc đầu chứa không khí ở áp suất 1,2 atm và có thể tích là 10l. Áp suất khí quyển bên ngoài là 1 atm. Nhiệt độ của toàn bộ hệ cân bằng với nhiệt độ của bên ngoài và không đổi. Thể tích của quả bóng phụ thuộc vào áp suất theo hệ thức:

$$V = V_o \left( 1 + 0,1 \cdot \frac{p - p_o}{p_o} \right), \text{ với } p_o \text{ và } p \text{ là áp suất và áp suất cuối của khí trong quả bóng, } V_o \text{ là thể tích của quả}$$

bóng ứng với áp suất  $p_o$  ( $p_o$  và  $p$  đo bằng atm). Người ta mở khóa của ống nối để không khí nén từ bình tràn sang quả bóng cho đến khi cân bằng. Tính áp suất cuối cùng của hệ và thể tích của bóng khi đó.

## Bài giải

Gọi bình khí nén là vật 1, quả bóng đàn hồi là vật 2.

- Trước khi mở khóa, áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép cho khí trong bình và bóng, ta được:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT; p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT$$

$$\Rightarrow m = m_1 + m_2 = \frac{\mu}{RT} (p_1 V_1 + p_2 V_2) \quad (1)$$

- Khi cân bằng được thiết lập, ta có:  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  (2)

Với  $p$  là áp suất cuối cùng của hệ,  $V$  là thể tích của cả bình khí và quả bóng. Ta có:

$$V = V_1 + V_2' \quad (3)$$

$$\text{Và } V_2' = V_2 \left( 1 + 0,1 \frac{p - p_2}{p_2} \right) \quad (4)$$

- thay (1), (3) và (4) vào (2), ta được:

$$p \left[ V_1 + V_2 \left( 1 + 0,1 \frac{p - p_2}{p_2} \right) \right] = \frac{\mu}{RT} (p_1 V_1 + p_2 V_2) \frac{RT}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,1 V_2}{p_2} p^2 + p(V_1 + 0,9 V_2) - (p_1 V_1 + p_2 V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,1 \cdot 10}{1,2} p^2 + p(30 + 0,9 \cdot 10) - (1,5 \cdot 30 + 1,2 \cdot 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1,2} p^2 + 39p - 57 = 0 \Rightarrow p \approx 1,4 \text{ atm}$$

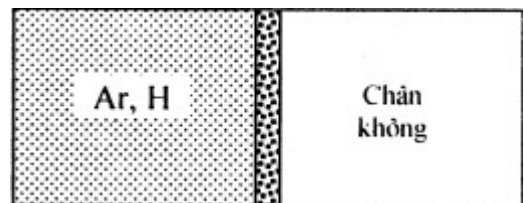
$$\text{Và } V_2' = 10 \left( 1 + 0,1 \frac{1,4 - 1,2}{1,2} \right) = 10,2 \text{ l}$$

Vậy: Áp suất cuối cùng của hệ và thể tích của bóng khi đó là  $p \approx 1,4 \text{ atm}$  và  $V_2' = 10,2 \text{ l}$

11. Một bình kín được chia làm hai phần có thể tích bằng nhau bằng vách xốp. Ban đầu, phần bên trái có hỗn hợp hai chất khí argon (Ar) và hidro (H) ở áp suất toàn phần  $p$ ; phần bên phải là chân không và chỉ có hidro mới khuếch tán được qua vách xốp. Sau khi quá trình khuếch tán

kết thúc, áp suất trong phần bên trái là  $p' = \frac{2}{3} p$

a) Tìm tỉ lệ các khối lượng  $m_A$  và  $m_H$  của các khí argon và hidro trong bình.



b) Tìm áp suất riêng phần ban đầu  $p_A$  và  $p_H$  của argon và hiđrô. Cho biết các khí argon và hiđrô không tương tác hóa học với nhau; khối lượng mol của argon và hiđrô là  $\mu_A = 40(g/mol)$ ;  $\mu_H = 2(g/mol)$ . Coi quá trình là đẳng nhiệt.

### Bài giải

a) Tỷ lệ các khối lượng của các khí argon và hiđrô trong bình

Gọi  $V$  là thể tích của mỗi nửa bình, phương trình cho các áp suất riêng phần  $p_A$  và  $p_H$  khi hỗn hợp hai chất khí chưa khuếch tán là:

$$p_A V = \frac{m_A}{\mu_A} RT \quad (1); \quad p_H V = \frac{m_H}{\mu_H} RT \quad (2)$$

- Phương trình cho áp suất toàn phần:  $p = p_A + p_H$

$$\Leftrightarrow pV = \left(\frac{m_A}{\mu_A} + \frac{m_H}{\mu_H}\right) RT = \left(\frac{m_A}{m_H} + \frac{\mu_A}{\mu_H}\right) \frac{m_H}{\mu_A} RT \quad (3)$$

Đặt  $x = \frac{m_A}{m_H}$ ;  $\mu = \frac{\mu_A}{\mu_H} = 20$ , (3) trở thành:

$$pV = (x + \mu) \frac{m_H}{\mu_A} RT \quad (4)$$

- Sau khi khuếch tán, trong nửa bên trái khối lượng các khí là  $m_A$  và  $\frac{m_H}{2}$ , do đó:

$$\Leftrightarrow p'V = \left(\frac{m_A}{m_H} + \frac{\mu_A}{2\mu_H}\right) \frac{m_H}{\mu_A} RT = \left(x + \frac{\mu}{2}\right) \frac{m_H}{\mu_A} RT \quad (5)$$

- Từ (4) và (5):  $\frac{p}{p'} = \frac{3}{2} = \frac{2(x + \mu)}{2x + \mu} \Leftrightarrow 6x + 3\mu = 4x + 4\mu \Rightarrow x = 10$

Vậy: Tỷ lệ các khối lượng của các khí argon và hiđrô trong bình là  $x = \frac{m_A}{m_H} = 10$

b) Áp suất riêng phần ban đầu của các khí argon và hiđrô

$$\text{Từ (1) và (2): } \frac{p_A}{p_H} = \frac{x}{\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_A = \frac{p}{3}; p_H = \frac{2p}{3}$$

Vậy: Áp suất riêng phần ban đầu của các khí argon và hiđrô là  $p_A = \frac{p}{3}$ ;  $p_H = \frac{2p}{3}$

**12.** Trong bình có hỗn hợp khí gồm  $m_1$  gam  $N_2$  và  $m_2$  gam  $H_2$ . Ở nhiệt độ  $T$  thì  $N_2$  phân li hoàn toàn thành khí đơn nguyên tử còn độ phân li của  $H_2$  không đáng kể, lúc này áp suất trong bình là  $p$ . Ở nhiệt độ  $2T$  thì cả  $N_2$  và  $H_2$  đều phân li hoàn toàn thành khí đơn nguyên tử, áp suất trong bình là  $3p$ .

