2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 1: CHUYỂN ĐỘNG THẲNG ĐỀU

1. Hai xe chuyển động thẳng đều trên cùng một đường thẳng với các vận tốc không đổi: $v_1 = 40\left(km/h\right)$ và $v_2 = 60\left(km/h\right)$. Tính độ giảm khoảng cách giữa hai xe sau $1,5h$ khi:

- hai xe chuyển động ngược chiều.
- hai xe chuyển động cùng chiều.

Bài giải

- Chọn chiều dương là chiều chuyển động của mỗi xe. Ta có: $s_1 = v_1 t; s_2 = v_2 t$.
- Khi hai xe chuyển động ngược chiều: $\Delta s = s_1 + s_2 = \left(v_1 + v_2\right)t$.
- Khi hai xe chuyển động cùng chiều: $\Delta s' = \left|s_1 - s_2\right| = \left(v_2 - v_1\right)t$.

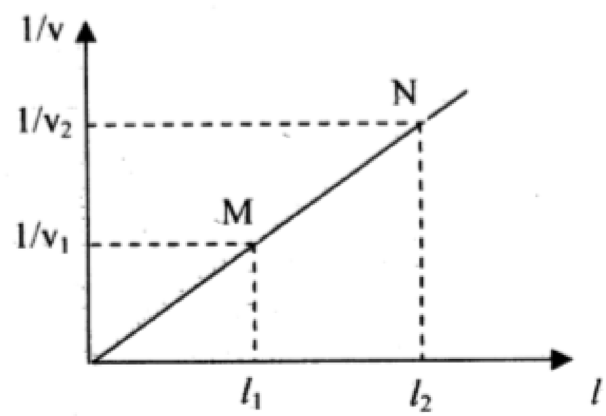
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta s = \left(40+60\right).1,5 = 150km \\ \Delta s' = \left(60-40\right).1,5 = 30km \end{cases}$$

Vậy: Độ giảm khoảng cách giữa hai xe khi hai xe chuyển động ngược chiều là $150km$ và khi hai xe chuyển động cùng chiều là $30km$.

2. Một con kiến chạy ra từ một lỗ nhỏ thông xuống tổ kiến dưới lòng đất, kiến chạy theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tỉ lệ thuận với khoảng cách đến lỗ nhỏ. Tại thời điểm mà con kiến cách lỗ nhỏ một khoảng $l_1 = 1m$ thì vận tốc của nó là $v_1 = 2\left(cm/s\right)$. Sau thời gian bao lâu, kiến sẽ cách lỗ nhỏ một khoảng $l_2 = 2m$?

Bài giải

Vì vận tốc của kiến tỉ lệ nghịch với khoảng cách nên nghịch đảo của vận tốc sẽ tỉ lệ thuận với khoảng cách, do đó đồ thị biểu diễn phụ thuộc của $\frac{1}{v}$ vào l là một đường thẳng qua gốc tọa độ như hình trên. Diện tích hình thang MNl_2l_1 nằm dưới đồ thị từ l_1 đến l_2 sẽ có số đo bằng thời gian mà kiến chuyển động từ khoảng cách l_1 đến l_2 và bằng: $S = t = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right)$.

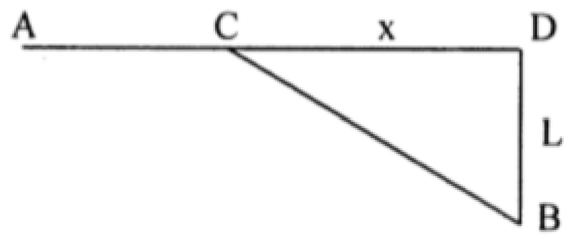


- Trên đồ thị, ta có: $\tan\alpha = \frac{1}{v_1 l_1} = \frac{1}{v_2 l_2} \Leftrightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{l_2}{v_1 l_1}$.

– Thời gian chuyển động của kiến từ khoảng cách l_1 đến l_2 là: $t=\frac{l_2^2-l_1^2}{2v_1l_1}=75s$.

Vậy: Sau $75s$, kiến sẽ cách lỗ nhỏ một khoảng $l_2=2m$.

3. Một xe đạp xuất phát từ một điểm A trên đường cái để trong một khoảng thời gian ngắn nhất đi đến một điểm B nằm trên cánh đồng (hình vẽ).



Khoảng cách từ B đến đường cái bằng L.

Vận tốc của xe đạp chạy trên cánh đồng nhỏ hơn n lần $(n>1)$ so với vận tốc của nó khi chạy trên đường cái. Hỏi xe đạp phải rời đường cái từ một điểm C cách D một khoảng x bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1997)

Bài giải

Gọi v_1, v_2 là vận tốc xe đạp khi đi trên đường cái và khi đi trên cánh đồng $(v_1=nv_2)$.

– Thời gian vật đi từ A đến C rồi đến B: $t=\frac{AD-x}{v_1}+\frac{\sqrt{x^2+L^2}}{v_2}=\frac{AD.v_2+v_1\sqrt{x^2+L^2}-v_2x}{v_1v_2}$.

– Vì AD, v_1, v_2 không đổi nên $t=t_{\min}$ khi $y=y_{\min}$, với $y=v_1\sqrt{x^2+L^2}-v_2x$.

– Ta có: $y=v_1\sqrt{x^2+L^2}-v_2x \Leftrightarrow \left(v_1^2-v_2^2\right)x^2-2yv_2x+v_1^2L^2-y^2=0$.

– Quan hệ x và y chỉ có ý nghĩa khi phương trình có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$.

$\Leftrightarrow \Delta'=y^2v_2^2-\left(v_1^2L^2-y^2\right)\left(v_1^2-v_2^2\right)\geq 0 \Rightarrow y^2 \geq L^2\left(v_1^2-v_2^2\right)$.

– Thời gian $t=t_{\min}$ khi $y=y_{\min}$.

Lúc đó: $y_{\min}=L\sqrt{v_1^2-v_2^2}$ ứng với nghiệm kép của $x: x=\frac{Lv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}=\frac{L}{\sqrt{n^2-1}}$.

Vậy: Để đi đến B trong khoảng thời gian ngắn nhất người đó phải đi từ C cách D đoạn $x=\frac{Lv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}=\frac{L}{\sqrt{n^2-1}}$.

4. Hai ca nô A và B xuất phát đồng thời từ một cái phao neo chặt ở giữa một dòng sông rộng. Các ca-nô chuyển động sao cho quỹ đạo của chúng là hai đường thẳng vuông góc với nhau, ca-nô A đi dọc theo bờ sông. Sau khi đi được cùng quãng đường L đối với phao, hai ca nô lập tức quay trở về phao. Cho biết độ lớn vận tốc của mỗi ca nô đối với nước luôn gấp n lần vận tốc của dòng nước so với bờ. Gọi thời gian chuyển động đi và về của mỗi ca nô A và B lần lượt là t_A và t_B. Hãy xác định tỉ số $\frac{t_A}{t_B}$.

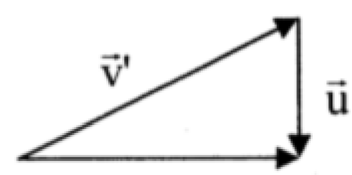
(Trích đề thi Olympic 30/4, 2001)

Bài giải

– Vận tốc của ca-nô A đối với nước sẽ là $v' = nu$.

– Thời gian đi về của ca nô A dọc theo bờ sông:

$$t_A = \frac{L}{u(n+1)} + \frac{L}{u(n-1)} = \frac{2Ln}{u(n^2-1)} \quad (1).$$

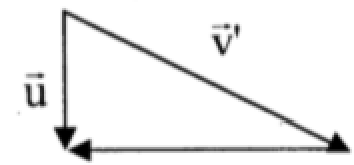


Hình a

– Để quỹ đạo ngang sông chiếc ca-nô B lúc đi phải hướng theo vận tốc v' như hình a, còn lúc về phải hướng theo vận tốc v' như hình b. Vận tốc của ca-nô B đi ngang sông là: $v = \sqrt{(nu)^2 - u^2} = u\sqrt{n^2-1}$.

– Thời gian đi về của canô B là: $t_B = \dfrac{2L}{v} = \dfrac{2L}{u\sqrt{n^2-1}} \quad (2)$.

– Từ (1) và (2), ta có: $\dfrac{t_A}{t_B} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.



Hình b

Vậy: Tỉ số $\dfrac{t_A}{t_B} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

5. Hai tàu thủy A và B ở trên cùng một kinh tuyến. Tàu A ở phía Bắc của B và cách B một khoảng d_0. Tàu A chuyển động đều về phía Đông với vận tốc v_A, tàu B chuyển động đều lên phía Bắc với vận tốc v_B. Độ cong của mặt biển không đáng kể.

a) Định khoảng cách cực tiểu giữa tàu A và tàu B.

b) Tàu B phải chạy theo hướng nào để bắt kịp tàu A. Định thời gian rượt đuổi. Các tàu đều chuyển động theo quỹ đạo thẳng.

Bài giải

a) Khoảng cách cực tiểu giữa hai tàu

Chọn gốc tọa độ ở A, hệ tọa độ xAy như hình vẽ.

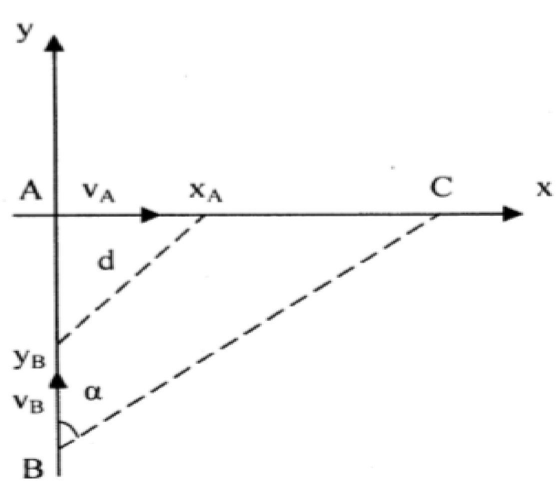
Ta có: $x_A = v_A t;\ y_B = -d_0 + v_B t$.

– Khoảng cách hai tàu là d, với $d^2 = x_A^2 + y_B^2$.

$$\Leftrightarrow d^2 = \left(v_A^2 + v_B^2\right)t^2 - 2d_0 v_B t + d_0^2.$$

– Tam thức bậc hai theo t trên cho:

$$d_{\min}^2 = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{d_0^2 v_A^2}{v_A^2 + v_B^2} \Rightarrow d_{\min} = \frac{d_0 v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}.$$



Vậy: Khoảng cách cực tiểu giữa hai tàu là: $d_{\min} = \dfrac{d_0 v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}$.

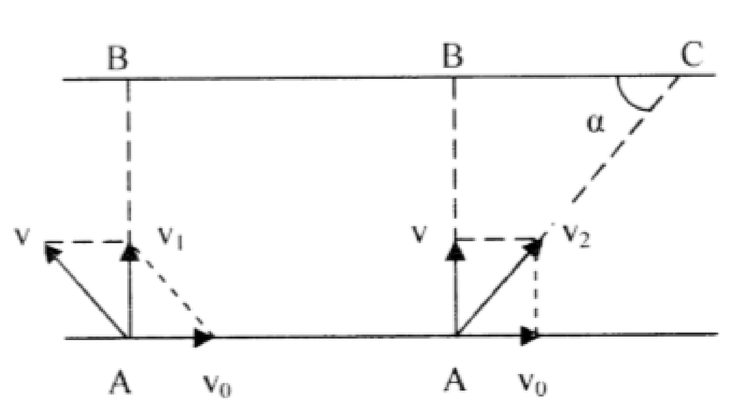
b) Hướng chạy của tàu B và thời gian rượt đuổi.

- Giả sử hai tàu gặp nhau ở C, với $\alpha = \left(\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}}\right); \sin\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{v_A t}{v_B t} = \dfrac{v_A}{v_B}$.
- Điều kiện: $\sin\alpha < 1 \Rightarrow v_A < v_B$.
- Thời gian rượt đuổi: $T = \dfrac{BC}{v_B} = \dfrac{\dfrac{AB}{\cos\alpha}}{v_B} = \dfrac{d_0}{v_B\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{d_0}{v_B\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{v_B^2}}}$.

Vậy: Tàu B phải chạy theo hướng hợp với hướng AB một góc α với $\sin\alpha = \dfrac{v_A}{v_B}$ và thời gian rượt đuổi là $T = \dfrac{d_0}{v_B\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{v_B^2}}}$.

