

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP
Chuyên đề 10. CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN
KHI KHÔNG CÓ CHUYỂN ĐỘNG QUAY

1. Ba người khiêng một khung sắt hình chữ nhật ABCD có khối tâm ở giao điểm các đường chéo. Khung được giữ cho luôn nằm ngang, cạnh AD không có người đỡ vì mới sơn (trừ hai đầu A và D). Một người đỡ khung ở M_1 cách A một khoảng $AM_1 = d$. Tìm vị trí M_2 và M_3 của hai người kia để ba người cùng chịu lực bằng nhau. Biện luận.

Bài giải

Chọn hệ tọa độ Gxy (hình vẽ, G là khối tâm của hệ).

Giả sử người thứ hai đỡ ở cạnh BC, người thứ ba đỡ ở

cạnh CD: $x_3 = \frac{b}{2}; y_2 = \frac{a}{2}$.

Đặt: $AB = CD = a; AD = BC = b$.

Ta có:

$$x_G = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = 0 \quad (1)$$

$$y_G = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = 0 \quad (2)$$

$$\text{với } F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{3} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta được:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2} + x_2 + \frac{b}{2} = 0 \\ -\left(\frac{a}{2} - d\right) + \frac{a}{2} + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_3 = -d \end{cases}$$

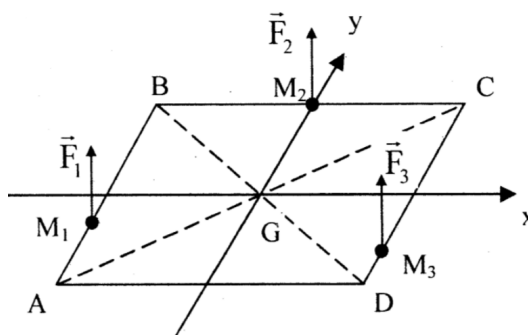
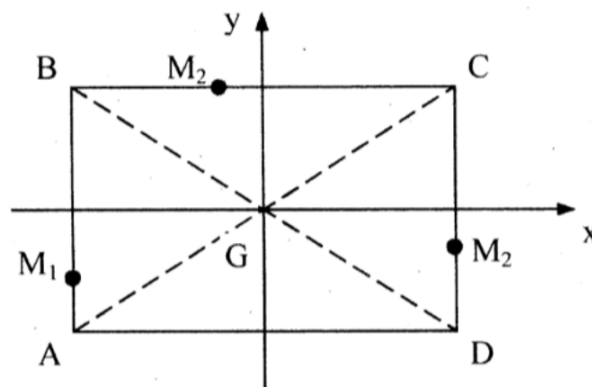
$$\Leftrightarrow M_1 \left(-\frac{b}{2}; -\left(\frac{a}{2} - d\right) \right); M_2 \left(0; \frac{a}{2} \right); M_3 \left(\frac{b}{2}; -d \right).$$

Vậy M_2 ở trung điểm cạnh BC; M_3 ở cách trung điểm cạnh CD một đoạn d về phía D.

Biện luận:

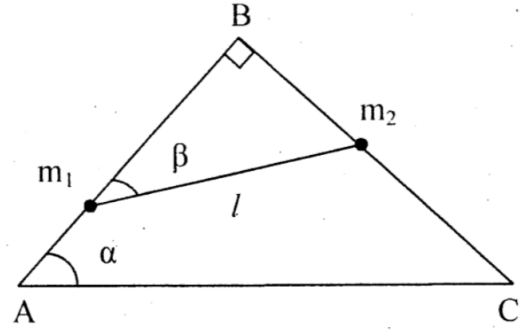
+ $M_1 \equiv A \Rightarrow M_3 \equiv$ trung điểm cạnh CD.

+ $M_1 \rightarrow$ trung điểm AB $\Rightarrow M_3 \rightarrow D$



+ $d \leq \frac{a}{2}$ do M_3 không thể vượt quá D.

2. Một khung thép nhẹ, cứng có dạng tam giác vuông ABC với góc nhọn $\hat{A} = \alpha$; cạnh $AB = a$ được đặt trong mặt phẳng thẳng đứng, cạnh huyền nằm ngang. Trên hai cạnh góc vuông có xuyên hai viên bi thép nhỏ (coi là chất điểm) khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 . Chúng được nối với nhau bằng thanh nhẹ, có chiều dài l ($l < AC$), thanh nhẹ có thể trượt không ma sát trên hai cạnh góc vuông. Thả hệ hai viên bi và thanh nhẹ từ đỉnh góc vuông B. Khi thanh nhẹ nối hai vật hợp với cạnh AB một góc β thì hệ vật đạt trạng thái cân bằng bền. Tìm hệ thức liên hệ giữa m_1, m_2, α và β .



Bài giải

Gọi $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2, y_2)$ là tọa độ của hai viên bi.

- Khối tâm của hệ gồm hai viên bi và thanh nối là:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};$$

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\text{Xét } y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Với

$$\begin{cases} y_1 = (a - l \cos \beta) \sin \alpha & (2) \\ y_2 = l \sin \alpha (\alpha - \beta) + y_1 = a \sin \alpha - l \sin \beta \cos \alpha & (3) \end{cases}$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được:

$$y_G = \frac{m_1 (a - l \cos \beta) \sin \alpha + m_2 (a \sin \alpha - l \sin \beta \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$$

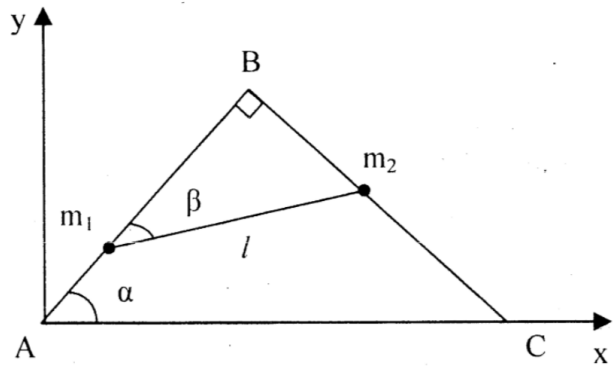
$$\Leftrightarrow y_G = a \sin \alpha - \frac{m_2 l \cos \alpha}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} \tan \alpha \cos \beta + \sin \beta \right)$$

Xét biểu thức $X = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha \cos \beta + \sin \beta = b \cos \beta + \sin \beta$, với $b = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$.

- Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-cáp-xki, ta được:

$$(b \cos \beta + \sin \beta)^2 \leq (b^2 + 1)(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = (b^2 + 1)$$

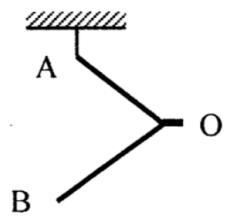
Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{\cos \beta}{b} = \sin \beta \Rightarrow \cot \beta = b = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$.



- Khi $\cot \beta = b$ thì biểu thức X đạt giá trị lớn nhất, khi đó y_G đạt giá trị nhỏ nhất, hay khối tâm ở vị trí thấp nhất, do đó hệ ở trạng thái cân bằng bền.

Vậy: Hệ ở trạng thái cân bằng bền khi: $\cot \beta = \frac{m_1}{m_2} \tan \alpha$.

3. Treo một cây compa trên một sợi dây như hình vẽ. Cho rằng hai nhánh của compa là cùng chiều dài, khối lượng phân bố đều và bằng nhau. Bỏ qua khối lượng của các ốc vặn và khớp nối. Hãy tính góc mở của hai nhánh compa sao cho khớp nối đạt cao độ lớn nhất khi treo.



Bài giải

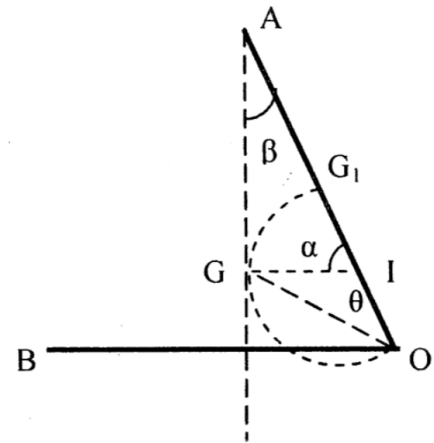
Gọi góc mở của compa là $\widehat{AOB} = 2\theta$; chiều dài của một nhánh compa là l ; là góc hợp giữa phương dây treo và nhánh AO của compa là β .

- Khi thay đổi góc mở, quỹ tích khối tâm G của compa sẽ chuyển động trên một cung tròn tâm I, đường kính OG_1

- Treo đầu A của compa vào dây, khi cân bằng, khối tâm G của compa luôn nằm trên đường thẳng đứng đi qua dây treo.

- Khớp nối O sẽ đạt độ cao lớn nhất khi góc β đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó phương dây treo phải trở thành tiếp tuyến với đường tròn tâm I, đường kính OG_1 .



$$\text{Ta có: } \sin \beta_{\max} = \frac{IG}{IA} = \frac{\frac{l}{4}}{3 \frac{l}{4}} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \beta_{\max} = 19,47^\circ; \alpha = 90^\circ - \beta_{\max} = 70,53^\circ.$$

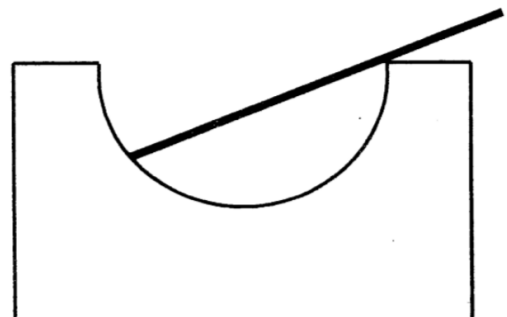
- Góc mở của compa là: $\widehat{AOB} = 2\theta = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha = 70,53^\circ$.

Vậy: Góc mở của hai nhánh compa sao cho khớp nối đạt cao độ lớn nhất khi treo là $\widehat{AOB} = 70,53^\circ$.

4. Một thanh đồng chất tiết diện đều, chiều dài a được đặt trong một lòng cối hình bán cầu bán kính R. Giữa thanh và cối không có ma sát.

a) Trường hợp thanh có cân bằng, xác định vị trí cân bằng của thanh (góc hợp bởi thanh và phương ngang)

b) Tìm điều kiện của a để thanh có cân bằng.



Bài giải

a) Vị trí cân bằng của thanh

- Các lực vào thanh: trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 .

- Gọi I là trung điểm của AB, K là trung điểm của thanh, α là góc hợp bởi thanh và mặt phẳng ngang khi có cân bằng. Ta có:

$$AB = 2R \cos \alpha; KB = AB - \frac{a}{2} = 2R \cos \alpha - \frac{a}{2}$$

$$HB = KB \cos \alpha = 2R \cos^2 \alpha - \frac{a}{2} \cos \alpha$$

$$OH = R \cos 2\alpha = R(2 \cos^2 \alpha - 1) = 2R \cos^2 \alpha - R$$

$$\text{Mà } R = OH + HB = 2R \cos^2 \alpha - R + 2R \cos^2 \alpha - \frac{a}{2} \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 8R \cos^2 \alpha - a \cos \alpha - 4R = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 128R^2}}{16R}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 128R^2}}{16R} \right)$$

Vậy: Khi thanh có cân bằng, xác định vị trí cân bằng của thanh là $\alpha = \arccos \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 128R^2}}{16R} \right)$.

b) Điều kiện của a để thanh có cân bằng

Thanh chỉ cân bằng khi K (trung điểm của thanh) luôn nằm trong khoảng AB:

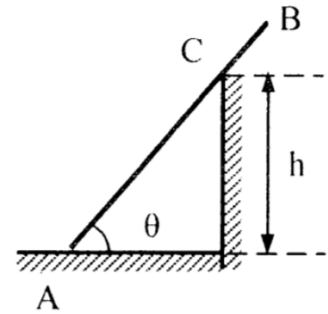
$$AK = \frac{a}{2} \leq AB = 2R \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \leq 2R \frac{a + \sqrt{a^2 + 128R^2}}{16R} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 128R^2}}{8R} \Rightarrow a \leq 4R$$

Vậy: Điều kiện của a để thanh có cân bằng là $a \leq 4R$.

5. Thanh đồng chất AB, dài $l = 2m$, trọng lượng P, đứng yên trên mặt sàn nằm ngang, tựa vào một con lăn nhỏ không ma sát C gắn vào đầu bức tường độ cao $h = 1m$ (hình vẽ). Thanh luôn cân bằng với bất kì giá trị nào của $\theta \geq 70^\circ$, nhưng sẽ trượt nếu $\theta < 70^\circ$.