Tính tỉ số  $\frac{m_1}{m_2}$ , biết  $N = 14$ ,  $H = 1$ .

### Bài giải

- Ở nhiệt độ T: N<sub>2</sub> phân li hoàn toàn thành khí đơn nguyên tử, H<sub>2</sub> phân li không đáng kể nên trong bình có  $\frac{m_1}{14}$  (mol) khí N<sub>2</sub> và  $\frac{m_2}{2}$  (mol) khí H<sub>2</sub>; áp suất khí trong bình là p. Áp dụng phương trình Clapêrôn -

Mendêlêép cho hỗn hợp khí, ta được:

$$pV = \left( \frac{m_1}{14} + \frac{m_2}{2} \right) RT \quad (1)$$

- Ở nhiệt độ 2T: Cả N<sub>2</sub> và H<sub>2</sub> đều phân li hoàn toàn thành khí đơn nguyên tử nên trong bình có  $\frac{m_1}{14}$  (mol) khí

N<sub>2</sub> và  $\frac{m_2}{1}$  (mol) khí H<sub>2</sub>; áp suất khí trong bình là 3p. Áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép cho hỗn

hợp khí, ta được:

$$3pV = \left( \frac{m_1}{14} + \frac{m_2}{1} \right) R \cdot 2T \quad (2)$$

- Lấy (2) : (1), ta được:  $3 = \frac{2m_1 + 28m_2}{m_1 + 7m_2} = \frac{2 \cdot \frac{m_1}{m_2} + 28}{\frac{m_1}{m_2} + 7}$  (3)

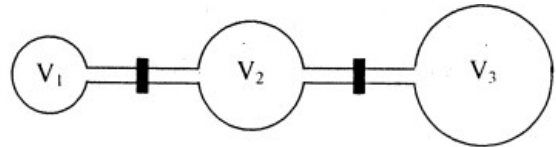
Đặt  $x = \frac{m_1}{m_2}$ , ta được  $3(x + 7) = 2x + 28 \Rightarrow x = 7$

Vậy: Tỉ số  $x = \frac{m_1}{m_2} = 7$

13. Ba bình có thể tích  $V_1 = 22,4l; V_2 = 2V_1; V_3 = 3V_1$  thông với nhau nhưng cách nhiệt với nhau. Ban đầu các bình chứa khí nitơ lí tưởng ở cùng nhiệt độ  $T_0 = 273K$  và áp suất  $p_0 = 1at$ . Người ta hạ nhiệt độ bình (1)

xuống  $T_1 = \frac{T_0}{2}$ , nâng nhiệt độ bình (2) lên  $T_2 = 2T_0$  và

bình (3) lên  $T_3 = 3T_0$ . Bỏ qua thể tích các ống nối.



a) Tính áp suất cuối cùng của khí.

b) Tính khối lượng khí trong bình (2) ứng với nhiệt độ  $T_2$  và áp suất cuối cùng.

(Trích đề thi Olympic 30-4, 1995)

### Bài giải

a) Áp suất cuối cùng của khí

Gọi  $n_1, n_2, n_3$  lần lượt là số mol khí trong mỗi bình.

- Áp dụng phương trình Clapêrôn-Mendêlêép cho trạng thái đầu của khí, ta được:

+ Bình (1):  $p_0V_1 = n_1RT_0 \Rightarrow n_1 = \frac{p_0V_1}{RT_0}$

+ Bình (2):  $p_0V_2 = n_2RT_0 \Leftrightarrow 2p_0V_1 = n_2RT_0 \Rightarrow n_2 = \frac{2p_0V_1}{RT_0}$

+ Bình (3):  $p_0V_3 = n_3RT_0 \Leftrightarrow 3p_0V_1 = n_3RT_0 \Rightarrow n_3 = \frac{3p_0V_1}{RT_0}$

- Tổng số mol khí trong ba bình:  $N = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{6p_0V_1}{RT_0}$  (1)

Sau khi nhiệt độ trong ba bình đã thay đổi như đề bài cho biết, số mol trong các bình lần lượt bằng  $n'_1; n'_2; n'_3$

Ta có các phương trình:

Áp dụng phương trình Clapêrôn-Mendêlêep cho trạng thái đầu của khí, ta được:

+ Bình (1):  $pV_1 = n'_1RT_1 \Leftrightarrow pV_1 = \frac{n'_1RT_0}{2} \Rightarrow n'_1 = \frac{2pV_1}{RT_0}$

+ Bình (2):  $pV_2 = n'_2RT_2 \Leftrightarrow 2pV_1 = 2n'_2RT_2 \Rightarrow n'_2 = \frac{pV_1}{RT_0}$

+ Bình (3):  $pV_3 = n'_3RT_3 \Leftrightarrow 3p_0V_1 = 3n'_3RT_0 \Rightarrow n'_3 = \frac{p_0V_1}{RT_0}$

- Tổng số mol khí trong ba bình:  $N' = n'_1 + n'_2 + n'_3 = \frac{4p_0V_1}{RT_0}$  (2)

- Vì số mol khí bảo toàn nên:  $N' = N \Leftrightarrow \frac{4pV_1}{RT_0} = \frac{6p_0V_1}{RT_0}$