6. Hai người bơi xuất phát từ một điểm A trên bờ sông và phải đến điểm B ở bờ bên kia, đối diện A. Người thứ nhất phải bơi theo hướng để đến điểm B, còn người thứ hai phải bơi theo hướng vuông góc với dòng chảy rồi khi đến bờ tại điểm C phải chạy ngược trở lại với vận tốc u để về đến điểm B. Tìm u để hai người đến B cùng lúc. Biết vận tốc dòng chảy $v_0 = 2km/h$, vận tốc của hai người bơi đối với nước là $v = 2,5km/h$.

Bài giải



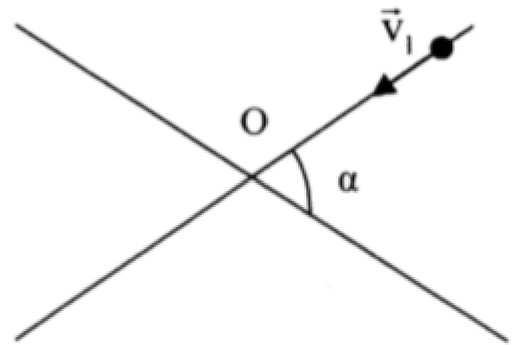
- Thời gian bơi của người thứ nhất: $t = \dfrac{AB}{v_1} = \dfrac{AB}{\sqrt{v^2 - v_0^2}}$ (1).
- Thời gian bơi của người thứ hai: $t_1 = \dfrac{AC}{v_2} = \dfrac{AB}{v}$ (2).
- Thời gian của người thứ hai chạy từ C đến B: $t_2 = \dfrac{BC}{u} = \dfrac{AB}{u\tan\alpha} = \dfrac{AB}{u}.\dfrac{v_0}{v}$ (3).
- Để hai người đến B cùng lúc: $t = t_1 + t_2$.

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{\sqrt{v^2-v_0^2}}=\frac{AB}{v}+\frac{AB}{u}.\frac{v_0}{v}$$

$$\Rightarrow u=\frac{v_0\sqrt{v^2-v_0^2}}{v-\sqrt{v^2-v_0^2}}=\frac{2\sqrt{2,5^2-2^2}}{2,5-\sqrt{2,5^2-2^2}}=3km/h$$

Vậy: Để hai người đến B cùng lúc thì vận tốc chạy của người thứ hai trên phải là $u=3km/h$.

7. Hai xe chuyển động thẳng đều trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc α với vận tốc có độ lớn lần lượt là v_1, v_2. Biết tại thời điểm hai xe cách nhau một khoảng nhỏ nhất $l_{\min}$ thì xe (1) đang chuyển động hướng về giao điểm O và cách O một khoảng l_1 như hình vẽ. Tìm vị trí của xe (2) lúc này. Xét hai trường hợp:



a) $v_2=v_1\sqrt{2}$ và $\alpha=45^0$.

b) $v_2=v_1$ và $\alpha=60^0$.

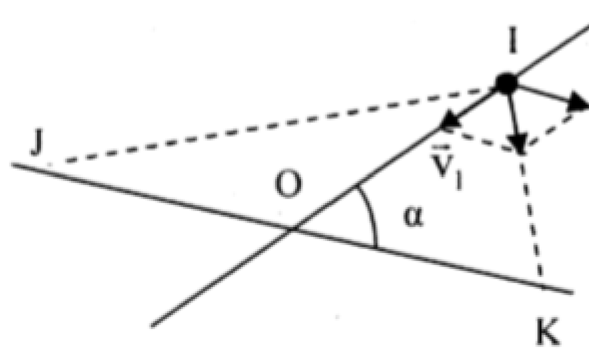
Bài giải

– Khi hai xe cách nhau một khoảng ngắn nhất thì:

+ Vận tốc tương đối giữa chúng vuông góc với đường thẳng nối hai vị trí của chúng.

+ Xe (2) đang rời xa O.

+ Vị trí xe (2) tại J.



– Áp dụng:

a) Trường hợp $v_2=v_1\sqrt{2}$ và $\alpha=45^0$:

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác OIK, ta có:

$v_{12}^2=v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha=v_1^2+\left(v_1\sqrt{2}\right)^2-2v_1v_2\sqrt{2}\cos 45^0=v_1^2\Rightarrow v_{12}=v_1$ và ΔOIK vuông cân ở $I:\overrightarrow{v_{12}}\perp OI\Rightarrow J\equiv O\Leftrightarrow l_2=0$.

Vậy: Xe (2) lúc đó đang ở O.

b) Trường hợp $v_2=v_1$ và $\alpha=60^0$:

Tam giác OIK đều, suy ra tam giác OIJ cân tại $O: l_2=OJ=l_1$.

Vậy: Xe (2) lúc đó đang ở J, cách O một đoạn giống như xe (1).

8. Một xe buýt đuổi theo một xe đạp chạy trên một đường thẳng AB với tốc độ không đổi lần lượt là $63km/h$ và $33km/h$. Một xe tải chạy trên một đường thẳng khác (không song song với AB) với tốc độ không đổi là $52km/h$. Khoảng cách từ xe tải đến xe buýt luôn luôn bằng khoảng cách từ xe tải đến xe đạp. Tìm vận tốc của xe tải đối với xe buýt?

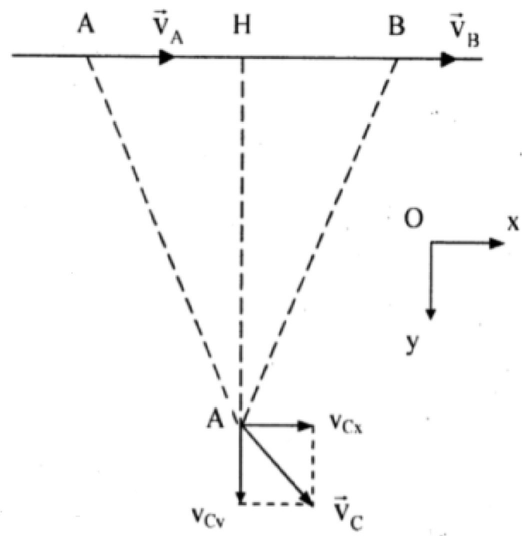
Bài giải

Vì khoảng cách từ xe tải đến xe buýt luôn luôn bằng khoảng cách từ xe tải đến xe đạp nên xe buýt (A), xe đạp (B) và xe tải (C) khi chuyển động luôn tạo thành một tam giác cân.

- Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ:
- Vận tốc xe tải (C): $v_{Cx} = v_H = \dfrac{v_A + v_B}{2}$

$$\Rightarrow v_C^2 = v_{Cy}^2 + v_{Cx}^2$$

$$\Rightarrow v_{Cy} = \sqrt{v_C^2 - v_{Cx}^2} = \sqrt{v_C^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}$$



- Vận tốc xe tải (C) đối với xe buýt (A): $\overrightarrow{v_{CA}} = \overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A}$.

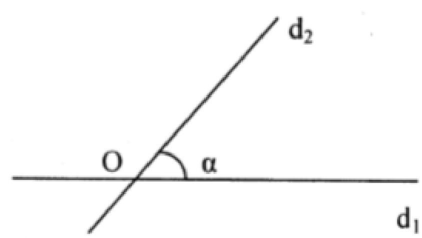
$$\begin{cases} v_{(CA)x} = v_{Cx} - v_{Ax} = \dfrac{v_A + v_B}{2} - v_A = \dfrac{v_B - v_A}{2} \\ v_{(CA)y} = v_{Cy} - 0 = \sqrt{v_C^2 - \left(\dfrac{v_A + v_B}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{CA}^2 = \left(\frac{v_B - v_A}{2}\right)^2 + v_C^2 - \left(\frac{v_B + v_A}{2}\right)^2 = v_C^2 - v_A v_B$$

$$\Rightarrow v_{CA} = \sqrt{v_C^2 - v_A v_B} = \sqrt{52^2 - 63.33} = 25km/h$$

Vậy: Vận tốc của xe tải đối với xe buýt là $v_{CA} = 25km/h$.

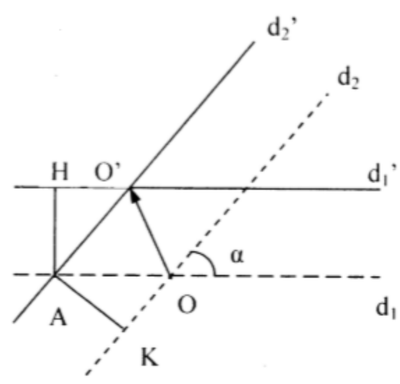
9. Hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo với nhau một góc 60^0. Chúng chuyển động theo các vận tốc $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ theo phương vuông góc với chính nó. Biết $v_1 = 4m/s, v_2 = 3m/s$, tìm vận tốc của giao điểm O.



Bài giải

- Sau $1s, d_1$ đến vị trí $d'_1, AH = v_1; d_2$ đến vị trí $d'_2, AK = v_2; \vec{v} = \overrightarrow{OO'}$: vận tốc của giao điểm O.
- Áp dụng định lí hàm số sin cho $\Delta AHO'$ và ΔAKO, ta được: $\dfrac{AO'}{\sin 90^0} = \dfrac{v_1}{\sin 60^0} = \dfrac{2v_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AO' = \dfrac{2v_1}{\sqrt{3}}$.

  Và $\dfrac{AO}{\sin 90^0} = \dfrac{v_2}{\sin 60^0} = \dfrac{2v_2}{\sqrt{3}} \Rightarrow AO = \dfrac{2v_2}{\sqrt{3}}$



- Áp dụng định lí hàm số cosin cho $\triangle AOO'$ ta được:

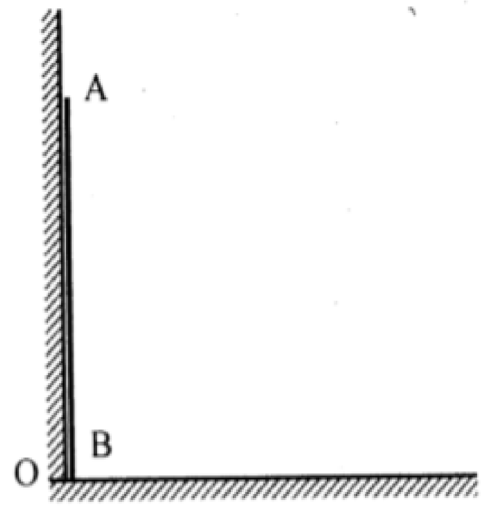
$OO'^2 = AO'^2 + AO^2 - AO'.AO\cos 60^0$

$$\Rightarrow v = OO' = \sqrt{\left(\frac{2v_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2v_2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2.\frac{v_1}{\sqrt{3}}.\frac{v_2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow v = OO' = \sqrt{\frac{4}{3}v_1^2 + \frac{4}{3}v_2^2 - \frac{v_1 v_2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}.4^2 + \frac{4}{3}.3^2 - \frac{4.3}{3}} = \sqrt{\frac{88}{3}} = 5,42m/s$$

Vậy: Vận tốc của giao điểm O là $v = 5,42m/s$.

10. Thanh AB đồng chất tiết diện đều dài L được tựa vào bức tường thẳng đứng như hình vẽ. Đầu dưới B của thanh có một con chuột bò theo thanh với vận tốc v không đổi đối với thanh ngay vào thời điểm đầu dưới B của thanh chuyển động đều theo nền nhà về phía phải với vận tốc u. Hỏi trong quá trình chuyển động theo thanh, con chuột lên được độ cao cực đại bằng bao nhiêu so với nền nhà và tìm điều kiện của v và u. Xét hai trường hợp:

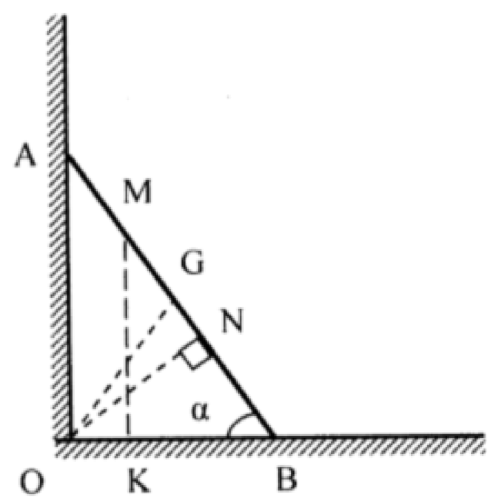


- Trường hợp con chuột đạt độ cao cực đại khi chưa kịp lên tới A.
- Trường hợp con chuột đạt độ cao cực đại khi vừa A.