Hãy tính hệ số ma sát nghỉ giữa thanh và sàn.



Bài giải

$$\text{Đặt } AC = x = \frac{h}{\sin \theta}; GC = x - \frac{l}{2} = \frac{h}{\sin \theta} - \frac{l}{2}.$$

- Các lực tác dụng vào thanh: trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_A, \vec{Q}_C ; lực ma sát nghỉ \vec{F}_{msn} .

- Phân tích trọng lực \vec{P} làm hai thành phần \vec{P}_A, \vec{P}_C . Theo quy tắc hợp lực song song, ta có:

$$\begin{cases} P = P_A + P_C \\ \frac{P_A}{P_C} = \frac{GC}{GA} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{P_A}{\frac{h}{\sin \theta} \cdot \frac{l}{2}} = \frac{P_C}{\frac{l}{2}} = \frac{P_A + P_C}{\frac{h}{\sin \theta}} = \frac{P \sin \theta}{h}$$

$$\Rightarrow P_A = P \left(1 - \frac{l \sin \theta}{2h} \right); P_C = \frac{Pl \sin \theta}{2h}$$

- Phân tích trọng lực \vec{P}_C làm hai thành phần \vec{P}_1, \vec{P}_2 (hình vẽ). Ta có: $P_2 = P_C \sin \theta$.
- Phân tích trọng lực \vec{P}_2 làm hai thành phần \vec{P}_3, \vec{P}_4 (hình vẽ). Ta có:

$$\begin{cases} P_3 = P_2 \sin \theta = \frac{Pl \sin^3 \theta}{2h} \\ P_4 = P_2 \cos \theta = \frac{Pl \sin^2 \theta \cos \theta}{2h} \end{cases}$$

- Áp lực vuông góc thanh AB tác dụng lên sàn tại A: $N = P_A + P_3$.

$$\Leftrightarrow N = P \left(1 - \frac{l \sin \theta}{2h} \right) + \frac{Pl \sin^3 \theta}{2h} = P - \frac{Pl \sin \theta \cos^2 \theta}{2h}$$

- Để thanh không trượt: $F_{ms} \geq P_4 \Leftrightarrow kN \geq P_4$.

$$\Leftrightarrow k \left(P - \frac{Pl \sin \theta \cos^2 \theta}{2h} \right) \geq \frac{Pl \sin^2 \theta \cos \theta}{2h}$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\frac{Pl \sin^2 \theta \cos \theta}{2h}}{P - \frac{Pl \sin \theta \cos^2 \theta}{2h}} = \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{2h - l \sin \theta \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow k_{min} = \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{2h - l \sin \theta \cos^2 \theta} \text{ ứng với } \theta = 70^\circ$$

$$\text{và } k_{min} = \frac{2 \sin^2 70^\circ \cos 70^\circ}{2 \cdot 1 - 2 \cdot \sin 70^\circ \cos^2 70^\circ} = 0,336 \Rightarrow k \geq 0,336.$$

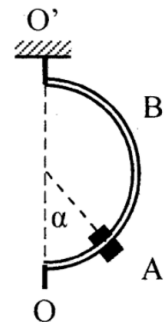
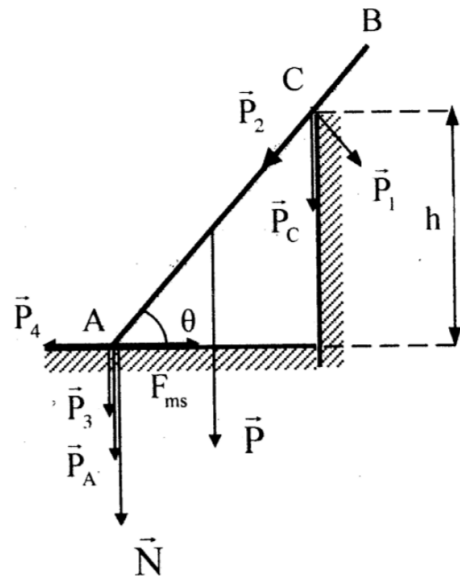
Vậy: Hệ số ma sát nghỉ giữa thanh và sàn là $k \geq 0,336$.

6. Một vòng trượt nhỏ A, trượt tự do dọc theo một thanh nhẵn B có dạng một nửa đường tròn bán kính R. Tất cả lại quay với vận tốc góc ω không đổi xung quanh một trục thẳng đứng OO' . Xác định góc α ứng với vị trí cân bằng của vòng trượt.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1996)

Bài giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với thanh B (hệ quy chiếu không quán tính).



- Tại góc lệch α , vòng trượt A cân bằng nên: $\vec{P} + \vec{F}_q + \vec{N} = \vec{0}$ (1)

với $F_q = mr\omega^2 = mR\omega_2 \cdot \sin \alpha$

- Chiếu hệ thức (1) lên phương tiếp tuyến tại A, ta được:

$$mR\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha (R\omega^2 \cos \alpha - g) = 0$$

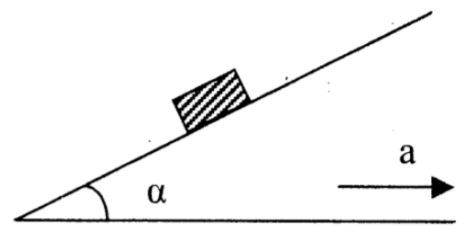
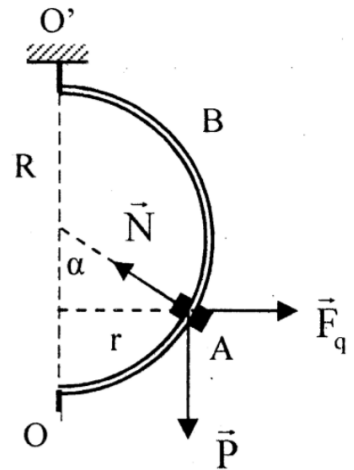
- Các vị trí cân bằng của vòng A ứng với các giá trị sau đây của góc α :

$$+ \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$+ R\omega^2 \cos \alpha - g = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{R\omega^2} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{g}{R\omega^2}, \text{ với } \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$$

7. Trên một tấm ván nghiêng một góc α so với mặt phẳng nằm ngang có vật nhỏ. Ván đứng yên thì vật cũng đứng yên. Cho ván chuyển động sang phải với gia tốc \vec{a} song song với đường nằm ngang.