$\Rightarrow p = 1,5p_0 = 1,5at$

Vậy: áp suất cuối cùng của khí là  $p = 1,5at$

b) Khối lượng khí trong bình (2) ứng với nhiệt độ  $T_2$  và áp suất cuối cùng

- Ban đầu, bình (1) ở trạng thái  $T_0 = 273K$ ;  $p_0 = 1 at$ ;  $V_1 = 22,4l$  nên:

$$n_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{p_0V_1}{RT_0} = \frac{1.22,4}{0,084.273} = 1mol$$

- Số mol khí trong bình (2) dưới áp suất  $p = 1,5at$  và nhiệt độ  $T_2 = 2T_0$  là:

$$n'_2 = \frac{pV_1}{RT_0} = \frac{1,5p_0V_1}{RT_0} = 1,5.1 = 1,5mol$$

- Khối lượng khí nito trong bình (2) lúc này là:  $m_2 = n'_2\mu = 1,5.18 = 42g$

Vậy: Khối lượng khí trong bình (2) ứng với nhiệt độ  $T_2$  và áp suất cuối cùng là  $m_2 = 42g$

14. Một xilanh kín hai đầu đặt thẳng đứng, bên trong có một pittông cách nhiệt chia xilanh thành hai phần, mỗi phần chứa cùng một lượng khí ở nhiệt độ  $T_1 = 400K$ , áp suất  $p_2$  của phần khí nằm dưới pittông gấp hai lần áp suất  $p_1$  của phần khí nằm trên pittông. Cần nung nóng khí ở phần dưới đến nhiệt độ  $T_2$  bằng bao nhiêu để thể tích khí trong hai phần xi lanh bằng nhau?

(Trích đề thi Olympic 30-4.1996)

### Bài giải

Gọi  $n$  là số mol khí trong mỗi phần trước khi nung, áp dụng phương trình Clapêrôn-Mendêlêep cho mỗi phần, ta được:

$$p_1 V_1 = nRT_1; p_2 V_2 = nRT_1$$

$$\Leftrightarrow p_1 V_1 = 2p_1 V_2 \Rightarrow V_1 = 2V_2$$

- Theo đề, sau khi nung, ta có:

$$V_1' = V_2' = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{3}{4} V_1$$

- Vì nhiệt độ khí ở phần trên không đổi nên áp dụng định luật Bôilơ- Mariôt, ta được:

$$p_1 V_1 = p_1' V_1' \Rightarrow p_1' = \frac{4}{3} p_1$$

- Mặt khác, áp suất gây ra bởi pittông là:  $p = p_2 - p_1 = p_2' - p_1'$

$$\Rightarrow p_2' = p_1' + (p_2 - p_1) = p_1' + p_1 = \frac{7}{3} p_1$$

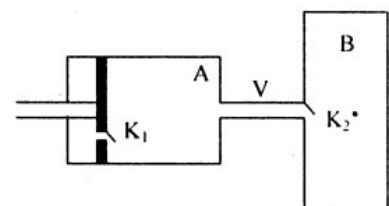
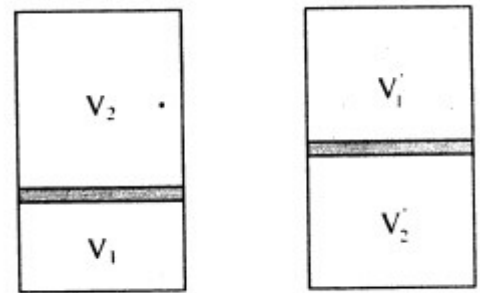
- Áp dụng phương trình trạng thái khí lí tưởng đối với lượng khí ở dưới pittông ta được:

$$\frac{p_2' V_2'}{T_2} = \frac{p_2 V_2}{T_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{p_2' V_2' T_1}{p_1 V_1} = \frac{\frac{7}{3} p_1 \cdot \frac{3}{4} V_1 T_1}{p_1 V_1} = \frac{7}{4} T_1 = \frac{7}{4} \cdot 400 = 700K$$

Vậy: Phải nung nóng khí ở phần dưới đến nhiệt độ  $T_2 = 700K$  để thể tích khí trong hai phần xi lanh bằng nhau.

15. Một bơm nén khí như hình bên, với  $V_A$  là thể tích của thân bơm;  $V$  là thể tích của vòi bơm;  $V_B$  là thể tích của bình không đổi B. Van  $K_1$  chỉ cho khí từ khí quyển vào bơm khi áp suất trong bơm nhỏ hơn áp suất khí quyển  $p_0$ , van  $K_2$  chỉ cho khí vào bình B khi áp suất trong bơm lớn hơn áp suất trong bình B. Nhiệt độ khí xem như không đổi.



a) Tìm áp suất của khí trong bình B sau lần bơm thứ nhất, thứ hai.

b) Áp suất cực đại đạt được bằng bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30-4, 1999)

### Bài giải

a) Áp suất của khí trong bình B sau lần bơm thứ nhất, thứ hai

- Sau lần bơm thứ  $(n - 1)$ , pittông ở vị trí (1),  $K_1$  mở,  $K_2$  đóng: áp suất trong bình B là  $p_B = p_{n-1}$ , áp suất trong bơm là  $p_0$ .

- Đẩy pittông đến vị trí (2), thể tích trong bơm là  $V'$ ,  $K_2$  vẫn đóng, áp suất khí là  $p_{n-1}$ , nhiệt độ khí không đổi.

