2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

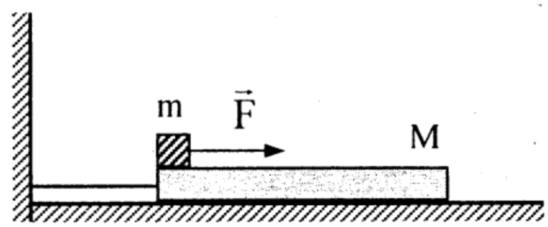
Chuyên đề 6 – 7: CÁC ĐỊNH LUẬT NIU-TƠN VÀ CÁC LỰC CƠ HỌC

1. Một tấm ván có khối lượng $M = 10kg$ nằm trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn và được giữa bằng một sợi dây không dãn. Vật nhỏ có khối lượng $m = 1kg$ trượt đều với tốc độ $v = 2m/s$ từ mép tấm ván dưới tác dụng của một lực không đổi $\overrightarrow{F}$ nằm ngang có độ lớn $F = 10N$ như hình vẽ. Khi vật đi được đoạn đường dài $l = 1m$ trên tấm ván thì dây bị đứt.

a) Tính gia tốc của vật và ván ngay sau khi dây đứt.

b) Mô tả chuyển động của vật và ván sau khi dây đứt trong một thời gian đủ dài. Tính vận tốc, gia tốc của vật và ván trong từng giai đoạn. Coi ván đủ dài.

c) Hãy xác định chiều dài tối thiểu của tấm ván để m không trượt khỏi ván.



Bài giải

a) Gia tốc của vật và ván ngay sau khi dây đứt

Chọn chiều (+) là chiều chuyển động của vật m.

- Xét chuyển động của vật m:

+ Trước khi dây bị đứt, m trượt đều nên: $F_{hl} = F - F_{ms} = 0 \Rightarrow F_{ms} = F$.

+ Ngay sau khi dây đứt: $F_{hl} = 0 \Rightarrow a_m = 0$: vật m vẫn trượt đều với tốc độ v.

- Xét chuyển động của ván M:

+ Trước khi dây bị đứt: Ván đứng yên.

+ Ngay sau khi dây đứt: Ván M chuyển động thẳng nhanh dần đều không vận tốc đầu với gia tốc:

$$a_M = \frac{F_{ms}}{M} = \frac{F}{M} = \frac{10}{10} = 1(m/s^2)$$

Vậy: Trước khi dây đứt: vật m: $a_m = 0$ (trượt đều), ván M: $a_M = 0$ (đứng yên); ngay sau khi dây đứt: vật m: $a_m = 0$ (trượt đều), ván M: $a_M = 1(m/s^2)$ (chuyển động nhanh dần đều theo chiều vật m với vận tốc ban đầu bằng 0).

b) Mô tả chuyển động của vật và ván sau khi dây đứt; tính vận tốc, gia tốc của vật và ván trong từng giai đoạn.

- Giai đoạn 1: $0 \le t \le t_0$ (từ lúc dây đứt đến lúc vận tốc của hai vật bằng nhau)

+ Vật m chuyển động thẳng đều với tốc độ v, gia tốc $a_m = 0$.

+ Ván M chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc $a_M = 1(m/s^2)$ và đạt tốc độ v tại thời điểm:

$$t_0 = \frac{v}{a_M} = \frac{2}{2} = 2s$$

- Giai đoạn 2: $t \geq t_0$ (kể từ thời điểm mà hai vật cùng vận tốc)

Vật m và ván M cùng chuyển động thẳng nhanh dần đều với tốc độ ban đầu $v_0 = 2(m/s)$ và gia tốc:

$$a = \frac{F}{M+m} = \frac{10}{10+1} \approx 0,9(m/s^2)$$

Vậy: Chuyển động của vật và ván sau khi dây đứt trong một thời gian đủ dài bao gồm hai giai đoạn được mô tả như trên.

c) Chiều dài tối thiểu của tấm ván để m không trượt khỏi tấm ván

- Quãng đường vật m đi được trên ván M kể từ khi dây đứt đến thời điểm $t = t_0$ là:

$$\Delta_S = \frac{1}{2}a_{m/M}t_0^2 + vt_0 = \frac{1}{2}(0 - a_M)t_0^2 + vt_0 = \frac{Mv^2}{2F} \text{ (*)}$$

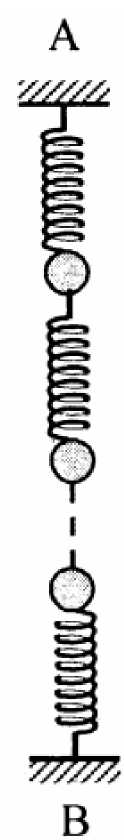
- Chiều dài tối thiểu của ván là: $l_{\min} = l + \Delta s = l + \frac{Mv^2}{2F} = 1 + \frac{10.2^2}{2.10} = 3m$

Vậy: Chiều dài tối thiểu của tấm ván để m không trượt khỏi ván là $l_{\min} = 3m$

* **Chú ý:** Hệ thức (*) được suy ra từ định lý động năng:

$$\Delta W_{\tilde{n}} = A \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = A_{ms} = -F_{ms}s\ .$$

2. Cho hệ gồm N lò xo nhẹ và (N-1) vật nhỏ ghép nối tiếp như hình vẽ $(N \geq 2)$. Các lò xo có cùng chiều dài tự nhiên l_0 và độ cứng k; các vật nhỏ đều có khối lượng m. Biết rằng các vật đứng cân bằng và các lò xo thẳng đứng; A, B cố định; khoảng cách $AB = Nl_0$.



a) Tìm độ biến dạng của lò xo thứ n nào đó.

b) Tìm điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng.

Bài giải

a) Độ biến dạng của lò xo thứ n

Gọi Δl_n là độ biến dạng của lò xo thứ n, với quy ước $\Delta l_n > 0$ khi lò xo đó dãn và $\Delta l_n < 0$ khi lò xo đó nén.

- Chọn trục Ox trùng với AB, chiều dương từ B đến A.
- Xét điều kiện cân bằng của $(N-1)$ vật, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} k\Delta l_1 - k\Delta l_2 - P = 0 \\ k\Delta l_2 - k\Delta l_3 - P = 0 \\ \text{..............................} \\ k\Delta l_n - k\Delta l_{n+1} - P = 0 \\ \text{...............................} \\ k\Delta l_{N-1} - k\Delta l_N - P = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

- Mặt khác: $\Delta l_1 + \Delta l_2 + ... + \Delta l_N = AB - Nl_0 = 0$ (2)

- Biến đổi hệ (1) thành:

$$\begin{cases} k\Delta l_2 = k\Delta l_1 - P \\ k\Delta l_3 = k\Delta l_2 - P = k\Delta l_1 - 2P \\ \text{..............................} \\ k\Delta l_n = k\Delta l_{n-1} - P = k\Delta l_1 - (n-1)P \\ \text{...............................} \\ k\Delta l_N = k\Delta l_{N-1} - P = k\Delta l_1 - (\text{N}-1)P \end{cases} \qquad (3)$$

- Cộng từng vế các phương trình của hệ (3), ta được:

$$k(\Delta l_2 + ... + \Delta l_N) = (N-1)k\Delta l_1 - [1 + 2 + ... + (N-1)]P$$

$$\Rightarrow k(\Delta l_1 + \Delta l_2 + ... + \Delta l_N) = Nk\Delta l_1 - \frac{N(N-1)P}{2}$$

- Kết hợp với điều kiện (2), ta được:

$$Nk\Delta l_1 - \frac{N(N-1)P}{2} = 0 \text{ hay } \Delta l_1 = \frac{(N-1)P}{2k} \qquad (4)$$

- Thay (4) vào (3), ta được: $\Delta l_n = \frac{(N-2n+1)P}{2k} = \frac{(N-2n+1)mg}{2k}$

Vậy: Độ biến dạng của lò xo thứ n là $\Delta l_n = \frac{(N-2n+1)mg}{2k}$

b) Điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng

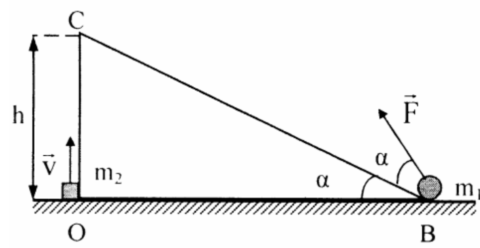
- Để lò xo thứ n không biến dạng thì $\Delta l_n = 0 \Leftrightarrow \frac{(N-2n+1)mg}{2k} = 0$

$\Rightarrow n = \frac{N+1}{2}$ với n là số tự nhiên

- Từ đó, N phải là số lẻ lớn hơn 1 $(N = 3, 5, ...)$, khi đó, lò xo chính giữa không biến dạng.

Vậy: Điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng là $n = \frac{N+1}{2}$, N là số lẻ lớn hớn 1.

3. Cho hai chất điểm khối lượng bằng nhau $(m_1 = m_2 = m)$. Ở thời điểm ban đầu chúng có vị trí như hình vẽ. Vật m_1 được truyền lực $F = P\sqrt{3}$ hợp với phương BC góc α. Cho $OC = h$, $\widehat{OBC} = \alpha$, với $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}$. Vật m_2 được truyền vận tốc ban đầu chuyển động thẳng đứng theo phương OC.



a) Xác định thời gian để hai vật gặp nhau.

b) Vị trí gặp nhau. Cho gia tốc trọng trường là g.

Bài giải

a) Thời gian để hai vật gặp nhau: Xét vật 1:

- Ta có: $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{P}{F} \Leftrightarrow F\sin\alpha > P\cos\alpha \Rightarrow F_y > P_y$: vật không trượt trên mặt nêm.

- Do các lực tác dụng lên vật không đổi nên gia tốc a không đổi, vật chuyển động theo phương BA (A là điểm gặp nhau):

$$F_{hl}^2 = F^2 + P^2 - 2FP\cos(90° - 2\alpha) = F^2 + P^2 - 2FP\sin 2\alpha$$

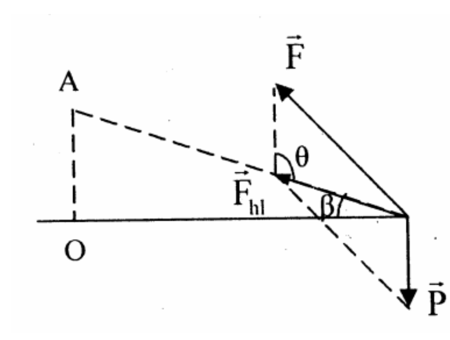
$$\Rightarrow F_{hl} = \sqrt{F^2 + P^2 - 2FP\sin 2\alpha}$$

$$= \sqrt{3P^2 + P^2 - 2P\sqrt{3}P\sin 2\alpha} = P\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}$$

- Gia tốc của vật: $a = \frac{F_{hl}}{m} = g\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}$

- Áp dụng định lí hàm sin cho tam giác có các cạnh F, F_{hl}:

$$\frac{F}{\sin\theta} = \frac{F_{hl}}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{F_{hl}}{\text{cosin}2\alpha}$$



$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{F\cos 2\alpha}{F_{hl}}$$

$$= \frac{P\sqrt{3}\cos 2\alpha}{P\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}$$

- Mặt khác: $\theta = \beta + 90° \Rightarrow \cos\beta = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}$

Với: $\beta > \alpha \Rightarrow \cos\beta < \cos\alpha$; $OB = \frac{h}{\tan\alpha}$; $AB = \frac{h}{\tan\alpha}.\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}$

- Thời gian để hai vật gặp nhau: Ta có: $AB = \frac{1}{2}at^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{2\frac{h}{\tan\alpha}.\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}}{g\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}} = \sqrt{\frac{2h}{g.\tan\alpha\sqrt{3}\cos 2\alpha}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha-3(1-\sin^2 2\alpha)}}{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{3\sin^2 2\alpha-2\sqrt{3}\sin 2\alpha+1}{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}$$

Vậy: Thời gian để hai vật gặp nhau là $t = \sqrt{\frac{2h}{g\tan\alpha\sqrt{3}\cos 2\alpha}}$

b) Vị trí gặp nhau

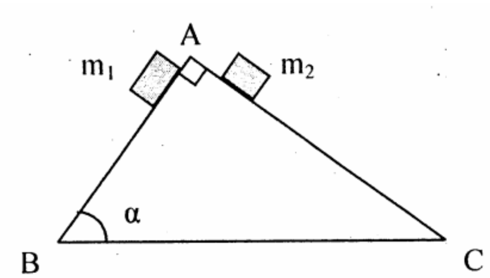
Ta có: $OA = AB\sin\beta = \frac{h}{\tan\alpha}.\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}.\sqrt{\frac{3\sin^2 2\alpha-2\sqrt{3}\sin 2\alpha+1}{4-2\sqrt{3}\sin 2\alpha}}$

$$\Leftrightarrow OA = \frac{h\sqrt{3\sin^2 2\alpha-2\sqrt{3}\sin 2\alpha+1}}{\sqrt{3}\tan\alpha\cos 2\alpha}$$

Vậy: Vị trí hai vật gặp nhau cách vị trí ném vật 2 theo phương thẳng đứng một đoạn:

$$OA = \frac{h\sqrt{3\sin^2 2\alpha-2\sqrt{3}\sin 2\alpha+1}}{\sqrt{3}\tan\alpha\cos 2\alpha}$$

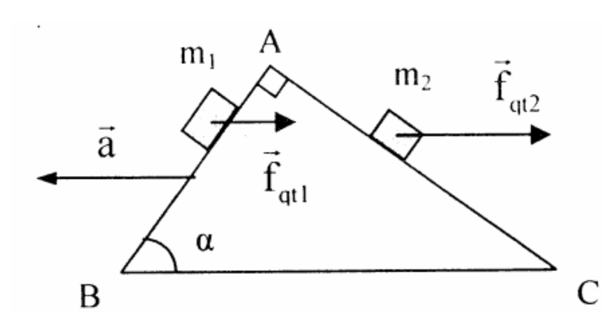
4. Hai vật nhỏ có khối lượng $m_2 = 3m_1$ cùng bắt đầu dịch chuyển từ đỉnh một cái nêm có dạng hình tam giác vuông ABC vuông tại A, (hình vẽ) dọc theo hai mặt sườn AB và AC. Bỏ qua ma sát. Lấy $g = 10m/s^2$.



a) Giữ nêm cố định, thả đồng thời hai vật thì thời gian trượt đến chân các mặt sườn của chúng lần lượt là t_1 và t_2 với $t_2 = 2t_1$. Tính α.

b) Để $t_2 = t_1$ cần phải cho nêm chuyển động theo phương ngang với gia tốc không đổi a_0 như thế nào?

Bài giải



a) Khi nêm cố định

- Gia tốc chuyển động của các vật trên mặt phẳng nghiêng không ma sát là:

$a_1 = g\sin\alpha;\ a_2 = g\cos\alpha$

- Thời gian các vật trượt tới chân các mặt sườn là:

$AB = \dfrac{1}{2} g\sin\alpha . t_1^2$ và $AC = \dfrac{1}{2} g\cos\alpha . t_2^2$

- Theo đề bài, ta có:

$t_2 = 2t_1 \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{\tan\alpha}$ (1)

- Mặt khác: $\dfrac{AC}{AB} = \tan\alpha$ (2)

$\Rightarrow \tan\alpha = 2; \ \alpha = 63,4°$

Vậy: Khi nêm được giữ cố định, $\alpha = 63,4°$.

b) Khi nêm chuyển động.

- Để có $t_2 = t_1$ thì nêm M phải chuyển động về phía bên trái nhanh dần đều với gia tốc a_0.

- Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, các vật m_1 và m_2 chịu tác dụng thêm lực quán tính $\vec{f}_{qt1}$ và $\vec{f}_{qt2}$ nên gia tốc của các vật lúc này là:

$a_1 = g\sin\alpha - a_0\cos\alpha; \ a_2 = g\cos\alpha + a_0\sin\alpha$

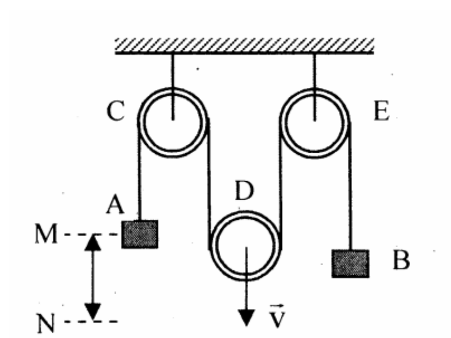
- Vì $t_2 = t_1$ nên $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a_2}{a_1}; \ \tan\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{g\cos\alpha + a_0\sin\alpha}{g\sin\alpha - a_0\cos\alpha} = \dfrac{g + a_0\tan\alpha}{g\tan\alpha - a_0}$

$\Rightarrow a_0 = \dfrac{3g}{4} = \dfrac{3.10}{4} = 7,5 m/s^2$

Vậy: Để $t_2 = t_1$ cần phải cho nêm chuyển động theo phương ngang với gia tốc không đổi $a_0 = 7,5 m/s^2$

5. Cho hệ như hình vẽ, D là ròng rọc động luôn được kéo xuống thẳng đứng với tốc độ không đổi $2m/s$. C và E là hai ròng rọc cố định. Lúc $t = 0$, vật A bắt đầu đi xuống từ vị trí M ($v_0 = 0$) với gia tốc không đổi. Khi tới N ($MN = 4m$), A có tốc độ $8m/s$. Coi ròng rọc nhỏ, dây không dãn.

Tìm sự thay đổi độ cao của B, vận tốc và gia tốc của B.



(*Trích đề thi Olympic 30/4, 2010*)

Bài giải

Chọn chiều (+) hướng xuống.

- Xét vật A: $v_A^2 = 2a_A . MN \Rightarrow a_A = \dfrac{v_A^2}{2MN} = \dfrac{8^2}{2.4} = 8m/s^2$

Và $v_A = a_A t \Rightarrow t = \frac{v_A}{a_A} = \frac{8}{8} = 1s$

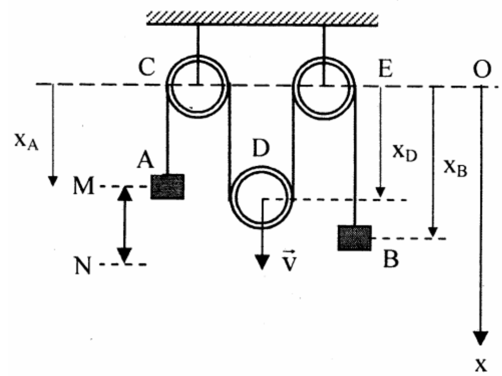
- Xét ròng rọc D (chuyển động thẳng đều): $s_D = v_D t = 2.1 = 2m$ (1)

- Xét vật B: Do dây không dãn, nên ta có: $x_A = 2x_D + x_B = const$

- Sau khoảng thời gian $\Delta t : \Delta x_A + 2\Delta x_D + \Delta x_B = 0$ (2)

Với $\Delta x_A = 4m$ (đề bài); $\Delta x_D = 2m$ (theo (1)).

Suy ra: $\Delta x_B = -8m$; nghĩa là: từ vị trí đầu B đi lên 8m.



- Từ (2) ta được:

$v_A + 2v_D + v_B = 0$ (3)

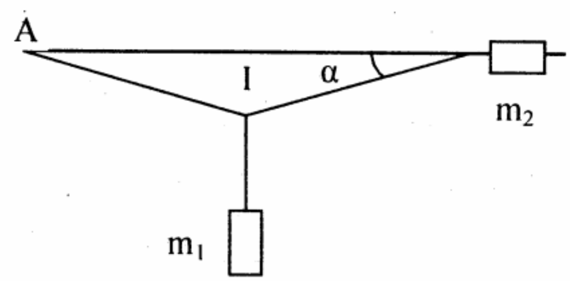
Và: $a_A + 2a_D + a_B = 0$ (4)

- Thay $v_A = 8m/s$ và $v_D = 2m/s$ vào (3) ta được: $v_B = -2m/s$ (B đi lên).

- Thay $a_A = 8m/s^2$ và $a_D = 0$ (D chuyển động thẳng đều) vào (4) ta được: $a_B = -8m/s^2$ (B chuyển động nhanh dần đều đi lên).

Vậy: B đi lên một đoạn 8m với gia tốc $a_B = -8m/s^2$ và vận tốc điểm cuối là $v_B = -12m/s$.

6. Cho một hệ cơ học như hình vẽ, sợi dây dài 2L (không dãn, không khối lượng). Một đầu buộc chặt vào A, đầu kia nối với vật có khối lượng m_2, vật m_2 có thể di chuyển không ma sát dọc theo thanh ngang. Tại trung điểm I của dây có gắn chặt một vật có khối lượng m_1. Ban đầu giữ vật m_2 đứng yên, dây hợp với phương ngang một góc α. Xác định gia tốc của vật có khối lượng m_2 và lực căng của sợi dây ngay sau khi thả vật m_2?



Bài giải

- Ngay sau khi thả m_2, m_2 chịu tác dụng của các lực $\overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{T_2}', \overrightarrow{P_2}$, còn m_1 chịu tác dụng của các lực $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}, \overrightarrow{P_1}$ (hình vẽ). Khi đó m_2 chuyển động sang trái, chỉ có thành phần gia tốc theo phương ngang là $\overrightarrow{a_2}$; còn m_1 chuyển động quay quanh A. Ngay sau khi thả m_2, vận tốc của m_1 bằng 0 nên thành phần gia tốc của m_1 theo phương hướng tâm bằng 0. Do đó m_1 chỉ có thành phần gia tốc theo phương tiếp tuyến là $\overrightarrow{a_1}$.

- Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

- Do dây không dãn, không khối lượng nên: $T_1 = T_1'; T_2 = T_2'$

- Theo phương dây treo, ta có:

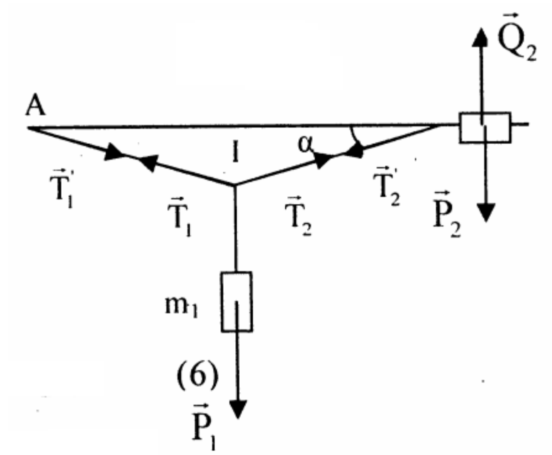
$$a_2\cos\alpha = a_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = a_1 \sin 2\alpha = 2a_1 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow a_2 = 2a_1 \sin\alpha \qquad (1)$$

- Áp dụng định luật II Niu – tơn cho các vật, ta được:

+ Với vật m_1: $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{P_1} = m_1\overrightarrow{a_1}$ (2)

+ Với vật m_2: $\overrightarrow{T_2}' + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{Q_2} = m_2\overrightarrow{a_2}$ (3)



- Chiếu (2) lên trục Ox và Oy, ta được:

$(T_1 - T_2)\cos\alpha = m_1 a_{1x} = m_1 a_1 \sin\alpha$ (4)

$-(T_1 + T_2)\sin\alpha + P_1 = m_1 a_1 \cos\alpha$ (5)

- Chiếu (3) lên trục Ox, ta được: $T_2'\cos\alpha = m_2 a_2$ (6)

- Thay (1) vào (6), ta được: $T_2 = T_2' = 2m_2 a_1 \tan\alpha$ (7)

- Từ các phương trình trên, ta được:

+ Vật m_1: $a_1 = \dfrac{m_1 g\cos\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$

+ Vật m_2: $a_2 = 2a_1\sin\alpha = \dfrac{2m_1 g\cos\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}.\sin\alpha = \dfrac{m_1 g\cos 2\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$

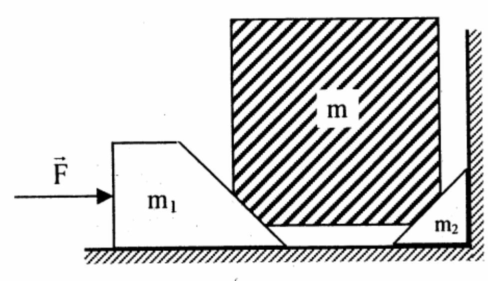
- Lực căng các đoạn dây: $T_2 = T_2' = 2m_2 a_1 \tan\alpha = \dfrac{2m_1 m_2 g\sin\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$

Và $T_1 = T_1' = \dfrac{(m_1 + 2m_2)m_1 g\sin\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$

Vậy: Gia tốc của vật có khối lượng m_2 và lực căng của sợi dây ngay sau khi thả vật m_2 là

$a_2 = \dfrac{m_1 g\sin\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$ và $T_1 = \dfrac{(m_1 + 2m_2)g\sin\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$, $T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g\sin\alpha}{m_1 + 4m_2\sin^2\alpha}$

7. Trên một mặt phẳng nằm ngang có hai cái nêm với mặt nghiêng $45°$ và khối lượng m_1, m_2. Nêm m_2 dựa vào tường cố định, nêm m1



chịu tác dụng bởi lực $\vec{F}$ nằm ngang. Một vật có khối lượng m có hai mặt nghiêng $45°$ đặt lên hai nêm (hình vẽ).

a) Xác định gia tốc (hướng và độ lớn) của nêm m_1 và vật m.

b) Tính áp lực của m lên m_2.