Biết rằng ban đầu đầu B của thanh ở sát góc tường O và đầu A của thanh luôn tựa vào tường.

Bài giải

Chọn gốc thời gian lúc đầu B bắt đầu trượt từ O; G là trung điểm của AB; M là vị trí của con chuột ở thời điểm t.



- Độ cao của con chuột tại thời điểm t là $MK = h$; khoảng cách từ góc O đến thanh ở thời điểm t là $ON = H$.
- Ta có: $OB = ut$; $BM = vt$; $AG = BG = \frac{L}{2}$.
- Hai tam giác ONB và MKB đồng dạng nên: $\frac{MK}{ON} = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u} \Rightarrow h = H\frac{v}{u}$.
- Trong tam giác vuông OGN, $ON \le OG = \frac{L}{2} \Leftrightarrow H \le \frac{L}{2}$.

  $\Rightarrow h = h_{\max} \Leftrightarrow H = H_{\max} = \frac{L}{2} \Leftrightarrow \alpha = 45^0$ (ΔAOB vuông cân).

  Lúc đó: $h_{\max} = H_{\max}\frac{v}{u} = \frac{Lv}{2u}$.
- Xét hai trường hợp:

- Trường hợp con chuột đạt độ cao cực đại khi chưa lên kịp tới A:

  Ta có: $t_{\max} = \dfrac{L\cos 45^0}{u} = \dfrac{L\sqrt{2}}{2u} \quad (1)$.

  Con chuột chưa kịp lên tới A, nên $vt_{\max} < L \quad (2)$.

  Từ (1) và (2), ta được: $v\dfrac{L\sqrt{2}}{2u} < L \Rightarrow v < u\sqrt{2}$.

- Trường hợp con chuột đạt tới độ cao cực đại khi vừa tới A:

  Độ cao $h = h_{\max}$ ở thời điểm $t'_{\max} = \dfrac{L}{v}$.

  Và: $h'_{\max} = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{L^2 - \left(ut_{\max}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \left(u\dfrac{L}{v}\right)^2} = L\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{v}\right)^2}$.

  Vậy: Trong quá trình chuyển động theo thanh, con chuột lên được độ cao cực đại $h_{\max} = \dfrac{Lv}{2u}$.

  Trường hợp con chuột đạt độ cao cực đại khi chưa kịp lên tới A thì $v < u\sqrt{2}$; trường hợp con chuột đạt độ cao cực đại khi vừa lên tới A thì $h'_{\max} = L\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{v}\right)^2}, v > u$.

11. Trên đường thẳng (Δ) có ba xe chuyển động cùng chiều. Người ngồi trên xe 1 thấy gió thổi vào xe mình theo hướng $\alpha = 60^0$; người ngồi trên xe 2 thấy gió thổi vào xe mình theo hướng $\beta = 30^0$. Hỏi người ngồi trên xe 3 thấy gió thổi vào xe mình theo hướng γ nào.

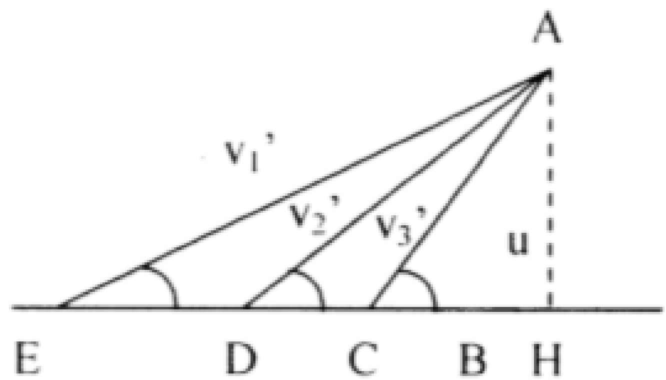
Biết α, β, γ là các góc tạo bởi hướng gió thổi (nằm trong mặt phẳng đứng chứa Δ) mà người ngồi trên xe tương ứng thấy và phương chuyển động (Δ) của các xe. Tốc độ chuyển động của xe 3 bằng trung bình cộng của tốc độ xe 1 và tốc độ xe 2.

Bài giải

Gọi v'_1, v'_2, v'_3 lần lượt là vận tốc của gió thổi đối với xe 1, xe 2, xe 3; v_1, v_2, v_3 $\left(v_3 = \dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$ lần lượt là vận tốc chuyển động của các xe và u là vận tốc gió thổi.

- Theo công thức cộng vận tốc, ta có: $\overrightarrow{v'_1} = \vec{u} + \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v'_2} = \vec{u} + \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v'_3} = \vec{u} + \overrightarrow{v_3}$.

  Với: $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{v_3}$ (với $CD = DE$).



– Từ hình vẽ, ta có: $HB + v_1 = \dfrac{AH}{\tan 60^0}$ (1)

$$HB + v_2 = \dfrac{AH}{\tan 30^0} \quad (2)$$

$$HB + v_3 = \dfrac{AH}{\tan\gamma} \Leftrightarrow 2HB + 2v_3 = \dfrac{2AH}{\tan\gamma} \quad (3)$$

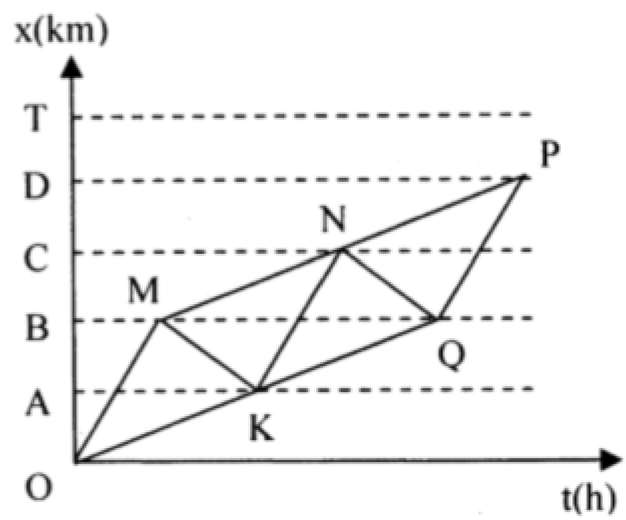
– So sánh (1), (2) và (3) ta được: $\dfrac{2}{\tan\gamma} = \dfrac{1}{\tan 60^0} + \dfrac{1}{\tan 30^0} \Rightarrow \tan\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \Rightarrow \gamma = 40^0 54'$.

Vậy: Người ngồi trên xe 3 thấy gió thổi vào xe mình theo hướng $\gamma = 40^0 54'$.

12. Có 4 bạn học sinh cùng đến trường tham dự kỳ thi Olympic truyền thống 30/4 nhưng chỉ có 1 chiếc xe máy và 2 nón bảo hiểm, chấp hành luật giao thông nên 2 bạn đi xe và 2 bạn còn lại đi bộ, dọc đường bạn đang ngồi sau xuống xe tiếp tục đi bộ và xe có 2 lần quay lại đón 2 bạn đi bộ ở những vị trí thích hợp sao cho cả 4 bạn đến được trường cùng một lúc. Biết rằng vận tốc đi xe gấp 5 lần đi bộ và coi rằng vận tốc của các bạn đi bộ đều như nhau, nơi xuất phát cách trường $5km$. Xác định vị trí mà xe đã đón 2 người đi bộ lên xe cách vị trí xuất phát một đoạn bao nhiêu?

Bài giải

Giả sử O là nơi xuất phát; T là trường; A, B là 2 điểm xe đón 2 bạn đi bộ còn C, D là 2 điểm mà hai bạn trên xe xuống tiếp tục đi bộ, ta có đồ thị chuyển động của các bạn như hình vẽ.



Do vận tốc đi bộ như nhau, vận tốc xe không đổi nên các hình $OMNK, KNPQ, OMPQ$ đều là những hình bình hành.

Bạn 1 chỉ đi xe có đồ thị $PMKNQM$, bạn 2 đi xe OM và đi bộ MP, bạn 3 đi bộ OK và NP đi xe KN, bạn 4 đi bộ OQ và đi xe QP để 2, 3, 4 đến trường cùng một lúc thì:

$\Rightarrow OA = CD; OB = CT; DT = AB$

$\Leftrightarrow OA = AB = CD = DT = \dfrac{OT - BC}{4}$

– Quãng đường mà bạn 1 phải đi: $s_x = OA + 3AB + 5BC = 3CD + DT = 5BC + 8OA$.

– Thời gian đi được của xe: $t = \dfrac{5BC + 8OA}{v_x}$ (1).

– Quãng đường mà bạn 4 đi là: $OB + BT = OB + BC + CT$.

– Thời gian đi là: $t=\dfrac{OB}{v_b}+\dfrac{BC+CT}{v_x}=\dfrac{5OB+BC+CT}{v_x}$.

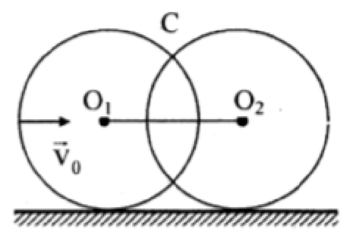
Vì $OB=CT=2OA$ nên $t=\dfrac{6OB+BC}{v_x}=\dfrac{12OA+BC}{v_x}\quad(2)$.

– Từ (1) và (2), ta có: $5BC+8OA=12OA+BC\Leftrightarrow BC=OA\Rightarrow 5OA=OT=5km$.

$\Rightarrow OA=1km$ và $OB=2km$.

Vậy: Vị trí mà xe đã đón 2 người đi bộ lên xe cách vị trí xuất phát một đoạn $OA=OB=1km$.

13. Hai vành tròn mảnh bán kính R, một vành đứng yên, vành còn lại chuyển động tịnh tiến sát vành kia với vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ (hình vẽ). Tính vận tốc của giao điểm C giữa hai vành khi khoảng cách giữa hai tâm $O_1O_2=d$.



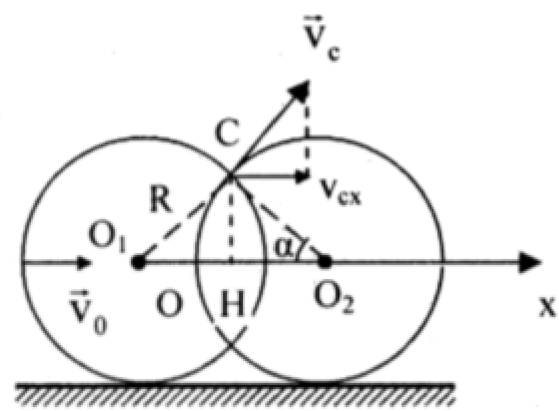
Bài giải

Chọn trục tọa độ Ox như hình vẽ.

– Vì hai vòng tròn có bán kính như nhau, nên $OH=\dfrac{1}{2}OA$, nghĩa là: $x_C=\dfrac{1}{2}x_A=\dfrac{1}{2}v_0t$.

– Do đó, theo phương nằm ngang, C luôn chuyển động đều với vận tốc $v_{cx}=\dfrac{v_0}{2}$.

– Vì giao điểm C chuyển động trên đường tròn tâm O_2 nên vận tốc $\overrightarrow{v_c}$ luôn tiếp tuyến với đường tròn này. Khi $O_1O_2=d$, ta có:



$$v_c=\dfrac{v_{cx}}{\sin\alpha};\ \sin\alpha=\dfrac{HC}{O_2C}=\dfrac{\sqrt{R^2-\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}}{R}=\dfrac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}$$

(ΔO_1CO_2 cân tại C).

$\Rightarrow v_c=\dfrac{v_0R}{\sqrt{4R^2-d^2}}$.

Vậy: Vận tốc của giao điểm C giữa hai vành khi khoảng cách giữa hai tâm $O_1O_2=d$ là $v_c=\dfrac{v_0R}{\sqrt{4R^2-d^2}}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

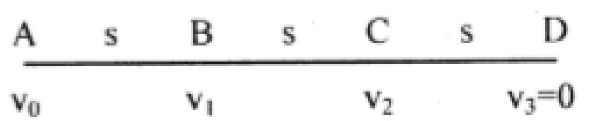
Chuyên đề 2: CHUYỂN ĐỘNG THẲNG BIẾN ĐỔI ĐỀU, SỰ RƠI TỰ DO

14. Một vật chuyển động chậm dần đều. Xét ba đoạn đường liên tiếp bằng nhau trước khi dừng lại thì đoạn ở giữa vật đi trong thời gian $1s$. Tìm tổng thời gian vật đi ba đoạn đường bằng nhau kể trên.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1998)

Bài giải

Gọi ba quãng đường liên tiếp là AB, BC và $CD; a$ là gia tốc chuyển động của vật. Ta có: $AB = BC = CD = s; v_3 = 0$.