- Áp dụng định luật Bôilơ - Mariôt cho hai trạng thái trên của khí trong bơm, ta được:

$$p_0(V_A + V) = p_{n-1}(V' + V)$$

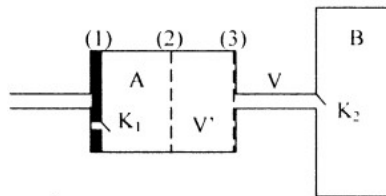
$$\Rightarrow V' = \frac{p_0(V_A + V)}{p_{n-1}} - V \quad (1)$$

- Đẩy pittông vào trong vị trí (2) khóa  $K_2$  bắt đầu mở. Khi pittông vào đến vị trí (3), khí trong bình B có áp suất  $p_n$ . Áp dụng định luật Bôilơ - Mariôt cho hai trạng thái trên của khí trong “vòi bơm và bình”, ta được:

$$p_n(V_B + V) = p_{n-1}(V' + V + V_B) \quad (2)$$

- Thay (1) vào (2) ta được:

$$p_n = p_{n-1} \left( 1 - \frac{V}{V_B + V} \right) + p_0 \left( \frac{V_A + V}{V_B + V} \right) \quad (3)$$



- Từ (3), ta có:

+ Với lần bơm thứ nhất ( $n = 1$ ):

$$p_1 = p_0 \left( 1 + \frac{V_A}{V_B + V} \right)$$

+ Với lần bơm thứ hai ( $n = 2$ ):  $p_2 = p_0 \left( 1 + \frac{2V_A}{V_B + V} - \frac{V_B V}{(V_B + V)^2} \right)$

Vậy: Áp suất của khí trong bình B sau lần bơm thứ nhất, thứ hai là:

$$p_1 = p_0 \left( 1 + \frac{V_A}{V_B + V} \right); \quad p_2 = p_0 \left( 1 + \frac{2V_A}{V_B + V} - \frac{V_B V}{(V_B + V)^2} \right)$$

b) Áp suất cực đại đạt được

- Áp suất cực đại đạt được khi  $p_n = p_{n-1}$

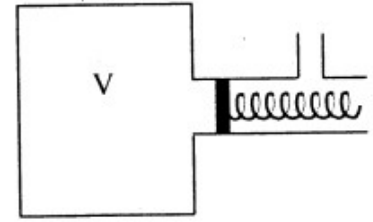
- Từ (3):  $p_n = p_{n-1} \Leftrightarrow p_{n-1} \left( 1 - \frac{V}{V_B + V} \right) + p_0 \left( \frac{V_A + V}{V_B + V} \right) = p_{n-1}$



$$\Leftrightarrow p_{n-1} \frac{V}{V_B + V} = p_0 \left( \frac{V_A + V}{V_B + V} \right) \Rightarrow p_{n-1} = \frac{V_A + V}{V} p_0 = p_{max}$$

Vậy: Áp suất cực đại đạt được là  $p_{max} = \frac{V_A + V}{V} p_0$

16. Một bình có thể tích V chứa 1 mol khí lí tưởng và một cái van bảo hiểm là một xilanh rất nhỏ so với bình. Trong xilanh có một pittông diện tích S giữ bằng lò xo có độ cứng k. Khi nhiệt độ của khí là  $T_1$  thì pittông ở cách lỗ thoát khí một đoạn l. Hỏi khi nhiệt độ của khí tăng lên tới giá trị  $T_2$  nào thì khí thoát ra ngoài?



(Trích đề thi Olympic 30-4, 2000)

### Bài giải

- Ở nhiệt độ  $T_1$ , khí có áp suất là  $p_1 = \frac{RT_1}{V}$ . Ta có:

$$F_k = F_d \Leftrightarrow p_1 S = kx \quad (1)$$

( $F_k$  là áp lực của khí cân bằng với lực đàn hồi của lò xo, x là độ co của lò xo)

- Ở nhiệt độ  $T_2 > T_1$  khí có áp suất là  $p_2 = \frac{RT_2}{V} > p_1$  làm lò xo có độ co ( $x+l$ ) và khí thoát ra ngoài.

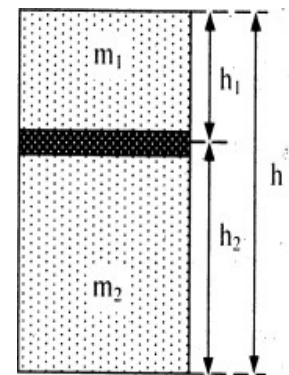
$$\text{Ta có: } p_2 S = k(x+l) \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1), (2) ta được: } S(p_2 - p_1) = kl \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{RT_2}{V} - \frac{RT_1}{V} \right) S = kl \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{k l V}{R S}$$

Vậy: Khi nhiệt độ của khí tăng lên với giá trị  $T_2 = T_1 + \frac{k l V}{R S}$  thì khí thoát ra ngoài.

17. Một xilanh kín hình trụ chiều cao h, tiết diện  $S = 100\text{cm}^2$  đặt thẳng đứng. Xilanh được chia làm hai phần nhờ một pittông cách nhiệt khối lượng  $m = 500\text{g}$ . Khí trong hai phần là cùng loại, ở cùng nhiệt độ  $27^\circ\text{C}$  và có khối lượng là  $m_1, m_2$ , với  $m_2 = 2m_1$ . Pittông cân bằng khi ở cách đáy dưới của xilanh đoạn  $h_2 = \frac{3h}{5}$



a) Tính áp suất khí trong hai phần của xi lanh? Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .

b) Để pittông cách đều hai đáy xi lanh thì phải nung nóng phần nào, đến nhiệt độ bao nhiêu? Biết phần còn lại giữ ở nhiệt độ không đổi.

(Trích đề thi Olympic 30-4, 2002)

### Bài giải

a) Áp suất khí trong hai phần của xi lanh

- Áp dụng phương trình Clapêrôn-Mendêlêep cho khí trong hai phần ở nhiệt độ  $T_1 = 300K$ , ta được:

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \\ p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \cdot 0,4V = \frac{m_1}{M} RT_1 \\ p_2 \cdot 0,6V = \frac{m_2}{M} RT_2 \end{cases}$$

- Chia vế theo vế hai phương trình của hệ trên, ta được  $\frac{0,4p_1}{0,6p_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{4}{3} p_1 \quad (1)$$

- Khi pittông cân bằng:  $p_1 S + mg = p_2 S$  (S: tiết diện của pittông)

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{mg}{S} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2), ta được: 
$$\begin{cases} p_1 = \frac{3mg}{S} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 10}{0,01} = 15 \cdot 10^2 (N/m^2) \\ p_2 = \frac{4mg}{S} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 10}{0,01} = 20 \cdot 10^2 (N/m^2) \end{cases}$$