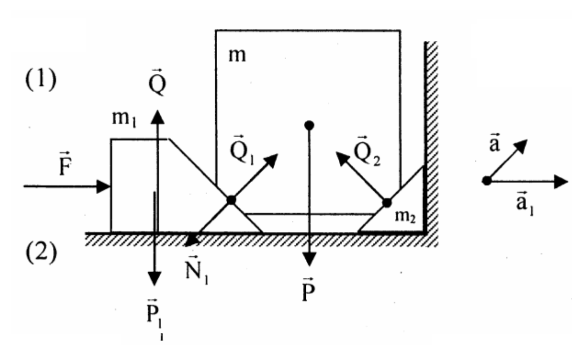
Bài giải

a) Gia tốc (hướng và độ lớn) của nêm m_1 và vật m

- Xét nêm m_1:

+ Các lực tác dụng lên nêm m_1: trọng lực $\vec{P_1}$; phản lực $\vec{Q}$; áp lực $\vec{N_1}$; lực $\vec{F}$.

+ Phương trình chuyển động của nêm m_1:



$\vec{P_1}+\vec{Q}+\vec{N_1}+\vec{F}=m_1\vec{a_1}$ (1)

+ Chiếu (1) lên phương nằm ngang, ta được:

$F-N_1\cos 45°=m_1a_1$

$\Leftrightarrow F-\frac{\sqrt{2}}{2}N_1=m_1a_1$ (2)

- Xét vật m:

+ Các lực tác dụng lên vật m: trọng lực $\vec{P}$; các phản lực $\vec{Q_1};\vec{Q_2}$

+ Phương trình chuyển động của vật m: $\vec{P}+\vec{Q_1}+\vec{Q_2}=m\vec{a}$ (3)

+ Chiếu (3) lên phương mặt nêm m_2, ta được:

$Q_1-P\cos 45°=ma\Leftrightarrow N_1-\frac{\sqrt{2}}{2}mg=ma$

Với $a=\frac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow N_1-\frac{\sqrt{2}}{2}mg=m\frac{a_1}{\sqrt{2}}$ (4)

- Từ (2) và (4), suy ra: $a_1=\frac{2F-mg}{2m_1+m}$; $N_1=\frac{m(a_1+g)}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(F+m_1g)m}{2m_1+m}$

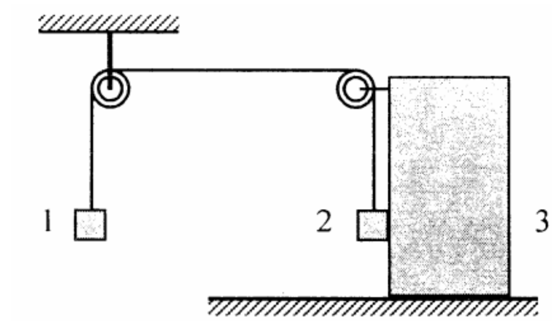
Vậy: Gia tốc của nêm m1 có hướng từ trái sang phải, có độ lớn $a_1=\frac{2F-mg}{2m_1+m}$; gia tốc của vật m có hướng lên dọc theo mặt nghiêng của nêm m_2, có độ lớn $a=\frac{2F-mg}{\sqrt{2}(2m_1+m)}$

b) Áp lực của m lên m_2

Ta có: $N_2=P\cos 45°=mg.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{mg}{\sqrt{2}}$

Vậy: Áp lực của vật m lên nêm m2 là $N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$

8. Cho hệ như hình vẽ. Khối lượng ba vật bằng nhau và bằng m. Sợi chỉ nối vật 1 và vật 2 nhẹ, không dãn. Đoạn giữa hai ròng rọc nằm ngang, hai đoạn còn lại thẳng đứng. Các ròng rọc nhẹ và không ma sát. Vật 3 chuyển động trên mặt phẳng ngang và không lật.



Tìm gia tốc của vật. Biết gia tốc trọng trường là g.

Bài giải

Gọi $\vec{T}$ là lực căng dây; a_1, a_2, a_3 là gia tốc của ba vật: vật 1 chuyển động theo phương thẳng đứng, vật 3 chuyển động theo phương nằm ngang, vật 2 vừa chuyển động theo phương thẳng đứng với gia tốc a_{2y} vừa chuyển động theo phương ngang với gia tốc $a_{2x} = a_3(\vec{a}_{2x} + \vec{a}_{2y})$

- Chọn hệ toạ độ Oxy (hình vẽ). Phương trình định luật II Niu – tơn cho các vật:

+ Vật 1: Theo trục Oy, ta có: $P_1 - T = m_1 a_1 \Leftrightarrow mg - T = ma_1$ (1)

+ Vật 2:

• Theo trục Oy: $P_2 - T = m_2 a_{2y} \Leftrightarrow mg - T = ma_{2y}$ (2)

• Theo trục Ox: $-m_3 a_3 - T = m_2 a_{2x} \Rightarrow -T = 2ma_{2x}$ (3)

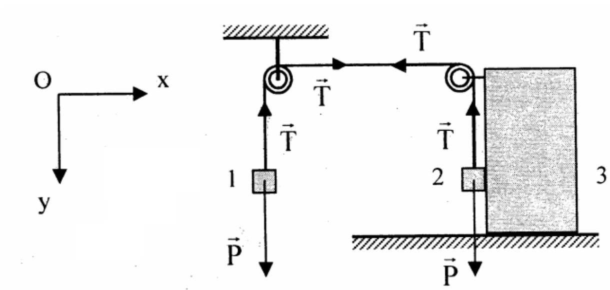
- Dây không dãn: $y_1 + y_2 + x_2 = const$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y_1}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow v_1 + v_{2y} + v_{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t} + \frac{\Delta v_{2y}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_{2x}}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_{2y} + a_{2x} = 0 \qquad (4)$$

- Từ (1) và (2), ta có:

$$a_1 = a_{2y} = g - \frac{T}{m}$$



- Từ (3), ta có:

$$a_{2x} = -\frac{T}{2m}$$

- Thay các giá trị a_{2x} và a_{2y} vào (4), ta được: $2\left(g - \frac{T}{m}\right) - \frac{T}{2m} = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{4mg}{5}$$

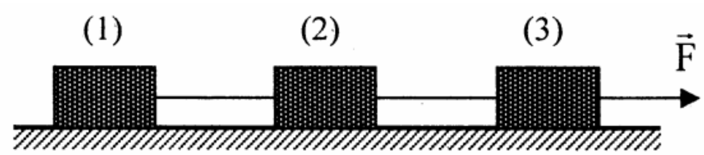
- Từ đó: $a_1 = a_{2y} = g - \dfrac{\dfrac{4mg}{5}}{m} = g - \dfrac{4g}{5} = \dfrac{g}{5}$; $a_{2x} = a_3 = -\dfrac{T}{2m} = -\dfrac{\dfrac{4mg}{5}}{2m} = -\dfrac{2g}{5}$

$\Rightarrow a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{-2g}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{g}{5}\right)^2} = \dfrac{g}{\sqrt{5}}$

Vậy: Gia tốc của mỗi vật là: $a_1 = \dfrac{g}{5}$; $a_2 = \dfrac{g}{\sqrt{5}}$; $a_3 = -\dfrac{2g}{5}$ ($\vec{a}_3$ ngược chiều Ox).

Về hướng thì $\vec{a}_1$ hướng thẳng đứng xuống dưới; $\vec{a}_3$ hướng ngang sang trái; $\vec{a}_2$ hợp với phương ngang một góc φ, với $\tan\varphi = \tan\left(\dfrac{a_{2y}}{a_{2x}}\right) = \tan\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi = 26°33$.

9. Ba vật có khối lượng như nhau $m = 5kg$ được nối với nhau bằng các sợi dây không dãn, khối lượng không đáng kể trên mặt bàn nằm ngang. Biết rằng dây sẽ đứt khi lực căng là $T_0 = 20N$. Hệ số ma sát giữa mặt bàn và các vật tương ứng là $\mu_1 = 0,3$; $\mu_2 = 0,2$; $\mu_3 = 0,1$.



Người ta kéo vật với một lực $\vec{F}$ nằm ngang và tăng dần độ lớn của lực này.

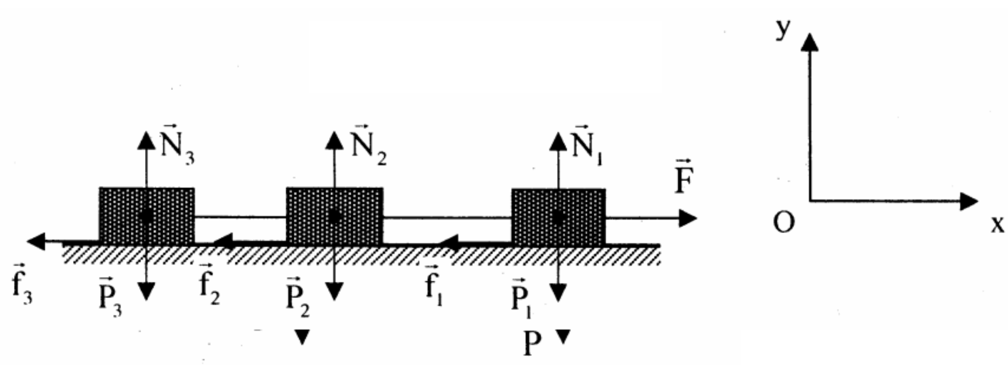
a) Hỏi sợi dây nào sẽ đứt và điều này sẽ xảy ra khi lực F nhỏ nhất là bao nhiêu?

b) Kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào nếu lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật (3)?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1995)

Bài giải

a) Sợi dây nào sẽ đứt?



- Các lực tác dụng lên vật (1): Lực kéo $\vec{F}$; lực căng $\vec{T_1}$; lực ma sát $\vec{f_1}$; trọng lực $\vec{P_1}$; phản lực $\vec{N_1}$.

- Áp dụng định luật II Niu – tơn cho vật (1), ta được:

$\vec{F} + \vec{T_1} + \vec{f_1} + \vec{P_1} + \vec{N_1} = m\vec{a_1}$ (1)

- Chiếu (1) xuống hai trục Ox và Oy, ta được:

$F - T_1 - f_1 = m_1a_1 = ma$ và $N_1 = mg$

$\Rightarrow f_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$

Và $F - T_1 - \mu_1 mg = ma$ (2)

- Tương tự: Với vật (2): $T_1 - T_2 - \mu_2 mg = ma$ (3)

- Với vật (3): $T_2 - \mu_3 mg = ma$ (4)

$(a_1 = a_2 = a_3 = a)$

- Từ (2), (3) và (4) ta được: $a = \dfrac{F}{3m} - \dfrac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)g$

- Theo đề: $\mu_1 = 3\mu_3$ và $\mu_2 = 2\mu_3 \Rightarrow a = \dfrac{F}{3m} - 2\mu_3 g$

- Các lực căng dây:

$$T_1 = F - \mu_1 mg - ma = F - 3\mu_3 mg - \frac{F}{3} + 2\mu_3 mg = \frac{2F}{3} - \mu_3 mg$$

$$T_2 = ma + \mu_3 mg = \frac{F}{3} - 2\mu_3 mg + \mu_3 mg = \frac{F}{3} - \mu_3 mg$$

- Ta thấy $T_1 > T_2$ do đó khi lực kéo tăng lên thì dây nối giữa các vật (1) và (2) sẽ bị đứt trước. Theo giả thiết dây nối (1) và (2) sẽ bị đứt khi: $T_1 = \dfrac{2F}{3} - \mu_3 mg \ge T_0$

$$\Rightarrow F \ge \frac{F}{3}(T_0 + \mu_3 mg) = \frac{3}{2}(20 + 0,1.5.10) = 37,5N$$

Vậy: Dây nối hai vật (1) và (2) sẽ bị đứt và lực kéo F nhỏ nhất để cho dây nối bị đứt là: $F = 37,5N$

b) Trường hợp lực kéo $\vec{F}$ tác dụng vào vật (3)

- Tương tự, ta được: $a = \dfrac{F}{3m} - 2\mu_3 g$

- Lực căng của dây nối giữa (3) và (2) là:

$$T_2 = F - \mu_3 mg - ma = F - \mu_3 mg - \frac{F}{3} + 2\mu_3 mg = \frac{2F}{3} + \mu_3 mg$$

- Lực căng của dây nối giữa (2) và (1) là:

$$T_1 = ma + \mu_1 mg = \frac{F}{3} - 2\mu_3 mg + 3\mu_3 mg = \frac{F}{3} + \mu_3 mg = \frac{F}{3} + \mu_3 mg$$

- Vì $T_2 > T_1$ nên dây nối (2) và (3) sẽ đứt trước khi: $T_2 = \dfrac{2F}{3} + \mu_3 mg \ge T_0$

$$\Rightarrow F \ge \frac{3}{2}(T_0 - \mu_3 mg) = \frac{3}{2}(20 - 0,1.5.10) = 22,5N$$

Vậy: Dây nối hai vật (2) và (3) sẽ bị đứt và lực kéo F nhỏ nhất để cho dây nối bị đứt là: $F = 22,5N$

10. Trong một bình đựng ba chất lỏng không trộn lẫn vào nhau có khối lượng riêng lần lượt là ρ_1, ρ_2, ρ_3 và độ cao tương ứng là h_1, h_2, h_3. Từ bề mặt chất lỏng trên cùng ta thả quả cầu nhỏ với vận tốc ban đầu v_0 thẳng đứng xuống dưới. Biết rằng khi chạm đáy bình, vận tốc quả cầu bằng v, tính khối lượng riêng quả cầu. Suy rộng kết quả khi trong bình đựng n chất lỏng có khối lượng riêng $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ và độ cao $h_1, h_2, ..., h_n$ (Bỏ qua ma sát).

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1995)

Bài giải

Gọi ρ là khối lượng riêng, m là khối lượng và V là thể tích của quả cầu. Trong mỗi chất lỏng, quả cầu chịu lực đẩy Acsimet $\overrightarrow{F}_A$ của các chất lỏng này.

- Trong chất lỏng thứ nhất; Gọi a_1 là gia tốc của quả cầu, ta có:

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_A = m\overrightarrow{a_1} \Leftrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_A = m\overrightarrow{a_1}$$

Với $m = V_\rho$ và $F_A = V_{\rho 1 g}$

- Chọn chiều dương đi xuống, ta có:

$$V\rho g - V\rho_1 g = V\rho a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho} g = \left(1 - \frac{\rho_1}{p}\right) g$$

- Gọi v1 là vận tốc quả cầu khi tới mặt chất lỏng thứ hai, ta có:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_1.h_1 = 2\left(1 - \frac{\rho_1}{p}\right) gh_1 \qquad (1)$$

- Tương tự, với chất lỏng thứ hai và thứ ba, ta được:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 - h_2 = 2\left(1 - \frac{\rho_2}{p}\right) gh_2 \qquad (2)$$

$$v_3^2 - v_2^2 = 2a_3 - h_3 = 2\left(1 - \frac{\rho_3}{p}\right) gh_3 \qquad (3)$$

Với $v_3 = v$ vận tốc quả cầu khi chạm đáy bình.

- Cộng (1) + (2) + (3) ta được:

$$v_3^2 - v_0^2 = 2g\left[\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)h_1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho}\right)h_2 - \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho}\right)h_3\right]$$

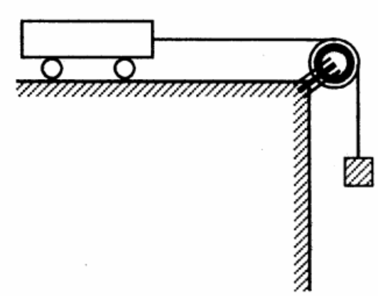
$$\Rightarrow \frac{v_3^2 - v_0^2}{2g} = h_1 + h_2 + h_3 - \frac{1}{\rho}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)$$

Và $\rho = 2g\dfrac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3}{2g(h_1 + h_2 + h_3) + v_0^2 - v^2}$

Vậy:

- Khối lượng riêng của quả cầu là: $\rho = 2g\dfrac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3}{2g(h_1 + h_2 + h_3) + v_0^2 - v^2}$

- Suy rộng cho trường hợp trong bình đựng n chất lỏng có khối lượng riêng $\rho_1, \rho_2, ...\rho_n$ và độ cao $h_1, h_2, ...h_n$, ta có: $\rho = 2g\dfrac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + ... + \rho_n h_n}{2g(h_1 + h_2 + ... + h_n) + v_0^2 - v^2}$



11. Một xe nhỏ thấp được buộc vào một vật nặng bằng dây. Thả x era, nó chuyển động với một gia tốc nào đó. Khi chèn chặt một trục của bánh xe (bánh xe gắn liền với trục) thì gia tốc của xe giảm k lần so với thí nghiệm trên. Hỏi nếu chèn chặt cả hai trục và làm lại thí nghiệm thì gia tốc của xe giảm bao nhiêu lần so với lần đầu?

(Trích đề thi Olympic 30/4. 1996)

Bài giải

- Gọi P là độ lớn của lực kéo cho hệ chuyển động (khối lượng của cả hệ là M); F_l là ma sát lăn tác dụng lên tất cả các bánh; F_t là ma sát trượt tác dụng lên tấ cả các bánh.

- Lúc đầu, xe chuyển động lăn nên: $P - F_l = Ma$ (1)

- Khi chèn một trục, hai bánh lăn còn hai bánh trượt nên:

$P - \dfrac{F_l}{2} - \dfrac{F_t}{2} = Ma_1 = \dfrac{Ma}{k}$ (2) (do $a_1 = \dfrac{a}{k}$)

- Từ (1) và (2), ta được: $F_t = F_l + \dfrac{2(k-1)}{k}Ma$ (3)

- Khi chèn cả hai trục, cả bốn bánh xe đều trượt nên:

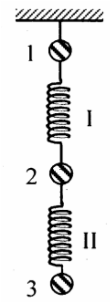
$P - F_t = Ma_2$ (4)

- Thay (3) vào (4), chú ý (1) ta được: $Ma\left[1 - \dfrac{2(k-1)}{k}\right] = Ma^2$

$\Rightarrow \dfrac{a}{a_2} = \dfrac{k}{2-k}$

Vậy: Nếu chèn chặt cả hai trục và làm lại thí nghiệm thì gia tốc của xe giảm $\dfrac{k}{2-k}$ lần so với ban đầu.

12. Ba quả cầu giống nhau 1, 2, 3 có khối lượng m được treo nối tiếp trên các lò xo sao cho khoảng cách giữa chúng bằng nhau. Nếu cắt sợi dây đỡ quả cầu 1 thì cả hệ thống rơi tự do với gia tốc của trọng tâm là g. Nhưng lò xo I kéo quả cầu 2 lên phía trên mạnh hơn lò xo II kéo nó xuống phía dưới (ban đầu lực kéo của lò xo I là 2mg, của lò xo II là mg) cho nên quả cầu 2 bắt đầu rơi với gia tốc nhỏ hơn g.



a) Tìm gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt dây.

b) Giữ nguyên dây, cắt lò xo II. Tìm gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt lò xo.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1997)

Bài giải

a) Gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt dây

- Trước khi cắt dây:

+ Quả cầu 1: $mg - T + F_1 = 0$

+ Quả cầu 2: $mg - F_1 + F_2 = 0$ (1)

+ Quả cầu 3: $mg - F_2 = 0$

($\vec{T}$ là lực căng của dây treo, $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ là lực đàn hồi của lò xo I và lò xo II)

- Từ hệ (1) ta được: $F_1 = 2mg;\ F_2 = mg; T = 3mg$ (3)

- Khi cắt dây $T = 0$, phương trình chuyển động của các quả cầu là:

$mg + F_1 = ma_1$

$mg - F_1 + F_2 = ma_2$ (3)

$mg - F_2 = ma_3$

Từ (2) vào hệ (3) ta có: $a_1 = 3g;\ a_2 = a_3 = 0$.

Vậy: Gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt dây là $a_1 = 3g;\ a_2 = a_3 = 0$.

b) Gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt lò xo

- Khi cắt lò xo II: $F_2 = 0$, phương trình chuyển động của các quả cầu là

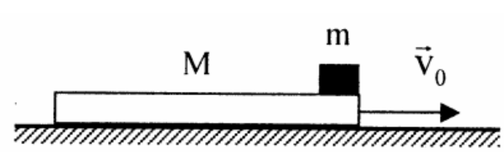
$mg - T + F_1 = ma_1$

$mg - F_1 = ma_2$ (4)

$mg = ma_3$

- Thay các giá trị của T, F_1 từ hệ (2) vào hệ (4), ta được: $a_1 = 0;\ a_2 = -g;\ a_3 = g$.

Vậy: Gia tốc mỗi quả cầu ngay sau khi cắt lò xo II là $a_1 = 0;\ a_2 = -g;\ a_3 = g$.



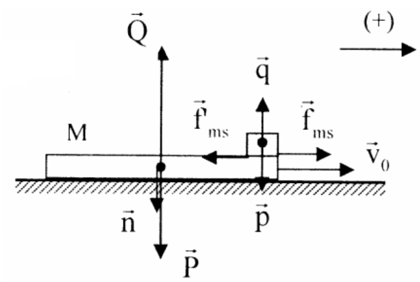
13. Trên mặt bàn nằm ngang rất nhẵn có một tấm ván khối lượng $M = 1,6kg$, chiều dài $l = 1,2m$. Đặt ở đầu tấm ván một vật nhỏ khối lượng $m = 0,4kg$. Hệ số ma sát giữa vật và ván là $\mu = 0,3$.

Đột ngột truyền cho ván một vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ song song với mặt bàn. Tính giá trị tối thiểu của v_0 để vật m trượt khỏi ván. Lấy $g = 10m/s^2$.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2013)

Bài giải

- Các lực tác dụng:



+ Lên m: Trọng lực $\vec{p}$; phản lực $\vec{q}$; lực ma sát $\vec{f}_{ms}$.

+ Lên M: Trọng lực $\vec{P}$; phản lực $\vec{Q}$; áp lực $\vec{n}$; lực ma sát $\vec{f}'_{ms}$

- Áp dụng định luật II Niu – tơn cho các vật:

+ Vật m: $\vec{p} + \vec{q} + \vec{f}_{ms} = m\vec{a}_1$ (1)

+ Vật M: $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{n} + \vec{f}'_{ms} = m\vec{a}_2$ (2)

- Chiếu (1) và (2) lên chiều chuyển động ta được:

+ Vật m: $f_{ms} = ma_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{f_{ms}}{m} = \dfrac{\mu mg}{m} = \mu g > 0;\ v_1 = \mu gt;\ s_1 = \dfrac{\mu g}{2}t^2$

+ Vật M: $-f'_{ms} = Ma_2 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{f'_{ms}}{M} = -\dfrac{\mu mg}{M} < 0;$

$$v_2 = v_0 - \frac{\mu mg}{M}t;\ s_2 = v_0t - \frac{\mu mg}{2M}t^2$$

- Do vật m trượt trên ván nên $v_2 > v_1$. Gọi vận tốc của vật đối với ván là v, ta có:

$$v = v_2 - v_1 = v_0t - \mu gt\left(\frac{M+m}{M}\right)$$

- Khi vật dừng lại trên ván: $v = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{Mv_0}{\mu g(M+m)}$

- Vật m sẽ trượt khỏi ván nếu: $s_2(t_1) - s_1(t_1) \geq l$

$$\Leftrightarrow v_0t - \frac{\mu mg}{2M}t^2 - \frac{\mu g}{2}t^2 \geq l \Leftrightarrow v_0\frac{Mv_0}{\mu g(M+m)} - \frac{\mu mg}{2M}\left(\frac{Mv_0}{\mu g(M+m)}\right)^2 \geq l$$

$$\Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu gl(M+m)}{M}} = \sqrt{\frac{2.0,3.10.1,2.(1,6+0,4)}{1,6}} = 3m/s$$

$$\Rightarrow v_{0\min} = 3m/s$$

Vậy: Giá trị tối thiểu của v_0 để vật m trượt khỏi ván là 3m/s.

14. Một hộp chứa cát ban đầu đứng yên, được kéo trên sàn bằng một sợi dây với lực kéo $F = 1000N$. Hệ số ma sát giữa hộp với sàn là $k = 0,35$.

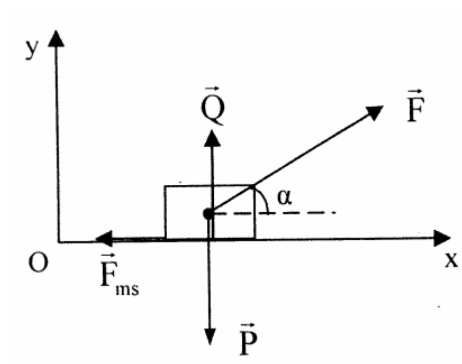
a) Hỏi góc giữa dây và phương ngang phải là bao nhiêu để kéo được lượng cát lớn nhất?

b) Khối lượng cát và hộp trong trường hợp đó bằng bao nhiêu? Lấy $g = 10m/s^2$

Bài giải

a) Góc giữa dây và phương ngang để kéo được lượng cát lớn nhất

Chọn hệ toạ độ Oxy như hình vẽ.



- Các lực tác dụng lên hộp: trọng lực $\vec{P}$; phản lực $\vec{Q}$; lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ và lực kéo $\vec{F}$.