- Trên đoạn $AB: v_1^2 - v_0^2 = 2as \quad (1)$.
- Trên đoạn $BC: v_2^2 - v_1^2 = 2as \quad (2)$.
- Trên đoạn $CD: 0 - v_2^2 = 2as \quad (3)$.
- Mặt khác, trên đoạn $BC: a = \dfrac{v_2 - v_1}{t}$; với $t = 1s$ nên $a = v_2 - v_1 \quad (4)$.
- Từ các phương trình trên, ta được: $v_0 = v_2\sqrt{3}; v_1 = v_2\sqrt{2}; a = v_2\left(1-\sqrt{2}\right)$.
- Thời gian đi hai quãng AB và CD là:

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{6}+\sqrt{3}-2-\sqrt{2}\,(s)$$

$$t_3 = \frac{-v_2}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1\,(s)$$

- Thời gian đi tổng cộng trên cả quãng đường AD là $t = t_1 + t_2 + t_3$.

$$\Rightarrow t = \sqrt{6}+\sqrt{3}-2-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1 = \sqrt{6}+\sqrt{3}\,(s).$$

Vậy: Tổng thời gian đi ba đoạn đường trên là $t = \sqrt{6}+\sqrt{3}\,(s)$.

15. Một xe tải cần chuyển hàng giữa hai điểm A và B cách nhau một khoảng $L = 800m$. Chuyển động của xe gồm hai giai đoạn: khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần để dừng lại B. Biết rằng độ lớn gia tốc của xe trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $2m/s^2$. Hỏi phải mất ít nhất bao nhiêu thời gian để xe đi được quãng đường trên?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1999)

Bài giải

Gọi s là quãng đường đi trong chuyển động nhanh dần đều; a, b lần lượt là độ lớn gia tốc của xe trong 2 giai đoạn (a và $b > 0$).

- Trong giai đoạn đầu, ta có: $s=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2s}{a}}$ (1); $v_1^2=2as$ (2)

- Trong giai đoạn sau, ta có: $v_1^2=2b(L-s)$ (3); $v_1=bt_2$ (4).

- Từ (2) và (3) suy ra: $2as=2b(L-s)\Rightarrow s=\frac{bL}{a+b}$ (5) và $L-s=\frac{aL}{a+b}$ (6).

- Từ (1) và (5) suy ra: $t_1=\sqrt{\frac{2bL}{(a+b)a}}$ (7).

- Từ (3), (4) và (6) suy ra: $t_2=\sqrt{\frac{2aL}{(a+b)b}}$ (8).

- Thời gian tổng cộng xe đi từ A đến B: $t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{2bL}{(a+b)a}}+\sqrt{\frac{2aL}{(a+b)b}}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2L}{a+b}}\left[\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right]$.

- Theo bất đẳng thức Cô-si: $\left[\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right]\geq 2$.

  Dấu "="xảy ra khi: $\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\Rightarrow a=b$.

  Lúc đó: $t=t_{\min}=2\sqrt{\frac{L}{a}}\geq 2\sqrt{\frac{L}{a_0}}=2\sqrt{\frac{800}{2}}=40s$.

Vậy: Thời gian ngắn nhất để xe đi hết quãng đường trên là $t_{\min}=40s$.

16. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng từ A đến B cách nhau đoạn $d=AB=8m$ thông qua hai giai đoạn: Bắt đầu khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần đều để dừng lại tại B. Cho biết độ lớn của các gia tốc trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $2cm/s^2$. Tính thời gian ngắn nhất để chất điểm đi được quãng đường trên.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2013)

Bài giải

Chọn chiều (+) là chiều chuyển động của chất điểm.

Gọi s_1 là quãng đường đi trong chuyển động nhanh dần đều, s_2 là quãng đường còn lại; a_1 và a_2 là gia tốc của chất điểm trong 2 giai đoạn chuyển động.

- Trong giai đoạn đầu ứng với thời gian t_1, ta có: $s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2\Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}; v_1^2=2a_1s_1$ (1)

- Trong giai đoạn sau ứng với thời gian t_2, ta có: $v_1=-a_2t_2; v_1^2=-2a_2s_2=-2a_2(d-s_1)$ (2)

- Từ (1) và (2) ta được: $s_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}d; s_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2}d \quad (3)$.

- Thời gian chuyển động của chất điểm trong mỗi giai đoạn:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2a_2}{(a_2 - a_1)a_1}d}; t_2 = \sqrt{\frac{2a_1}{(a_2 - a_1)a_2}d} \quad (4).$$

- Thời gian chất điểm đi từ A đến B: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}d}.\left[\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}}\right] \quad (5)$.

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}}, \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}}$ ta được: $\sqrt{\frac{-a_2}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{-a_2}} \ge 2$.

  Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = -a_2$.

- Từ (5) suy ra: $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{d}{a_1}} \ge 2 \; \left(d = 8m; a_0 = 2cm/s^2 = 0,02m/s^2\right) \Rightarrow t_{\min} = 2\sqrt{\frac{8}{0,02}} = 40s$.

Vậy: Thời gian ngắn nhất để chất điểm đi được quãng đường AB là $t_{\min} = 40s$.

17. Trên quãng đường nhất định, một chất điểm chuyển động nhanh dần đều không vận tốc đầu với gia tốc a mất thời gian T. Nếu chuyển động của chất điểm là luân phiên giữa chuyển động với gia tốc a trong thời gian $T_1 = \frac{T}{10}$ và chuyển động đều trong thời gian $T_2 = \frac{T}{15}$ thì để đi hết quãng đường chất điểm phải trải qua mấy lần chuyển động đều?

(Trích đề thi 30/4, 2015)

Bài giải

- Quãng đường chất điểm phải đi: $S = \frac{1}{2}.a.T^2 \quad (1)$.

- Gọi n là số lần chất điểm chuyển động với thời gian T_2, ta có:

$$S = \left[\frac{1}{2}aT_1^2 + aT_1T_2\right] + \left[\left(\frac{1}{2}aT_1^2 + aT_1T_1\right) + 2aT_1T_2\right] + \left[\left(\frac{1}{2}aT_1^2 + 2aT_1T_1\right) + 3aT_1T_2\right]$$
$$+ \ldots + \left[\left(\frac{1}{2}aT_1^2 + (n-1)aT_1T_1\right) + naT_1T_2\right]$$

$$S = \frac{T_1^2.a}{2}\left[1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)\right] + T_1T_2.a(1 + 2 + \ldots + n) \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta được:

$$\frac{1}{2}aT^2 = \frac{T_1^2.a}{2}\left[1+3+5+...+(2n-1)\right]+T_1T_2.a(1+2+...+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}a.\frac{T^2}{10^2}.n^2+\frac{T}{10}.\frac{T}{15}.a\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{200}n^2+\frac{1}{150}\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 5n^2+n-200=0 \Rightarrow n=7,5$$

- Sau 7 lần chất điểm chuyển động thẳng đều với thời gian T_2, quãng đường vật đi được là: $S = T^2.a\left(\frac{1}{2.100}\frac{2.7.7}{2}+\frac{1}{150}\frac{(7+1)7}{2}\right) = \frac{259}{600}.T^2.a$.
- Quãng đường còn lại là: $\Delta S = \frac{1}{2}T^2.a - \frac{259}{600}.T^2.a = \frac{41}{600}.T^2.a$.
- Quãng đường chất điểm đi được trong thời gian T_1 lần thứ 8: $S_1 = \left(\frac{1}{2}a\frac{T^2}{100}+7.a\frac{T^2}{100}\right) = \frac{3}{40}aT^2 > \Delta S$.

Vậy: Chất điểm đi hết quãng đường trải qua 7 lần chuyển động thẳng đều.

18. Trên trục Ox, một chất điểm chuyển động biến đổi đều có hoành độ ở các thời điểm t_1, t_2, t_3 lần lượt là x_1, x_2, x_3. Biết rằng: $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t$.

Hãy tính gia tốc của chuyển động theo x_1, x_2, x_3, t và cho biết tính chất của chuyển động.

Bài giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu (chọn $t_0 = 0$), chất điểm có tọa độ x_0, vận tốc v_0 và gia tốc a (không đổi).

- Từ phương trình chuyển động, ta có: $x_1 = x_0 + v_0t_1 + \frac{at_1^2}{2}$ (1)

$$x_2 = x_0 + v_0t_2 + \frac{at_2^2}{2} \quad (2)$$

$$x_3 = x_0 + v_0t_3 + \frac{at_3^2}{2} \quad (3)$$

- Lấy (2) – (1): $x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) = v_0t + \frac{at}{2}(t_1 + t_2)$ (4).
- Lấy (3) – (2): $x_3 - x_2 = v_0(t_3 - t_2) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_2^2) = v_0t + \frac{at}{2}(t_2 + t_3)$ (5)
- Lấy (5) – (4): $x_3 + x_1 - 2x_2 = \frac{at}{2}(t_3 - t_1) = \frac{at}{2}.2t \Rightarrow a = \frac{x_3 + x_1 - 2x_2}{t^2}$.
- Tính chất của chuyển động:

+ $\frac{x_3 + x_1}{2} > x_2 \Rightarrow a > 0$: chất điểm chuyển động nhanh dần đều.

+ $\frac{x_3 + x_1}{2} < x_2 \Rightarrow a < 0$: chất điểm chuyển động chậm dần đều.

Vậy: Gia tốc của chất điểm là $a = \frac{x_3 + x_1 - 2x_2}{t^2}$; nếu $\frac{x_3 + x_1}{2} > x_2$ thì chất điểm chuyển động nhanh dần đều, nếu $\frac{x_3 + x_1}{2} < x_2$ thì chất điểm chuyển động chậm dần đều.

19. Một đoàn tàu bắt đầu rời ga chuyển động nhanh dần đều. Xét trên 2010 ray đầu (kể từ khi tàu rời ga) ở đoạn ray thứ 2009 tàu đi mất thời gian t_0. Hãy tính thời gian tàu đi qua ray thứ 2010 và cả 2010 đoạn ray. Cho rằng các đoạn ray có chiều dài bằng nhau và đặt sát nhau.

Bài giải

Gọi a là gia tốc đoàn tàu; $v_1, v_2, ..., v_n$ là vận tốc đoàn tàu cuối các đoạn ray thứ 1, thứ 2,…thứ n, chiều dài các đoạn ray là l.

Ta có: $v_1^2 = 2al; v_2^2 = 4al; ...; v_n^2 = 2nal$.

Suy ra: $v_2 = \sqrt{2}v_1; v_3 = \sqrt{2}v_1; ...; v_n = \sqrt{n}v_1$.

- Thời gian tàu đi hết đoạn ray thứ 2009 là:

$$t_{2009} = t_0 = \frac{t_{2009} - v_{2008}}{a} = \frac{\left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right).v_1}{a} \Rightarrow \frac{v_1}{a} = \frac{t_0}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$$

- Thời gian tàu đi hết đoạn ray thứ 2010 là:

$$t_{2010} = \frac{v_{2010} - v_{2009}}{a} = \frac{\left(\sqrt{2010} - \sqrt{2009}\right).v_1}{a} = \frac{t_0 \cdot \left(\sqrt{2010} - \sqrt{2009}\right)}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}.$$

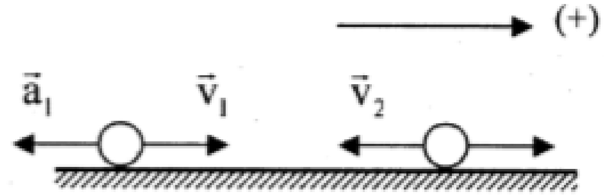
- Thời gian tàu đi hết 2010 đoạn ray là: $t = \frac{v_{2010}}{a} = \frac{\sqrt{2010} - v_1}{a} = \frac{t_0\sqrt{2010}}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}$.

Vậy: Thời gian tàu đi qua đoạn ray thứ 2010 và cả 2010 đoạn ray là $t_{2010} = \frac{t_0 \cdot \left(\sqrt{2010} - \sqrt{2009}\right)}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}$ và $t = \frac{t_0\sqrt{2010}}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}}$.