Tính giá trị cực đại của a để vật vẫn đứng yên trên ván. Biết hệ số ma sát k .



(Trích đề thi Olympic 30/4, 1998)

Bài giải

Chọn hệ quy chiếu gắn với tấm ván.

- Các lực tác dụng vào vật là:

Trọng lực \vec{P} ; lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}$ (ngược chiều

với \vec{a}); phản lực \vec{Q} và lực ma sát \vec{F}_{ms} .

- Để vật còn ở trên tấm ván: $Q > 0$ (1)

- Để vật đứng yên thì lực ma sát phải là ma sát

$$\text{nghỉ: } F_{ms} \leq kN = kQ \quad (2)$$

- Vật nằm cân bằng nên:

$$\vec{P} + \vec{F}_q + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = \vec{0}.$$

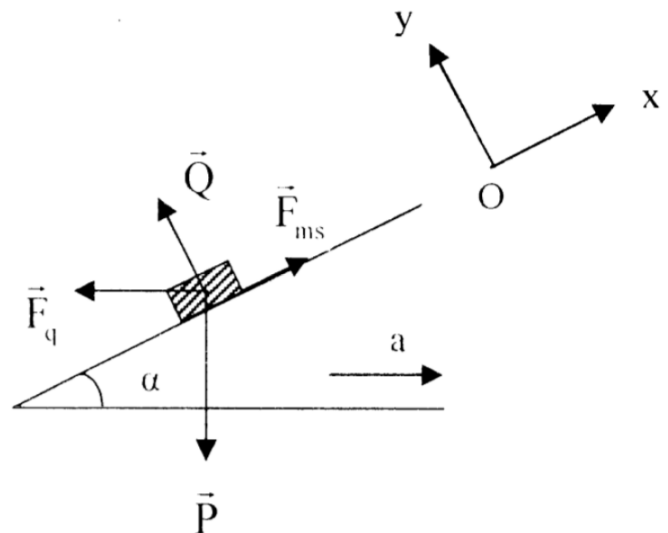
- Chiếu hệ thức vectơ trên lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$$-mg \cdot \sin \alpha - ma \cdot \cos \alpha + F_{ms} = 0$$

$$\Rightarrow F_{ms} = mg \cdot \sin \alpha + ma \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

$$\text{và } -mg \cdot \cos \alpha + ma \cdot \sin \alpha + Q = 0$$

$$\Rightarrow Q = mg \cdot \cos \alpha - ma \cdot \sin \alpha \quad (4)$$



- Từ (1) và (4) suy ra: $a < g \cot \alpha$ (5)

- Từ (2) và (4) suy ra:

$$g \sin \alpha + a \cos \alpha \leq k(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

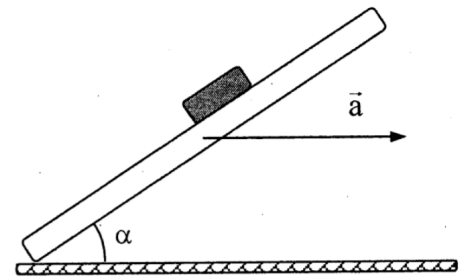
$$\Rightarrow a \leq \frac{g(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{k \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (6)$$

Mặt khác: $\frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{k \sin \alpha + \cos \alpha} < \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow a_{\max} = \frac{g(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{k \sin \alpha + \cos \alpha}$

Vậy: Giá trị cực đại của a để vật vẫn đứng yên trên ván là

$$a_{\max} = \frac{g(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{k \sin \alpha + \cos \alpha}$$

8. Trên một tấm ván nghiêng một góc α so với mặt phẳng nằm ngang, có một vật nhỏ đứng yên. Cho ván chuyển động sang phải với gia tốc \vec{a} song song với đường nằm ngang. Tính giá trị cực đại của a để vật vẫn đứng yên trên ván. Biết hệ số ma sát là μ .



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2015)

Bài giải

Chọn hệ quy chiếu Oxy gắn với tâm ván.

- Các lực tác dụng lên vật: trọng lực \vec{P} ; phản lực \vec{Q} ; lực ma sát \vec{F}_{ms} ; lực quán tính \vec{F}_q ($F_q = ma$).

- Vật đứng yên trên tấm ván nên:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} + \vec{F}_q = \vec{0}. \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$$F_{ms} - mg \sin \alpha - ma \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_{ms} = mg \sin \alpha + ma \cos \alpha$$

$$Q + ma \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

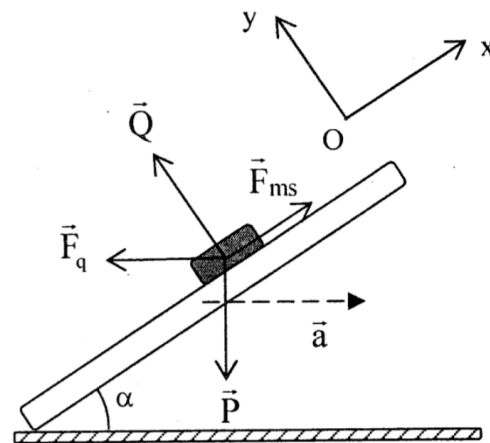
- Vật còn nằm trên ván thì:

$$Q > 0 \Rightarrow a = g \cot \alpha.$$

- Để vật không trượt trên ván là: $F_{ms} \leq \mu N = \mu Q$.

$$\Leftrightarrow g \sin \alpha + a \cos \alpha \leq \mu(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

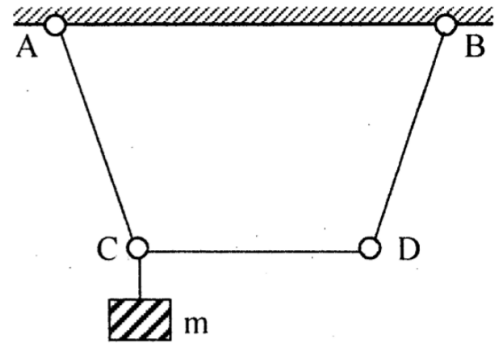
$$\Rightarrow a \leq \frac{g \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow a_{\max} = \frac{g \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$



Vậy: Giá trị cực đại của a để vật vẫn đứng yên trên ván là $a_{max} = \frac{g \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

9. Ba thanh nhẹ không trọng lượng có cùng độ dài l được liên kết bằng các bản lề tại các điểm C và D. Hai đầu còn lại của hai thanh ngoài được gắn vào các điểm A và B bằng các bản lề ở cùng độ cao. Khoảng cách $AB = 2l$. Tại bản lề C người ta treo một vật khối lượng m .