- Phương trình định luật II Niu – tơn cho hộp cát:

$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} + \vec{F} = m\vec{a}$ (1)

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

- $F_{ms} + F\cos\alpha = ma$ (1')

- $P + Q + F\sin\alpha = 0$ (1")

Mà: $F_{ms} = kN = kQ$

- Từ (1''): $Q = P - F\sin\alpha \Rightarrow F_{ms} = k(P - F\sin\alpha) = kmg - kF\sin\alpha$

- Từ (1'): $F_{ms} = F\cos\alpha - ma$

Từ đó: $F\cos\alpha - ma = kmg - kF\sin\alpha \Rightarrow m = \dfrac{F(\cos\alpha + \text{k}\sin\alpha)}{kg + a}$ (2)

- Để $m = m_{\max}: \begin{cases} (\cos\alpha + \text{k}\sin\alpha)_{\max} \\ (kg + a)_{\min} \end{cases} \Rightarrow a = 0$

- Vì $F = const; g = const; k = const$ nên theo bất đẳng thức Bunhia-cốpxki, ta có:

$1.\cos\alpha + k\sin\alpha \le \sqrt{1+k^2} \Rightarrow m = \dfrac{F\sqrt{1+k^2}}{kg}$

Dấu "=" xảy ra khi: $k = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = 0,35 \Rightarrow \alpha = 19,3°$

Vậy: Để kéo được lượng cát lớn nhất thì góc giữa dây treo và phương ngang phải bằng $\alpha = 19,3°$.

b) Khối lượng cát và hộp

Khi đó, khối lượng cát và hộp là:

$$m = m_{\max} = \frac{F\sqrt{1+K^2}}{Kg} = \frac{100\sqrt{1+0,35^2}}{0,35.10} = 303kg$$

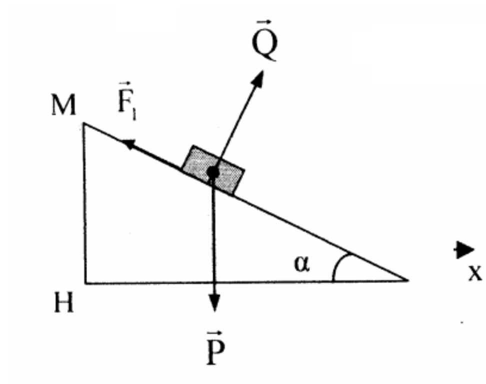
Vậy: Khối lượng cát và hộp lớn nhất có thể kéo được là $m = 303kg$.

15. Sườn đồi có dạng một mặt phẳng nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang. Một ô tô khởi hành từ A đi theo đường thẳng đến vị trí B nằm trên cùng một độ cao trên sườn đồi. Hãy tìm thời gian ngắn nhất để thực hiện điều đó. Biết hệ số ma sát giữa các bánh xe với sườn đồi là $k > \tan\alpha$, cho rằng trọng lượng xe được phân bố đều trên 4 bánh xe và cả 4 bánh xe đều là bánh phát động.

Bài giải

- Theo các điều kiện ở đề bài, xe được xem là chất điểm và lực phát động ở các bánh xe chính là lực ma sát nghỉ
- Tác dụng lên xe có 3 lực: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$ và lực ma sát nghỉ $\vec{F}_{ms}$
- Theo định luật II Niu – tơn, ta có: $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{ms}=m\vec{a}$ (1)
- Chiếu (1) lên trục Ox (trùng với AB) và Oy (vuông góc với AB), ta được:

$F_2 = ma;\ P\sin\alpha - F_1 = 0$ (2)



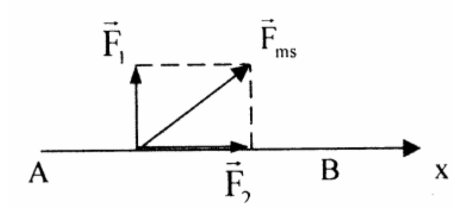
- Mặt khác: $\vec{F}_{ms}=\vec{F}_1+\vec{F}_2 \Leftrightarrow F_{ms}=F_1^2+F_2^2$ (3)
- Điều kiện cho ma sát nghỉ: $F_{ms} \le kN = kQ = kmg\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \sqrt{F_1^2+F_2^2} < kmg\cos\alpha$ (4)

- Từ (2) và (4):

$F_2 < \sqrt{k^2m^2g^2\cosh^2\alpha - m^2g^2\sin^2\alpha} = mg\cos\alpha\sqrt{k^2-\tan^2\alpha}$

$\Rightarrow a \le g\cos\alpha\sqrt{k^2-\tan^2\alpha}$ (5)

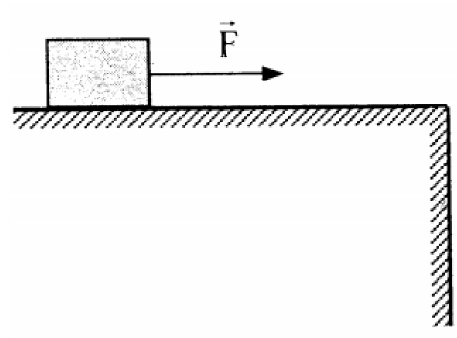


- Mặt khác: $AB = l = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$
- Từ (5): $t \ge \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha\sqrt{k^2-\tan^2\alpha}}}$

$\Rightarrow t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha\sqrt{k^2-\tan^2\alpha}}}$, với $k > \tan\alpha$.

Vậy: Thời gian ngắn nhất để xe đi từ A đến B là

$\Rightarrow t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha\sqrt{k^2-\tan^2\alpha}}}$



16. Một vật khối lượng m đang nằm yên trên sàn ngang. Lúc $t=0$ vật chịu tác dụng một lực $\vec{F}$ phụ thuộc thời gian theo quy luật $F=Ct$, C là hằng số có đơn vị Niu – tơn trên giây và t có đơn vị giây. Lực $\vec{F}$ hợp với phương ngang một góc α không đổi. Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng là μ. Hãy khảo sát các giai đoạn chuyển động của vật và tính vận tốc khi vật bắt đầu rời sàn.

Bài giải

Các lực tác dụng vào xe: trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$ và lực ma sát nghỉ $\vec{F}_{ms}$; lực tác dụng $\vec{F}$

- Giai đoạn I: Khi vật chưa chuyển động.

+ Điều kiện cân bằng: $\vec{F}+\vec{Q}+\vec{P}+\vec{F}_{msn}=\vec{0}$ (1)

+ Chiếu (1) lên hai phương thẳng đứng và nằm ngang, ta được:

$$Q=P-F\sin\alpha=mg-F\sin\alpha=mg-C\sin\alpha.t$$

$$F_{msn}=F\cos\alpha=C\cos\alpha.t$$

+ Mặt khác: $F_{msn}\le\mu N=\mu Q\Leftrightarrow C\cos\alpha.t\le\mu(mg-C\sin\alpha.t)$

$$\Rightarrow t\le\frac{\mu mg}{C(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$$

+ Thời gian vật còn nằm yên trên sàn là: $t_1=\dfrac{\mu mg}{C(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$ (2)

- Giai đoạn II: Vật trượt trên sàn.

+ Phương trình định luật II Niu - tơn: $\vec{F}+\vec{Q}+\vec{P}+\vec{F}_{mst}=m\vec{a}$ (3)

+ Chiếu (3) lên hai phương thẳng đứng và nằm ngang, ta được:

$$Q=P-\sin\alpha=mg-F\sin\alpha=mg-C\sin\alpha.t$$

$$F\cos\alpha-F_{mst}=ma\Leftrightarrow C\cos\alpha.t-\mu Q=ma$$

$$\Leftrightarrow C\cos\alpha.t-\mu(mg-C\sin\alpha.t)=ma$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{Ct(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}-\mu g \qquad (4)$$

Giai đoạn III: Khi vật bắt đầu rời sàn.

+ Lúc đó: $Q=0\Leftrightarrow mg-C\sin\alpha.t=0$

+ Thời gian từ khi tác dụng lực $(t=0)$ đến lúc vật rời sàn: $t_2=\dfrac{mg}{C\sin\alpha}$ (5)

+ Gia tốc của vật khi nó bắt đầu rời sàn: Thay (5) vào (4) ta được:

$$a_3=\frac{C.\dfrac{mg}{C\sin\alpha}.(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}-\mu g=g\cot\alpha \qquad (6)$$

+ Trong quá trình chuyển động của vật, gia tốc phụ thuộc bậc nhất vào thời gian nên:

$v_3 = \overline{a}t$; với $t = t_2 - t_1$ và $\overline{a} = \dfrac{a_3}{2}$

+ Vận tốc của vật ngay khi rời sàn là: $v_3 = \dfrac{a_3}{2}(t_2 - t_1)$ (7)

+ Thay (2), (5), (6) vào (7), ta được: $v_3 = \dfrac{g\cot\alpha}{2}\left(\dfrac{mg}{C\sin\alpha} - \dfrac{\mu mg}{C\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\right)$

$\Rightarrow v_3 = \dfrac{mg^2\cot^2\alpha}{2C(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$

Vậy: Khi vật bắt đầu rời sàn, vận tốc của vật là $v_3 = \dfrac{mg^2\cot^2\alpha}{2C(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 8: ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LUẬT NIU-TƠN VÀ CÁC LỰC CƠ HỌC

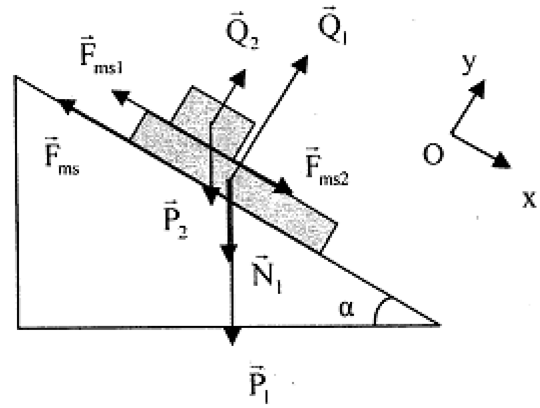
17. Cho hai miếng gỗ khối lượng m_1 và m_2, đặt chồng lên nhau trượt trên mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát giữa chúng là k; giữa vật 1 và mặt phẳng nghiêng là k_1. Trong quá trình trượt miếng gỗ này có thể trượt nhanh hơn miếng gỗ kia không? Tìm điều kiện để hai vật cùng trượt như một vật.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1996)

Bài giải

Gọi $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ lần lượt là gia tốc của các vật 1 và 2.

* Giả sử $a_1 > a_2$, các lực sẽ có chiều như hình vẽ.



- Phương trình chuyển động của hai vật:

+ Vật 1:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{ms} + \vec{F}_{ms1} = m_1\vec{a}_1$$

+ Vật 2: $\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2} = m_2\vec{a}_2$

- Chiếu trục Ox, ta được:

$$P_1 \sin\alpha - F_{ms} - F_{ms1} = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = g\sin\alpha - \frac{F_{ms} + F_{ms1}}{m_1}$$

và $P_2 \sin\alpha + F_{ms2} = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = g\sin\alpha + \dfrac{F_{ms2}}{m_2}$

- Vì $a_2 > a_1$ nên miếng gỗ dưới không thể chuyển động nhanh hơn miếng gỗ trên.

* Giả sử $a_1 < a_2$ các lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ và $\vec{F}_{ms1}$ sẽ có chiều ngược lại.

- Phương trình chuyển động của hai vật:

+ Vật 1: $\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{ms} + \vec{F}_{ms1} = m_1\vec{a}_1 \Rightarrow a_1 = g\sin\alpha - \dfrac{F_{ms} - F_{ms1}}{m_1}$

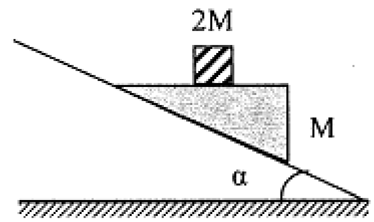
+ Vật 2: $\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2} = m_2\vec{a}_2 \Rightarrow a_2 = g\sin\alpha - \dfrac{F_{ms2}}{m_2}$

- Vì $a_2 > a_1 \Leftrightarrow \dfrac{F_{ms} - F_{ms1}}{m_1} > \dfrac{F_{ms2}}{m_2}$

$$\Rightarrow k_1(m_1 + m_2) - km_2 > km_1 \Rightarrow k_1 > k.$$

- Nếu $k_1 > k \Rightarrow a_2 > a_1$. Ma sát giữa hai miếng gỗ nhỏ hơn ma sát giữa vật 1 và mặt phẳng nghiêng, vật 2 chuyển động nhanh hơn vật 1.
- Nếu $k_1 < k \Rightarrow a_1 = a_2 = g(\sin\alpha - k_1\cos\alpha)$ hai vật cùng trượt như là một vật.

18. Một cái nêm khối lượng M được giữ trên mặt phẳng nghiêng cố định với góc nghiêng α so với đường nằm ngang. Góc nghiêng của nêm cũng bằng α và được bố trí sao cho mặt trên của nêm nằm ngang như hình vẽ. Trên mặt nằm ngang của nêm có đặt một khối lập phương khối lượng $2M$ đang nằm yên. Nêm được thả ra và bắt đầu trượt xuống. Cho $g = 10 m/s^2$.



a) Bỏ qua mọi ma sát ở các mặt tiếp xúc. Hỏi với giá trị nào của α thì gia tốc của nêm đạt giá trị cực đại? Tính $a_{\max}$ của nêm.

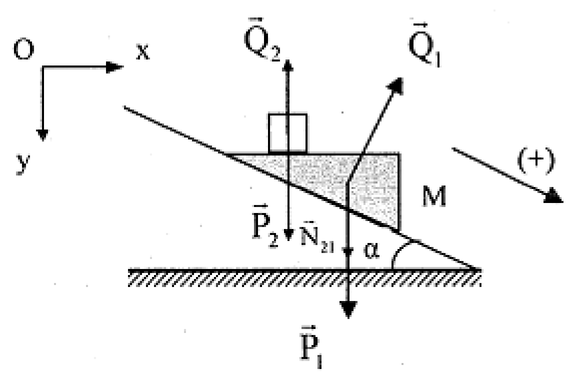
b) Bề mặt của các mặt tiếp xúc có ma sát với cùng hệ số ma sát μ và góc nghiêng của nêm là $\alpha = 30^0$. Tìm điều kiện về μ để khối lập phương không trượt đối với nêm khi nêm trượt xuống.

Bài giải

a) Giá trị của α để gia tốc của nêm đạt giá trị cực đại, tính $a_{\max}$

- Các lực tác dụng lên nêm: trọng lực $\vec{P_1}$; phản lực $\vec{Q_1}$; áp lực $\vec{N}_{21}$. Các lực tác dụng lên khối lập phương: trọng lực $\vec{P_2}$; phản lực $\vec{Q_2}$ $(Q_2 = N_{21})$.
- Phương trình *chuyển* động của nêm và khối lập phương:

$$\begin{cases} (P_1 + N_{21})\sin\alpha = Ma \\ P_2 - Q_2 = 2Ma_y \\ a_y = a\sin\alpha \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (Mg + Q_2)\sin\alpha = Ma \\ 2Mg - Q_2 = 2Ma.\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3g.\sin\alpha}{2\sin^2\alpha + 1} = \frac{3g}{2\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}}$$

- Để $a_{\max}$ thì $2\sin\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

và $a_{\max} = \dfrac{3.10}{2.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 10,4 (m/s^2)$.

Vậy: Để gia tốc của nêm đạt giá trị cực đại thì $\alpha = 45^0$ và lúc đó $a_{\max} = 10,4(m/s^2)$.

b) Điều kiện về μ để khối lập phương không trượt đối với nêm khi nêm trượt xuống

- Khi khối lập phương không trượt đối với nêm thì hai vật chuyển động như một khối duy nhất với gia tốc: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ với : $\mu < \tan\alpha$

- Trên hai trục Ox, Oy ta có: $\begin{cases} a_x = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\cos\alpha \\ a_y = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\sin\alpha \end{cases}$

- Phương trình chuyển động của khối lập phương:

$$\begin{cases} f_{ms} = 2Ma_x \\ P_2 - Q_2 = 2Ma_y \\ f_{ms} \le \mu N_{21} = \mu Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{ms} = 2Ma_x \\ 2Mg - Q_2 = 2Ma_y \\ f_{ms} \le \mu Q_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2Mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\cos\alpha \le \mu.2Mg[1 - \left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\sin\alpha]$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\cos\alpha \le \mu[1 - \sin^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha]$$

$$\Leftrightarrow \mu^2\cos\alpha\sin\alpha + 2\mu\cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \mu^2\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha - \sin\alpha \ge 0 \Rightarrow \Delta' = 1.$$

$$\Rightarrow \mu \ge \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \cot\alpha;\ \ \mu \le \frac{-1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha} - \cot\alpha \le 0 \text{ (loại)}$$

Với $\alpha = 30^0 : \mu \ge \dfrac{1}{\sin 30^0} - \cot 30^0 = 2 - \sqrt{3}$ và $\mu \le \tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy: Để khối lập phương không trượt đối với nêm thì $2 - \sqrt{3} < \mu < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19. Một máy bay đang bay theo phương ngang với vận tốc $\vec{v}$ ở độ cao $h = 500m$ so với mặt đất với gia tốc $a = 2m/s^2$ và sau những khoảng thời gian bằng nhau $t = 0,5s$ thì bắn ra phía trước những quả đạn cùng theo phương ngang với cùng vận tốc $\vec{v}_d$ đối với máy bay. Người ta đo được khoảng cách các điểm rơi của quả đạn thứ 5 và thứ 7 trên mặt đất là $125m$. Bỏ qua sức cản không khí, lấy $g = 10m/s^2$. Hãy xác định vận tốc v_0 của máy bay khi bắn quả đạn thứ nhất.

Bài giải

Gọi L là khoảng cách giữa hai vị trí máy bay bắn hai quả đạn thứ 5 và thứ 7; s_5 và s_7 là quãng đường mà các quả đạn thứ 5 và thứ 7 chuyển động được theo phương ngang từ khi bắn đến khi chạm đất; v_5 và v_7 là vận tốc của máy bay khi bắn quả đạn thứ 5 và thứ 7.

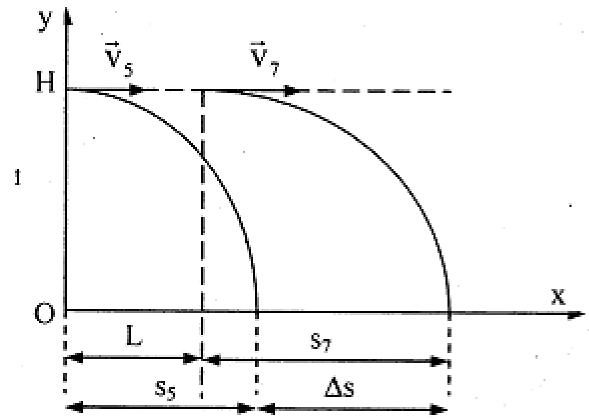
- Khoảng cách giữa hai quả đạn thứ 5 và thứ 7 trên mặt đất là:

$$\Delta s = L + s_7 - s_5 \qquad (1)$$

- Vì máy bay bay theo phương ngang nên thời gian rơi của các quả đạn là như nhau:

$$T=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{\sqrt{2.500}}{10}=10s \qquad (2)$$

- Gọi v_0 là vận tốc của máy bay khi bắn quả đạn 1. Vận tốc của quả đạn thứ 5 và thứ 7 là:



$v'_5=v_0+4at+v_đ$; $v'_7=v_0+6at+v_đ$

Khoảng cách giữa hai vị trí của máy bay khi bắn quả đạn thứ 5 và thứ 7 là:

$$L=v_5.2t+\frac{1}{2}a(2t)^2=(v_0+4at)2t+\frac{1}{2}a.4t^2=2v_0t+10at^2$$

$$\Leftrightarrow L=2v_0.0,5+10.2.0,5^2=v_0+5 \qquad (3)$$

Quãng đường quả đạn thứ 5 và thứ 7 bay được theo phương ngang đến khi chạm đất là:

$s_5=v'_5T=(v_0+4at+v_đ)T=(v_0+4.2.0,5+v_đ).10=(v_0+v_đ+4).10$ (4)

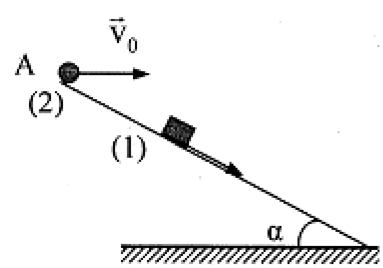
$s_7=v'_7T=(v_0+6at+v_đ)T=(v_0+6.2.0,5+v_đ).10=(v_0+v_đ+6).10$ (5)

$\Rightarrow \Delta s=L+s_7-s_5=v_0+5+(v_0+v_đ+6).10-(v_0+v_đ+4).10=125$

$\Leftrightarrow v_0+25=125\Rightarrow v_0=100m/\text{s}.$

Vậy: Vận tốc v_0 của máy bay khi bắn quả đạn thứ nhất là $v_0=100m/\text{s}$.

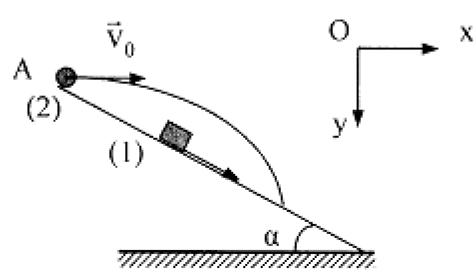
20. Trên một dốc nghiêng $\alpha=30^0$, buông một vật nhỏ từ A. Vật nhỏ trượt xuống dốc không ma sát. Sau khi buông vật này $1s$, cũng từ A bắn một viên bi nhỏ theo phương ngang với vận tốc đầu $\vec{v}_0$.



Xác định v_0 để bi trúng vào vật trượt nên dốc nghiêng. Bỏ qua lực cản của không khí. Lấy $g=10m/\text{s}^2$.

Bài giải

Chọn gốc tọa độ tại O trùng với A, các trục tọa độ Ox và Oy như hình vẽ; gốc thời gian lúc buông vật nhỏ.



- Phương trình tọa độ của vật nhỏ:

$x_1=\frac{1}{2}(a\cos\alpha)t^2$, $y_1=\frac{1}{2}(a\sin\alpha)t^2$;

với $a=g\sin\alpha$.

- Phương trình tọa độ của viên bi: $x_2=v_0(t-1)$; $y_2=\frac{1}{2}g(t-1)^2$.

- Bi trúng vật nhỏ khi: $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a\cos\alpha)t^2 = v_0(t-1);\ \frac{1}{2}(a\sin\alpha)t^2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}-\sqrt{a\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}\left(1-\sin\alpha\right)} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2s$$

Và $v_0 = \dfrac{ag\cos\alpha}{2\left(\sqrt{ag\sin\alpha}-a\sin\alpha\right)} = \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{2\left(g\sin\alpha - g\sin^2\alpha\right)} = \dfrac{\cos\alpha}{2\left(1-\sin\alpha\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2(1-\frac{1}{2})}$

$\approx 8,7m/s$

Vậy: Để bi trúng vào vật trượt trên dốc nghiêng thì $v_0 = 8,7m/s$.

21. Một chất điểm được ném từ điểm O trên mặt đất tới một điểm B cách O một đoạn a theo phương ngang và cách mặt đất một đoạn $\frac{3}{4}a$. Bỏ qua lực cản của không khí.

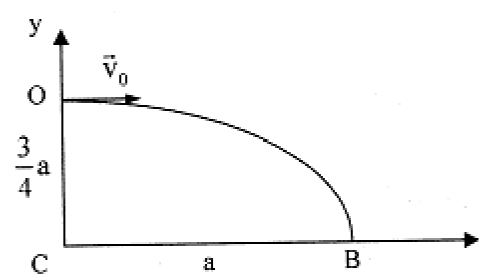
a) Nếu vận tốc ban đầu của chất điểm là $v_0 = 2\sqrt{ga}$ thì góc ném so với phương nằm ngang là bao nhiêu để nó trúng vào điểm B.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của v_0 để chất điểm tới được điểm B và tính góc ném ứng với giá trị $v_{0\min}$.

Bài giải

a) Tính góc ném với trường hợp $v_0 = 2\sqrt{ga}$

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ, gọi α là góc ném.



- Phương trình tọa độ của chất điểm theo hai trục Ox và Oy:

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \end{cases}$$

- Phương trình quỹ đạo của chất điểm là:

$$y = -\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha \qquad (1)$$

- Khi chất điểm tới $B(a;\frac{3}{4}a)$ và $v_0 = 2\sqrt{ga}$. Từ (1) cho ta được:

$$\frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}.\frac{g}{4ga}(1+\tan^2\alpha)a^2 + a\tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha - 8\tan\alpha + 7 = 0 \Rightarrow \tan\alpha_1 = 7 \text{ hoặc } \tan\alpha_2 = 1.$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \arctan 7$ hoặc $\alpha_2 = \arctan 1$.

Vậy: Để chất điểm trúng vào điểm B thì góc ném có thể là $\alpha_1 = \arctan 7$ hoặc $\alpha_2 = \arctan 1$.

b) Giá trị nhỏ nhất của v_0 để chất điểm tới được điểm B

- Khi chất điểm tới $B(a; \frac{3}{4}a)$, ta có: $\frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}.\frac{g}{4ga}(1+\tan^2\alpha)a^2 + a\tan\alpha$.

$\Leftrightarrow 2ga.\tan^2\alpha - 4v_0^2\tan\alpha + 3v_0^2 + 2ga = 0$

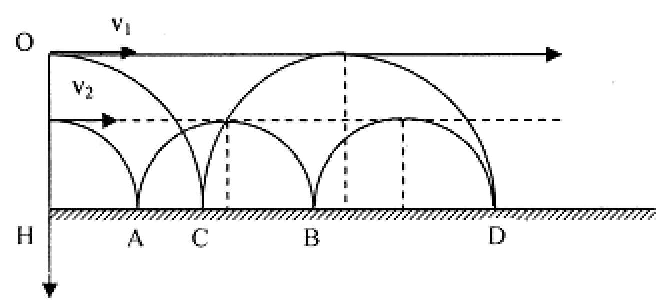
Ta có: $\Delta = 4v_0^2 - 2ga(3v_0^2 + 2ga) \geq 0 \Rightarrow v_{0\min} = \sqrt{2ga}$

Góc ném: $\tan\alpha = \frac{2v_{0\min}^2}{2ga} = \frac{2.2ga}{2ga} = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2$.

Vậy: Để chất điểm tới được điểm B thì $v_{0\min} = \sqrt{2ga}$ và góc ném lúc đó là $\alpha = \arctan 2$.

22. Trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng, từ hai độ cao h_1, h_2 người ta ném cùng lúc hai vật có khối lượng m_1, m_2 (xem như chất điểm) theo phương ngang với các vận tốc tương ứng là v_1, v_2. Vật thứ nhất và chạm đàn hồi với đất một lần và nảy lên; vật thứ hai va chạm đàn hồi với đất hai lần và nảy lên, cuối cùng hai vật chạm đất tại cùng một vị trí ở cùng một thời điểm. Bỏ qua lực cản của không khí. Tìm tỉ số $\frac{v_1}{v_2}$ và $\frac{h_1}{h_2}$.

Bài giải



Va chạm của m_1 và m_2 với đất là va chạm đàn hồi nên thành phần nằm ngang của vận tốc của m_1 và m_2 sau va chạm vẫn bằng v_1 và v_2.

Gọi D là vị trí hai vật chạm đất cùng lúc, t là khoảng thời gian kể từ lúc bắt đầu ném đến khi hai vật chạm đất tại d.

Ta có: $v_1 t = v_2 t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1$.

- Xét chuyển động của m_1: Ta có: $CD = 2HC \Rightarrow HC = \frac{1}{3}HD$.

$\Rightarrow t_1 = \frac{t}{3}$ và $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}gt^2$ (1)

- Xét chuyển động của m_2: Ta có: $HA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BD \Rightarrow HA = \frac{1}{5}HD$.

$\Rightarrow t_2 = \dfrac{t}{5}$ và $h_2 = \dfrac{1}{2}gt_1^2 = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{t}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{50}gt^2$ (2)

- Từ (1) và (2), suy ra: $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{50}{18} = \dfrac{25}{9}$.

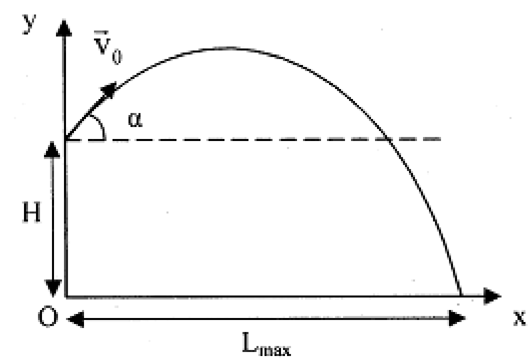
Vậy: Các tỉ số $\dfrac{v_1}{v_2}$ và $\dfrac{h_1}{h_2}$ là $\dfrac{v_1}{v_2} = 1$ và $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{25}{9}$.

23. Một người đứng ở một đỉnh dốc bờ biển ném một hòn đá ra biển. Hỏi người ấy phải ném hòn đá dưới một góc bằng bao nhiêu so với phương nằm ngang để nó rơi xa chân bờ biển nhất. Khoảng cách xa nhất ấy là bao nhiêu? Cho biết bờ dốc thẳng đứng, hòn đá được ném từ độ cao $H = 20m$ so với mặt nước và có vận tốc đầu là $v_0 = 14m/s$. Lấy $g = 9,8m/s^2$.

(Trích đề thi Olymic 30/4, 2002)

Bài giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phân tích chuyển động (ném xiên) của hòn đá thành hai thành phần:



- Theo phương Ox:

$x = v_0 \cos\alpha . t$ (1)

- Theo phương Oy:

$y = H + v_0 \sin\alpha . t - \dfrac{1}{2}gt$ (2)

- Thời gian hòn đá chuyển động $(x = L)$:

$t = \dfrac{L}{v_0 \cos\alpha}$ (3)

- Thay (3) vào (2), ta được: $y = H + v_0 \sin\alpha \dfrac{L}{v_0 \cos\alpha} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{L^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$.

- Khi hòn đá chạm đất: $x = L;\ y = 0$ nên: $H + v_0 \sin\alpha \dfrac{L}{v_0 \cos\alpha} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{L^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0.$

$$\Leftrightarrow H + L\tan\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}.\frac{1}{\cos^2\alpha} = H + L\tan\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{gL^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - L\tan\alpha + \left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - H\right) = 0$$

Với: $\Delta = L^2 - \dfrac{4gL^2}{2v_0^2}\left(\dfrac{gL^2}{2v_0^2} - H\right) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = L^2\left(1 - \dfrac{g^2L^2}{v_0^4} + \dfrac{2gH}{v_0^2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow L \le \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH}$; $L = L_{\max} = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH}$ khi $\Delta = 0$

Lúc đó: $\tan\alpha = \dfrac{v_0^2}{gL_{\max}} = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} = \dfrac{14,4}{\sqrt{14,4^2 + 2.9,8.20}} = 0,57735$

$\Rightarrow \alpha = 30^0$ và $L_{\max} = \dfrac{14,4}{9,8}\sqrt{14,4^2 + 2.9,8.20} = 34,63m.$

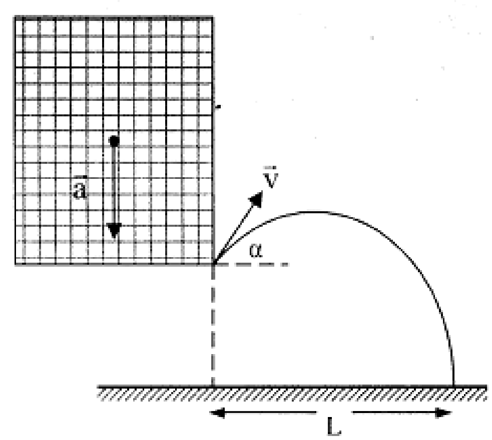
Vậy: Người ấy phải ném hòn đá dưới một góc bằng 30^0 so với phương nằm ngang để nó rơi xa chân bờ biển nhất và khoảng cách xa nhất ấy là $34,63m.$

24. Một thang máy ở công trình xây dựng (chỉ có sàn nằm ngang) được lắp ở cặp bức tường của một tòa nhà cao tầng đang xây dựng. Lúc đầu thang máy ở một tầng của tòa nhà cách mặt đất $50m$ được hạ thẳng đứng xuống với gia tốc không đổi $a = 1m/s^2$. Sau $2s$ chuyển động, một người ngồi ở sàn thang máy trên ném một hòn đá với vận tốc $v = 4m/s$ so với sàn thang máy và hướng lên hợp với phương ngang một góc $\alpha = 60^0$ (xem hòn đá được ném từ sàn thang máy).

a) Sau khi ném hòn đá bao lâu thì người đó thấy hòn đá đi ngang qua sàn thang máy?

b) Sau khi hòn đá chạm đất bao lâu thì thang máy đến mặt đất? Tính khoảng cách từ thang máy lúc đó đến vị trí hòn đá chạm đất.

Bài giải



a) Sau bao lâu thì người đó thấy hòn đá đi ngang qua sàn thang máy

- Sau $2s$ chuyển động, thang máy đi xuống một đoạn:

$h_1 = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{1}{2}.1.2^2 = 2m$ và có vận tốc $v_1 = at = 1.2 = 2m/s^2$.

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy, gốc O tại mặt đất, Ox nằm ngang, Oy hướng lên; gốc thời gian lúc ném hòn đá.

- Thang máy: $x_1 = 0$; $y_1 = y_{01} + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2 = 48 - 2t - 0,5t^2$ (1)

- Hòn đá: $v_{0x} = v\cos\alpha = 4.\dfrac{1}{2} = 2m/s$; $v_{0y} = v\sin\alpha - v_1 = 2(\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{m/s}$.

Và: $x_2 = v_xt = 2t$; $y_2 = y_{02} + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 48 + 2(\sqrt{3} - 1)t - 5t^2$ (2)

- Khi người nhìn thấy hòn đá đi ngang qua sàn thang máy: $y_1 = y_2$:

$\Leftrightarrow 48 - 2t - 0,5t^2 = 48 + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)t - 5t^2$

$\Rightarrow t = \dfrac{2\sqrt{3}}{4,5} \approx 0,77s$

Vậy: Sau $t = 0,77s$ thì người đó nhìn thấy hòn đá đi ngang qua sàn thang máy.

b) Thời gian để thang máy đến mặt đất và khoảng cách từ thang máy lúc đó đến vị trí hòn đá chạm đất

- Khi thang máy và hòn đá chạm đất:

$y_1 = 0 \Leftrightarrow 48 - 2t - 0,5t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 8s$

$y_2 = 0 \Leftrightarrow 48 + 2\left(\sqrt{3} - 1\right)t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t_2 = 3,25s$

- Thang máy chạm đất sau hòn đá: $\Delta t = t_1 - t_2 = 8 - 3,25 = 4,75s.$
- Khi đó hòn đá cách thang máy: $L = x_2 = 2t_2 = 2.3,25 = 6,5m.$

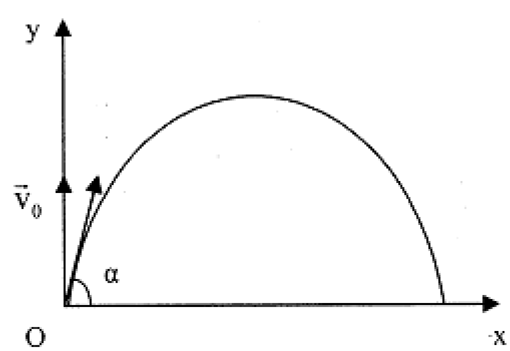
Vậy: Sau khi hòn đá chạm đất $4,75s$ thì thang máy đến mặt đất và khoảng cách từ thang máy lúc đó đến vị trí hòn đá chạm đất là $L = 6,5m.$

25. Hai vật được ném đồng thời từ một điểm với vận tốc như nhau, cùng bằng v_0. Một vật được ném lên theo phương thẳng đứng, còn vật kia được ném lên dưới một góc nào đó so với phương ngang. Hỏi góc đó phải bằng bao nhiêu để khoảng cách giữa hai vật là cực đại? Khoảng cách cực đại đó bằng bao nhiêu? Xem rằng khi rơi xuống đất vận tốc của vật lập tức triệt tiêu.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2008)

Bài giải

Chọn hệ tọa độ Đề-cac Oxy. Phân tích chuyển động của hai vật làm hai thành phần theo hai phương Ox và Oy. Các phương trình chuyển động của hai vật:



- Vật 1: $y_1 = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2};$

  $x_1 = 0;\ t \le \dfrac{2v_0}{g}.$

- Vật 2: $y_2 = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2};\ x_2 = (v_0 \cos\alpha)t;\ t \le \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$
- Khoảng cách giữa hai vật ở thời điểm t là:

$d = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + x_2^2};\ \left(t \le \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right)$

$$\Leftrightarrow d^2 = (y_1 - y_2)^2 + x_2^2 \Leftrightarrow d^2 = 2v_0^2 t^2 (1-\sin\alpha) \le \frac{8v_0^4}{g^2}\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow d^2 \le \frac{32v_0^4}{g^2}.\frac{\sin\alpha}{2}.\frac{\sin\alpha}{2}(1-\sin\alpha)$$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số không âm $\frac{\sin\alpha}{2}$; $\frac{\sin\alpha}{2}$; $(1-\sin\alpha)$, ta được:

$$d^2 \le \frac{32v_0^4}{g^2}\frac{\left(\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}+1-\sin\alpha\right)^3}{27} = \frac{32v_0^4}{27g^2}$$

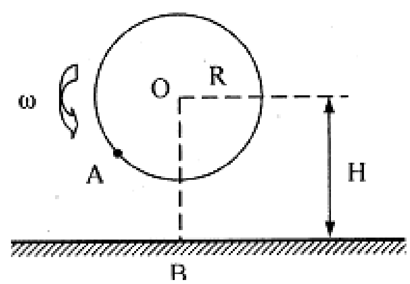
$\Rightarrow d_{\max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{v_0^2}{g}$ đạt được khi $\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2} = (1-\sin\alpha) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}$;

$\alpha = 42^0$.

Vậy: Để khoảng cách giữa hai vật cực đại thì vật thứ hai phải được ném lên dưới góc ném $42°$ và khoảng cách lúc đó là $d_{\max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{v_0^2}{g}$.

26. Một bánh xe có bán kính R, đặt cách mặt đất một đoạn H, quay đều với vận tốc góc ω. Từ bánh xe, bắn ra một giọt nước và nó rơi chạm đất tại điểm B, ngay dưới tâm của bánh xe (hình vẽ).

Tính thời gian rơi của giọt nước và xác định điểm A trên bánh xe, nơi giọt nước từ đó bắn ra.

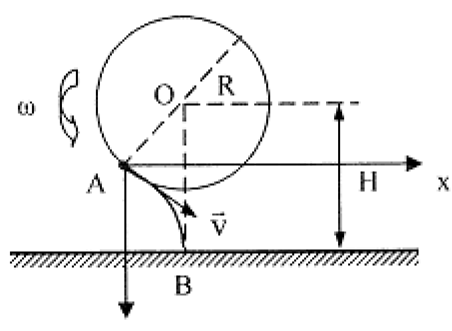


Bài giải

Chọn hệ tọa độ Axy (hình vẽ).

Đặt $\alpha = \widehat{AOB}$ ta có:

$x = v\cos\alpha.t$; $y = \frac{1}{2}gt^2 + v\sin\alpha t$; với $v = \omega R$



- Thời gian rơi của giọt nước:

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\omega R\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\omega}$$

Lúc đó $y = H - R\cos\alpha \Leftrightarrow y - H + R\cos\alpha = 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g\frac{\tan^2\alpha}{\omega^2} + \omega R\sin\alpha\frac{\tan\alpha}{\omega} - H + R\cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{g}{\omega^2}(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}) + R\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - H + R\cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow g\cos^2\alpha - g + 2R\omega^2\cos\alpha\sin^2\alpha - 2H\omega^2\cos^2\alpha + 2R\omega^2\cos^3\alpha = 0$$

$\Leftrightarrow g\left(1-\cos^2\alpha\right)-2H\omega^2\cos^2\alpha+2R\omega^2\cos\alpha=0$

$\Leftrightarrow (g+2H\omega^2)\cos^2\alpha-2R\omega^2\cos\alpha-g=0$

Ta có: $\Delta'=R^2\omega^4+g(g+2H\omega)^2=R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+2gh\omega^2+g^2}}{g+2H\omega^2}$$

Và $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2\omega^2\left(2H^2\omega^2+gH-R^2\omega^2-R\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}\right)}}{g+2H\omega^2}$

$$\Rightarrow t=\frac{\tan\alpha}{\omega}=\frac{\sqrt{2\left(2H^2\omega^2+gH-R^2\omega^2-R\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}\right)}}{\omega\left(R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}\right)}$$

Vậy: Thời gian rơi của giọt nước là

$t=\dfrac{\sqrt{2\left(2H^2\omega^2+gH-R^2\omega^2-R\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}\right)}}{\omega\left(R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}\right)}$ và điểm A trên bánh xe nơi giọt nước đó bắn ra nằm trên bán kính hợp với phương thẳng đứng OB góc α với:

$$\cos\alpha=\frac{R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2}}{g+2H\omega^2}$$

27. Một người đứng tại chỗ có thể ném một hòn đá với vận tốc $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang một góc α đến một khoảng cách không xa hơn x_0. Có thể rơi xa thêm một khoảng bằng bao nhiêu nếu trong khi ném, người đó đang chạy với vận tốc v theo phương ngang (với $v<v_0$)? Để đơn giản tính toán, ta bỏ qua sức cản của không khí cũng như chiều cao của người ném.

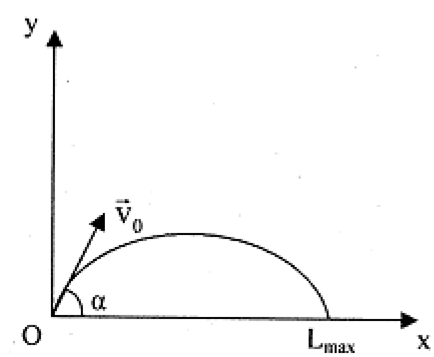
Bài giải

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ.

- Khi người đứng tại chỗ ném vật.

+ Phương trình tọa độ của vật:

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha \\ y=v_0\sin\alpha.t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$



+ Lúc vật chạm đất: $y=0$

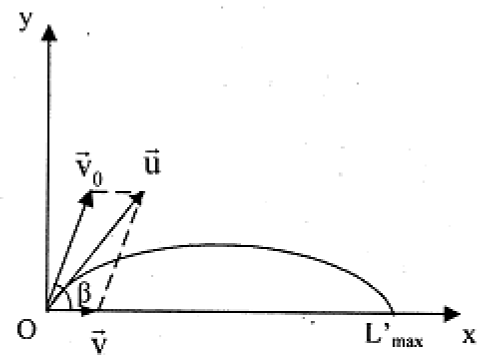
$$\Leftrightarrow v_0\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2=0\Rightarrow t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

+ Tầm xa của vật là:

$$L = v_0 \cos\alpha . t = v_0 \cos\alpha . \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

+ Để tầm xa của vật cực đại thì: $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 45^0$.

$$\Rightarrow L_{max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (1)$$



- Khi người vừa chạy vừa ném vật với vận tốc $\vec{v}_0 : (\gamma = (\vec{v}_0, \vec{v}))$.

+ Vận tốc của vật đối với đất:

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} u_{Ox} = v_0 \cos\gamma + v \\ u_{Oy} = v_0 \sin\gamma \end{cases}$$

+ Phương trình tọa độ của vật: $\begin{cases} x = (v_0 \cos\gamma + v)t \\ y = v_0 \sin\gamma . t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

+ Để vật đạt được tầm xa cực đại thì $\beta = 45^0 \Leftrightarrow u_{Ox} = u_{Oy} \Leftrightarrow v_0 \cos\gamma + v = v_0 \sin\gamma$.

$$\Leftrightarrow v_0^2 \cos^2\gamma + 2v_0 v \cos\gamma + v^2 = v_0^2 \sin^2\gamma$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \cos^2\gamma + 2v_0 v \cos\gamma + v^2 = v_0^2 (1 - \cos^2\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 2v_0^2 \cos^2\gamma + 2v_0 v \cos\gamma + v^2 - v_0^2 = 0$$

+ Giải phương trình bậc hai trên theo $\cos\gamma$, ta được:

$$\begin{cases} \cos\gamma = \dfrac{-2v_0 v + \sqrt{4v_0^2\left(2v_0^2 - v^2\right)}}{2.2v_0^2} = \dfrac{\sqrt{2v_0^2 - v^2} - v}{2v_0} \\ \cos\gamma = \dfrac{-2v_0 v + \sqrt{4v_0^2\left(2v_0^2 - v^2\right)}}{2.2v_0^2} < 0 \text{ (loại vì } \gamma > 90^0) \end{cases} \qquad (2)$$

+ Áp dụng định lí hàm số cosin cho hệ thức $\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v}$, ta được:

$$u^2 = v_0^2 + 2vv_0 \cos\gamma + v^2 \qquad (3)$$

+ Thay (2) vào (3), ta được: $u^2 = v_0^2 + 2vv_0 \dfrac{\sqrt{2v_0^2 - v^2} - v}{2v_0} + v^2$

$$\Leftrightarrow u^2 = v_0^2 + v(\sqrt{2v_0^2 - v^2} - v) + v^2 = v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}$$

+ Tầm xa cực đại của vật là: $L'_{max} = \dfrac{u^2}{g} = \dfrac{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v}}{g}$

+ Khoảng cách giữa điểm rơi mới với điểm rơi cũ là: $\Delta L = L'_{\max} - L_{\max}$.

$$\Leftrightarrow \Delta L = \frac{v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v}}{g} - \frac{v_0^2}{g} = \frac{v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}{g} \text{ (với } v \le v_0\sqrt{2})$$

Vậy: Khi vừa chạy vừa ném vật thì vật có thể rơi xa thêm một khoảng

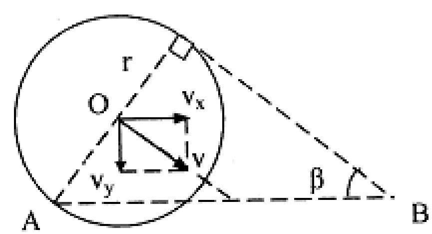
$$\Delta L = \frac{v\sqrt{2v_0^2 - v^2}}{g} \text{ (với } v \le v_0\sqrt{2}).$$

28. Cần phải ném quả bóng rổ dưới một góc nhỏ nhất so với phương nằm ngang là bao nhiêu để nó bay qua vòng bóng rổ từ phía trên xuống mà không chạm vào vòng? Bán kính quả bóng là r, bán kính vòng bóng rổ là R, độ cao của vòng tính từ mặt đất là H. Cầu thủ ném bóng từ độ cao h $(h < H)$ khi cách vòng một khoảng l theo phương ngang. Sự thay đổi vận tốc của quả bóng trong thời gian bay qua vòng có thể bỏ qua. Cho $R = 2r$; $H = 3m$, $h = 2m$, $l = 5m$.

Bài giải

Gọi β là góc hợp bởi vectơ vận tốc $\vec{v}$ của tâm quả bóng so với phương ngang khi quả bóng tới vị trí để chui qua vòng, lúc này bóng đi xuống nên $\beta < 0$.

- Khi $|\beta| = \beta_{\min}$ thì bóng ở vào tính huống "sít sao" nhất để đi qua vòng, nghĩa là có một điểm ở mặt dưới của bóng chạm vào điểm A và sau đó có một điểm ở mặt trên của bóng chạm vào B (AB là đường kính của vòng). Khi β có trị tuyệt đối nhỏ nhất thì góc ném α cũng có giá trị tương ứng nhỏ nhất. Bỏ qua thời gian bóng chui qua vòng.



- Gọi vận tốc ném là $\vec{v}_0$, t là thời gian bóng bay trên không cho tới lúc chạm vòng ở A. Ta có:

$$l = v_0 \cos\alpha . t; \;\; H - h = v_0 \sin\alpha . t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow H - h = l\tan\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (1)$$

- Vận tốc quả bóng lúc chạm vòng:

$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ với $v_x = v_x\cos\alpha$; $v_y = v_0\sin\alpha - gt$.

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gl}{v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra: $H-h=\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2(H-h)}{l}-\tan\beta.$

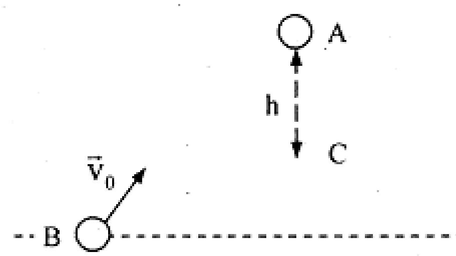
Mặt khác: $\sin\beta=-\frac{2r}{2R}=-\frac{r}{R}\Rightarrow\tan\beta=-\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$ $(\beta<0)$.

Từ đó: $\tan\alpha=\frac{2(H-h)}{l}+\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{2.(3-2)}{5}+\frac{r}{\sqrt{4r^2-r^2}}=0,977$

$\Rightarrow\alpha=44^0 18'$

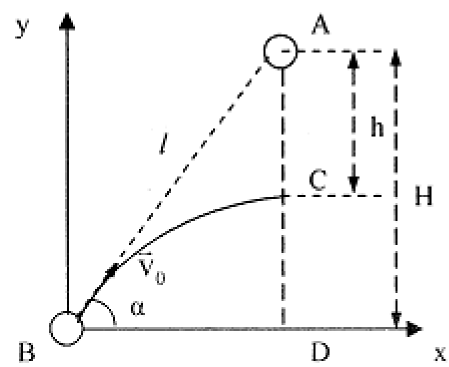
Vậy: Góc nhỏ nhất cần phải ném quả bóng rổ theo phương ngang là $\alpha=44^0 18'$.

29. Một quả bóng rổ rơi tự do từ điểm A, vào đúng thời điểm đó, tại điểm B cách A một đoạn l một quả bóng tennis được ném lên. Hỏi quả bóng tennis phải có vận tốc ban đầu bằng bao nhiêu để nó đập vào quả bóng đang rơi đến C, cách A một đoạn h?



Bài giải

Chọn B là gốc tính độ cao; H là độ cao điểm A; gốc thời gian lúc hai vật bắt đầu chuyển động; α là góc ném; β là góc hợp bởi hướng của $\overrightarrow{BA}$ và phương ngang.



- Quả bóng rổ rơi đến C:

$h=\frac{1}{2}gt^2$ (1)

- Quả tennis ném đến C:

$H-h=v_0\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$ (2)

với: $\sqrt{l^2-H^2}=v_0\cos\alpha.t$ (3)

- Từ (1) và (2), ta được: $H=v_0\sin\alpha.t$ (4)

- Từ (3) và (4), ta được: $\tan\alpha=\frac{H}{\sqrt{l^2-H^2}}$

- So sánh với hình vẽ: $\tan\beta=\frac{H}{\sqrt{l^2-H^2}}\Rightarrow\alpha=\beta$: hướng của $\vec{v}_0$ trùng với $\overrightarrow{BA}$.

- Từ (1): $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Thay vào (4), ta được: $H=v_0\sin\alpha.\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

- Mặt khác: $H=l\sin\alpha\Leftrightarrow l\sin\alpha=v_0\sin\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Suy ra: $v_0 = l\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$.

Vậy: Quả bóng tennis phải có vận tốc ban đầu $v_0 = l\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$ để nó đập vào quả bóng đang rơi đến điểm C.

30. Cậu bé B đang ngồi trên ban công. Cậu bé A đang ngồi dưới đất và ném một quả bóng lên. Quả bóng sau khi vạch một đường cong đã rơi trúng chân cậu bé B và mất một khoảng thời gian là $1s$. Biết rằng các vectơ vận tóc của bóng lúc ném lên và lúc rơi trúng chân cậu bé B vuông góc với nhau. Lấy $g = 10m/s^2$, bỏ qua sức cản của không khí.

a) Tính khoảng cách giữa hai cậu bé.

b) Cậu bé B phải ném quả bóng trở lại với tốc độ nhỏ nhất là bao nhiêu để bóng trúng chân cậu bé A, nếu biết độ cau của ban công là $3m$?