20. Hai vật chuyển động trên cùng một đường thẳng với các vận tốc đầu $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ngược chiều nhau, hướng đến nhau, độ lớn v_1, v_2. Gia tốc của chúng là $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ không thay đổi và ngược chiều với các vận tốc đầu tương ứng $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$. Khoảng cách ban đầu giữa hai vật phải có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu để chúng không gặp nhau khi chuyển động?

Bài giải

Chọn hệ quy chiếu gắn với vật 2, chiều (+) là chiều chuyển động của vật 1; gọi mặt đất là vật 0.



- Vận tốc ban đầu tương đối: $\overrightarrow{v_{12}} = \overrightarrow{v_{10}} + \overrightarrow{v_{02}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} \Rightarrow v_{12} = v_1 + v_2$.
- Gia tốc tương đối: $\overrightarrow{a_{12}} = \overrightarrow{a_{10}} + \overrightarrow{a_{02}} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} \Rightarrow a_{12} = -\left(a_1 + a_2\right)$.
- Gọi s là quãng đường vật 1 đi được cho đến khi dừng lại so với vật 2. Ta có:

$$0^2 - v_{12}^2 = 2a_{12}s \Leftrightarrow 0^2 - \left(v_1 + v_2\right)^2 = -2\left(a_1 + a_2\right)s \Rightarrow s = \frac{\left(v_1 + v_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)}.$$

- Để hai vật không gặp nhau, khoảng cách ban đầu giữa chúng là d phải thỏa: $d \geq s$.

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{\left(v_1 + v_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)} \Rightarrow d_{\min} = \frac{\left(v_1 + v_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)}.$$

Vậy: Để hai vật không gặp nhau trong quá trình chuyển động thì khoảng cách ban đầu giữa hai vật phải có giá trị nhỏ nhất là $d_{\min} = \dfrac{\left(v_1 + v_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)}$.

21. Một chất điểm bắt đầu chuyển động từ điểm $A_0\left(x_0, 0\right)$ theo chiều dương của trục Ox với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_1}$. Cùng lúc đó, chất điểm thứ hai từ điểm $B_0\left(y_0, 0\right)$ cũng bắt đầu chuyển động theo chiều dương của trục Oy với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_2}$.

a) Hỏi sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và tính khoảng cách giữa chúng lúc đó?

b) Với điều kiện nào của a_1, a_2, x_0, y_0 thì chúng có thể gặp nhau?

Bài giải

a) Sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và khoảng cách giữa chúng lúc đó.

- Phương trình chuyển động của các chất điểm:

  + Chất điểm 1: $x = x_0 + \dfrac{1}{2}a_1t^2 \quad (1)$.

  + Chất điểm 2: $y = y_0 + \dfrac{1}{2}a_2t^2 \quad (2)$.

- Khoảng cách d giữa hai chất điểm ở thời điểm t:

$$d^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2\right)k^2 + \left(a_1x_0 + a_2y_0\right)k + x_0^2 + y_0^2 \text{ (với } k = t^2\text{)}.$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.\frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(x_0^2 + y_0^2\right) - \left(a_1x_0 + a_2y_0\right)^2}{4.\frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = \frac{\left(a_1y_0 - a_2x_0\right)^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{\left|a_1y_0 - a_2x_0\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad (3)$$

- Từ đó: $k = t^2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{a_1x_0 + a_2y_0}{2.\frac{1}{4}\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = -\frac{2\left(a_1x_0 + a_2y_0\right)}{a_1^2 + a_2^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2\left(a_1x_0 + a_2y_0\right)}{a_1^2 + a_2^2}} \quad (4)$.

Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\frac{-2\left(a_1x_0 + a_2y_0\right)}{a_1^2 + a_2^2}}$ hai chất điểm lại gần nhau nhất và khoảng cách giữa chúng lúc đó là $d_{\min} = \frac{\left|a_1y_0 - a_2x_0\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$.

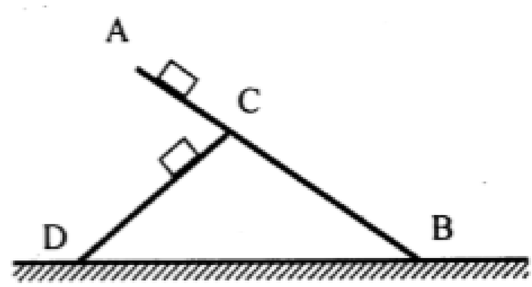
b) Điều kiện của a_1, a_2, x_0, y_0 để chúng có thể gặp nhau

- Từ (4), để bài toán có nghiệm: $-2\left(a_1x_0 + a_2y_0\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a_2} + \frac{y_0}{a_1} \leq 0$.
- Để hai chất điểm gặp nhau thì: $d_{\min} = 0 \Leftrightarrow a_1y_0 - a_2x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_0}{y_0}$.

Vậy: Điều kiện của a_1, a_2, x_0, y_0 để chúng có thể gặp nhau là $\frac{x_0}{a_2} + \frac{y_0}{a_1} \leq 0$ và $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_0}{y_0}$.

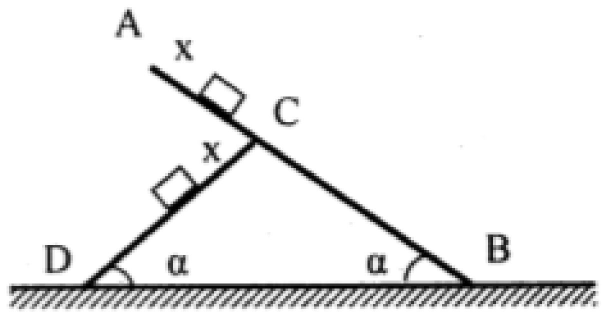
22. Hai máng rất nhẵn AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng và cùng hợp với phương ngang một góc như nhau, $CD = CB$. Hai vật nhỏ được thả đồng thời không vận tốc đầu từ A và C.

Thời gian để vật trượt từ A đến B là t_1 và thời gian để vật trượt từ C đến D là t_2. Sau bao lâu kể từ khi thả, khoảng cách giữa hai vật là ngắn nhất?



Bài giải

Gia tốc của mỗi vật khi trượt không ma sát: $a = g\sin\alpha$. Do đó, sau thời gian t chúng đi được quãng đường x bằng nhau. Gọi khoảng cách giữa chúng là L. Ta có:



$$L^2 = x^2 + \left(AC - x\right)^2 - 2x\left(AC - x\right)\cos 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow L^2 = x^2 + AC^2 + x^2 - 2xAC - 2x\left(AC - x\right)\cos 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow L^2 = AC^2 - 2x\left(AC - x\right) - 2x\left(AC - x\right)\cos 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow L^2 = AC^2 - 2x\left(1 + \cos 2\alpha\right)\left(AC - x\right)$$
$$\Rightarrow L = L_{\min} \Leftrightarrow X = x\left(AC - x\right)_{\max}$$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm: x và $\left(AC - x\right)$, ta được: $X = x + \left(AC - x\right) \ge 2\sqrt{x\left(AC - x\right)}$.

  Dấu "=" xảy ra khi: $x = AC - x \Rightarrow x = \dfrac{AC}{2}$.

- Mà: $AB = AC + CB = 2x + CD \Rightarrow x = \dfrac{AB - CD}{2}$.

- Mặt khác: $AB = \dfrac{1}{2}at_1^2, CD = \dfrac{1}{2}at_2^2, x = \dfrac{1}{2}at^2$.

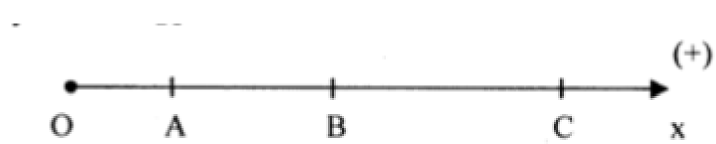
  Thay vào $x = \dfrac{AB - CD}{2}$ ta được: $\dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{\dfrac{1}{2}at_1^2 - \dfrac{1}{2}at_2^2}{2} \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{1}{2}\left(t_1^2 - t_2^2\right) \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{t_1^2 - t_2^2}{2}}$.

Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\dfrac{t_1^2 - t_2^2}{2}}$ thì khoảng cách giữa hai vật là ngắn nhất.

23. Một vật chuyển động chậm dần đều cho đến khi dừng lại. Biết quãng đường đi được trong giây đầu tiên dài gấp 15 lần quãng đường đi được trong giây cuối cùng và tổng quãng đường vật đi được là $25,6m$. Tìm vận tốc đầu của vật.

Bài giải

Gọi quãng đường mà vật đi được trong giây đầu là s_{OA}; quãng đường mà vật đi được trong giây cuối là s_{BC}. Ta có:



$$s_{OA} = v_0.1 + \frac{a}{2}.1^2 = v_0 + \frac{a}{2} \quad (1)$$
$$v_C = v_B + a.1 = 0 \Rightarrow v_B = -a \quad (2)$$
$$s_{BC} = v_B.1 + \frac{a}{2}.1^2 = -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \quad (3)$$

– Theo đề: $s_{OA}=15s_{BC}\Leftrightarrow v_0+\frac{a}{2}=15\left(-\frac{a}{2}\right)\Rightarrow v_0=-8a$.

– Quãng đường vật đi được: $s=\frac{v_C^2-v_0^2}{2a}$.

$$\Leftrightarrow 25,6=\frac{0^2-(-8a)^2}{2a}=-32a\Rightarrow a=-0,8m/s^2\Rightarrow v_0=-8.(-0,8)=6,4m/s.$$

Vậy: Vận tốc đầu của vật là $v_0=6,4m/s$.

24. Một ô tô chở khách giữa hai địa điểm A và B cách nhau một khoảng $l=800m$. Chuyển động của ô tô gồm hai giai đoạn: khởi hành tại A chuyển động nhanh dần đều và sau đó tiếp tục chuyển động chậm dần đều để dừng lại ở B. Biết rằng độ lớn gia tốc của ô tô trong suốt quá trình chuyển động không vượt quá $a_0=2m/s^2$. Phải mất ít nhất bao nhiêu thời gian để ô tô đi từ A đến B?

Bài giải

Gọi s là quãng đường ô tô đi được trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều; a,b là độ lớn gia tốc của ô tô trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều và chuyển động chậm dần đều $(a,b>0)$.

– Trong giai đoạn chuyển động nhanh dần đều, ta có: $s=\frac{1}{2}at_1^2\Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2s}{a}};\quad v_1^2=2as\quad (1)$.

– Trong giai đoạn chuyển động chậm dần đều, ta có: $v_1^2=2b(l-s);\quad v_1=bt_2\quad (2)$.

– Từ (1) và (2), ta được: $2as=2b(l-s)\Rightarrow s=\frac{bl}{a+b};l-s=\frac{al}{a+b}\quad (3)$.

– Từ (1) và (3), ta được: $t_1=\sqrt{\frac{2bl}{a(a+b)}}\quad (4)$

– Từ (2) và (3), ta được: $t_2=\sqrt{\frac{2al}{b(a+b)}}\quad (5)$.

– Thời gian ô tô đi từ A đến B là: $t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{2bl}{a(a+b)}}+\sqrt{\frac{2al}{b(a+b)}}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2l}{(a+b)}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

– Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm $\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\ge 2$.

Mặt khác: $\sqrt{\frac{2l}{(a+b)}}\ge\sqrt{\frac{1}{a_0}}$ với $a_0=2m/s^2$.

$$\Rightarrow t\ge\sqrt{\frac{1}{a_0}}.2=2\sqrt{\frac{1}{a_0}}\Rightarrow t_{\min}=2\sqrt{\frac{1}{a_0}}=2\sqrt{\frac{800}{2}}=40s.$$

Vậy: Phải mất ít nhất $40s$ để ô tô đi từ A đến B.

25. Một chất điểm chuyển động từ A đến B cách A một đoạn s. Cứ chuyển động được $3s$ thì chất điểm lại nghỉ $1s$. Trong $3s$ đầu chất điểm chuyển động với tốc độ $v_0 = 5m/s$. Trong các khoảng $3s$ tiếp theo chất điểm chuyển động với tốc độ $2v_0, 3v_0, ..., nv_0$. Tính tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường AB trong các trường hợp:

a) $s = 315m$.

b) $s' = 325m$.