Xác định lực nhỏ nhất F_{min} đặt vào bản lề D để giữ cho thanh giữa luôn luôn nằm ngang.



Bài giải

- Với bản lề C:

+ Các lực tác dụng: các trọng lực \vec{P} ; \vec{P}_b tác dụng vào vật m và vào bản lề; các lực căng \vec{T}_1, \vec{T}_2 của hai thanh AC và CD.

+ Điều kiện cân bằng:

$$\vec{P} + \vec{P}_b + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

+ Chiếu (1) lên trục vuông góc với AC, ta được:

$$P \sin \alpha + P_b \sin \alpha - T \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow T \cos \alpha = (m + m_b) g \sin \alpha \quad (1')$$

- Với bản lề D:

+ Các lực tác dụng: lực \vec{F} ; trọng lực \vec{P}_b tác dụng vào bản lề; các lực căng \vec{T}_3, \vec{T}_2 của hai thanh BD và CD.

$$\vec{F} + \vec{P}_b + \vec{T}_3 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

+ Chiếu (2) lên trục vuông góc với BD, ta được:

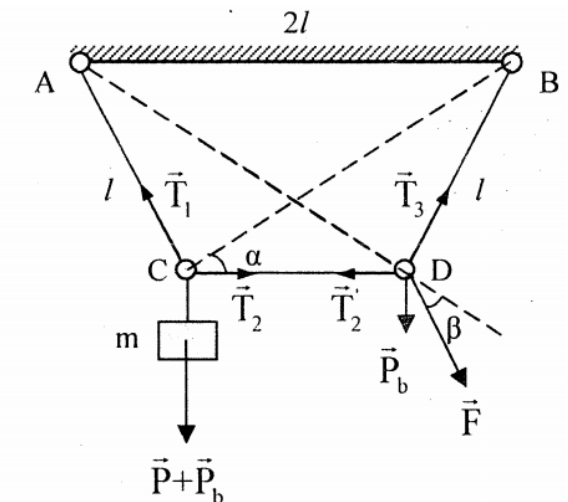
$$F \cos \beta + P_b \sin \alpha - T \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow T \cos \alpha = F \cos \beta + m_b g \sin \alpha \quad (2')$$

$$\text{- Từ (1') và (2'), ta được: } F = \frac{T \cos \alpha - m_b g \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta} \geq mg \sin \alpha$$

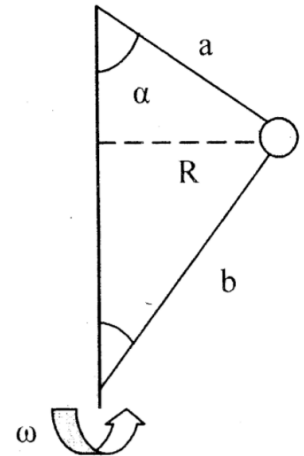
$$\Rightarrow F = F_{min} = mg \sin \alpha = \frac{mg}{2} \text{ và } \vec{F} \text{ vuông góc với thanh BD.}$$

Vậy: Lực nhỏ nhất đặt vào bản lề D để giữ cho thanh giữa luôn luôn nằm ngang là $F_{min} = \frac{mg}{2}$.



10. Bộc quả cầu khối lượng $m = 500\text{g}$ vào hai sợi dây. Hai đầu còn lại của chúng buộc vào hai đầu một thanh thẳng đứng quay với vận tốc góc ω . Khi quả cầu quay trong mặt phẳng nằm ngang thì các sợi dây tạo thành góc 90° . Chiều dài của dây trên là $a = 30\text{cm}$, của dây dưới là $b = 40\text{cm}$.

Sợi dây nào sẽ đứt trước và khi đó vận tốc góc ω là bao nhiêu? Biết rằng dây đứt khi lực căng $T = 12,6\text{N}$.



Bài giải

Chọn hệ quy chiếu gắn với vật quay (hệ quy chiếu phi quán tính).

- Các lực tác dụng lên vật: Trọng lực \vec{P} ; các lực căng \vec{T}_a, \vec{T}_b ; lực quán tính \vec{F}_{qt} .

- Điều kiện cân bằng của vật: $\vec{P} + \vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{F}_{qt} = \vec{0}$

- Chiếu hệ thức trên lên phương các sợi dây, ta được:

$$\begin{cases} -mg \cdot \cos \alpha + T_a - F_{qt} \cdot \cos \beta = 0 & (1) \\ mg \cdot \cos \beta + T_b - F_{qt} \cdot \cos \alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Với } F_{qt} = m\omega^2 R = m\omega^2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \alpha = \frac{R}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} T_a = mg \cdot \cos \alpha + F_{qt} \cdot \cos \beta & (1') \\ T_b = -mg \cdot \cos \alpha + F_{qt} \cdot \cos \alpha & (2') \end{cases}$$

- Thay các giá trị này vào (1') và (2'), ta được:

$$T_a = mg \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + m\omega^2 \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

$$T_b = -mg \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + m\omega^2 \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

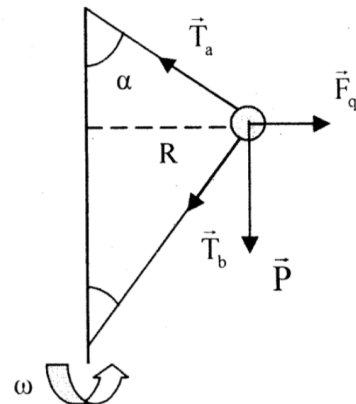
Vì $b > a$ nên $T_a > T_b$: dây a sẽ đứt trước.