Bài giải

a) Khoảng cách giữa hai cậu bé

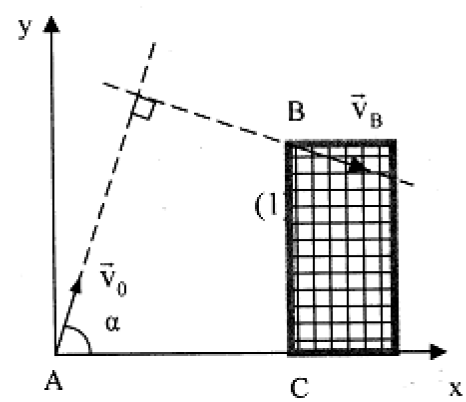
Chọn hệ trục tọa độ Oxy, gốc O gắn với cậu bé A.

- Phân tích chuyển động của quả bóng do cậu bé A ném lên làm hai thành phần:

+ Thành phần theo trục Ox: $v_x = v_0 \cos\alpha;\ x = v_0 \cos\alpha.t$.

+ Thành phần theo trục Oy:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt;\ y = v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$$



- Vì $\vec{v}_0 \perp \vec{v}_B$ nên $\vec{v}_0.\vec{v}_B = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow v_{0x}v_{Bx} + v_{0y}v_{By} = 0$$

$$\Leftrightarrow (v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha)(v_0\sin\alpha - gt) = 0$$

$$OB^2 = x^2 + y^2$$

$$= (v_0\cos\alpha.t)^2 + (v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2)^2 \ (2)$$

- Thay (1) vào (2) và $t = 1s$, ta được:

$$OB^2 = -(v_0\sin\alpha)(v_0\sin\alpha - gt)t^2 + (v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2)$$

$$= \frac{1}{4}g^2t^4$$

$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}.10.1^2 = 5m$

Vậy: Khoảng cách giữa hai cậu bé là $OB = 5m$.

b) Tốc độ nhỏ nhất của quả bóng do cậu bé B ném để trúng chân cậu bé A

- Phân tích chuyển động của quả bóng do cậu bé B ném lên làm hai thành phần:

+ Thành phần theo trục Ox: $v_x = -v_0 \cos\alpha;\ x = OC - v_0 \cos\alpha.t.$

+ Thành phần theo trục Oy: $v_y = v_0 \sin\alpha - gt;\ y = BC + v_0 \sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2.$

- Phương trình quỹ đạo của quả bóng:

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{(OC-x)^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha.\frac{OC-x}{v_0\cos\alpha} + BC.$$

- Khi quả bóng rơi xuống trúng chân cậu bé A thì: $x = 0;\ \ y = 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{g.OC^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha - OC.\tan\alpha + \frac{g.OC^2}{2v_0^2} - BC = 0$$

(với: $\frac{1}{(\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$; phương trình bậc hai với $\tan\alpha$).

Ta có: $\Delta = OC^2 - 4\frac{g.OC^2}{2v_0^2}(\frac{g.OC^2}{2v_0^2} - BC) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{g^2.OC^2}{v_0^4} - \frac{2g.BC}{v_0^2} - 1 \leq 0$

- Vì OC và BC xác định nên v_0 có giá trị nhỏ nhất khi:

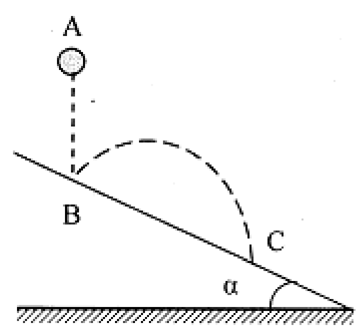
$$\frac{g^2.OC^2}{v_{0\min}^4} - \frac{2g.BC}{v_{0\min}^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow v_{0\min}^4 + 2g.BC.v_{0\min}^2 - g^2OC^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{BC^2+OC^2} - BC)} = \sqrt{10.(\sqrt{5^2} - 3)} = 2\sqrt{5}\ \text{(m/s)}.$$

$(BC^2 + OC^2 = OB^2 = 5^2)$

Vậy: Tốc độ nhỏ nhất của quả bóng do cậu bé B để trúng chân cậu bé A là $v_{0\min} = 2\sqrt{5}$ (m/s).

31. Một hòn bi nhỏ bằng kim loại được thả không vận tốc đầu, từ điểm A cách mặt phẳng nghiêng một góc α một đoạn $h = AB = 1m.$ Bi va chạm với mặt nghiêng lần đầu tại B và lần 2 ngay sau đó tại $C.$ Biết $BC = 4m,$ bỏ qua lực cản, xem va chạm là đàn hồi. Lấy $g = 10m/s^2.$ Tính bán kính quỹ đạo của hòn bi tại điểm cao nhất giữa hai lần va chạm đó.



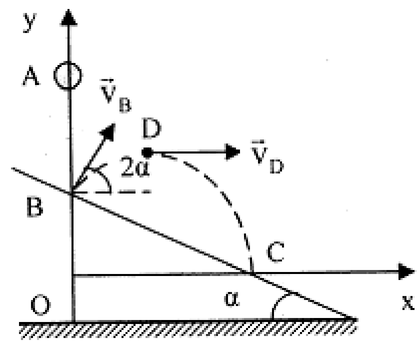
Bài giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy (hình vẽ).

- Vận tốc bi ngay sau khi va chạm tại B: $v_B = \sqrt{2gh}$

- Bi được ném xiên tại B dưới góc ném: $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$; $\cos\varphi = \sin 2\alpha$; $\sin\varphi = \cos 2\alpha$.

- Phương trình chuyển động ném xiên của bi từ B:



$$\begin{cases} x = v_0 \cos\varphi . t \\ y = BC.\sin\alpha + v_0 \sin\varphi . t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = v_0 \sin 2\alpha . t = 2v_0 \sin\alpha \cos\alpha . t \\ y = BC.\sin\alpha + v_0 \cos 2\alpha . t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (1)$$

- Tại C, ta có: $\begin{cases} x = BC.\cos\alpha \\ y = 0 \end{cases}$ (2)

- Từ (1) và (2): $2v_0 \sin\alpha \cos\alpha . t = BC.\cos\alpha \Rightarrow BC = 2v_0 \sin\alpha . t.$

$$\Rightarrow y = 2v_0 \sin^2\alpha . t + v_0 \cos^2\alpha . t - v_0 \sin^2\alpha . t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ và } t = \frac{2v_0}{g}$$

Từ đó: $BC = 2v_0 \sin\alpha . \frac{2v_0}{g} = \frac{4v_0^2 \sin\alpha}{g}$.

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{gBC}{4v_0^2} = \frac{gBC}{4.2gh} = \frac{BC}{8h} = \frac{4}{8.1} = 0,5; \ \alpha = 30^0$$

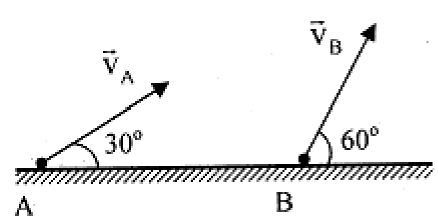
- Tại D, ta có: $\begin{cases} v_D = v_x = v_0 \sin 2\alpha \\ v_y = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = g \end{cases}$

Mặt khác: $a_n = \frac{v_D^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_D^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g}$

$$\Leftrightarrow R = \frac{2gh\sin^2 2\alpha}{g} = 2h\sin^2 2\alpha = 2.1\sin^2 60^0 = 1,5m.$$

Vậy: Bán kính quỹ đạo của hòn bi tại điểm cao nhất giữa hai lần va chạm đó là $R = 1,5m$.

32. Hai điểm A, B ở trên mặt đất, cách nhau $10m$. Từ A, người ta bắn vật 1 với góc bắn 30^0. Từ B, người ta tiếp tục bắn vật 2 với góc bắn 60^0 (hình vẽ). Vận tốc ban đầu của hai vật đều có



độ lớn bằng 40m/s và đồng phẳng. Cho biết vật 2 được bắn sau khi bắn vật 1 là $\tau(s)$ và trên đường bay hai vật sẽ gặp nhau ở điểm M. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

Xác định τ và tọa độ điểm M.

Bài giải

Chọn hệ tọa độ Oxy, gốc O trùng với điểm A (hình vẽ); gốc thời gian $(t = 0)$ tại thời điểm bắn vật 1.

- Phân tích chuyển động của hai vật theo hai phương Ox và Oy:

+ Vật 1:

- Theo phương Ox: $v_{1x} = v\cos 30^0 = 40.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}(\text{m/s})$; $x_1 = v_{1x}t = 20\sqrt{3}t.$
- Theo phương Oy: $v_{01y} = v\sin 30^0 = 40.\dfrac{1}{2} = 20(\text{m/s})$; $y_1 = v_{01y}t - \dfrac{1}{2}gt^2$

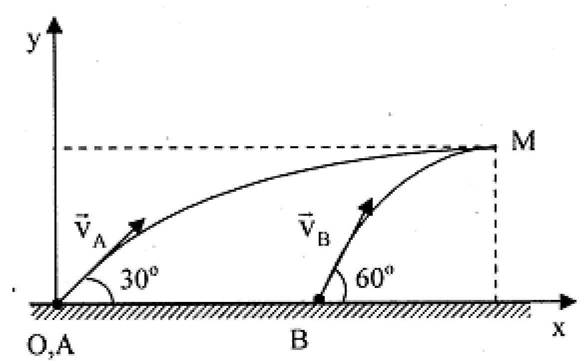
$y_1 = 20t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 20t - 5t^2.$

+ Vật 2:

- Theo phương Ox:

$v_{2x} = v\cos 60^0 = 40.\dfrac{1}{2} = 20(\text{m/s});$

$x_2 = v_{2x}(t-\tau) + 10 = 20(t-\tau) + 10.$



- Theo phương Oy:

$v_{02y} = v\sin 60^0 = 40.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}(\text{m/s});$

$y_2 = v_{02y}(t-\tau) - \dfrac{1}{2}g(t-\tau)^2$

$y_2 = 20\sqrt{3}(t-\tau) - \dfrac{1}{2}g(t-\tau)^2 = 20\sqrt{3}(t-\tau) - 5(t-\tau)^2$

- Khi hai vật gặp nhau: $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$.

$\Leftrightarrow 20\sqrt{3}t = 20(t-\tau) + 10 \qquad (1)$

Và $20t - 5t^2 = 20\sqrt{3}(t-\tau) - 5(t-\tau)^2 \qquad (2)$

- Từ (1) ta được: $t = \dfrac{10 - 20\tau}{20\sqrt{3} - 20} = \dfrac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2} \qquad (3)$

- Thay (3) vào (2) ta được:

$$20\left(\frac{1-2\tau}{2\sqrt{3}-2}\right)-5\left(\frac{1-2\tau}{2\sqrt{3}-2}\right)^2=20\sqrt{3}\left(\frac{1-2\tau}{2\sqrt{3}-2}-\tau\right)-5\left(\frac{1-2\tau}{2\sqrt{3}-2}-\tau\right)^2$$

$\Leftrightarrow (10+10\sqrt{3})\tau^2+70\tau-(20\sqrt{3}-20)=0$ (phương trình bậc hai theo τ)

$\Rightarrow \tau \approx 0,2s$ và $\tau \approx -2,75s < 0$ (loại)

Với $\tau \approx 0,2s,$ thay vào (3) ta được: $t=\dfrac{1-2.0,2}{2\sqrt{3}-2}=0,4s.$

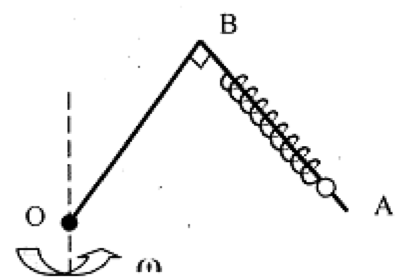
- Tọa độ giao điểm M là:

  $y_M = 20t-5t^2 = 20.0,4-5.0,4^2 = 7,2m;\ \ x_M = 20\sqrt{3}t = 20\sqrt{3}.0,4 = 13,8m.$

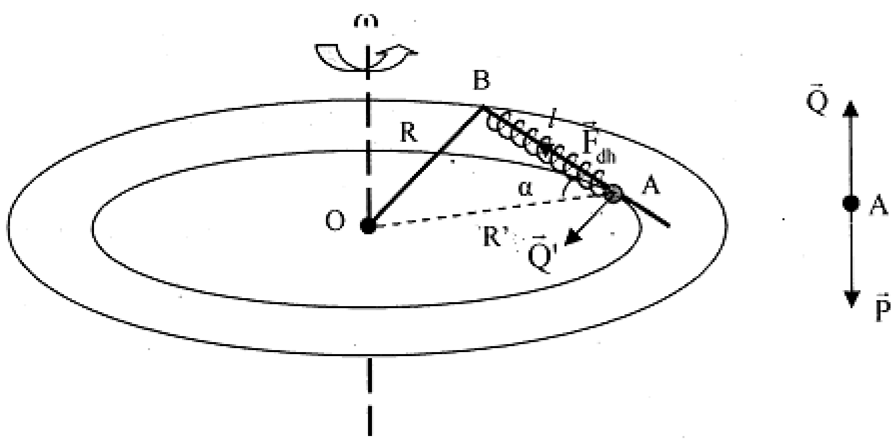
  Vậy: Vật 2 được bắn sau vật 1 thời gian $\tau \approx 0,2s$ và vị trí hai vật gặp nhau $M(13,8m;\ 7,2m).$

33. Một hệ gồm một thanh nhẵn hình chữ T nằm trong mặt phẳng ngang; một vòng trượt nhỏ A khối lượng m được nối với điểm B bằng một lò xo nhẹ có độ cứng k.

Cho toàn bộ hệ thống quay đều với vận tốc góc ω quanh một trục thẳng đứng qua O. Tính độ dãn tỉ đối của lò xo. Chiều quay có ảnh hưởng gì đến kết quả không?



Bài giải



- Các lực tác dụng lên vòng A: trọng lực $\vec{P}$; lực đàn hồi $\vec{F}_{dh}$; các phản lực $\vec{Q},\ \vec{Q}'$.
- Phương trình định luật II Niu-tơn cho vòng A:

  $\vec{P}+\vec{F}_{dh}+\vec{Q}+\vec{Q}'=m\vec{a}$ (1)

- Chiếu (1) lên hai phương hướng tâm và tiếp tuyến, ta được:

  $F_{dh}\cos\alpha + Q'\sin\alpha = m\omega^2 R'$ (1)

  $F_{dh}\sin\alpha - Q'\cos\alpha = 0$ (2)

- Từ (1) và (2) ta được: $F_{dh}(\tan\alpha.\sin\alpha+\cos\alpha)=\mathrm{m}\,\omega^2R'$

$$\Leftrightarrow F_{dh}\left(\frac{RR}{lR'}+\frac{l}{R'}\right)=m\omega^2R'\Leftrightarrow F_{dh}\left(\frac{R^2+l^2}{lR'^2}\right)=m\omega^2 \qquad (3)$$

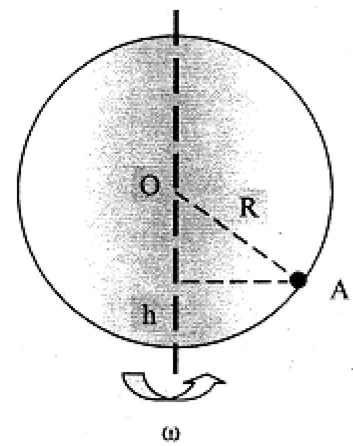
(Đặt $OB=R;\ OA=R';\ BA=l$ với l là chiều dài của lò xo khi A chuyển động tròn đều)

Ta có: $R'^2=R^2+l^2$ nên từ (3), ta có: $\frac{F_{dh}}{l}=m\omega^2.$

$$\Leftrightarrow \frac{k\Delta l}{l_0+\Delta l}=m\omega^2\Rightarrow\frac{\Delta l}{l_0}=\left(\frac{k}{m\omega^2}-1\right)^{-1}$$

Vậy: Độ dãn tỉ đối của lò xo khi hệ quay là $\frac{\Delta l}{l_0}=\left(\frac{k}{m\omega^2}-1\right)^{-1}$ và kết quả này không phụ thuộc chiều quay của hệ.

34. Một hình cầu rỗng bán kính mặt trong $R=0,5m$ quay quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm O với vận tốc góc $\omega=5\text{rad/s}$. Ở trên mặt trong tại vị trí A có một vật nhỏ khối lượng m cùng quay với hình cầu, ở độ cao $h=0,25\text{m}$ so với đáy hình cầu.



a) Tìm giá trị cực tiểu $\mu_{\min}$ của hệ số ma sát ở mặt cầu để trạng thái đó có thể tồn tại.

b) Nếu vận tốc góc $\omega=8\text{rad/s}$ thì $\mu_{\min}$ phải bằng bao nhiêu?

Lấy $g=10\text{m/s}^2$.

Bài giải

a) Giá trị cực tiểu $\mu_{\min}$

- Các lực tác dụng vào m: trọng lực $\vec{P}$; phản lực $\vec{Q}$; lực ma sát $\vec{F}_{ms}$:

$|F_{ms}|\le\mu N;\ N=Q.$

- Đặt: $\vec{Q}+\vec{F}_{ms}=\vec{R};\ \vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{ms}=\vec{F}_{ht};\ F_{ht}=m\omega^2r;\ r=R\sin\alpha;$ các góc như trên hình vẽ. Ta có:

$$\tan\beta=\frac{F_{ms}}{Q};\ \tan\gamma=\frac{F_{ht}}{P}=\frac{\omega^2r}{g}=\frac{\omega^2R\sin\alpha}{g};\ \cos\alpha=\frac{0,25}{0,5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$$

- Từ đó: $Q\tan\beta\le\mu Q\Rightarrow u\ge\tan\beta=\tan(\alpha-\gamma)=\frac{\tan\alpha-\tan\gamma}{1+\tan\alpha\tan\gamma}.$

Với $\alpha=60^0\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{3};\ \tan\gamma=\frac{\omega^2R\sin\alpha}{g}=\frac{5^2.0,5.\sin60^0}{10}=0,625\sqrt{3}.$

$$\Rightarrow \mu \ge \frac{\sqrt{3}-0,625\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}.0,625\sqrt{3}} = 0,23 \Rightarrow \mu_{\min} = 0,23.$$

Vậy: Giá trị cực tiểu $\mu_{\min}$ của hệ số ma sát ở mặt cầu để trạng thái đó có thể tồn tại là $\mu_{\min} = 0,23.$

b) Trường hợp $\omega = 8\text{rad/s}$

Ta có: $\tan\gamma = \dfrac{\omega^2 R\sin\alpha}{g} = \dfrac{8^2.0,5.\sin 60^0}{10} = 1,6\sqrt{3}.$

$$\Rightarrow \mu \ge \left|\frac{\sqrt{3}-1,6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}.1,6\sqrt{3}}\right| = 0,18 \Rightarrow \mu_{\min} = 0,18.$$

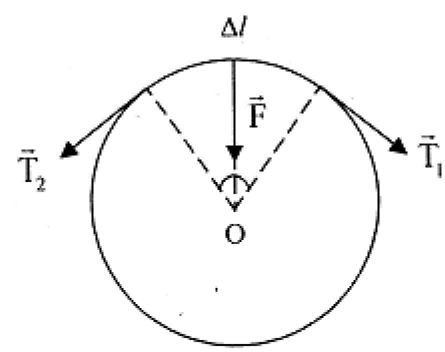
Vậy: Trường hợp $\omega = 8\text{rad/s}$ thì $\mu_{\min} = 0,18.$

35. Một vòng dây cao su có chu vi là l_0 khối lượng m. Hệ số đàn hồi k của vòng dây không đổi theo độ dãn. Vòng dây được đặt nằm ngang trên một đĩa tròn đồng tâm với vòng dây. Cho đĩa quay quanh trục thẳng đứng qua tâm vòng dây. Khi chuyển động ổn định, vòng dây và đĩa cùng quay đều quanh trục với cùng vận tốc góc ω. Tìm bán kính của vòng dây theo l_0, k, m và ω.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2003)

Bài giải

- Chu vi của vòng dây ban đầu là l_0; chu vi của vòng dây khi quay là $l = 2\pi R,$ R là bán kính vòng dây.



- Xét đoạn dây ngắn Δl có khối lượng:

$$\Delta m = \frac{m.\Delta l}{l} = \frac{m.\Delta l}{2\pi R}.$$

- Hai đầu đoạn dây Δl chịu tác dụng của các lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ với hợp lực:

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2};\ T_1 = T_2 = T = k(l - l_0) = k(2\pi R - l_0)$$

- Vì α nhỏ nên: $\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\Delta l}{2R} \Rightarrow F = k(2\pi R - l_0)\dfrac{\Delta l}{R}$ (1)

- Hợp lực F tác dụng lên Δl đóng vai trò lực hướng tâm nên:

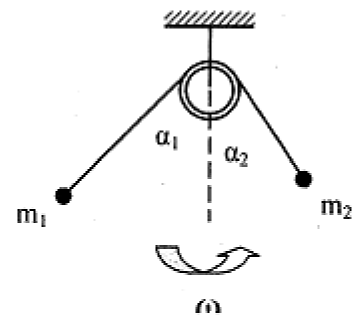
$$F = \Delta m.\omega^2 R = \frac{m.\Delta l}{2\pi R}.\omega^2 R \qquad (2)$$

- Từ (1) và (2), ta được: $k(2\pi r - l_0)\dfrac{\Delta l}{R} = \dfrac{m.\Delta l}{2\pi R}\omega^2 R$

$\Rightarrow R = \dfrac{2\pi k l_0}{4\pi^2 k - m\omega^2}$.

Vậy: Bán kính của vòng dây là $R = \dfrac{2\pi k l_0}{4\pi^2 k - m\omega^2}$.

36. Hai quả cầu có khối lượng $m_1 = 150g$ và $m_2 = 200g$ nối với nhau bằng sợi dây nhẹ không dãn có chiều dài $l = 1m$. Dây được vắt qua một ròng rọc nhẹ như hình vẽ. Quay giá treo ròng rọc quanh trục thẳng đứng với tốc độ góc không đổi $\omega = 6\text{rad/s}$. Các quả cầu bị tách ra và chuyển động tròn đầu trên các mặt phẳng nằm ngang. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Tính:



a) Chiều dài các đoạn dây l_1, l_2.

b) Bán kính quỹ đạo của các quả cầu.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2010)

Bài giải

a) Chiều dài các đoạn dây l_1, l_2

- Các lực tác dụng lên hai vật: vật 1 (trọng lực $\vec{P}_1$, lực căng $\vec{T}_1$); vật 2 (trọng lực $\vec{P}_2$, lực căng $\vec{T}_2$).
- Áp dụng định luật 2 Niu-tơn cho mỗi vật:

+ Vật 1: $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$ (1)

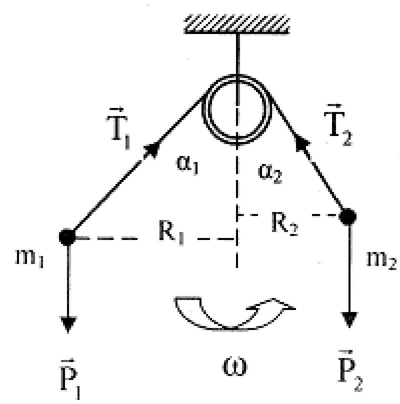
+ Vật 2: $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$ (2)

Với $T_1 = T_2 = T$

- Chiếu (1) và (2) lên hai phương (nằm ngang và thẳng đứng), ta được:

$$\begin{cases} T\sin\alpha_1 = m_1\omega^2 R_1 = m_1\omega^2 l_1 \sin\alpha_1 \\ T\sin\alpha_2 = m_2\omega^2 R_2 = m_2\omega^2 (l - l_1)\sin\alpha_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} T\cos\alpha_1 - P_1 = 0 \\ T\cos\alpha_2 - P_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$



- Từ (3): $\begin{cases} T = m_1\omega^2 l_1 \\ T = m_2\omega^2 (l - l_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow m_1 l_1 = m_2 (l - l_1)$

$\Rightarrow l_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \dfrac{200}{150 + 200} = 0,571m$

và $l_2 = 1 - 0,571 = 0,429m$

Vậy: Chiều dài các đoạn dây là $l_1 = 0,571m$ và $l_2 = 0,429m$.

b) Bán kính quỹ đạo của các quả cầu

- Từ: $T = m_1\omega^2 l_1 = 0,15.6^2.0,571 \approx 3,086N$.
- Từ (4) ta được:

$$\cos\alpha_1 = \frac{m_1 g}{T} = \frac{0,15.10}{3,086} = 0,486 \Rightarrow \alpha_1 \approx 60^0 55'.$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{m_2 g}{T} = \frac{0,2.10}{3,086} = 0,648 \Rightarrow \alpha_2 \approx 49^0 36'.$$

Suy ra: $R_1 = l_1 \sin\alpha_1 = 0,571.\sin 60^0 55' \approx 0,499m$

$R_2 = l_2 \sin\alpha_2 = 0,429.\sin 49^0 36' \approx 0,327m$

Vậy: Bán kính quỹ đạo của các quả cầu là $R_1 = 0,499m$ và $R_2 = 0,327m$.

37. Ba chất điểm m_1, m_2, m_3 đặt trên mặt bàn nằm ngang không ma sát, liên kết với nhau bằng ba sợi dây mảnh có cùng độ dài l (ba chất điểm ở ba đỉnh của tam giác đều). Mặt bàn quay đều với vận tốc góc ω quanh một trục thẳng đứng đi qua khối tâm của ba chất điểm (trong lúc quay hệ chất điểm giữ nguyên cấu hình tam giác đều). Tìm lực căng của các sợi dây.