Bài giải

Đặt $t_1 = 3s$; gọi s là quãng đường mà chất điểm đi được sau $nt_1(s)(n>1)$; $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ là quãng đường đi được của chất điểm trong $3s$ đầu tiên và trong các khoảng $3s$ kế tiếp… Ta có:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n$$

$$\Leftrightarrow s = v_0t_1 + 2v_0t_1 + ... + nv_0t_1 = v_0t_1(1+2+...+n)$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{n(n+1)}{2}v_0t_1 = \frac{n(n+1)}{2}.5.3 = 7,5n(n+1)$$

a) Khi $s = 315m$, ta có: $7,5n(n+1) = 315 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -7 \end{array}\right.$ (loại $n = -7$).

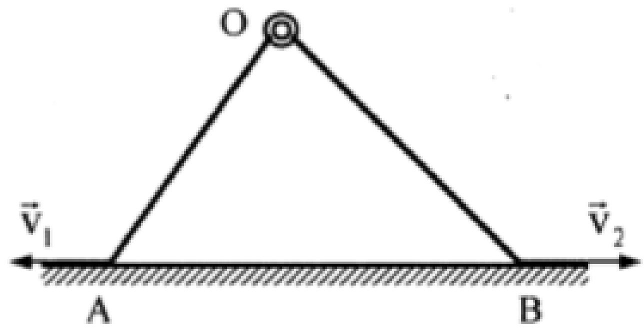
- Thời gian chuyển động của chất điểm trên quãng đường $s = 315m$ là: $t = nt_1 + n - 1 = 6.3 + 6 - 1 = 23s$.
- Tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường $s = 315m$: $\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{315}{23} = 13,7m/s$.

b) Khi $s' = 325m$, ta có:

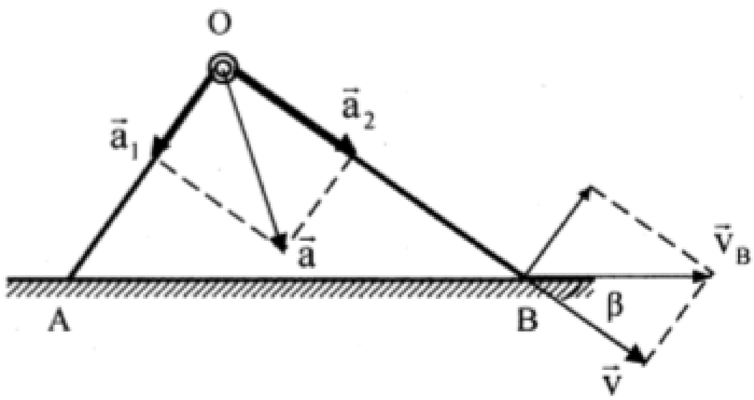
- Thời gian chất điểm đi quãng đường $s = 315m$ đầu là $t = 23s$.
- Thời gian chất điểm đi quãng đường $\Delta s = 10m$ cuối là: $\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{n+1}} = \frac{\Delta s}{(n+1)v_0} = \frac{10}{7.5} = 0,29s$.
- Tốc độ trung bình của chất điểm trên quãng đường $s' = 325m$ là: $\overline{v'} = \frac{s'}{t'} = \frac{s'}{t + \Delta t + 1} = \frac{325}{23 + 0,29 + 1} = 13,38m/s$.

Vậy: Tốc độ trung bình của chất điểm trên các quãng đường $s = 315m$ là $\overline{v} = 13,7m/s$ và $s' = 325m$ là $\overline{v'} = 13,38m/s$.

26. Hai thanh cứng bằng kim loại có chiều dài $OA = l_1, OB = l_2$, liên kết với nhau bởi khớp nối O, được đặt trên mặt bàn nhẵn nằm ngang. Người ta kéo hai đầu A, B của thanh theo cùng phương AB nhưng ngược chiều nhau với vận tốc không đổi lần lượt là v_1 và v_2. Tìm gia tốc của khớp nối O lúc hai thanh vuông góc nhau.



Bài giải



Xét hệ quy chiếu gắn với A. Ta có:

- Vận tốc của B đối với A: $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \Rightarrow v_B = v_1 + v_2$.
- Vận tốc của khớp nối O đối với A: $v = v_B \cos\beta = (v_1 + v_2)\dfrac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.
- Gia tốc toàn phần của khớp nối O: $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ($\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ là gia tốc thành phần của khớp nối O theo OA và OB).
- Thành phần gia tốc a_1 của khớp nối O (gia tốc hướng tâm A): $a_1 = \dfrac{v^2}{l_1} = \dfrac{(v_1 + v_2)^2 l_2^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_1}$.

Tương tự, nếu chọn hệ quy chiếu gắn với B, ta có:

- Vận tốc của khớp nối O đối với B: $v = (v_1 + v_2)\dfrac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$.
- Thành phần gia tốc của khớp nối O (gia tốc hướng tâm B): $a_2 = \dfrac{v^2}{l_2} = \dfrac{(v_1 + v_2)^2 l_1^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_2}$.

Gia tốc toàn phần của khớp nối O là: $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\dfrac{\left(v_1+v_2\right)^2\sqrt{l_1^6+l_2^6}}{l_1l_2\left(l_1^2+l_2^2\right)}$.

Vậy: Độ lớn gia tốc khớp nối O là $a=\dfrac{\left(v_1+v_2\right)^2\sqrt{l_1^6+l_2^6}}{l_1l_2\left(l_1^2+l_2^2\right)}$.

27. Từ ban công lần lượt các viên bi được thả rơi tự do cách nhau những khoảng thời gian bằng nhau. Khi viên bi đầu tiên chạm đất thì viên bi tiếp theo đã rơi được đúng một nửa quãng đường. Hỏi lúc này viên bi thứ ba đã rơi được bao nhiêu phần của quãng đường? Bao nhiêu viên bi đã được thả cho đến khi viên bi đầu tiên chạm đất? Cho $g=10m/s^2$.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2012)

Bài giải

Gọi h là độ cao nơi thả các viên bi.

- Thời gian rơi của một viên bi: $t_1=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.
- Khoảng thời gian viên bi rơi nửa đoạn đường đầu: $t_2=\sqrt{\dfrac{h}{g}}$.
- Khoảng thời gian giữa hai lần các viên bi rơi: $\Delta t=t_1-t_2=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\dfrac{h}{g}}$.
- Thời gian viên bi thứ 3 đã rơi: $t_3=t_2-\Delta t=2t_2-t_1=\sqrt{\dfrac{h}{g}}\left(2-\sqrt{2}\right)$.
- Quãng đường mà viên bi thứ ba rơi được khi viên bi thứ nhất chạm đất:

$$h_3=\frac{1}{2}gt_3^2=\frac{1}{2}g\frac{h}{g}\left(2-\sqrt{2}\right)^2=h\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ và } n=\frac{t}{\Delta t}=\frac{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\dfrac{h}{g}}}\approx 3,4.$$

Vậy: Quãng đường rơi của viên bi thứ ba là $h_3=h\left(3-2\sqrt{2}\right)$ và số viên bi đã thả là 4.

28. Một quả cầu đàn hồi, được thả rơi tự do từ độ cao $h=20m$ xuống mặt sàn nằm ngang. Sau khi chạm sàn, quả cầu nẩy lên thẳng đứng, lại rơi xuống, cứ như thế … cho đến lúc dừng lại. Biết tốc độ lúc nảy lên bằng $\dfrac{9}{10}$ tốc độ lúc chạm sàn trước đó. Tìm thời gian chuyển động của quả cầu. Lấy $g=10\left(m/s^2\right)$.

Bài giải

- Thời gian rơi lần 1: $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=\sqrt{\dfrac{2.20}{10}}=2s$.

- Tốc độ chạm sàn lần 1: $v_1 = \sqrt{2gh}$.
- Tốc độ nẩy lên lần 1: $v_1^{'} = k\sqrt{2gh}$ với $k = \frac{9}{10}$.
- Thời gian đi lên lần 1: $t_1 = k\sqrt{\frac{2h}{g}} = kt$.
- Độ cao cực đại nẩy lên lần 1: $h_1 = \frac{v_1^{'2}}{2g} = k^2 h$.
- Thời gian rơi lần 2: $t' = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = k\sqrt{\frac{2h}{g}} = kt = t_1$.
- Tốc độ nẩy lên lần 2: $v_2^{'} = k^2\sqrt{2gh}$.
- Thời gian đi lên lần 2: $t_2 = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^2 t$
- Độ cao cực đại nẩy lên lần 2: $h_2 = \frac{v_1^{'2}}{2g} = k^4 h$.
- Thời gian rơi lần 3: $t'' = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^2 t = t_2$

  …
- Thời gian đi lên lần $n: t_n = k^n\sqrt{\frac{2h}{g}} = k^n t$.
- Thời gian chuyển động của quả cầu: $\tau = t + 2t_1 + 2t_2 + ... + 2t_n$.

$$\Leftrightarrow \tau = t + 2\left(k + k^2 + ... + k^n\right)t = t + 2\frac{k}{1-k}t = 2 + 2\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}}.2 = 38s.$$

Thời gian chuyển động của quả cầu là $\tau = 38s$.

29. Một quả cầu nhỏ rơi từ độ cao $h_0 = 180m$. Sau khi chạm đất quả cầu nảy lên và lại rơi xuống. Mỗi lần quả cầu va chạm với mặt đất vận tốc nảy lên của nó chỉ bằng $\frac{1}{n}$ lần $(n = 2)$ vận tốc của nó trước lúc va chạm. Hỏi thời gian từ lúc quả cầu rơi cho đến khi dừng hẳn là bao nhiêu? Tính tổng quãng đường mà nó đã đi được. Lấy $g = 10m/s^2$.

Chú ý: Cấp số nhân là một dãy số thỏa mãn $\forall n \ge 2$ thì $u_n = u_{n-1}q$, với u_n là số hạng thứ n của dãy số, q là một số không đổi gọi là công bội của cấp số nhân. Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân: $S_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \ne 1$.

Bài giải

- Quả cầu từ độ cao h_0 khi rơi xuống đất có vận tốc là: $v_0 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2.10.180} = 60m/s$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ nhất và lại rơi xuống đất là: $v_1 = \dfrac{v_0}{n}$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ hai và lại rơi xuống đất là: $v_2 = \dfrac{v_0}{n^2}$.
- Vận tốc quả cầu nảy lên lần thứ m và lại rơi xuống đất là: $v_m = \dfrac{v_0}{n^m}$.
- Độ cao quả cầu mỗi lần nảy lên là: $h_1 = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{h_0}{n^2}; h_2 = \dfrac{v_2^2}{2g} = \dfrac{h_0}{n^4};...; h_m = \dfrac{v_m^2}{2g} = \dfrac{h_0}{n^{2m-2}};...$.
- Tổng quãng đường mà quả cầu đi được là: $s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + ... + 2h_m + ...$

  $$\Leftrightarrow s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + ... + \frac{1}{n^{2m-2}} + ...\right).$$

- Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân trong ngoặc (…), với $u_1 = 1$ và $q = \dfrac{1}{n^2}$, ta được:

  $$s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2}.u_1.\frac{1-q^m}{1-q} = h_0 + \frac{2h_0}{n^2}.1\frac{1-\left(\frac{1}{n^2}\right)^m}{1-\frac{1}{n^2}}$$

  $$\Leftrightarrow s = h_0 + \frac{2h_0}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = h_0 + \frac{2h_0}{n^2-1} = 180 + \frac{2.180}{2^2-1} = 300m$$

- Tổng thời gian quả cầu rơi và nảy lên là: $t = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_m + ...$

  $$\Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_1}{g} + ... + \frac{2v_m}{g} + ... = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + ... + \frac{1}{n^m} + ...\right].$$

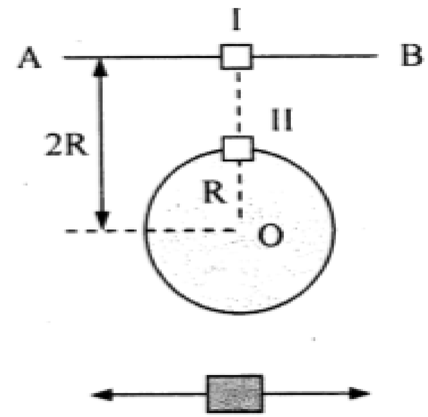
– Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân trong ngoặc [...] với $u_1 = \frac{1}{n}$ và $q = \frac{1}{n}$, ta được: $t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g}.u_1\frac{1-q^m}{1-q} = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g}.\frac{1}{n}.\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^m}{1-\frac{1}{n}}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} + \frac{2v_0}{g}\frac{1}{n}.\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{v_0}{g}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{60}{10}\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = 18s$$

Vậy: Thời gian từ lúc quả cầu rơi cho đến khi dừng hẳn và tổng quãng đường mà nó đã đi được là $t = 18s$ và $s = 300m$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 3: CHUYỂN ĐỘNG TRÒN ĐỀU



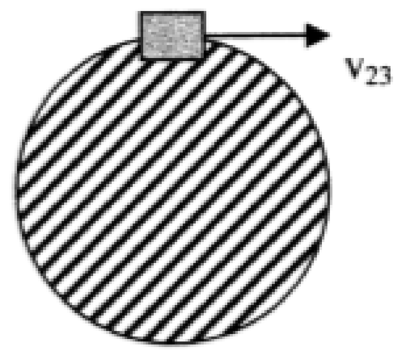
30. Trên mặt phẳng ngang có hai ô tô. Ô tô 1 chuyển động đều trên đường thẳng AB với tốc độ $v_1 = v$. Ô tô 2 chuyển động đều trên đường tròn bán kính R với tốc độ $v_2 = \frac{v}{2}$. Đường thẳng AB cách tâm O của đường tròn một khoảng bằng $2R$. Tại thời điểm quan sát, cả hai ô tô đều nằm trên đường thẳng đi qua tâm O và vuông góc với đường AB. Tìm vận tốc tương đối của ô tô này so với ô tô kia tại thời điểm ấy.