Khi $T_a = T$ dây a sẽ đứt và khi đó vận tốc góc ω là:

$$\omega^2 = \frac{T(a^2 + b^2) - mga\sqrt{a^2 + b^2}}{mab^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T(a^2 + b^2) - mga\sqrt{a^2 + b^2}}{mab^2}} = \sqrt{\frac{12,6 \cdot (0,3^2 + 0,4^2) - 0,5 \cdot 10 \cdot 0,3 \cdot \sqrt{0,3^2 + 0,4^2}}{0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4^2}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12,6 \cdot (0,3^2 + 0,4^2) - 0,5 \cdot 10 \cdot 0,3 \cdot \sqrt{0,3^2 + 0,4^2}}{0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4^2}} = 12,75 \text{ (rad/s)}.$$

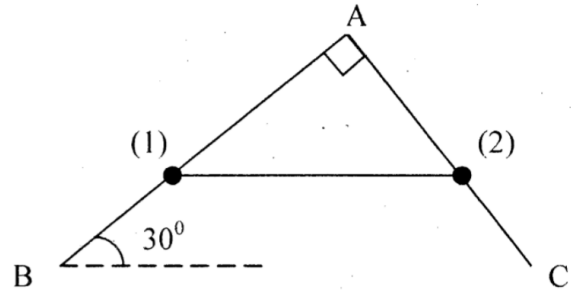


Vậy: Dây a sẽ đứt trước và khi đó vận tốc góc $\omega = 12,75 \text{ (rad/s)}$.

11. Một thanh cứng được uốn thành hình thước nhựa BAC (vuông tại A). Cạnh AB đặt nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng dây không dẫn l . Các quả cầu có thể trượt trên AB và AC với hệ số ma sát $\mu_1 = \mu_2 = 0,2$.

a) Tìm mối quan hệ giữa m_1 và m_2 để có thể giữ các quả cầu đứng yên ở mọi vị trí mà dây nối chúng bị căng theo phương nằm ngang.

b) Giữ nguyên khối lượng các quả cầu đã tính ở câu a, cho hệ quay tròn đều quanh trục thẳng đứng (Δ) với tốc độ góc ω sao cho khi quay dây nối các quả cầu vẫn căng theo phương nằm ngang. Xác định:



- Trục (Δ) phải nằm trong khoảng nào?

- Quan hệ giữa ω và vị trí của trục (Δ).

Bài giải

a) Mối quan hệ giữa m_1 và m_2 để có thể giữ các quả cầu đứng yên ở mọi vị trí mà dây nối chúng bị căng theo phương nằm ngang

- Các lực tác dụng lên các quả cầu:

+ Quả cầu 1: trọng lực \vec{P}_1 ; phản lực \vec{Q}_1 ; lực căng \vec{T} ; lực ma sát \vec{F}_{ms1} .

+ Quả cầu 2: trọng lực \vec{P}_2 ; phản lực \vec{Q}_2 ; lực căng \vec{T} ; lực ma sát \vec{F}_{ms2} .

- Điều kiện cân bằng của hai quả cầu:

$$+ \text{Quả cầu 1: } \vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1} + \vec{T} = \vec{0} \quad (1)$$

$$+ \text{Quả cầu 2: } \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2} + \vec{T} = \vec{0} \quad (2)$$

- Chiếu (1) và (2) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

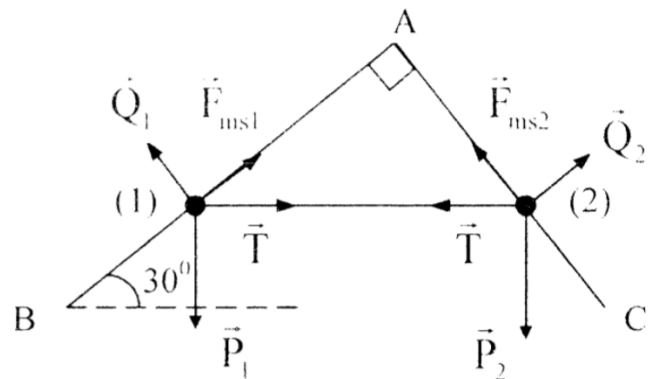
+ Quả cầu 1:

$$\begin{cases} T + F_{ms1} \cos 30^\circ - Q_1 \sin 30^\circ = 0 \\ Q_1 \cos 30^\circ + F_{ms1} \sin 30^\circ - P_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T + \mu_1 Q_1 \cos 30^\circ - Q_1 \sin 30^\circ = 0 \\ Q_1 \cos 30^\circ + \mu_1 Q_1 \sin 30^\circ - P_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 3,059 P_1 \quad (3)$$

$$+ \text{Quả cầu 2: } \begin{cases} -T - \mu_2 Q_2 \cos 60^\circ + Q_2 \cos 30^\circ = 0 \\ Q_2 \cos 60^\circ + \mu_2 Q_2 \sin 30^\circ - P_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 1,137 P_2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) Suy ra: $m_1 = 0,371 m_2$.



Vậy: Để có thể giữ các quả cầu đứng yên ở mọi vị trí mà dây nối chúng bị căng theo phương nằm ngang thì $m_1 = 0,371m_2$.

b) Trường hợp hệ quay tròn đều quanh trục thẳng đứng (Δ) với tốc độ góc ω

Gọi R_1 và R_2 là bán kính quỹ đạo của các quả cầu, ta có: $R_1 + R_2 = l$ (5)

- Phương trình định luật II Niu-ton cho hai quả cầu:

$$+ \text{ Quả cầu 1: } \vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1} + \vec{T} = m_1 \vec{a}_1 \quad (1')$$

$$+ \text{ Quả cầu 2: } \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2} + \vec{T} = m_2 \vec{a}_2 \quad (2')$$

- Chiếu (1') và (2') lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$$+ \text{ Lên Oy: } \begin{cases} Q_1 = 1,0531P_1 \\ Q_2 = 1,458P_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$+ \text{ Lên Ox: } \Leftrightarrow \begin{cases} T + \mu_1 Q_1 \cos 30^\circ - Q_1 \sin 30^\circ = m_1 \omega^2 R_1 \\ -T - \mu_2 Q_2 \cos 60^\circ + Q_2 \sin 60^\circ = -m_2 \omega^2 R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9,91}{0,371R_1 - R_2}} \quad (7)$$

$$- \text{ Từ (6), để } \omega > 0 \text{ thì } 0,371R_1 - R_2 > 0 \quad (8)$$

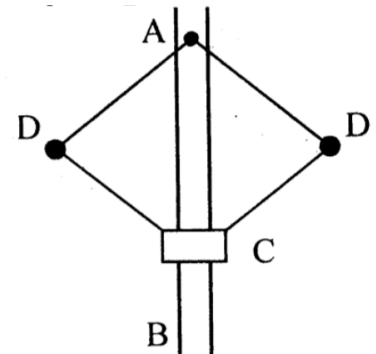
$$- \text{ Từ (5) và (8) suy ra: } R_1 > \frac{l}{0,371} = 0,729l.$$

Vậy: Trục (Δ) phải nằm cách quả cầu 1 một đoạn $l > R_1 > 0,729l$ và mối quan hệ giữa tốc độ góc ω và khoảng

$$\text{cách } R_1 \text{ là } \omega = \sqrt{\frac{9,91}{0,371R_1 - R_2}}.$$

12. Cái “điều tiết li tâm” ở hình bên dùng để hãm máy khi trục có tốc độ vượt quá $n = 120$ vòng/phút. Nó gồm một vòng C khối lượng 4kg có thể trượt không ma sát trên trục AB, hai vật D có cùng khối lượng m . Khung ADCD hình thoi, cạnh dài 30cm, khối lượng không đáng kể quay cùng với trục. Bỏ qua mọi ma sát.