Bài giải

Gọi G là khối tâm của hệ. Chọn hệ tọa độ Oxy với gốc tọa độ O là khối tâm của m_1.

- Tọa độ của khối tâm G là:

$$x_G = \frac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 \frac{l}{2} + m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_2 + 2m_3)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$y_G = \frac{m_2 y_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 l \cos 30^0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 l\sqrt{3}}{2(m_1 + m_2 + m_3)}$$

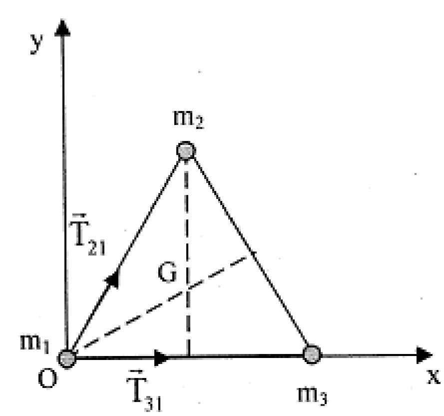
- Phương trình chuyển động của m_1:

$\vec{P}_1 + \vec{T}_{21} + \vec{T}_{31} = m_1\vec{a}$ (1)

với: $a = \omega^2 r$ và $r = OG$.

- Chiếu (1) lên hai trục Oy và Ox, ta được:

$T_{21}\cos 30^0 = m_1\omega^2 r \sin\alpha = m_1\omega^2 y_G$



$$\Rightarrow T_{21}=\frac{m_1\omega^2 y_G}{\cos 30^0}=\frac{m_1\omega^2.\dfrac{m_2 l\sqrt{3}}{2(m_1+m_2+m_3)}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2$$

Và: $T_{21}\sin 30^0+T_{31}=m_1\omega^2 r\cos\alpha=m_1\omega^2 x_G$

$$\Rightarrow T_{31}=m_1\omega^2 x_G-T_{21}\sin 30=m_1\omega^2.\frac{(m_2+2m_3)l}{2(m_1+m_2+m_3)}-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2.\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T_{31}=\frac{m_1m_3}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2$$

- Phương trình chuyển động của m_3: $\vec{P}_3+\vec{T}_{13}+\vec{T}_{23}=m_3\vec{a}$ (2)
- Chiếu (2) lên trục Oy, ta được:

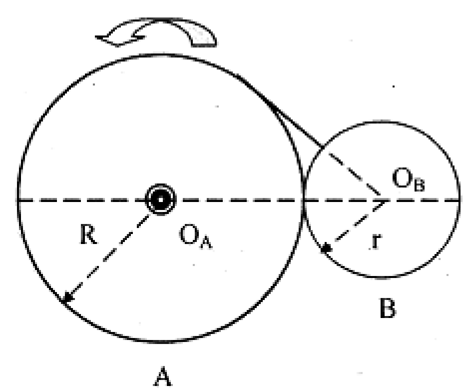
$T_{23}\cos 30^0=m_3\omega^2 r\sin\beta=m_3\omega^2 y_G$

$$\Rightarrow T_{23}=\frac{m_3\omega^2 y_G}{\cos 30^0}=\frac{m_3\omega^2.\dfrac{m_2 l\sqrt{3}}{2(m_1+m_2+m_3)}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2$$

Vậy: Lực căng của các sợi dây là:

$$T_{21}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2;\ T_{31}=\frac{m_1m_3}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2;\ T_{23}=\frac{m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}l\omega^2.$$

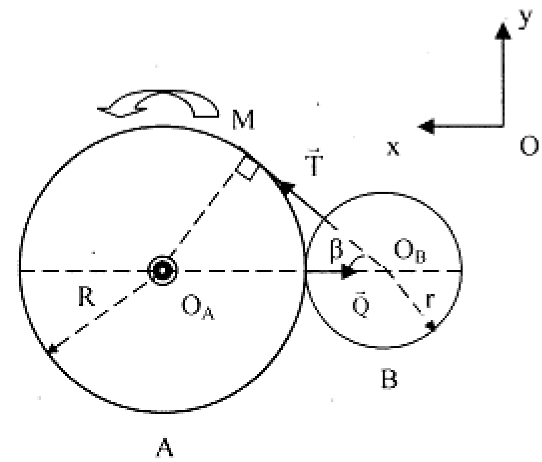
38. Trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn có hai đĩa tròn A và B đặt tiếp xúc nhau. Một dây nhẹ, không co giãn, buộc cố định ở hai đầu vào hai đĩa tròn như hình vẽ. Tại thời điểm $t_0=0$, đĩa A có bán kính R, bắt đầu quay nhanh dần đều quanh trục thẳng đứng cố định đi qua tâm đĩa. Tại thời điểm t_1 đĩa tròn nhỏ có bán kính r tách khỏi đĩa tròn lớn. Tính góc mà đĩa tròn lớn đã quay trong thời gian t_1. Bỏ qua ma sát giữa hai đĩa tròn, cho rằng khối lượng các đĩa tròn đều tập trung ở tâm của chúng.



Bài giải

Chọn gốc thời gian lúc đĩa A bắt đầu quay. Tại thời điểm t vận tốc góc của đĩa A là: $\omega_1=\alpha t$ (α là gia tốc góc của đĩa).

- Khi đĩa A quay quanh trục O_A thì tâm O_B của đĩa B cũng chuyển động trên cung tròn có tâm O_A, bán kính $(R+r)$ và cùng vận tốc góc ω_1. Vận tốc dài, gia tốc hướng tâm và gia tốc tiếp tuyến của đĩa B khi đó là:



$v_1 = (R+r)\omega_t = \alpha t(R+r)$

$a_{ht} = \dfrac{v_1^2}{(R+r)} = \omega_t^2(R+r)$

$a_t = \dfrac{v_t}{t} = \alpha(R+r)$

- Các lực tác dụng lên đĩa B là: trọng lực $\vec{p}$; lực căng dây $\vec{T}$ và phản lực $\vec{Q}$ do đĩa A tác dụng lên đĩa B.
- Áp dụng định luật II Niu-tơn cho đĩa B: $\vec{p} + \vec{T} + \vec{Q} = m\vec{a}$ (1)
- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$T\cos\beta - Q = ma_{ht} = m\omega_t^2(R+r)$ (2)

$T\sin\beta = ma_t = m\alpha(R+r)$ (3)

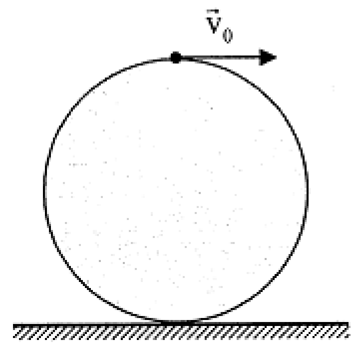
- Từ (2) và (3) suy ra: $\cot\beta = \dfrac{Q + m\omega_t^2(R+r)}{m\alpha(R+r)} = \dfrac{Q}{m\alpha(R+r)} + \alpha t^2$
- Tại thời điểm t_1 đĩa B tách khỏi đĩa A nên $Q = 0$. Khi đó: $\cot\beta = \alpha t_1^2$.
- Góc φ mà đĩa A quay được trong thời gian t_1 là: $\varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t_1^2 = \dfrac{\cot\beta}{2}$.

Với: $\cot\beta = \dfrac{\sqrt{(R+r)^2 - R^2}}{R} = \dfrac{\sqrt{r^2 + 2Rr}}{R}$ (Δ vuông MO_AO_B).

$\Rightarrow \varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 + 2Rr}}{2R}$

Vậy: Góc mà đĩa tròn lớn đã quay trong thời gian t_1 là $\varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 + 2Rr}}{2R}$.

39. Một vành tròn được giữ yên trong mặt phẳng thẳng đứng trên một mặt phẳng ngang. Tại điểm cao nhất của vành có một vòng đệm nhỏ khối lượng m. Truyền cho vòng đệm vận tốc đầu v_0 theo phương ngang



(song song với mặt phẳng chứa vòng). Vành tròn không chuyển động. Bỏ qua ma sát giữa vòng đệm với vành. Xác định:

a) Hướng và độ lớn của lực mà vành tác dụng lên vòng đệm.

b) Hướng và độ lớn của lực ma sát mà mặt phẳng ngang tác dụng lên vành.

Xét trường hợp đặc biệt $v_0 = 0.$

Bài giải

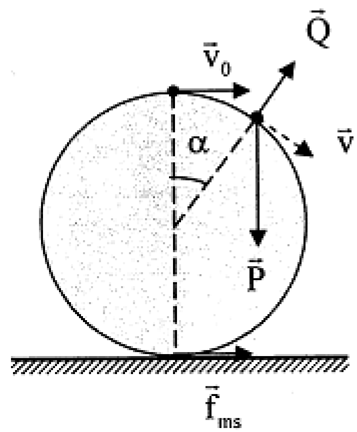
a) Hướng và độ lớn của lực mà vành tác dụng lên vòng đệm

Xét vòng đệm tại vị trí α (hình vẽ).

- Các lực tác dụng lên vòng đệm: Trọng lực $\vec{P};$ phản lực $\vec{Q}.$

- Phương trình định luật II Niu-tơn cho vòng đệm:

$\vec{P}+\vec{Q}=m\vec{a}.$



- Chiếu hệ thức trên lên trục hướng tâm, ta được:

$P\cos\alpha - Q = ma_{ht}.$

$\Leftrightarrow Q = mg\cos\alpha - m\dfrac{v^2}{R} = m\left(g\cos\alpha - \dfrac{v^2}{R}\right) \quad (1)$

Với: $v^2 - v_0^2 = 2gR(1-\cos\alpha)$

$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\alpha)$

- Thay vào (1), ta được:

$$Q = m\left(g\cos\alpha - \frac{v_0^2 + 2gR(1-\cos\alpha)}{R}\right) = m\left(3g\cos\alpha - \frac{v_0^2}{R} - 2g\right) \quad (2)$$

- Nhận xét: Từ (2) ta thấy:

+ Nếu $v_0 \le \sqrt{gR} : Q \ge 0 \forall \alpha,$ $\vec{Q}$ luôn hướng xa $O.$

+ Nếu $v_0 = 0:$ Ban đầu, α nhỏ: $Q > 0:$ $\vec{Q}$ luôn hướng xa $O,$ đến khi $\alpha = \arccos\dfrac{2}{3}$ thì $Q = 0.$

Vậy: Lực mà vành tròn tác dụng lên vòng đệm là $Q = m\left(3g\cos\alpha - \dfrac{v_0^2}{R} - 2g\right)$ và luô có hướng xa $O.$

b) Hướng và độ lớn của lực ma sát mà mặt phẳng ngang tác dụng lên vành

- Khi vòng đệm trượt theo vành về phía trước thì vành có xu hướng trượt về phía sau nên lực ma sát giữa vành và mặt phẳng ngang sẽ hướng về phía trước.

- Độ lớn của lực ma sát và mặt phẳng ngang tác dụng lên vành (bỏ qua khối lượng của vành): Do vành không trượt nên đó là ma sát nghỉ với độ lớn:

$$f_{ms} = N\sin\alpha = Q\sin\alpha = m\left(3g\cos\alpha - \frac{v_0^2}{R} - 2g\right)\sin\alpha$$

Vậy: Lực ma sát mà mặt phẳng ngang tác dụng lên vành là ma sát nghỉ có hướng về phía trước và có độ lớn cân bằng với thành phần lực do vòng đệm tác dụng lên vành theo phương ngang:

$$f_{ms} = m\left(3g\cos\alpha - \frac{v_0^2}{R} - 2g\right)\sin\alpha$$

40. Một đầu máy xe lửa nặng 40 tấn, trọng lượng chia đều cho 8 bánh xe. Trong đó có 4 bánh phát động. Đầu máy kéo 8 toa, mỗi toa nặng 20 tấn. Hệ số ma sát giữa bánh xe với đường ray là 0,07. Bỏ qua ma sát ở các ổ trục. Trên trần toa xe có một quả cầu nhỏ khối lượng 200g treo bằng dây nhẹ, không dãn. Cho $g = 10\text{m/s}^2$.

1. Tính thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h. Tính góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng của dây treo.
2. Sau thời gian trên, tàu hãm phanh. Biết rằng lúc này động cơ không truyền lực cho các bánh. Tính quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây trong 2 trường hợp:

a) Chỉ hãm các bánh ở đầu máy.

b) Hãm tất cả các bánh của đoàn tàu.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2007)

Bài giải

1. Thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h

Gọi M_d là khối lượng đầu máy, M_t là khối lượng các toa tàu.

- Lực phát động chính lực ma sát tác dụng lên 4 bánh ở đầu tàu nên:

$$F_{pd} = f_{ms} = \frac{kM_d g}{2} = \frac{0,07.40.10^3.10}{2} = 14.10^3\,N$$

- Gia tốc cực đại mà tàu đạt được:

$$a_{\max} = \frac{F_{pd}}{M} = \frac{F_{pd}}{M_d + M_t} = \frac{14.10^3}{40.10^3 + 160.10^3} = 0,07\text{m/s}^2.$$

- Thời gian ngắn nhất kể từ lúc toa tàu khởi hành: $v_t = v_0 + a_{\max}t_{\min}$

$\Rightarrow t_{\min} = \dfrac{v_t}{a_{\max}} = \dfrac{5,55}{0,07} = 79,4s = 1\text{ph } 15\text{s}$

- Góc lệch α của dây treo và lực căng dây: Dây treo bị lệch về phía sau (so với vận tốc).

+ Vì $m << M$ nên không ảnh hưởng đến gia tốc của tàu.

+ Trong hệ quy chiếu gắn với tàu, vật m chịu tác dụng của 3 lực, với:

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_q = \vec{0}.$

Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{F_q}{P} = \dfrac{ma_{\max}}{mg} = \dfrac{a_{\max}}{g} = \dfrac{0,07}{10} = 0,007 \Rightarrow \alpha = 0,4°.$

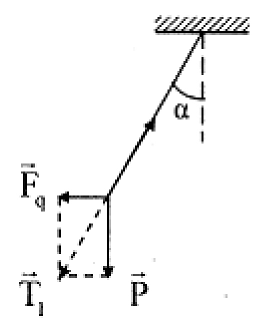
Mặt khác: $\cos\alpha = \dfrac{P}{T} \Rightarrow T = \dfrac{P}{\cos\alpha} = \dfrac{mg}{\cos 0,4°} = \dfrac{0,2.10}{\cos 0,4°} = 2,0002N.$

Vậy: Thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h là $t_{\min} = 79,4\text{s}$; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng của dây treo là $0,4°$ và $2,0002N$.

2. Quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây

a) Trường hợp hãm ở đầu máy: Lúc này tàu chuyển động chậm dần đều:

+ Gia tốc của tàu: $a_1 = -\dfrac{f_{ms1}}{M} = \dfrac{kM_d g}{M} = \dfrac{0,07.40.10}{200} = -0,14\text{m/s}^2$



+ Khi dừng, $v = 0$: $s_1 = -\dfrac{v_1^2}{2a_1} = -\dfrac{5,55^2}{2.(-0,14)} = 110,23m$

+ Góc lệch: $\tan\alpha_1 = \dfrac{F_q}{P} = \dfrac{ma_1}{mg} = \dfrac{-0,14}{10} = -0,014$

$\Rightarrow \alpha_1 = 7,97°$ và dây treo lệch về phía trước.

+ Lực căng dây:

Từ: $\cos\alpha_1 = \dfrac{P}{T_1} \Rightarrow T_1 = \dfrac{P}{\cos\alpha_1} = \dfrac{mg}{\cos 7,97°} = \dfrac{0,2.10}{\cos 7,97°} = 2,0195N$

Vậy: Khi lực hãm ở đầu tàu thì quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng là 110,23m; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây là $7,97°$ và 2,0195N.

b) Khi hãm tất cả các bánh:

+ Gia tốc của tàu: $a_2 = -\dfrac{f_{ms}}{M} = -\dfrac{kMg}{M} = -kg = -0,07.10 = -0,7\text{m/s}^2$

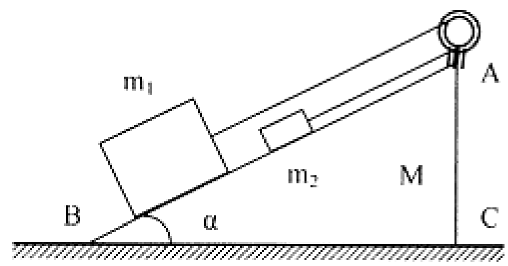
+ Khi dừng, $v = 0$: $s_2 = -\dfrac{v_2^2}{2a_2} = -\dfrac{5,55^2}{2.(-0,7)} = 22,05m$

+ Góc lệch: $\tan\alpha_2 = \frac{F_q}{P} = \frac{ma_2}{mg} = \frac{-0,7}{10} = -0,07 \Rightarrow \alpha_1 = 4°$ và dây treo lệch về phía trước.

+ Lực căng dây: Từ: $\cos\alpha_2 = \frac{P}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{P}{\cos\alpha_2} = \frac{mg}{\cos 4°} = \frac{0,2.10}{\cos 4°} = 2,005N$

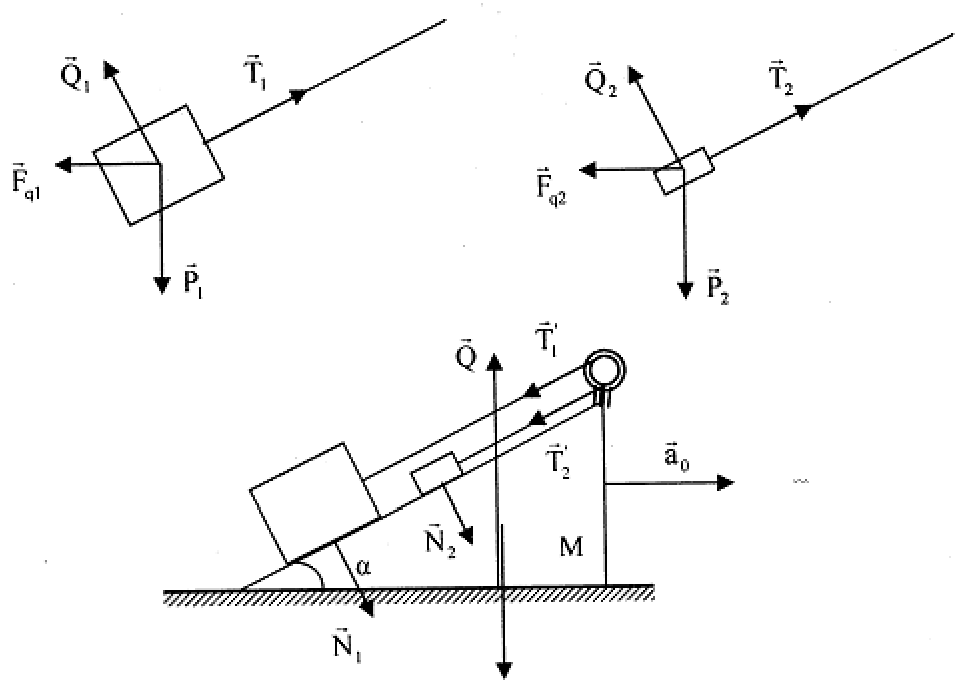
Vậy: Khi lực hãm ở đầu tàu thì quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng là 22,05m; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây là $4°$ và 2,005N.

41. Một cái nêm khối lượng $M = 5kg$ có mặt AB nghiêng góc $\alpha = 30^0$, được đặt trên một mặt sàn nhẵn nằm ngang. Trên mặt AB của nêm có đặt hai vật có khối lượng $m_1 = 4kg$ và $m_2 = 2kg$ nối với nhau bằng một sợi dây không dãn vắt qua một ròng rọc nhỏ gắn vào đỉnh A của nêm (hình vẽ).



Bỏ qua khối lượng, ma sát ở ròng rọc và ma sát giữa các vật với nêm. Tính gia tốc của mỗi vật đối với sàn. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

Bài giải



Chọn hệ quy chiếu gắn với nêm, chiều dương là chiều chuyển động của vật m_1. Phương trình định luật II Niu-tơn của các vật theo phương song song và vuông góc với mặt nêm:

- Vật m_1: $F_{q1} + P_1\sin\alpha - T_1 = m_1a_1$ (1)

và: $Q_1 = P_1\cos\alpha - F_{q1}\sin\alpha$ (2)

- Vật m_2: $-F_{q2}-P_2\sin\alpha+T_2=m_2a_2$ (3)

  và: $Q_2=P_2\cos\alpha-F_{q2}\sin\alpha$ (4)

  Với: $T_1=T_2=T;\ a_1=a_2=a;\ F_{q1}=m_1a_0;\ F_{q2}=m_2a_0$ (a_0: gia tốc của nêm đối với đất)

- Từ các hệ thức trên ta được: $a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(g\sin\alpha+a_0\cos\alpha)$ (5)

- Xét chuyển động của nêm đối với sàn. Phương trình định luật II Niu-tơn cho nêm:

  $\vec{P}+\vec{Q}+2\vec{T}+\vec{Q_1}+\vec{Q_2}=M\vec{a}_0$ (6)

  Với $Q_1^{'}=Q_1;\ Q_2^{'}=Q_2\Rightarrow(Q_1+Q_2)\sin\alpha-2T\cos\alpha=Ma_0$ (7)

- Từ (1), (2), (3), (4): $2T=(m_1+m_2)(g\sin\alpha+a_0\cos\alpha)-(m_1-m_2)a$

  Và $Q_1+Q_2=(m_1+m_2)(g\cos\alpha-a_0\sin\alpha)$ (8)

- Từ (7) và (8): $a_0=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}a\cos\alpha$ (9)

- Từ (5) và (9): $a=\dfrac{(m_1-m_2)(M+m_1+m_2)}{(m_1+m_2)(M+m_1+m_2)-(m_1-m_2)^2\cos^2\alpha}g\sin\alpha$

  $\Leftrightarrow a=\dfrac{(4-2)(5+4+2)}{(4+2)(5+4+2)-(4-2)^2\cos^2 30^0}.10.\sin 30^0=\dfrac{110}{63}$ (m/s^2)

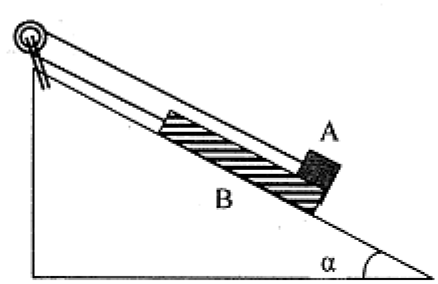
- Thay giá trị của a vào (9): $a_0=\dfrac{4-2}{4+2}.\dfrac{110}{63}.\cos 30^0=\dfrac{55\sqrt{3}}{189}=0,5(\text{m/s}^2)$

- Gia tốc của m_1 đối với sàn: $\vec{a}_1'=\vec{a}_1+\vec{a}_0\Leftrightarrow a_1'^2=a^2+a_0^2-2aa_0\cos\alpha$

  $\Leftrightarrow a_1'^2=\left(\dfrac{110}{63}\right)^2+0,5^2-2.\dfrac{110}{63}.0,5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1,8\Rightarrow a_1'=1,34(\text{m/s}^2)$

  Vậy: Gia tốc của m_1, m_2 đối với đất là: $a_2'=a_1'=1,34(\text{m/s}^2)$.

42. Một tấm ván B dài $l=1m$, khối lượng $m_2=1kg$ được đặt lên một mặt phẳng nghiêng 30^0 so với phương ngang. Một vật A có khối lượng $m_1=100g$ được đặt tại điểm thấp nhất của B và được nối với B bằng một sợi dây mảnh không dãn vắt qua một ròng rọc nhẹ, gắn cố định ở đỉnh dốc.



Cho $g=10\text{m/s}^2$ và bỏ qua mọi ma sát. Thả cho tấm ván trượt xuống gốc.

a) Tìm gia tốc của A, B. Tính lực do B tác dụng lên A, lực do mặt phẳng nghiêng tác dụng lên B và lực căng của dây nối.

b) Tính thời gian để A rời khỏi ván B.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2009)

Bài giải

a) Gia tốc của A, B; lực do do B tác dụng lên A; lực do mặt phẳng nghiêng tác dụng lên B và lực căng của dây nối.

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Các lực tác dụng lên hai vật:

  + Vật A: Trọng lực $\vec{P}_1$; phản lực $\vec{Q}_1$; lực căng $\vec{T}_1$.

  + Vật B: Trọng lực $\vec{P}_2$; phản lực $\vec{Q}_2$; lực căng $\vec{T}_2$; áp lực $\vec{N}$.

- Áp dụng định luật II Niutơn cho hai vật ($a_1 = a_2 = a;\ T_1 = T_2 = T;\ N = Q_1$):

  + Vật A: $\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$ (1)

  + Vật B: $\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 + \vec{N} = m_2\vec{a}$ (2)

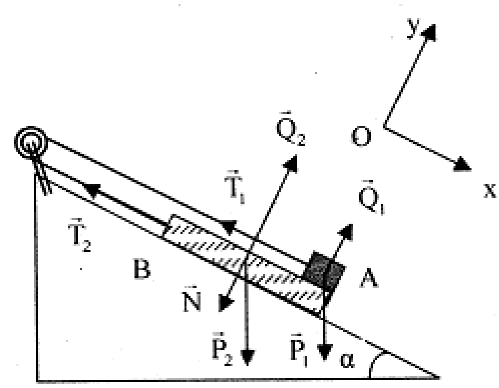
- Chiếu (1) và (2) lên hai trục Ox và Oy của hệ tọa độ Oxy, ta được:

  $P_1\sin\alpha - T = m_1a$ (3)

  $P_2\sin\alpha - T = m_2a$ (4)

  $Q_1 = m_1g\cos\alpha$ (5)

  $Q_2 = N + m_2g\sin\alpha = Q_1 + m_2g\sin\alpha$ (6)



- Từ (3) và (4) ta được:

  $$a = \frac{(m_2 - m_1)\mathrm{g}\sin\alpha}{m_1 + m_2} = \frac{(1-0,1).10.\sin 30^0}{1+0,1} = 4,1\mathrm{m/s^2}$$

- Từ (5) và (6), ta được: $Q_1 = 0,1.10.\cos 30^0 = 0,87N$;

  $Q_2 = 0,87 + 1.10.\sin 30^0 = 5,87N$.