Bài giải

Gọi: Ô tô 1 là vật (1), ô tô 2 là vật (2), mặt đất là vật (3).

Ta có: $\overrightarrow{v_{12}} = \overrightarrow{v_{13}} + \overrightarrow{v_{32}}$ với $v_{13} = v$.

Xác định v_{12}:



- Đối với xe 2, tâm O (xem như mặt đất) chuyển động tròn cùng tốc độ góc nhưng ngược chiều, với: $\omega = \frac{v_{23}}{R} = \frac{v}{2R}$.
- Tại vị trí xe 1: $v_{32} = \omega.2R = v$.
- Vì $\overrightarrow{v_{13}}, \overrightarrow{v_{32}}$ cùng phương, ngược chiều nên $v_{12} = 0$.

Xác định v_{21}:

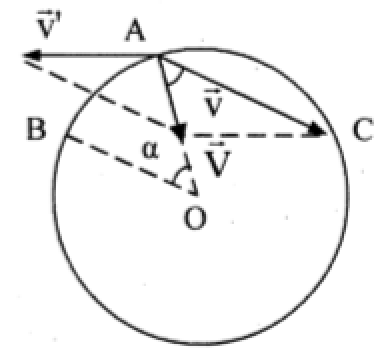
- Ta có: $\overrightarrow{v_{21}} = \overrightarrow{v_{23}} + \overrightarrow{v_{31}}$, với $\overrightarrow{v_{31}} = -\overrightarrow{v_{13}}$ (hình vẽ).
- Vì $\overrightarrow{v_{31}}, \overrightarrow{v_{23}}$ cùng phương, ngược chiều và $v_{31} = 2v_{23}$ nên vận tốc của ô tô 2 đối với ô tô 1 ngược chiều vận tốc dài của ô tô 2 và có độ lớn là $\frac{v}{2}$.

31. Hai người đấu súng thể thao trong điều kiện như sau: người thứ nhất đứng ở tâm O một đu quay bán kính R quay đều với vận tốc góc ω người kia đứng ở mép đu. Họ phải ngắm như thế nào thì mới bắn trúng nhau? Ai lợi thế hơn? Vận tốc của đạn là v.

Bài giải

Giả sử đu quay ngược chiều kim đồng hồ.

– Đạn của người thứ nhất bay tới mép đu trong thời gian $t=\frac{R}{v}$, khi đó đu quay đã quay góc α và người thứ hai đã di chuyển theo cung AB, với: $\overset{\frown}{AB}=R\alpha=\omega Rt=\frac{\omega R^2}{v}$.



– Do đó, người thứ nhất phải ngắm theo hướng làm với OA một góc $\alpha:\alpha=\frac{\omega R}{v}$.

– Người thứ hai có vận tốc dài $v'=\omega R$, vận tốc đạn của người này là $\vec{V}=\vec{v}+\vec{v}'$. Người này phải ngắm theo hướng AC làm góc hợp bán kính OA một góc $\beta:\sin\beta=\frac{\omega R}{v}$.

– Vì $v'\ll v$, góc β nhỏ nên $\beta\approx\sin\beta=\frac{\omega R}{v}=\alpha$ nghĩa là cả hai đều phải ngắm lệch sang trái cùng một góc.

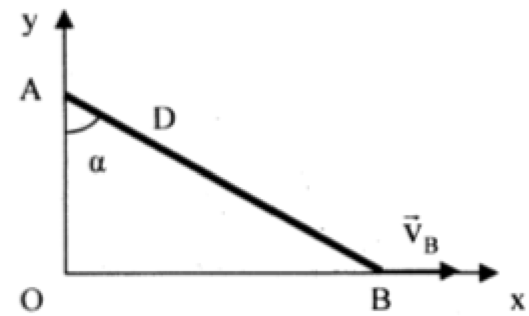
– Thời gian để đạn do người thứ hai bắn ra đến được mục tiêu: $t'=\frac{R}{v\cos\beta}>t=\frac{R}{v}$.

Vậy: Người thứ nhất có lợi thế hơn.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 4: CHUYỂN ĐỘNG TRÒN BIẾN ĐỔI ĐỀU

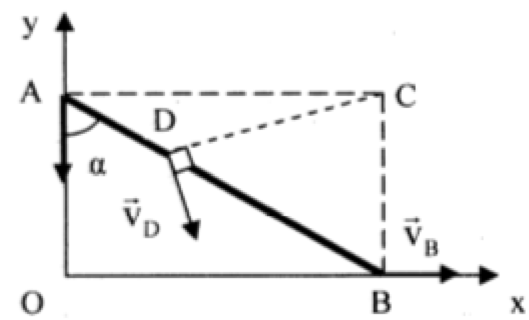
32. Thanh AB dài $l = 2m$ chuyển động sao cho hai đầu A, B của nó luôn tựa trên hai giá vuông góc Ox và Oy (hình vẽ). Hãy xác định vận tốc của các điểm A và D của thanh tại thời điểm mà thanh hợp với giá góc $\widehat{OAB} = \alpha = 60^0$. Cho biết $AD = 0,5m$, vận tốc đầu B của thanh tại thời điểm đó là $v_B = 2m/s$ và có chiều như hình vẽ.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2004)

Bài giải

- Khi đầu B trượt theo hướng Ox thì đầu A trượt theo hướng Oy và thanh quay xung quanh tâm tức thời C với $CA \perp \overrightarrow{v_A}; CB \perp \overrightarrow{v_B}$.



- Theo đề, $\overrightarrow{v_B}$ có hướng Ox nên thanh quay quanh C theo chiều ngược với chiều quay kim đồng hồ.

  Gọi $\omega_{AB} = \omega$ là vận tốc tức thời của thanh tại thời điểm ta xét. Ta có: $\omega = \dfrac{v_B}{CB}$ với $v_B = 2m/s, CB = l\cos\alpha = 2.\cos 60^0 = 1m \Rightarrow \omega = \dfrac{2}{1} = 2\ rad/s$.

- Vận tốc của điểm A: $v_A = \omega.CA$; với $CA = l\sin\alpha = 2.\sin 60^0 = \sqrt{3}m \Rightarrow v_A = 2\sqrt{3} = 3,46\ m/s$.

- Vận tốc của điểm D: $v_D = \omega.CD$; với

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30^0} \Rightarrow CD = \sqrt{0,5^2 + \sqrt{3}^2 - 2.0,5.\sqrt{3}\cos 30^0} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32m$$

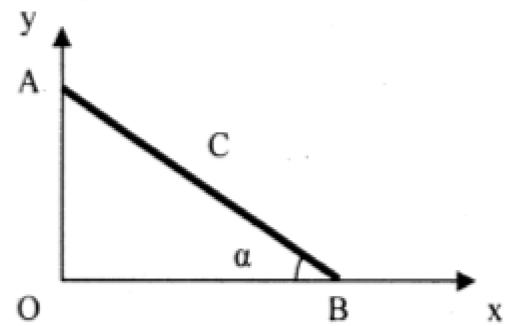
$$\Rightarrow v_D = 2.1,32 = 2,64\ m/s.$$

- Góc hợp bởi $\overrightarrow{v_D}$ và Oy là β, với

$$\cos\beta = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2.AC.CD} = \frac{\sqrt{3}^2 + 1,32^2 - 0,5^2}{2.\sqrt{3}.1,32} = 0,983 \Rightarrow \beta = 3^0 18'.$$

Vậy: vận tốc của các điểm A và D của thanh tại thời điểm mà thanh hợp với giá Oy góc 60^0 là $v_A = 3,46\ m/s$ và $v_D = 2,64\ m/s$.

33. Thanh AB dài l, có thể trượt dọc theo hai trục Ox và Oy vuông góc với nhau. Chọn đầu B của thanh trượt đều với vận tốc $\overrightarrow{v_0}$. Tìm độ lớn và hướng gia tốc của trung điểm C của thanh tại thời điểm thanh hợp với trục Ox một góc α.



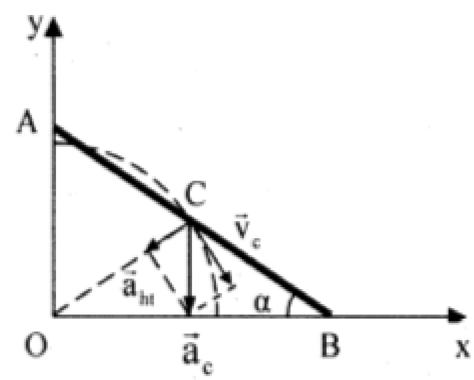
Bài giải

– Vì C là trung điểm cạnh huyền AB của tam giác vuông OAB nên $OC = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$. Do đó, khi đầu B của thanh chuyển động đều với vận tốc v thì trung điểm C của thanh chuyển động theo đường tròn tâm O, bán kính $R = OC = \dfrac{1}{2}$.

– Vì thanh cứng nên thành phần vận tốc tức thời của mọi điểm trên thanh dọc theo thanh tại mọi thời điểm là như nhau nên:

$$v_0\cos\alpha = v_c\cos\beta = v_c\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = v_c\sin 2\alpha;\ \beta = \left(\overrightarrow{v_c}, \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{v_0\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{v_0}{2\sin\alpha} \quad (1)$$



– Thành phần gia tốc hướng tâm của điểm C là: $a_{ht} = \dfrac{v_c^2}{R} = \dfrac{v_c^2}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{v_0^2}{2l\sin^2\alpha} \quad (2)$.

– Mặt khác: $v_{cx} = v_c\cos(\alpha - \beta) = v_c\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_c\sin\alpha \quad (3)$.

– Thay (1) vào (3) ta được $v_{cx} = \dfrac{v_0\sin\alpha}{2\sin\alpha} = \dfrac{v_0}{2} = const \Rightarrow a_{cx} = 0$.

– Vì: $\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{a_{cx}} + \overrightarrow{a_{cy}}$ mà a_{cx} nên $\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{a_{cy}}$.

Suy ra: $\overrightarrow{a_c}$ có hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn bằng:

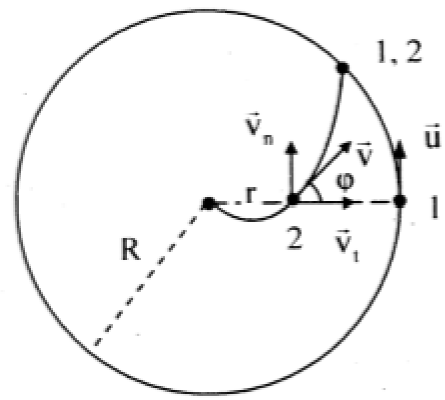
$$a_c = a_{cy} = \frac{a_{ht}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{a_{ht}}{\sin\alpha} = \frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}.$$

Vậy: Tại thời điểm thanh hợp với trục Ox một góc α thì $\overrightarrow{a_c}$ hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn $a_c = \dfrac{v^2}{2l\sin^3\alpha}$.

34. Một học sinh chạy trên đường tròn bán kính $R = 30m$ với tốc độ không đổi $u = 3{,}14m/s$. Học sinh thứ hai xuất phát từ tâm đường tròn, đuổi theo học sinh thứ nhất, với tốc độ không đổi $v = 2u$. Trong suốt thời gian đuổi bắt, vị trí của 2 học sinh luôn nằm trên một bán kính của đường tròn. Tìm thời gian đuổi bắt. Lấy $\pi = 3,14$.