Tính m để có động tác hãm khi đoạn AC bằng 43cm. Tính lực tác dụng lên các thanh lúc đó.



Bài giải

Chọn hệ quy chiếu gắn với khung quay. Khi $AC = 43\text{cm} = 30\sqrt{2}\text{cm}$, hình thoi ADCD trở thành hình vuông.

- Các lực tác dụng vào mỗi vật D: trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{T}_1, \vec{T}_2 của các thanh nối; lực quán tính li tâm \vec{F}_q .

- Mỗi vật D cân bằng trong hệ quy chiếu này nên:

$$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_q = \vec{0} \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên hai trục nằm ngang và thẳng đứng, ta được:

$$-T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 45^\circ + F_q = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}T_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}T_2 + F_q = 0 \quad (2)$$

Và $-T_1 \sin 45^\circ + T_2 \sin 45^\circ + P = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}T_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}T_2 + mg = 0 \quad (3)$$

- Tương tự, với vật M, ta có: $Mg = \sqrt{2}T_2 \quad (4)$

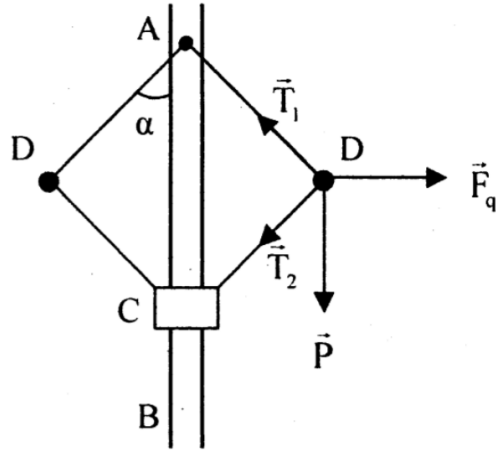
- Từ (2), (3) và (4), ta được: $F_q = (m+M)g; T_1 = \frac{(M+2m)g}{\sqrt{2}}; T_2 = \frac{Mg}{\sqrt{2}}$.

- Mặt khác: $F_q = m\omega^2 r = m \cdot 4\pi^2 n^2 r \Leftrightarrow (m+M)g = m \cdot 4\pi^2 n^2 r$.

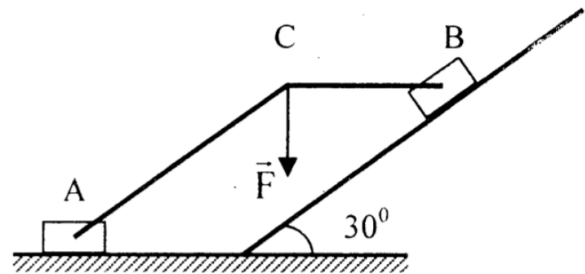
$$\Rightarrow m = \frac{Mg}{4\pi^2 n^2 r - g} = \frac{4,9,8}{4,3,14^2 \cdot 2^2 \cdot 0,21 - 9,8} = 1,7\text{kg}; r = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21\text{cm} = 0,21\text{m}.$$

Và $T_1 = \frac{(4 + 2 \cdot 1,7) \cdot 9,8}{\sqrt{2}} = 39,5\text{N}; T_2 = \frac{4,9,8}{\sqrt{2}} = 27,7\text{N}.$

Vậy: Đe có động tác hãm khi đoạn AC bằng 43cm thì $m = 1,7\text{kg}$ và lực tác dụng lên các thanh lúc đó là $T_1 = 39,5\text{N}; T_2 = 27,7\text{N}.$



13. Hai vật nặng A, B có kích thước như nhau và đều nặng 100N. Chúng nối với nhau bằng hai thanh nhẹ AC, BC và các bản lề. Vật A chỉ có thể trượt ngang, vật B chỉ trượt trên mặt nghiêng góc 30° so với phương nằm ngang. Để duy trì sự cân bằng như hình vẽ, cần tác dụng vào điểm C một lực \vec{F} theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới.



Nếu hệ số ma sát giữa A, B với các mặt trượt đều là $\mu = 0,5$ thì độ lớn của lực \vec{F} sẽ nằm trong phạm vi nào?

Bài giải

- Vì $\mu = 0,5 < \tan 30^\circ = 0,577$ nên khi $F = 0$, B sẽ trượt xuống dưới. Do đó lực F phải có giá trị tối thiểu nào đó để B không trượt xuống: $F = F_1$.

- Khi F tăng dần từ F_1 thì B có xu hướng đi lên cho đến khi $F = F_2$ thì sự cân bằng bị phá vỡ. Ta xét hai trạng thái tới hạn này.

- Trường hợp vật B có xu hướng trượt xuống:

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình định luật II Niu-ton cho vật B trên hai trục Ox và Oy:

• Trên Ox:

$$P \sin 30^\circ - f_{msB} - F_{CB} \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

• Trên Oy:

$$P \cos 30^\circ + F_{CB} \sin 30^\circ - Q_B = 0 \quad (2)$$

$$\text{Và } f_{msB} = \mu N_B = \mu Q_B \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow P \sin 30^\circ - \mu Q_B - F_{CB} \cos 30^\circ = 0$$

$$P \cos 30^\circ + F_{CB} \sin 30^\circ - Q_B = 0$$

$$\Leftrightarrow 100 \sin 30^\circ - 0,5Q_B - F_{CB} \cos 30^\circ = 0 \quad (1')$$

$$100 \sin 30^\circ + F_{CB} \sin 30^\circ - Q_B = 0 \quad (2')$$

+ Từ (1'), (2') ta được: $F_{CB} = 6,0023N$.