- Từ (3) ta được: $T = m_1(g\sin\alpha - a) = 0,1(10.\sin 30° - 4,1) = 0,9N$.

  Vậy: Gia tốc của A, B là $a = 4,1\mathrm{m/s^2}$; lực do B tác dụng lên A là Q; lực do mặt phẳng nghiêng tác dụng lên B là $Q_2 = 5,87N$ và lực căng của dây nối là $T = 0,9N$.

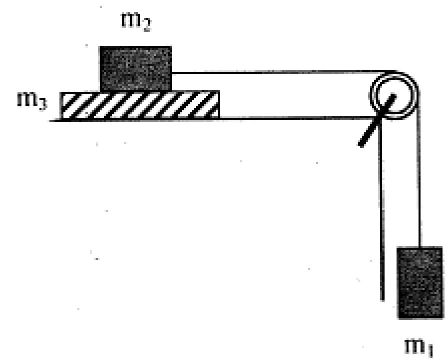
b) Thời gian để A rời khỏi ván B

- Trong thời gian A trượt trên B, tổng quãng đường do A, B thực hiện được bằng khoảng cách từ vị trí ban đầu của A đến mép trên của B và bằng $1m$. Quãng đường A trượt trên B:

  $$s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)t^2 = at^2$$

- Thời gian A trượt trên B là: $t=\sqrt{\dfrac{s}{a}}=\sqrt{\dfrac{1}{4,1}}=0,49s.$

Vậy: Thời gian để A rời khỏi ván B là $t=0,49s.$



43. Cho cơ hệ như hình vẽ. Ròng rọc có khối lượng không đáng kể, dây nối nhẹ và không dãn, $m_1=2kg;\ m_3=1kg;$ hệ số ma sát trượt giữa m_3 và mặt bàn cố định là $\mu_1=0,2;$ hệ số ma sát trượt giữa m_2 với m_3 là $\mu_2=0,4;$ lấy $g=10\text{m/s}^2$. Hệ được thả cho chuyển động từ trạng thái nghỉ.

a) Xác định m_2 để nó không trượt trên m_3 khi hệ chuyển động?

b) Tìm m_2 để gia tốc của m_3 bằng một nửa gia tốc của m_2 khi hệ chuyển động? Khi đó gia tốc của m_2 bằng bao nhiêu?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2012)

Bài giải

a) Xác định m_2 để nó không trượt trên m_3 khi hệ chuyển động

Giả sử m_2 không trượt trên m_3 khi hệ chuyển động.

- Chọn chiều (+) là chiều chuyển động của hệ (hình vẽ); a là gia tốc của hệ.
- Các ngoại lực tác dụng lên hệ: các trọng lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3;$ các phản lực $\vec{Q}_{23},\ \vec{Q}$; lực ma sát $\vec{F}_{23}$.
- Áp dụng định luật II Niu-tơn cho hệ:

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{Q}_{23}+\vec{Q}+\vec{F}_{23}=M\vec{a} \qquad (1)$$

- Chiếu (1) lên chiều (+) đã chọn, ta được: $P_1-F_{23}=Ma=(m_1+m_2+m_3)a.$

$$\Leftrightarrow m_1g-\mu_1 g(m_2+m_3)=(m_1+m_2+m_3)a$$

$$\Rightarrow a=\frac{m_1g-\mu_1g(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}=\frac{2.10-0,2.10(m_2+1)}{2+m_2+1}=\frac{18-2m_2}{3+m_2} \qquad (2)$$

- Áp dụng định luật II Niutơn cho vật m_1, ta được: $P-T=m_1a.$

$$\Rightarrow T=m_1g-m_1a=2.10-2a=20-2a \qquad (3)$$

- Áp dụng định luật II Niutơn cho m_2, ta được: $T-F_{ms2}=m_2a.$

$$\Rightarrow F_{ms2}=T-m_2a=20-a(2+m_2) \qquad (4)$$

- Vì m_2 không trượt trên m_3 nên: $F_{ms2}\le \mu_2m_2g=0,4.10m_2=4m_2 \qquad (5)$

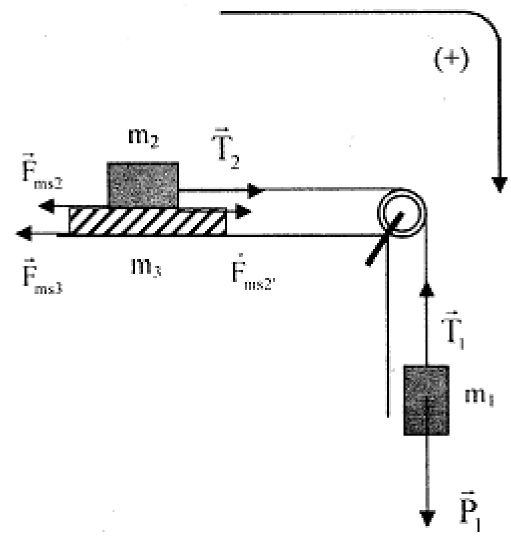
$\Leftrightarrow 20 - a(2 + m_2) \le 4m_2 \Leftrightarrow 20 - \frac{18 - 2m_2}{3 + m_2}(2 + m_2) \le 4m_2$

$\Leftrightarrow m_2^2 + 3m_2 - 12 \ge 0 \Rightarrow m_2 \le \frac{-3 - \sqrt{57}}{2}$ (loại); $m_2 \ge \frac{-3 + \sqrt{57}}{2}$ (kg).

- Mặt khác, từ (2) ta có $a > 0 \Leftrightarrow m_2 < 9kg$.

  Vậy: Để m_2 không trượt trên m_3 khi hệ chuyển động thì:

  $\frac{-3 + \sqrt{57}}{2} \le m_2 < 9$ (đơn vị là kg).



b) Tìm m_2 để $a_3 = \frac{1}{2}a_2$ và tính a_2

Đặt $a_1 = a_2 = 2a$; $a_3 = a$; lực ma sát giữa m_3 với sàn là F_{ms3}, giữa m_3 với m_2 là F_{ms2} và $F_{ms2'}$ ($F_{ms2} = F_{ms2'}$).

- Các lực tác dụng vào các vật (theo phương chuyển động) như trên hình vẽ: ($T_1 = T_2 = T$).
- Áp dụng định luật II Niu-tơn cho mỗi vật, ta được:

+ Vật 1: $m_1 g - T = m_1.2a$ (6)

+ Vật 2: $T - F_{ms2} = m_2.2a$ (7)

+ Vật 3: $F_{ms2'} - F_{ms3} = m_3 a$ (8)

Với: $F_{ms2} = F_{ms2'} = \mu_2 m_2 g$; $F_{ms3} = \mu_1 N_{23} = \mu_1(m_2 + m_3)g$ (9)

- Thay (6) và (9) vào (7) và (8), ta được:

  $m_1(g + 2a) - \mu_2 m_2 g = m_2.2a$ (7’)

  $\mu_2 m_2 g - \mu(m_2 + m_3)g = m_3 a$ (8’)

  $\Leftrightarrow 2.(10 + 2a) - 0,4.10.m_2 = 2m_2 a$; $0,4.10.m_2 - 0,2.(m_2 + 1).10 = a$

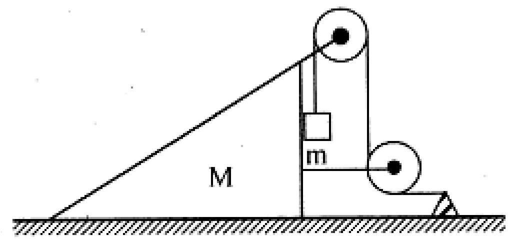
  $\Leftrightarrow 20 + 4a - 4m_2 = 2m_2 a$; $2m_2 - 2 = a$

  $\Leftrightarrow m_2^2 + 2m_2 - 7 = 0 \Rightarrow m_2 \approx 1,83kg$; $m_2 = -3,93$ (loại)

  $\Rightarrow a = 2.1,83 - 2 = 1,66\text{m/s}^2$; $a_2 = 2a = 2.1,66 = 3,32\text{m/s}^2$.

  Vậy: Để $a_3 = \frac{1}{2}a_2$ thì $m_2 = 1,83kg$ và lúc đó $a_2 = 3,32\text{m/s}^2$.

44. Chọn cơ hệ như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa vật m và nêm là k. Bỏ qua khối lượng của dây, của ròng rọc; ma sát giữa M và mặt phẳng nằm ngang không đáng kể. Dây không dãn. Khi m trượt trên M thì gia tốc của m đối với mặt phẳng nằm ngang là $\vec{a}_0$.



Xác định tỉ số khối lượng $\frac{M}{m}$ của nêm và vật.

Bài giải

Chọn hệ quy chiếu gắn với mặt phẳng nằm ngang. Gọi $\vec{a}$ là gia tốc của nêm M.

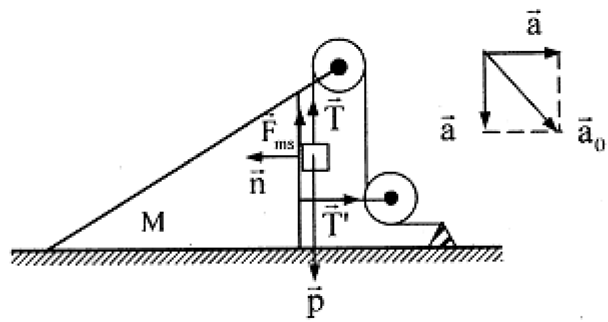
- Khi m trượt xuống thì M chuyển động sang phải, ta có: $a_0 = a\sqrt{2}$ (1)
- Phương trình định luật II Niu-tơn của các vật:

+ Vật m: $p - T - F_{ms} = ma$; với $F_{ms} = kn$

+ Vật M: $T' - n = Ma$; với $n = ma$; $T = T'$

$mg - T - kma = ma$ (2)

$T - ma = Ma$ (3)



- Từ (1), (2) và (3) suy ra:

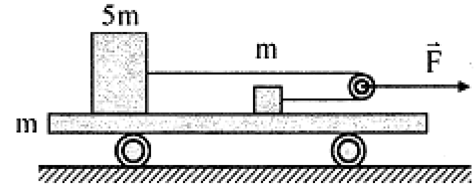
$$a = \frac{g}{2 + k + \frac{M}{m}} \quad (4)$$

- Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{M}{m} = \frac{g\sqrt{2}}{a_0} - (2 + k)$

Vậy: Tỉ số khối lượng $\frac{M}{m}$ của nêm và vật là $\frac{M}{m} = \frac{g\sqrt{2}}{a_0} - (2 + k)$.

45. Trên mặt bàn nằm ngang nhẵn, có một chiếc xe khối lượng m. Trên xe có hai khối lập phương, khối $5m$ và m được nối với nhau bằng một sợi dây không dãn, vắt qua một ròng rọc có khối lượng không đáng kể.

Người ta kéo ròng rọc bằng một lực $\vec{F}$ không đổi theo phương ngang như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa xe và khối lập phương là $\mu_t = \mu_n = 0,1$.



a) Hỏi độ lớn của $\vec{F}$ bằng bao nhiêu thì xe có gia tốc $a = 0,2g$.

b) Khi ấy gia tốc của các khối và của ròng rọc bằng bao nhiêu?

Bài giải

a) Độ lớn của $\vec{F}$ để $a = 0,2g$: Có thể xảy ra các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Hai khối lập phương cùng chuyển động, khi đó lực ma sát tác dụng lên khối $5m$ và m là ma sát trượt và có độ lớn lần lượt là: $F_{ms1} = 5\mu mg$, $F_{ms2} = \mu mg$. Theo phương ngang, phương trình định luật II Niu-tơn cho xe $(F'_{ms1} = F_{ms1}; F'_{ms2} = F_{ms2})$:

  $F_{ms1} + F_{ms2} = ma \Leftrightarrow 5\mu mg + \mu mg = ma$

  $a = 6\mu g = 6.0,1.g = 0,6g > 0,2g$: loại (không thỏa mãn yêu cầu của đề bài)

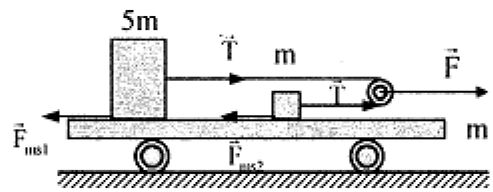
- Trường hợp 2: Hai khối lập phương đều đứng yên đối với xe (F_{ms1}, F_{ms2}: ma sát nghỉ). Theo phương ngang, ta có:

  + Khối $5m$: $T - F_{ms1} = 5ma.$

  + Khối m: $T - F_{ms2} = ma.$

  $\Rightarrow F_{ms2} - F_{ms1} = 4ma$ (1)

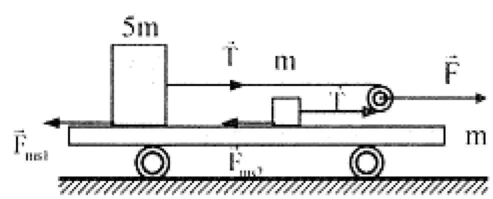
  + Xe: $F_{ms1} + F_{ms2} = ma$ (2)



- Từ (1) và (2) ta có: $F_{ms2} = \dfrac{5}{2}ma$ mà $F_{ms2} \le \mu mg$:

  $\dfrac{5}{2}a \le \mu g$ hay $a \le 0,04g$: loại (không thỏa mãn yêu cầu của đề bài)

- Trường hợp 3: Khối $5m$ đứng yên so với xe, khối m chuyển động trên (F_{ms1}: ma sát nghỉ; F_{ms2}: ma sát trượt). Theo phương ngang, ta có:



+ Khối $5m$: $T - F_{ms1} = 5ma$, $T = \dfrac{F}{2}$ (3)

+ Xe: $F_{ms1} + F_{ms2} = ma$ và $F_{ms2} = \mu mg$ (4)

- Từ (3) và (4) ta có: $F = 2(6ma - \mu mg) = 2,2mg.$

  Vậy: Để xe có gia tốc $a = 0,2g$ thì $F = 2,2mg.$

b) Gia tốc của các khối và của ròng rọc

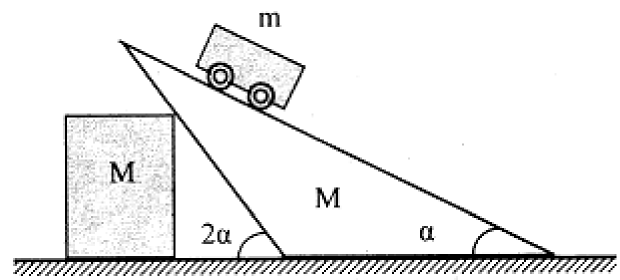
- Gia tốc của khối m: $a_2 = \dfrac{\dfrac{F}{2} - \mu mg}{m} = g \quad (a_2 > a)$

- Dây không dãn nên: $a_{2/rr} = -a_{1/rr} \Leftrightarrow (a_2 - a_{rr}) = -(a_1 - a_{rr})$

$$\Rightarrow a_{rr} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{0,2g + g}{2} = 0,6g$$

Vậy: Gia tốc của khối m là $a_2 = g$ và gia tốc của ròng rọc là $a_{rr} = 0,6g$.

46. Một cái nêm nhẵn khối lượng M, góc đáy α, ban đầu đứng yên trên một mặt bàn nằm ngang. Khối lập phương khối lượng M nằm tiếp xúc với nêm trên mặt bàn này (hình vẽ). Hệ số ma sát giữa khối lập phương và mặt bàn là μ.



Trên nêm người ta đặt một xe kéo khối lượng m, xe kéo có thể trượt không ma sát trên mặt nêm. Thả xe kéo cho nó chuyển động không vận tốc từ đầu đỉnh nêm. Tìm vận tốc xe kéo khi nó đến chân nêm nếu độ cao của nêm là h.

Bài giải

Gọi a là gia tốc của nêm và khối lập phương; gọi a_{12} là gia tốc giữa xe kéo với nêm. Chọn hệ quy chiếu gắn với nêm và khối lập phương.

- Các lực tác dụng lên xe kéo: trọng lực $\vec{p}$; phản lực $\vec{Q}_{12}$; lực quán tính $\vec{F}_{qt}$.
- Phương trình định luật 2 Niu-tơn cho xe kéo m:

  $\vec{p} + \vec{Q} + \vec{F}_{qt} = m\vec{a}_{12}$ (1)

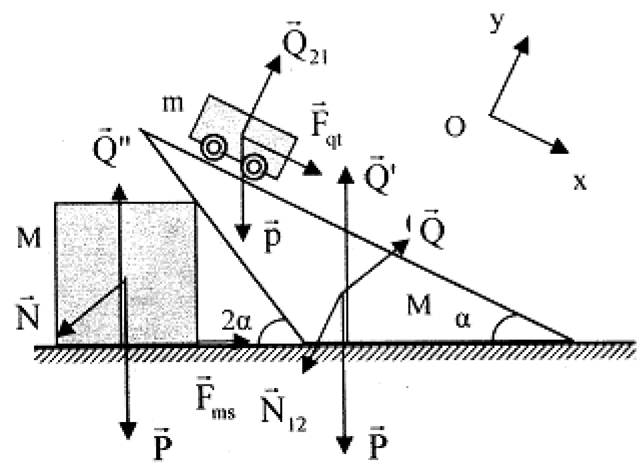
- Chiếu (1) lên hai phương Ox và Oy, ta được:

  $p\sin\alpha + F_{qt}\cos\alpha = ma_{12}$

  $\Leftrightarrow mg\sin\alpha + ma\cos\alpha = ma_{12}$ (2)

  và $Q_{21} - P\cos\alpha - F_{qt}\sin\alpha = 0$

  $\Leftrightarrow Q_{21} - mg\cos\alpha - ma\sin\alpha = 0$ (3)



- Các phương trình cân bằng cho nêm và cho khối lập phương:

+ Nêm: $N_{12}\sin\alpha - Q\sin 2\alpha - Ma = 0$ (4)

  (Q là phản lực của khối lập phương tác dụng lên nêm; $N_{12} = Q_{21}$ là áp lực của vật m lên nêm)

+ Khối lập phương: $N\sin 2\alpha - F_{ms} - Ma = 0$ (5)

  và $Q'' = Mg + N\cos 2\alpha$ (6)

  ((5): phương ngang; (6): phương thẳng đứng; Q'': phản lực của mặt bàn lên khối lập phương; N: áp lực của nêm lên khối lập phương).

- Từ (5), (6):

$$N\sin 2\alpha - \mu(Mg + N\cos 2\alpha) = Ma \qquad (7)$$

- Từ (3), (4), (7) ta được: $a = \dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha\left(1-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right) - \mu Mg}{M\left(2-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right) + m\sin^2\alpha\left(1-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right)}$

- Từ (2): $a_{12} = g\sin\alpha + a\cos\alpha$

- Điều kiện để nêm và khối lập phương chuyển động là:

$$a \ge 0 \Rightarrow \mu \le \frac{m\sin 2\alpha}{2M + m\cos 2\alpha} = \mu_0$$

- Biện luận:

+ Nếu $\mu < \mu_0$ thì nêm và khối lập phương cùng chuyển động với gia tốc:

$$a = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha\left(1-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right) - \mu Mg}{M\left(2-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right) + m\sin^2\alpha\left(1-\dfrac{\mu}{\tan 2\alpha}\right)}$$

+ Khi vật tới chân nêm:

- Vận tốc của xe kéo m đối với nêm: $v_{12} = \sqrt{2a_{12}s} = \sqrt{\dfrac{2h}{\sin\alpha}(g\sin\alpha + a\cos\alpha)}$
- Vận tốc của nêm là v với: $\dfrac{v}{v_{12}} = \dfrac{a}{a_{12}} \Rightarrow v = \dfrac{v_{12}a}{a_{12}}$
- Vận tốc của xe kéo m đối với đất: $v_1 = \sqrt{v_{12}^2 + v^2 + 2vv_{12}\cos\alpha}$

+ Nếu $\mu > \mu_0$ thì nêm và khối lập phương không chuyển động.

Khi đó vật đó m trượt trên nêm với gia tốc $a = g\sin\alpha$; vận tốc của m khi đến chân nêm là $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Vậy: Vận tốc xe kéo khi nó đến chân nêm đối với nêm là $v_{12} = \sqrt{2a_{12}s} = \sqrt{\dfrac{2h}{\sin\alpha}(g\sin\alpha + a\cos\alpha)}$; đối với đất là $v_1 = \sqrt{v_{12}^2 + v^2 + 2vv_{12}\cos\alpha}$ (nếu nêm chuyển động) và $v_1 = \sqrt{2gh}$ (nếu nêm đứng yên).

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Chuyên đề 9: CHUYỂN ĐỘNG TRONG HỆ QUY CHIẾU KHÔNG QUÁN TÍNH

47. Một đầu máy xe lửa nặng 40 tấn, trọng lượng chia đều cho 8 bánh xe. Trong đó có 4 bánh phát động. Đầu máy kéo 8 toa, mỗi toa nặng 20 tấn. Hệ số ma sát giữa bánh xe với đường ray là $k = 0,07.$ Bỏ qua ma sát ở các ổ trục. Trên trần toa xe có một quả cầu nhỏ khối lượng $m = 200g$ treo bằng dây nhẹ, không dãn. Cho $g = 10m/s^2$

a) Tính thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h. Tính góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng của dây treo.

b) Sau thời gian trên, tàu hãm phanh. Biết rằng lúc này động cơ không truyền lực cho các bánh. Tính quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây trong trường hợp chỉ hãm các bánh ở đầu máy.

Bài giải

a) Thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h

- Lực phát động chính là lực ma sát tác dụng lên 4 bánh ở đầu tàu:

$$F_{pd} = f_{ms} = \frac{kM_d g}{2} = \frac{0,07.40.10^3.10}{2} = 14.10^3\,N$$

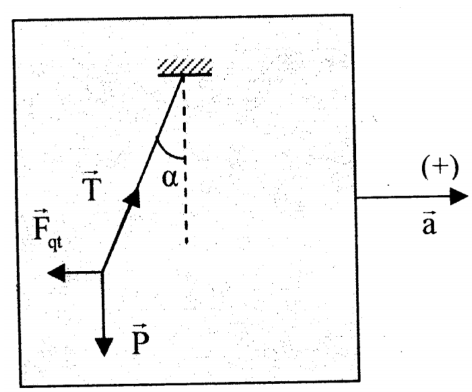
- Gia tốc cực đại mà tàu đạt được:

$$a_{max} = \frac{F_{pd}}{M} = \frac{F_{pd}}{M_d + M_t} = \frac{14.10^3}{40.10^3 + 8.20.10^3} = 0,07m/s^2$$

- Thời gian ngắn nhất để đoàn tàu đạt đến vận tốc $v = 20km/h = 5,55m/s;$

$$t_{min} = \frac{v - v_0}{a_{max}} = \frac{5,55 - 0}{0,07} = 79,4s = 1 \text{ phút } 15 \text{ s}$$

- Góc lệch của dây treo và lực căng dây:



Tàu chuyển động về phía trước với gia tốc a > 0 nên dây treo bị lệch về phía sau (so với vận tốc).

+ Vì $m \ll M$ nên không ảnh hưởng đến gia tốc của tàu.

+ Trong hệ quy chiếu gắn với tàu, quả cầu chịu tác dụng của 3 lực: Trọng lực $\vec{P}$; lực căng $\vec{T}$ và lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ .Từ điều kiện cân bằng của quả cầu, ta có:

$$\tan\alpha = \frac{F_{qt}}{P} = \frac{ma_{max}}{mg} = \frac{a_{max}}{g} = \frac{0,07}{10} = 0,007 \Rightarrow \alpha = 0,4°$$

Mặt khác, $\cos\alpha = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0,2.10}{\cos 0,4^\circ} = 2,0002N$

Vậy: Thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h là $t_{min} = 79,4s;$ góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng là $\alpha = 0,4^\circ$ và lực căng của dây treo là $T = 2,0002N.$

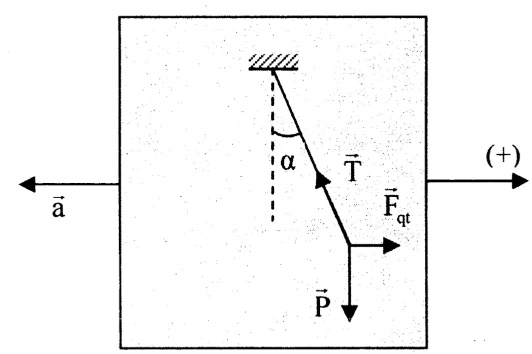
b) Quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây

- Kể từ lúc hãm phanh, tàu chuyển động chậm dần đều

+ Gia tốc của tàu: $a_1 = \frac{-f_{ms1}}{M} = \frac{-kM_d g}{M} = \frac{-0,07.40.10^3.10}{40.10^3 + 8.20.10^3} = -0,14m/s^2$

+ Khi dừng lại, vận tốc của tàu bằng 0 nên: $s_1 = \frac{-v_1^2}{2a_1} = \frac{-5,55^2}{2.(-0,14)} = 110,23m$

+ Góc lệch dây treo: Tàu chuyển động về phía trước với gia tốc $a < 0$ nên dây treo bị lệch về phía trước (so với vận tốc).