Vậy: Áp suất khí trong hai phần của xilanh là  $p_1 = 15 \cdot 10^2 (N/m^2)$  và  $p_2 = 20 \cdot 10^2 (N/m^2)$

b) Nhiệt độ phải nung nóng một phần khí

- Do  $h_1 < h_2$  nên ta phải nung nóng phần khí ở trên (phần 1). Lúc đó, phần khí ở dưới có nhiệt độ không đổi, áp dụng định luật Bôilơ-Mariôt, ta được:

$$p_2 V_2 = p_2' V_2' \Leftrightarrow p_2 S h_2 = p_2' S h_2'$$

- Với  $h_2 = 0,6h$  và  $h_2' = 0,5h \Rightarrow p_2' = \frac{6}{5} p_2 = \frac{6}{5} \cdot 20 \cdot 10^2 = 24 \cdot 10^2 (N/m^2)$

- Từ (2) suy ra:  $p_1' = p_2' - \frac{mg}{S} = 24 \cdot 10^2 - \frac{0,5 \cdot 10}{0,01} = 19 \cdot 10^2 (N/m^2)$

- Áp dụng phương trình trạng thái cho khối khí ở trên, ta được:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1' V_1'}{T_1'} \Rightarrow T_1' = \frac{p_1' V_1'}{p_1 V_1} \cdot T_1$$

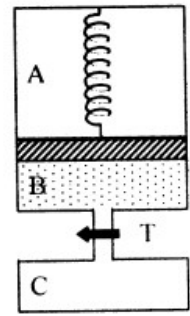
$$\Rightarrow T_1' = \frac{p_1'}{p_1} \cdot \frac{0,5V}{0,4V} T_1 = \frac{19 \cdot 10^2}{15 \cdot 10^2} \cdot \frac{0,5}{0,4} = 475 K$$

- Nhiệt độ của phần ở trên sau khi nung nóng:

$$t_1' = T_1' - 273 = 475 - 273 = 202^\circ C$$

Vậy: Để pittông cách đều hai đáy xilanh thì phải nung nóng phần trên đến nhiệt độ  $t_1' = 202^\circ C$

18. Trong xilanh như hình vẽ, pittông nặng có thể chuyển động không ma sát, đồng thời chia xilanh thành hai phần A và B. Phía dưới xilanh nối với một bình C thông qua một ống nhỏ có khóa T. C có cùng tiết diện với B. Pittông được nối với thành trên của xilanh bằng một lò xo nhẹ. Khi pittông nằm sát thành dưới của xilanh thì lò xo không biến dạng. Lúc đầu khóa T đang đóng. Trong B chứa một lượng khí; trong A và C là chân không. Chiều cao của phần B là  $l_1$ ; thể tích của hai phần B và C là bằng nhau. Lực do lò xo tác dụng lên pittông khi ấy có độ lớn bằng trọng lượng của pittông.



Mở khóa T đồng thời lật ngược hệ lại. Hỏi khi pittông cân bằng thì chiều cao  $l_2$  của phần B là bao nhiêu? Cho biết nhiệt độ khí không đổi.

(Trích đề thi Olympic 30-4, 2009)

### Bài giải

Gọi  $m$  là khối lượng của pittông;  $k$  là độ cứng của lò xo;  $S$  là tiết diện của xilanh;  $p_0$  là áp suất của khí trong phần B lúc đầu.

- Lúc đầu, khi pittông cân bằng:  $p_0 S = mg + kl_1$

Theo đề:  $kl_1 = mg$  (1)

$\Rightarrow p_0 S = 2kl_1 \Rightarrow p_0 = \frac{2kl_1}{S}$  (2)

- Khi mở khóa T và lật ngược hệ lại. Lúc đó, B và C có cùng áp suất khí là  $p$ . Áp dụng định luật Bôilơ – Mariôt, ta được:

$p_0 l_1 S = p(l_1 + l_2) S \Rightarrow p = \frac{l_1}{l_1 + l_2} p_0$  (3)

- Thay (2) vào (3) ta được:  $p = \frac{2kl_1^2}{(l_1 + l_2) S}$  (4)

- Khi pittông cân bằng:  $pS + mg = kl_2$  (5)

- Thay (1) và (4) vào (5), ta được:  $\frac{2kl_1^2}{(l_1 + l_2)} + kl_1 = kl_2$

$\Leftrightarrow \frac{2l_1^2}{l_1 + l_2} + l_1 = l_2 \Rightarrow l_2 = l_1 \sqrt{3}$

Vậy: Khi pittông cân bằng thì chiều cao  $l_2$  của phần B là  $l_2 = l_1 \sqrt{3}$

19. Một pittông nặng ở vị trí cân bằng trong một bình hình trụ kín. Phía trên và phía dưới pittông có khí, khối lượng và nhiệt độ của khí ở trên và ở dưới pittông là như nhau. Ở nhiệt độ  $T$  thì thể tích khí ở phần trên gấp 3 lần thể tích khí ở phần dưới. Nếu tăng nhiệt độ lên  $2T$  thì tỉ số hai thể tích ấy là bao nhiêu?

Bỏ qua ma sát giữa thành bình và pittông.

### Bài giải

Gọi  $p_0$  là áp suất của khí ở phía trên pittông, áp suất của phần khí ở phía dưới pittông là  $(p_0 + p)$  khi nhiệt độ khí là  $T$ , với  $p$  là áp suất tạo nên do trọng lượng của pittông.

- Áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép đối với mỗi phần khí ta được:

$$+ \text{Đối với phần khí ở phía trên: } p_0 3V_0 = \frac{m}{\mu} RT \quad (1)$$

$$+ \text{Đối với phần khí ở phía dưới: } (p_0 + p)V_0 = \frac{m}{\mu} RT \quad (2)$$

$$- \text{Từ (1) và (2), ta được: } p_0 3V_0 = (p_0 + p)V_0 \Rightarrow p = 2p_0$$

Gọi  $p'$  là áp suất của khí ở phía trên pittông khi nhiệt độ khí là  $2T$ , khi đó áp suất của phần khí ở phía dưới pittông là  $(p' + p)$ . Khi nhiệt độ khí  $2T$  thì thể tích khí  $p$  phía trên và phía dưới lần lượt là  $V_t, V_d$

- Áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép cho hai trạng thái (trạng thái 1: nhiệt độ khí là  $T$ , trạng thái 2: nhiệt độ khí là  $2T$ ):

$$+ \text{Đối với phần khí ở phía trên: } \frac{p'V_t}{2T} = \frac{p_0 3V_0}{T} \Rightarrow V_t = \frac{6p_0}{p'} V_0$$

$$+ \text{Đối với phần khí ở phía dưới: } \frac{(p' + 2p_0)V_d}{2T} = \frac{p_0 3V_0}{T} \Rightarrow V_d = \frac{6p_0}{p' + 2p_0} V_0$$

$$- \text{Vì thể tích khí không đổi nên: } V_t + V_d = V_0 + 3V_0 = 4V_0 = V$$

$$\frac{6p_0}{p'} V_0 + \frac{6p_0}{p' + 2p_0} V_0 = 4V_0 \Leftrightarrow p^2 - p' p_0 - 3p_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow p' = \frac{1}{2}(p_0 \pm \sqrt{13}p_0) \text{ với } p' > 0$$

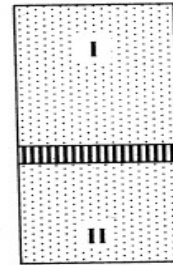
$$\Rightarrow p' = \frac{1}{2}(p_0 + \sqrt{13}p_0) = 2,3p_0$$

- Tỉ số thể tích phần khí phía trên và dưới pittông là:

$$\frac{V_t}{V_d} = \frac{\frac{6p_0}{p'} V_0}{\frac{6p_0}{p' + 2p_0} V_0} = \frac{p' + 2p_0}{p'} = \frac{4,3p_0}{2,3p_0} = 1,87$$

Vậy: Tỉ số thể tích phần khí phía trên và dưới pittông là  $\frac{V_t}{V_d} = 1,87$

20. Một xilanh thẳng đứng kín hai đầu, trong xilanh có một pittông khối lượng  $m$  có thể trượt không ma sát trong lòng xi lanh. Ở trên và dưới pittông có hai lượng khí như nhau. Ban đầu nhiệt độ khí trong hai phần là  $27^\circ\text{C}$  thì tỉ số thể tích khí ở phần trên và phần dưới là  $\frac{V_1}{V_2} = 4$ . Hỏi nếu nhiệt độ khí trong hai phần tăng lên đến  $327^\circ\text{C}$  thì tỉ số thể tích



khí ở phần trên và phần dưới  $\frac{V_1'}{V_2'}$  là bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30-4, 2012)

### Bài giải

- Vì các quá trình là đẳng nhiệt nên ta có thể đặt

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = n = 4; \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{p_2'}{p_1'} = m$$

- Vì pittông nằm cân bằng nên: 
$$\begin{cases} p_1 S + mg = p_2 S \\ p_1' S + mg = p_2' S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_1' = p_2 - p_2' \Leftrightarrow p_2 - p_1 = p_2' - p_2'$$

$$\Leftrightarrow (n-1)p_1 = (m-1)p_1' \Rightarrow \frac{p_1'}{p_1} = \frac{n-1}{m-1} \quad (1)$$

- Mặt khác,  $V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \Leftrightarrow V_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = V_1' \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} V_1 = \frac{m+1}{m} V_1' \Rightarrow \frac{V_1'}{V_1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n+1}{m+1} \quad (2)$$

- Áp dụng phương trình trạng thái cho lượng khí trên, ta được:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_1' V_1'}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_1'}{p_1} \cdot \frac{V_1'}{V_1} \quad (3)$$

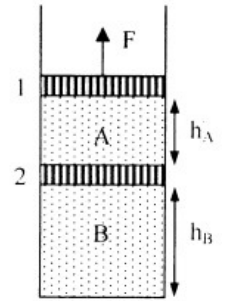
- Thay (1), (2) vào (3) ta được: 
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n+1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{327+273}{27+273} = \frac{4-1}{m-1} \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{4+1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{3}{m-1} \cdot \frac{5m}{4(m+1)} \Leftrightarrow 8m^2 - 15m - 8 = 0 \Rightarrow m = 2,3$$

Vậy: Tỉ số  $\frac{V_1'}{V_2'} = 2,3$

21. Một bình bằng kim loại hình trụ tròn đặt cố định trên mặt sàn nằm ngang, bên trong có hai pittông (1) và (2) nhẹ, có thể chuyển động tự do. Các pittông chia bình chứa thành hai ngăn A và B. Các ngăn cùng chứa một loại khí lí tưởng ở cùng nhiệt độ. Khi cân bằng, độ cao của cột khí ở ngăn A và ngăn B lần lượt là  $h_A = 10\text{cm}$  và  $h_B = 20\text{cm}$ . Diện tích tiết diện ngang của mỗi pittông là  $S = 10\text{cm}^2$ . Dưới tác dụng của lực kéo  $F$  không đổi, pittông (1) di chuyển lên trên theo phương thẳng đứng một đoạn  $\Delta h_A = 3\text{cm}$ . Cho biết lúc pittông (1) di chuyển, nhiệt độ của các khối khí luôn không đổi và áp suất khí quyển là  $p_0 = 10^5\text{Pa}$ .



a) Xác định độ lớn lực kéo  $F$ .

b) Trong quá trình pittông (1) dịch chuyển lên thì pittông (2) dịch chuyển một đoạn bằng bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30-4, 2013)

### Bài giải

a) Độ lớn lực kéo  $F$

Ta có:  $p_A = p_B = p(m_2 = 0)$

- Áp dụng phương trình Clapêrôn - Mendêlêép cho hai khối khí, ta được:

$$+ \text{Ban đầu: } \begin{cases} p_A V_A = n_A RT \\ p_B V_B = n_B RT \end{cases} \Leftrightarrow p(V_1 + V_2) = pV = (n_A + n_B)RT \quad (1)$$

$$+ \text{Sau khi pittông (1) dịch chuyển đoạn } \Delta h: p'V' = (n_A + n_B)RT \quad (2)$$

$$(V = V_A + V_B; V' = V'_A + V'_B)$$

- Vì các quá trình là đẳng nhiệt nên từ (1) và (2), ta được:  $pV = p'V'$

$$\Leftrightarrow p(h_A + h_B)S = p'(h_A + h_B + \Delta h)S$$

$$\Leftrightarrow (10 + 20)p = (10 + 20 + 3)p' \Rightarrow p' = \frac{10}{11}p$$

$$- \text{Khi chưa tác dụng lực } F \text{ thì: } p_0 = p_A(m_1 = 0) \Rightarrow p' = \frac{10}{11}p_0$$