Bài giải

Gọi $\omega = \frac{u}{R}$ là tốc độ góc của học sinh 1 (học sinh chạy trên đường tròn); r là khoảng cách từ học sinh 2 tới tâm O tại thời điểm $t; \varphi$ là góc giữa phương vận tốc $\vec{v}$ của học sinh 2 và bán kính.



- Vì thành phần vận tốc $\overrightarrow{v_n}$ của học sinh 2 trên phương vuông góc bán kính luôn bằng ωr (vị trí 1 và 2 luôn nằm trên cùng một bán kính nên cùng tốc độ góc), do đó: $v = 2u = 2\omega R; \sin\varphi = \frac{v_n}{v} = \frac{\omega r}{2\omega R} = \frac{r}{2R} \quad (1)$.
- Trong quá trình đuổi bắt góc φ thay đổi từ giá trị đầu 0 đến φ_1, khi $r = R$ với $\varphi_t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
- Trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ Δt, góc φ biến đổi một lượng rất nhỏ $\Delta\varphi$, học sinh 2 đi ra xa tâm đường tròn một đoạn Δr.

  Từ (1): $r = 2R\sin\varphi \Rightarrow \Delta r = 2R\Delta(\sin\varphi)$

  $$\Leftrightarrow \Delta r = 2R\left[\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi\right] = 2R.2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

- Vì $\Delta\varphi \ll \varphi$ nên $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$ và $\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx \cos\varphi$, do đó:

  $\Delta r = 2R.2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.\cos\varphi = 2R\cos\varphi.\Delta\varphi \quad (2)$.

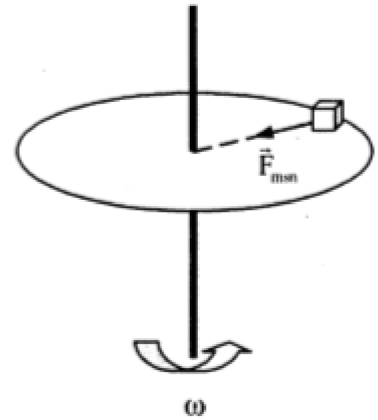
- Ta có: $v_t = v\cos\varphi = 2\omega R\cos\varphi$ mà $v_t = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta r}{v_t} = \frac{2R\cos\varphi\Delta\varphi}{2\omega R\cos\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \Rightarrow \Delta t \sim \Delta\varphi$.

  Và $t = \sum\Delta t = \frac{\sum\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\varphi_t}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{u}{R}} = \frac{3,14.30}{6.3,14} = 5s$.

Vậy: Thời gian đuổi bắt là $t = 5s$.

35. Ở mép đĩa nằm ngang bán kính R có đặt một vật nhỏ. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng qua tâm đĩa với tốc độ góc phụ thuộc vào thời gian theo quy luật $\omega = \gamma t$ (γ không đổi). Hệ số ma sát trượt giữa vật nhỏ và đĩa là μ. Sau thời gian bao lâu, kể từ lúc $t = 0$ vật văng ra khỏi đĩa? Tìm điều kiện của hệ số ma sát trượt để bài toán có nghiệm?

Bài giải



- Tại thời điểm t, ta có:

  + Gia tốc pháp tuyến của vật: $a_n = R\omega^2 = R\gamma^2 t^2$.

  + Gia tốc tiếp tuyến của vật: $a_t = R\gamma$.

  + Gia tốc toàn phần của vật: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2}$.

- Lực làm vật chuyển động tròn là lực ma sát nghỉ nên: $F_{msn} = ma = m\sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2}$.

- Vật bắt đầu văng ra khỏi đĩa khi: $F_{msn} = \mu N = \mu mg \Leftrightarrow m\sqrt{R^2\gamma^4 t^4 + R^2\gamma^2} = \mu mg \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1\right)}}$.

- Để bài toán có nghiệm thì: $t > 0 \Leftrightarrow \frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1 > 0 \Rightarrow \mu > \frac{R\gamma}{g}$.

Vậy: Sau thời gian $t = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\frac{\mu^2 g^2}{R^2\gamma^2} - 1\right)}}$ vật sẽ văng ra khỏi đĩa, với $\mu > \frac{R\gamma}{g}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 5: KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

36. Một hòn bi rất nhỏ lăn ra khỏi đầu cầu thang theo phương ngang với vận tốc $v_0 = 4m/s$. Mỗi bậc cầu thang cao $h = 20cm$ và rộng $d = 30cm$. Hỏi hòn bi sẽ rơi xuống bậc cầu thang nào đầu tiên. Coi đầu cầu thang là bậc thang thứ 0. Lấy $g = 9,8m/s^2$. Bỏ qua lực cản của không khí.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2000)

Bài giải

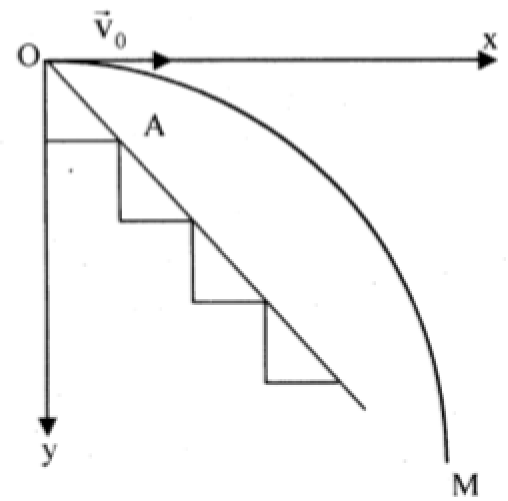
Chọn hệ tọa độ Oxy: Ox nằm ngang, Oy thẳng đứng (hướng xuống). Chuyển động của bi là chuyển động ném ngang.

- Phân tích chuyển động của bi làm hai thành phần:

  + Theo phương Ox, bi chuyển động thẳng đều với phương trình: $x = v_0 t \quad (1)$.

  + Theo phương Oy, bi chuyển động rơi tự do với phương trình: $y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$.

  + Từ (1) và (2) ta được: $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (3)$.



- Phương trình đường thẳng OA: $y = ax \quad (4)$.
- Xét điểm $A(0,3;0,2)$ thuộc đường thẳng $y = ax$ nên $0,2 = 0,3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ và $y = \frac{2}{3}x \quad (5)$.
- Tọa độ các giao điểm của quỹ đạo hòn bi với đường thẳng OA:

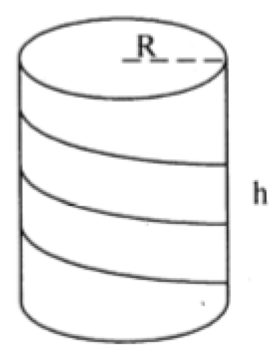
  $\frac{2}{3}x = \frac{g}{2v_0^2}x^2 \Rightarrow x\left(\frac{4,9}{16}x - \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (điểm O); $x_2 \approx 2,18m$ (điểm M).

- Số bậc thang mà hòn bi đã nhảy qua: $n = \frac{x_2}{d} \approx 7,27$.

Vậy: Hòn bi rơi xuống bậc thang thứ 8.

37. Xác định gia tốc của một vật A trượt không ma sát và không vận tốc đầu tiên trên rãnh thứ n của một vít xoắn như hình vẽ.

Cho biết vít có bán kính R và bước vít là h.

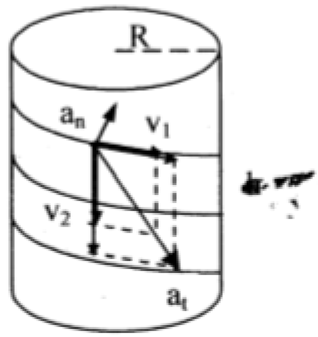


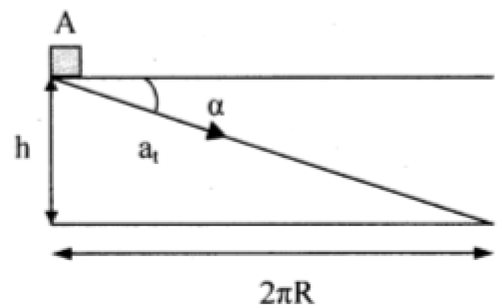
Bài giải

– Phân tích chuyển động xoắn của vật A thành hai thành phần:

+ Chuyển động tròn trên quỹ đạo bán kính R trong mặt phẳng nằm ngang.

+ Chuyển động rơi tự do theo phương thẳng đứng.





– Vận tốc của vật A: $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$.

Với $v_1 = v.\cos\alpha; v_2 = v.\sin\alpha$.

– Gia tốc của vật A: $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$.

+ $a_t = g.\sin\alpha$ (không ma sát); $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2}}$.

+ $a_n = \dfrac{v_1^2}{R} = \dfrac{v^2\cos^2\alpha}{R}; \cos\alpha = \dfrac{2\pi R}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2}}$.

Mặt khác: $v^2 = 2g(nh)$ nên $a_n = \dfrac{2g(nh)\cos^2\alpha}{R}$.

$$\Rightarrow a^2 = a_n^2 + a_t^2 = \frac{g^2h^2}{h^2 + 4\pi^2R^2} + \frac{4g^2n^2h^2\cos^4\alpha}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{gh\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2 + 64\pi^4.n^2.R^2}}{h^2 + 4\pi^2R^2}$$

Vậy: Gia tốc toàn phần của vật A là $a = \dfrac{gh\sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2 + 64\pi^4.n^2.R^2}}{h^2 + 4\pi^2R^2}$.

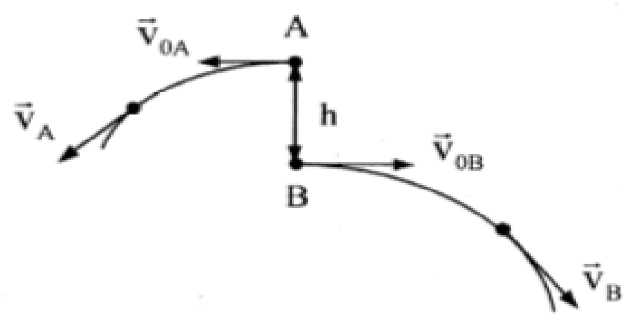
38. Hai vật nhỏ A và B cùng nằm trên một đường thẳng đứng nhưng có độ cao chênh lệch nhau một đoạn $h = 3m$. Ném đồng thời hai vật theo phương ngang, ngược chiều nhau với các vận tốc có độ lớn là $v_{0A} = 4m/s$ và $v_{0B} = 5m/s$. Bỏ qua sức cản của không khí, lấy $g = 10m/s^2$ và cho rằng độ cao ban đầu của các vật là đủ lớn. Tính khoảng cách giữa hai vật khi các vectơ vận tốc toàn phần của chúng vuông góc với nhau.

Bài giải

– Phân tích chuyển động của mỗi vật theo hai trục Ox và Oy (hình vẽ). Ta có:

+ Vật A: $v_{Ax} = v_{0A} = 4m/s$ và $v_{Ay} = gt = 10t$.

+ Vật B: $v_{Bx} = v_{0B} = 5m/s$ và $v_{By} = gt = 10t$.



- Gọi α và β là góc hợp bởi vectơ vận tốc toàn phần của mỗi vật so với phương thẳng đứng, ta có:

  $\tan\alpha = \dfrac{v_{Ax}}{v_{Ay}} = \dfrac{4}{10t}$; $\tan\beta = \dfrac{v_{Bx}}{v_{By}} = \dfrac{5}{10t}$.

- Vectơ vận tốc toàn phần của hai vật vuông góc với nhau khi:

  $\alpha + \beta = 90^0 \Leftrightarrow \tan\alpha.\tan\beta = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{10t}.\dfrac{5}{10t} = 1 \Rightarrow t = 0,447s$.

- Vì hai vật được ném theo phương ngang, ngược chiều nhau nên khoảng cách giữa chúng theo phương ngang là: $l = (v_{0A} + v_{0B})t = (4+5).0,447 = 4,025m$.

- Vì vận tốc của hai vật theo phương thẳng đứng là như nhau nên khoảng cách giữa chúng theo phương thẳng đứng luôn là: $h = 3m$.

- Khoảng cách giữa hai vật là: $d = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{4,025^2 + 3^2} = 5,022m$.

Vậy: Khoảng cách giữa hai vật khi các vectơ vận tốc toàn phần của chúng vuông góc với nhau là $d = 5,022m$.