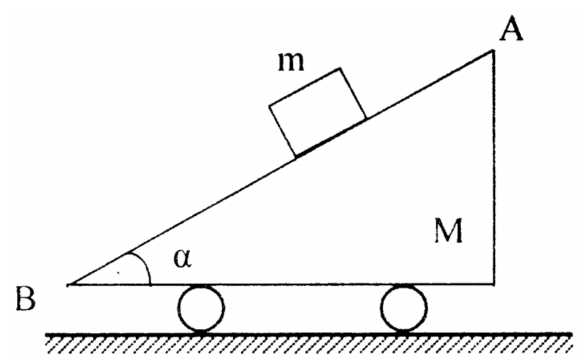
$\tan\alpha_1 = \frac{ma_1}{mg} = \frac{a_1}{g} = \frac{0,14}{10} = 0,014 \Rightarrow \alpha_1 = 7,97^\circ$

+ Lực căng dây:

$T_1 = \frac{P}{\cos\alpha_1} = \frac{mg}{\cos\alpha_1} = \frac{0,2.10}{\cos 7,97^\circ} = 2,0195N$

Vậy: Quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng là $s_1 = 110,23m;$ góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng là $\alpha_1 = 7,97^\circ$ và lực căng dây lúc này là $T_1 = 2,0195N.$

48. Một nêm khối lượng $M = 1kg$ đặt trên bánh xe, nêm có mặt AB dài 1m và nghiêng góc $\alpha = 30^\circ.$ Ma sát giữa bánh xe và sân không đáng kể. Từ A thả vật khối lượng $m = 1kg$ trượt xuống dốc AB. Hệ số ma sát giữa vật m và mặt AB là $k = 0,2.$ Bỏ qua kích thước vật m. Tìm thời gian để vật m đến B và trong thời gian đó nêm đi được đoạn đường dài bao nhiêu? Cho $g = 10m/s^2$



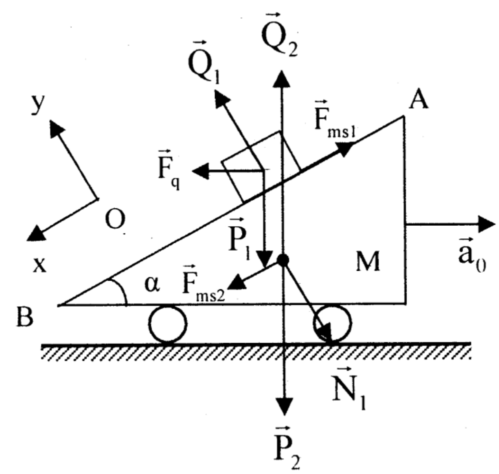
Bài giải

Vì khối tâm hệ không dịch chuyển theo phương ngang nên khi m trượt xuống dốc thì M chuyển động sang phải.

- Trong hệ quy chiếu gắn với nêm:

+ Phương trình định luật II Niu-tơn cho chuyển động của vật m:

$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms} + \vec{F}_q = m\vec{a}$ (1)



- Với: $\vec{a}$ là gia tốc m đối với M, $\vec{a_0}$ là gia tốc M đối với sàn.

+ Chiếu (1) xuống hai trục Ox và Oy, ta được:

$F_q \sin\alpha + Q_1 - P_1 \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Q_1 = m\left(g\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right)$

$F_q \cos\alpha + P_1 \sin\alpha - F_{ms1} = ma; F_q = ma_0$

$\Leftrightarrow ma_0\cos\alpha + mg\sin\alpha - kmg\left(\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right) = ma$

$\Rightarrow a = a_0\left(k\sin\alpha + \cos\alpha\right) + g\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)$ (2)

- Trong hệ quy chiếu gắn với sàn:

+ Phương trình định luật II Niu-tơn cho chuyển động của nêm M:

$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{ms2} = M\vec{a}_0$ (3)

+ Chiếu (3) xuống phương nằm ngang, ta được: $\left(N_1 = Q_1; F_{ms2} = F_{ms1}\right)$:

$N_1\sin\alpha - F_{ms2}\cos\alpha = Ma_0$

$\Leftrightarrow mg\left(\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right)\sin\alpha - km\left(g\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right)\cos\alpha = Ma_0$

$\Leftrightarrow mg\left(\cos\alpha\sin\alpha - kg\cos^2\alpha\right) = \left(M + m\sin^2\alpha - mk\sin\alpha\cos\alpha\right)a_0$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{mg\cos\alpha\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)}{M + m\sin\alpha\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)} = \frac{1.10.\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{1}{2} - 0,2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + 1.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0,2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2,43m/s^2$$

- Thay vào (2), ta được: $a = 2,43.\left(0,2.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 10.\left(\frac{1}{2} - 0,2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5,62m/s^2$

- Thời gian vật đi hết đoạn AB là: $t = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{2.1}{5,62}} \approx 0,6s.$

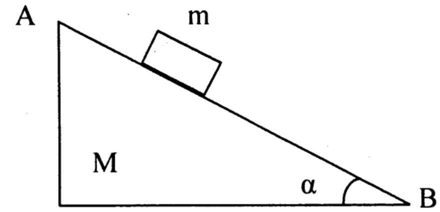
- Quãng đường nêm chuyển động $s = \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2}2,43.0,6^2 = 0,43m.$

Vậy: Thời gian để vật m đi từ A đến B là $t = 0,6s$ và trong thời gian đó nêm đi được đoạn đường dài $s = 0,43m.$

49. Nêm có khối lượng M, mặt AB dài *l* nghiêng một góc so với phương ngang. Từ A thả vật khối lượng m không vận tốc đầu. Bỏ qua ma sát M với sàn và giữa m với M.

1. Tính gia tốc của M.

2. Tìm thời gian m đi từ A đến B.

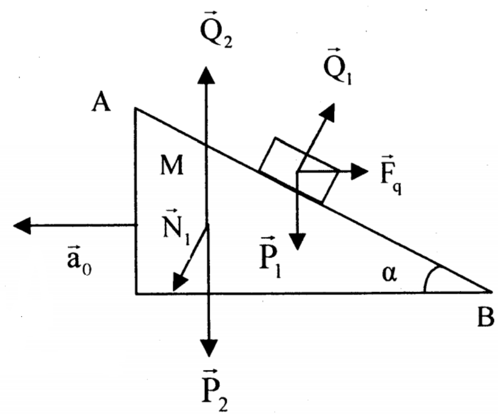


(Trích đề thi Olympic 30/4, 2004)

Bài giải

1. Gia tốc của M

- Khi m đi xuống thì M chuyển động sang trái.
- Gọi $\vec{a}$ là gia tốc của m đối với M; $\vec{a}_0$ là gia tốc của M đối với sàn.
- Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, ta có:



$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_q = m\vec{a} \qquad (1)$$

- Chiếu (1) lên hai phương Ox và Oy, ta được:

$$P_1 \sin\alpha + F_{qt}\cos\alpha = ma \Leftrightarrow mg\sin\alpha + ma_0\cos\alpha = ma$$

$$\Rightarrow a = g\sin\alpha + a_0\cos\alpha \qquad (2)$$

và $-P_1\cos\alpha + Q_1 + F_{qt}\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow -mg\cos\alpha + Q_1 + ma_0\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow Q_1 = m\left(g\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right) \qquad (3)$$

- Trong hệ quy chiếu gắn với sàn, ta có:

$$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{N}_1 = M\vec{a}_0 \qquad (4)$$

- Chiếu (4) lên phương nằm ngang, ta được: $N_1\sin\alpha = Ma_0; N_1 = Q_1$.

$$\Rightarrow a_0 = \frac{N_1\sin\alpha}{M} = \frac{m}{M}\left(g\cos\alpha - a_0\sin\alpha\right)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{mg\cos\alpha.\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \quad (5)$$

Vậy: Gia tốc của m là $a_0 = \dfrac{mg\cos\alpha.\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$.

2. Thời gian m đi từ A đến B.

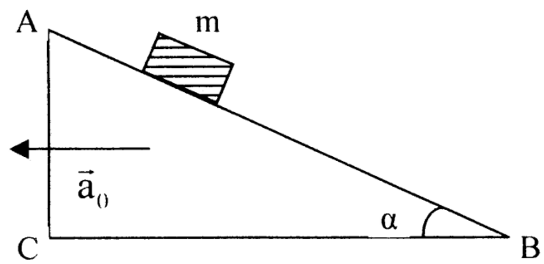
- Thay (5) vào (3) ta được: $a = g\sin\alpha + \dfrac{mg\cos^2\alpha.\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow a = \frac{g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\left[M + m\sin^2\alpha + m\cos^2\alpha\right] = \frac{g\sin\alpha\left(M+m\right)}{M + m\sin^2\alpha}$$

- Thời gian vật đi từ A đến B: $t = \sqrt{\dfrac{21}{a}} = \sqrt{\dfrac{21\left(M + m\sin^2\alpha\right)}{g\sin\alpha\left(M+m\right)}}$.

Vậy: Thời gian vật đi từ A đến B là $t=\sqrt{\dfrac{21\left(M+m\sin^2\alpha\right)}{g\sin\alpha\left(M+m\right)}}$.

50. Một vật khối lượng m đang đứng yên ở đỉnh của mặt phẳng nghiêng nhờ lực ma sát. Hỏi sau bao lâu vật sẽ ở chân mặt phẳng nghiêng nếu mặt phẳng nghiêng bắt đầu chuyển động theo phương ngang với gia tốc $a_0=1m/s^2$. Cho biết chiều dài mặt phẳng nghiêng là $AB=1m$, góc nghiêng $\alpha=30°$, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là $k=0,6; g=10m/s^2$.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2002)

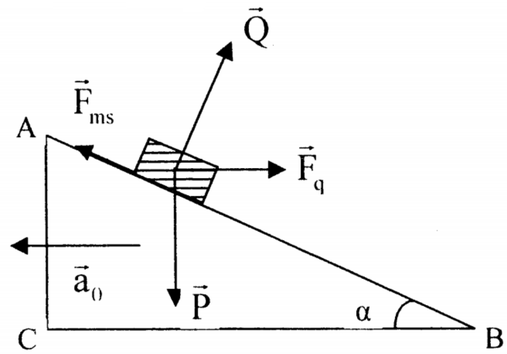
Bài giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với mặt phẳng nghiêng. Các lực tác dụng lên vật: Trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{Q}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ và lực quán tính $\vec{F}_q$.

- Phương trình chuyển động của vật:

$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{F}_{ms}+\vec{F}_q=m\vec{a}_{12}$.

- Chiếu phương trình trên lên hai hệ trục Ox và Oy của hệ tọa độ Oxy, ta được:



$Q=mg\cos\alpha-ma_0\sin\alpha$

$\Rightarrow F_{ms}=km\left(g\cos\alpha-a_0\sin\alpha\right)$

và $mg\sin\alpha-F_{ms}+ma_0\cos\alpha=ma_{12}$

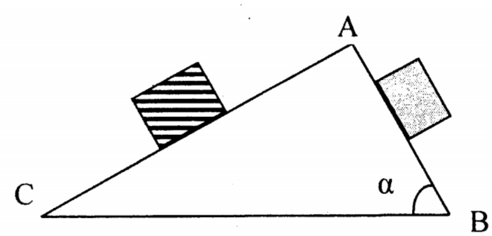
$\Rightarrow a_{12}=g\left(\sin\alpha-k\cos\alpha\right)+a_0\left(\cos\alpha+k\sin\alpha\right)$

$\Rightarrow a_{12}=10\left(\sin30°-0,6.\cos30°\right)+1\left(\cos30°+0,6.\sin30°\right)=0,97m/s^2$

- Thời gian trượt của vật: $t=\sqrt{\dfrac{2s}{a_{12}}}==\sqrt{\dfrac{2.1}{0,97}}=1,44s.$

Vậy: Sau 1,44s vật sẽ ở chân mặt phẳng nghiêng.

51. Một nêm có tiết diện là tam giác ABC vuông tại A. Nêm chuyển động trên mặt phẳng ngang với gia tốc a không đổi. Hai vật nhỏ cùng khối lượng, cùng trượt xuống từ đỉnh A, dọc theo hai sườn AB và AC của nêm. Cho $ABC=\alpha\left(\alpha>45°\right)$. Tìm độ lớn và hướng gia tốc $\vec{a}$ của nêm theo α để cả hai vật cùng xuất phát từ đỉnh với vận



tốc ban đầu bằng 0 (đối với nêm) và trượt đến chân các mặt sườn trong các khoảng thời gian bằng nhau (bỏ qua mọi ma sát).

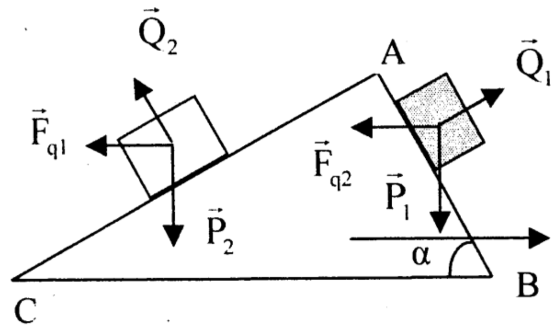
(Trích đề thi Olympic 30/4, 2001)

Bài giải

Giả sử nêm chuyển động sang phải với gia tốc $\vec{a}$ như hình vẽ

- Chọn hệ quy chiếu gắn với nêm. Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ là gia tốc của vật 1 và vật 2 đối với nêm.

- Để cả hai cùng xuất phát từ đỉnh với vận tốc ban đầu bằng 0 và trượt đến chân các mặt sườn trong khoảng thời gian như nhau t thì:



+ Vật 1: $AB = \frac{1}{2}a_1t^2.$

+ Vật 2: $AC = \frac{1}{2}a_2t^2.$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{a_1}{a_2} \Leftrightarrow \frac{BC\cos\alpha}{BC\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{a_1}{a_2}$

$\Rightarrow a_2 = a_1 \tan\alpha$

- Phương trình chuyển động của vật 1 và vật 2:

$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{q1} = m_1\vec{a}_1$

$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{q2} = m_2\vec{a}_2$

- Chiếu lên phương chuyển động của mỗi vật, chiều chuyển động làm chiều (+) ta có:

+ Vật 1: $mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = ma_1 \Rightarrow g\sin\alpha - a\cos\alpha$ (2)

+ Vật 2: $mg\cos\alpha + ma\sin\alpha = ma_2 \Rightarrow a_2 = g\cos\alpha + a\sin\alpha$ (3)

- Từ (1), (2) và (3) ta được:

$g\cos\alpha + a\sin\alpha = \left(g\sin\alpha - a\cos\alpha\right)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

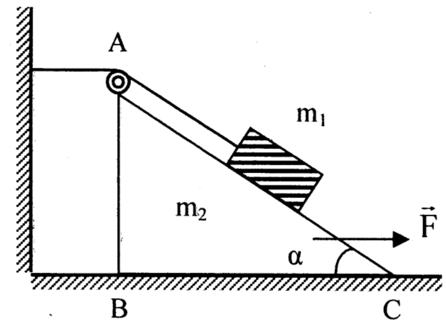
$g\cos^2\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha = g\sin^2\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow a = \frac{g\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{g\left(\tan^2\alpha - 1\right)}{2\tan\alpha}$

- Vì $\alpha > 45° \Rightarrow \tan\alpha > 1 \Rightarrow a > 0$: Nêm chuyển động sang phải.

Vậy: Để cả hai vật cùng xuất phát từ đỉnh với vận tốc ban đầu bằng 0 (đối với nêm) và trượt đến chân các mặt sườn trong các khoảng thời gian bằng nhau thì nêm phải chuyển động sang phải với gia tốc $a = \frac{g\left(\tan^2\alpha - 1\right)}{2\tan\alpha}$.

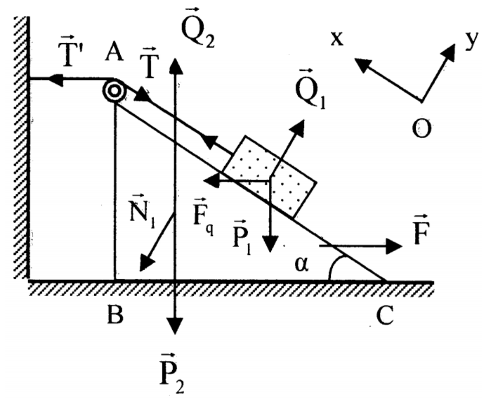
52. Một cái nêm có góc ở C bằng α, đáy CB nằm ngang và có khối lượng m_2. Trên mặt phẳng nằm nghiêng của nêm có vật khối lượng m_1 nối với một điểm cố định ở vách tường dây không dãn, vắt qua ròng rọc nhỏ ở đỉnh A của nêm, khối lượng của dây và ròng rọc không đáng kể. Tác dụng lên nêm một lực $\vec{F}$ không đổi theo phương ngang. Tính gia tốc của vật m_1 và m_2 khi m_1 còn ở trên nêm. Bỏ qua ma sát.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2000)

Bài giải

Gọi $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ là gia tốc của các vật 1 và 2 đối với đất; $\vec{a}_{12}$ là gia tốc của vật (1) đối với vật (2).



- Các lực tác dụng lên vật 1: Trọng lực $\vec{P}_1$; phản lực $\vec{Q}_1$; lực căng $\vec{T}_1$; lực quán tính $\vec{F}_q$. Phương trình chuyển động của vật 1 trong hệ quy chiếu gắn với nêm:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_q = m_1\vec{a}_{12} \qquad (1)$$

- Chiếu hệ thức (1) lên hai trục tọa độ với lưu ý rằng: $|a_{12}| = |a_2|$, ta được:

$$T_1 - m_1 g\sin\alpha + m_1 a_2\cos\alpha = m_1 a_2 \qquad (2)$$

$$Q_1 - m_1 g\cos\alpha - m_1 a_2\sin\alpha = m_1 a_2 \qquad (3)$$

- Các lực tác dụng lên vật 2: Lực kéo $\vec{F}$; trọng lực $\vec{P}_2$; phản lực $\vec{Q}_2$; các lực căng $\vec{T}, \vec{T}'$; áp lực $\vec{N}_1$. Phương trình chuyển động của vật 2 trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất:

$$\vec{F} + \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{T}' = m_2\vec{a}_2 \qquad (4)$$

- Chiếu (4) lên phương ngang, ta được:

$$F - N_1\sin\alpha - T' + T\cos\alpha = m_2 a_2 \qquad (5)$$

- Từ (2), (3) và (5),, kết hợp với: $N_1 = Q_1$ và $T' = T = T_1$ ta được:

$$a_2 = \frac{F - m_1 g\sin\alpha}{m_2 + 2m_1(1-\cos\alpha)}.$$

- Gia tốc vật 1 đối với đất là: $\vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2$.

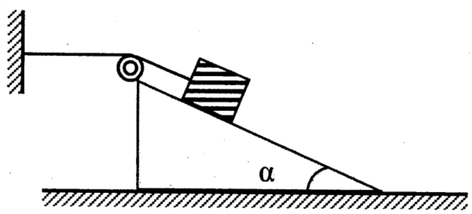
$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_{12}^2 + a_2^2 - 2a_{12}a_2\cos\alpha = a_2^2 + a_2^2 - 2a_2^2\cos\alpha = 2a_2^2(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2a_2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\frac{F - m_1 g\sin\alpha}{m_2 + 2m_1(1-\cos\alpha)}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Vậy: Gia tốc của vật m_1 và m_2 khi m_1 còn ở trên nêm là

$$a_1 = 2\frac{F - m_1 g\sin\alpha}{m_2 + 2m_1(1-\cos\alpha)}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

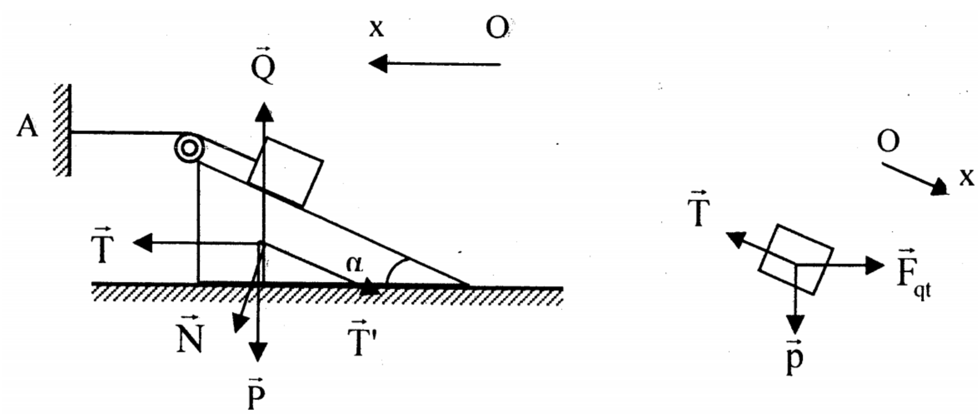
53. Trên mặt phẳng nghiêng của một nêm có góc nghiêng α, khối lượng M người ta đặt một vật nhỏ khối lượng m. Vật m được nối vào đầu một sợi dây không dãn vắt qua một ròng rọc cố định tại đỉnh nêm, đầu kia của dây buộc vào điểm A trên tường (hình vẽ). Ban đầu hệ đứng yên và dây ở trạng thái căng ngang. Khi buông nhẹ vật m thì nêm M chuyển động trên mặt phẳng ngang.



Bỏ qua mọi ma sát và sức cản của môi trường. Cho khối lượng của dây và ròng rọc không đáng kể. Tìm gia tốc chuyển động của nêm M.

Bài giải

Gọi vật là (1), nêm (2), đất là (3).



- Trong thời gian t, quãng đường đi được của nêm (2) trên mặt phẳng ngang bằng quãng đường đi được của vật (1) trên mặt phẳng nghiêng của nêm.

$$s_2 = s_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_{23}t^2 = \frac{1}{2}a_{12}t^2 \Rightarrow a_{23} = a_{12}$$

- Xét nêm (2) trong hệ quy chiếu gắn với đất (3), theo phương nằm ngang ta có:

$T - T\cos\alpha + N\sin\alpha = Ma_{23} = Ma$ (I); với $N = p\cos\alpha = mg\cos\alpha$.

- Xét vật (1) trong hệ quy chiếu gắn với nêm (2), theo phương mặt phẳng nghiêng, ta có:

$-T + F_{qt}\cos\alpha + p\sin\alpha = ma_{12} = ma$ (II); với $F_t = ma, p = mg$.

$$\Rightarrow T = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha - ma = mg\sin\alpha + ma(\cos\alpha - 1) \qquad \text{(III)}$$

- Thay (III) vào (I) , ta được:

$$\left[mg\sin\alpha + ma(\cos\alpha - 1)\right](1-\cos\alpha) + mg\sin\alpha\cos\alpha = Ma.$$

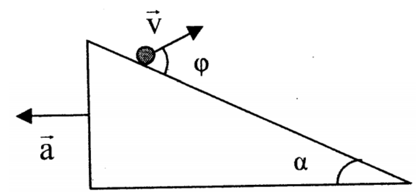
$$\Leftrightarrow -mg\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha + mg\sin\alpha\cos\alpha = a\left[M + m(1-\cos\alpha)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow mg\sin\alpha = a\left[M + m(1-\cos\alpha)^2\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{M + m(1-\cos\alpha)^2}$$

Vậy: Gia tốc chuyển động của nêm M là $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + m(1-\cos\alpha)^2}$.

54. Trên một cái nêm đang trượt với gia tốc $\vec{a}$, người ta ném một vật với vận tốc đầu $\vec{v}$ so với nêm và hợp với nêm một góc φ (hình vẽ). Góc nghiêng của nêm là α. Tầm ném xa của vật trên nêm là bao nhiêu (biết vật chưa rời khỏi nêm)?



Bài giải

Xét hệ quy chiếu gắn với nêm (hệ quy chiếu không quán tính).

- Các lực tác dụng lên vật: trọng lực $\vec{P}$; lực quán tính $\vec{F}_{qt}$.

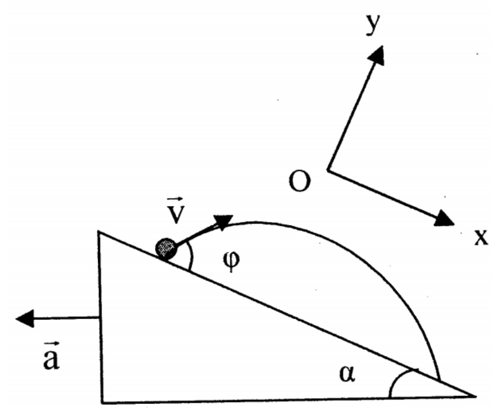
- Phân tích chuyển động của vật thành hai thành phần theo hai phương Ox và Oy:

+ Theo phương Ox: $a_x = a\cos\alpha + g\sin\alpha$.

$$x = v\cos\varphi t + \frac{1}{2}(a\cos\alpha + g\sin\alpha)t^2 \qquad (1)$$

+ Theo phương Oy: $a_y = a\sin\alpha - g\cos\alpha$.

$$y = v\sin\varphi t + \frac{1}{2}(a\sin\alpha - g\cos\alpha)t^2 \qquad (2)$$



- Khi vật chạm mặt nêm:

$$y = 0 \Rightarrow t = \frac{2v\sin\varphi}{a\sin\alpha - g\cos\alpha} \qquad (3)$$

- Thay (3) vào (1) ta được:

$$x = v\cos\varphi\frac{2v\sin\varphi}{a\sin\alpha - g\cos\alpha} + \frac{1}{2}(a\cos\alpha + g\sin\alpha)\left(\frac{2v\sin\varphi}{a\sin\alpha - g\cos\alpha}\right)^2$$

Vậy: Tầm ném xa của vật trên nêm là

$$x = v\cos\varphi\frac{2v\sin\varphi}{a\sin\alpha - g\cos\alpha} + \frac{1}{2}(a\cos\alpha + g\sin\alpha)\left(\frac{2v\sin\varphi}{a\sin\alpha - g\cos\alpha}\right)^2.$$