- Trạng thái cân bằng sau khi pittông (1) dịch chuyển đoạn  $\Delta h$ :

$$F = (p_0 - p')S = \left(1 - \frac{10}{11}\right)p_0 S = \frac{1}{11}p_0 S = \frac{1}{11} \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 9,1\text{N}$$

Vậy: Độ lớn của lực kéo  $F = 9,1\text{N}$

b) Độ dịch chuyển của pittông (2)

$$\text{Ta có: } \frac{V_A}{V_B} = \frac{V'_A}{V'_B} = \frac{n_A}{n_B} \Leftrightarrow \frac{h_A}{h_B} = \frac{h'_A}{h'_B} = \frac{\Delta h_A}{\Delta h_B} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta h_B = 2\Delta h_A = 2 \cdot 3 = 6\text{cm}$$

Vậy: Độ dịch chuyển của pittông (2) là  $\Delta h_B = 6\text{cm}$

22. Một khí lí tưởng biến đổi theo chu trình 1-4-2-1 (hình vẽ). Tìm biểu thức tính  $p_3$ ?

**Bài giải**

- Xét quá trình 3 – 4:

$$V = ap \Rightarrow a = \frac{V}{p} = const$$

Ta có: Tại 4:  $a = \frac{V_2}{p_2}$ ; tại 3:  $V_3 = \frac{V_1}{V_2} p_3$

- Xét quá trình 1 – 3 – 2:  $V = a'p + b$

+ Tại 1:  $V_1 = a'p_1 + b$ ; tại 2:  $V_2 = a'p_2 + b$

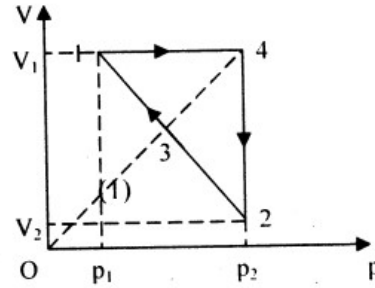
$$\Rightarrow a' = \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2}; b = V_1 - a'p_1 = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2} p_1 = \frac{V_2 p_1 - V_1 p_2}{p_1 - p_2}$$

+ Tại 3:  $V_3 = a'p_3 + b = \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2} p_3 + \frac{V_2 p_1 - V_1 p_2}{p_1 - p_2}$  (2)

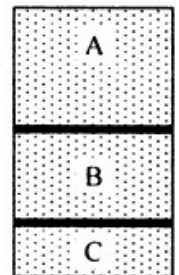
- Từ (1) và (2):  $\frac{V_1}{V_2} p_3 = \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2} p_3 + \frac{V_2 p_1 - V_1 p_2}{p_1 - p_2}$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{\frac{V_2 p_1 - V_1 p_2}{p_1 - p_2}}{\frac{V_1}{V_2} - \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2}} = \frac{p_2 (V_2 p_1 - V_1 p_2)}{V_1 p_1 + V_2 p_2 - 2V_1 p_2}$$

Vậy: Biểu thức tính  $p_3$  là  $p_3 = \frac{p_2 (V_2 p_1 - V_1 p_2)}{V_1 p_1 + V_2 p_2 - 2V_1 p_2}$



23. Một xilanh kín, đặt thẳng đứng, bên trong có hai pittông có thể trượt không ma sát. Các khoảng A, B, C có chứa những khối lượng bằng nhau của cùng một chất khí lí tưởng. Khi nhiệt độ chung của hệ là 24°C thì các pittông đứng yên và các khoảng tương ứng A, B, C có thể tích là 5l, 3l và 1l. Sau đó tăng nhiệt độ của hệ tới giá trị T thì các pittông có vị trí cân bằng mới. Lúc đó  $V'_B = 2V'_C$ . Xác định nhiệt độ T và thể tích  $V'_A$



**Bài giải**

Gọi  $m_1$  là khối lượng của pittông trên (giữa A và B) và  $m_2$  là khối lượng của pittông dưới (giữa B và C)

- Ở nhiệt độ  $T_0$  ta có:

$$\begin{cases} m_1 g = (p_B - p_A) S \\ m_2 g = (p_C - p_B) S \\ p_A V_A = p_B V_B = p_C V_C = nRT_0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{- Từ (I): } \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_B - p_A}{p_C - p_B} = \frac{p_B \left(1 - \frac{V_B}{V_A}\right)}{-p_B \left(1 - \frac{V_B}{V_C}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{3}{5}\right)}{-\left(1 - \frac{3}{1}\right)} = \frac{1}{5} \quad (1)$$

- Ở nhiệt độ T, ta có:

$$\begin{cases} m_1 g = (p'_B - p'_A)S \\ m_2 g = (p'_C - p'_B)S \\ p'_A V'_A = p'_B V'_B = p'_C V'_C = nRT \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{- Tương tự, từ (II): } \frac{m_1}{m_2} = 1 - \frac{V'_B}{V'_A} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2): } \frac{1}{5} = 1 - \frac{V'_B}{V'_A} \Rightarrow \frac{V'_B}{V'_A} = \frac{4}{5}$$

$$\text{- Vì } V'_A + V'_B + V'_C = V = 9l \Leftrightarrow V'_A + \frac{4}{5}V'_A + \frac{2}{5}V'_A > V'_A = \frac{45}{11}l \text{ và } V'_B = \frac{36}{11}l$$

- Áp dụng phương trình trạng thái cho khí ở khoang A, ta được:

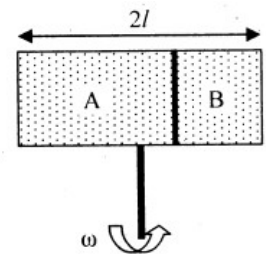
$$\frac{p_A V_A}{T_0} = \frac{p'_A V'_A}{T} \text{ với } (p_B - p_A)S = (p'_B - p'_A)S$$

$$\frac{p'_A}{p_A} = \frac{V_A}{V'_A} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{5}{45} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{55}{45} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow T = \frac{8}{3} \cdot \frac{45}{55} T_0 = \frac{120}{55} (24 + 273) = 648K$$

Vậy: Nhiệt độ và thể tích khoang A ở cuối quá trình là  $T = 648K$  và  $V'_A = \frac{45}{11}l$

24. Một xi lanh nằm ngang dài  $2l$  hai đầu kín, không khí trong xi lanh được chia làm hai phần bằng nhau bởi một pittông mỏng khối lượng  $m$ . Mỗi phần có thể tích  $V_0$ , áp suất  $p_0$ . Cho xi lanh quay xung quanh trục thẳng đứng ở giữa xi lanh với vận tốc góc  $\omega$ . Tìm  $\omega$  nếu pittông cách trục quay đoạn  $r$  khi có cân bằng tương đối. Xem nhiệt độ khí trong xi lanh không đổi.



### Bài giải

Gọi S là tiết diện xi lanh.

- Khi xi lanh đứng yên, khí trong mỗi phần có áp suất  $p_0$  và thể tích  $V_0 = lS$

- Khi quay xi lanh với vận tốc góc  $\omega$ , ta có:

+ Bình A:  $p_2; V_2 = (1+r)S$



+ Bình B:  $p_1; V_1 = (1-r)S$

- Áp dụng định luật Bôilơ - Mariôt cho khí trong mỗi phần, ta được:

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 \Rightarrow p_1 = \frac{p_0 l}{1-r}$$

$$p_2 V_2 = p_0 V_0 \Rightarrow p_2 = \frac{p_0 l}{1+r}$$

- Lực tác dụng lên pittông theo phương ngang:  $F_2 = p_2 S; F_1 = p_1 S$

- Khí xilanh quay đều:  $F_1 - F_2 = m a_{ht}$

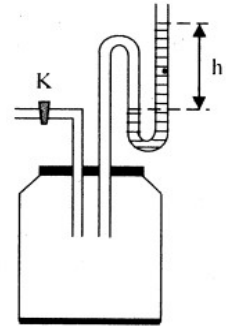
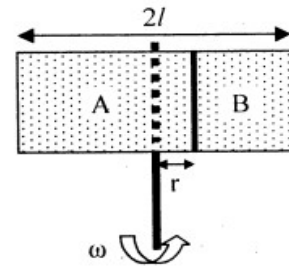
$$\frac{p_0 l}{1-r} S - \frac{p_0 l}{1+r} S = m \omega^2 r \Leftrightarrow p_0 V_0 \left( \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r} \right) = m \omega^2 r$$

$$p_0 V_0 \frac{2r}{l^2 - r^2} = m \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 p_0 V_0}{m(l^2 - r^2)}}$$

Vậy: Vận tốc góc của xilanh là  $\omega = \sqrt{\frac{2 p_0 V_0}{m(l^2 - r^2)}}$

25. Một bình đủ lớn chứa không khí thông với một áp kế chất lỏng dạng hình chữ U thể tích không đáng kể và thông với môi trường ngoài nhờ khóa K. Thoạt đầu khóa K đóng áp suất trong bình cao hơn áp suất khí quyển chút ít và chênh lệch các mức chất lỏng trong áp kế là  $h$ . Mở khóa K và đóng lại ngay, một lát sau thấy độ chênh lệch của các mức chất lỏng đạt giá trị ổn định là  $h'$ .

Xác định tỉ số  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  của không khí theo  $h$  và  $h'$ .



### Bài giải

Sau khi mở khóa K, khí ở trong bình có áp suất lớn hơn bên ngoài nên nó dẫn nở đoạn nhiệt và có một lượng khí thoát ra ngoài. Giả sử lượng khí còn lại trong bình lúc mở khóa có khối lượng là  $m_2$  chiếm thể tích  $V_2$  thì trước lúc mở khóa K nó có thể tích là  $V_1$ .

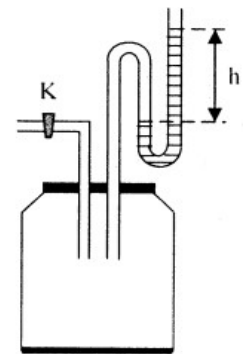
Gọi  $D$  là trọng lượng riêng của chất lỏng trong áp kế. Ta có:

$$(p_0 + Dh) V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma, \text{ (quá trình đoạn nhiệt)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p_0 + Dh)^\gamma V_1^\gamma}{(p_0 + Dh)^{\gamma-1}} = \frac{p_0^\gamma V_2^\gamma}{p_0^{\gamma-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p_0 + Dh)^\gamma V_1^\gamma}{p_0^\gamma V_2^\gamma} = \frac{(p_0 + Dh)^{\gamma-1}}{p_0^{\gamma-1}} = \frac{(RT_1)^\gamma}{(RT_2)^\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p_0 + Dh)^{\gamma-1}}{T_1^\gamma} = \frac{p_0^{\gamma-1}}{T_2^\gamma}$$



$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_0 + Dh}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{(p_0 + Dh)^{1-\frac{1}{\gamma}}}{p_0} \quad (1)$$

- Sau khi đóng khóa K, nhiệt độ của khí trong bình là  $T_2$  tăng dần tới nhiệt độ ban đầu  $T_1$ . Quá trình này là quá trình đẳng tích nên ta có:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_0 + Dh'}{p_0} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2): } \left( \frac{p_0 + Dh}{p_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{p_0 + Dh'}{p_0} \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{Dh}{p_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 1 + \frac{Dh'}{p_0}$$

$$\text{Vì } \frac{h}{p_0} \ll 1 \text{ nên ta có } \left( 1 + \frac{Dh}{p_0} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \approx 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{Dh}{p_0}$$

$$\text{Từ đó: } \frac{\gamma-1}{\gamma} h = h' \Rightarrow \gamma = \frac{h}{h-h'}$$

$$\text{Vậy: Tỉ số } \gamma = \frac{h}{h-h'}$$