Suy ra: $F_1 = F_{CB} \tan 30^\circ = 6,0023 \cdot \tan 30^\circ = 3,4774N$.

- Trường hợp vật B có xu hướng đi lên: Tương tự, ta có các phương trình:

$$100 \sin 30^\circ + 0,5Q_B - F_{CB} \cos 30^\circ = 0 \quad (4')$$

$$100 \cos 30^\circ + F_{CB} \sin 30^\circ - Q_B = 0 \quad (5')$$

Từ (4') và (5') ta được: $F_{CB} = 151,4569N$.

Suy ra: $F_2 = F_{CB} \tan 30^\circ = 151,4569 \cdot \tan 30^\circ = 87,4437N$.

- Trường hợp A có xu hướng chuyển động sang trái:

+ Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình định luật II Niu-ton cho vật B trên hai trục Ox và Oy:

$$\bullet \text{ Trên Ox: } f_{msA} - F_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad (6)$$

$$\bullet \text{ Trên Oy: } P + F_{AC} \sin 30^\circ - Q_A = 0 \quad (7)$$

$$\text{Và } f_{msA} = \mu N_A = \mu Q_A \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \mu Q_A - F_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$P + F_{AC} \sin 30^\circ - Q_A = 0$$

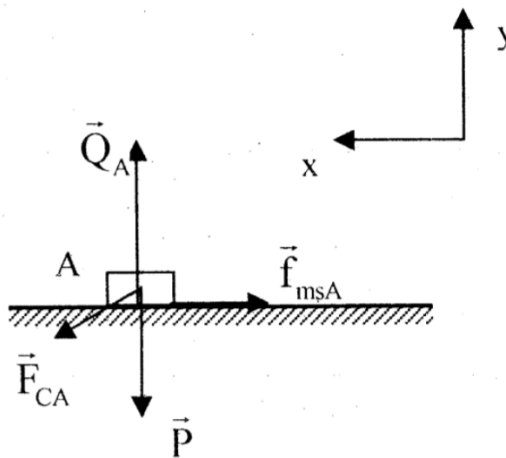
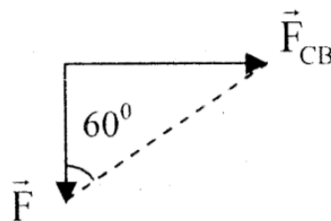
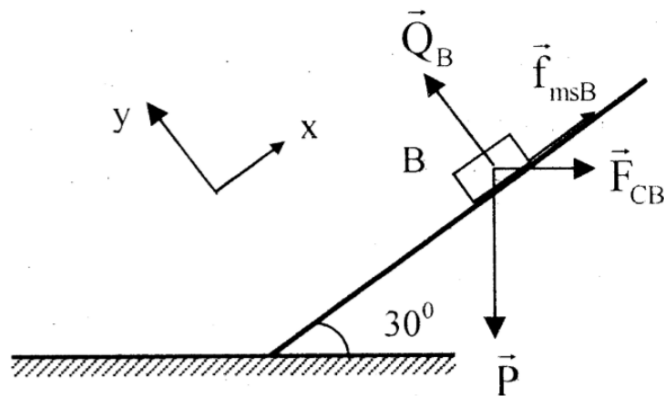
$$\Leftrightarrow 0,5Q_A - F_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad (6')$$

$$100 + F_{AC} \sin 30^\circ - Q_A = 0 \quad (7')$$

+ Từ (6') và (7'), ta được: $F_{AC} = 81,1655N$.

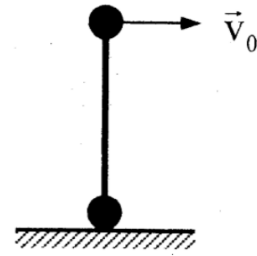
- Từ quan hệ cân bằng đối với bản lề C, suy ra: $F_3 = F_{AC} \sin 30^\circ$.

$$\Leftrightarrow F_3 = 81,1655 \cdot \sin 30^\circ = 40,5827N$$



Vậy: Độ lớn của lực F để hệ cân bằng là: $3,4774N \leq F \leq 40,5827N$.

14. Một quả tạ đôi được đặt thẳng đứng trên mặt sàn nằm ngang. Tạ đôi gồm hai quả cầu giống nhau gắn vào một thanh có khối lượng không đáng kể, dài l . Tại một thời điểm nào đó, quả cầu trên nhận được một vận tốc đầu \vec{v}_0 theo phương ngang. Hỏi \vec{v}_0 có giá trị tối thiểu bằng bao nhiêu để quả cầu dưới này lên ngay khỏi sàn và tạ đôi sẽ chạm sàn ở tư thế nằm ngang?



Bài giải

- Điều kiện để cầu dưới không nảy lên:

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{Q}_1 = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow T_1 + Q_1 - P_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = mg - T_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow T \leq mg$$

- Khi ấy, quả cầu trên quay quanh quả cầu dưới:

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m\vec{a}_{ht} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow T_2 + P_2 = \frac{mv_0^2}{l} \Rightarrow T = \frac{mv_0^2}{l} - mg \leq mg \Rightarrow v_0^2 \leq 2gl$$

- Từ đó, điều kiện để quả cầu dưới nảy lên là: $v_0^2 \geq 2gl$.

- Khi quả cầu dưới nảy lên thì quả tạ đôi chuyển động vừa tịnh tiến vừa quay quanh khối tâm. Khi quả cầu trên nhận được vận tốc \vec{v}_0 thì khối tâm nhận được vận tốc $\frac{\vec{v}_0}{2}$ và chuyển động giống như một vật bị ném ngang.

- Thời gian để khối tâm rơi đến sàn là: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$; $h = BG = \frac{l}{2}$.

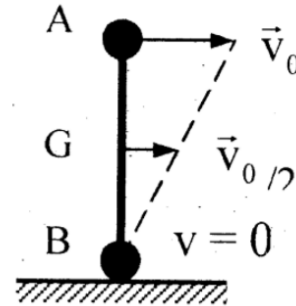
- Vì momen lực đối với khối tâm G của tạ đôi $M = 0$ nên tạ đôi: quay với vận tốc góc ω không đổi quanh khối tâm. Muốn cho tạ đôi chạm sàn ở tư thế nằm ngang thì trong thời gian $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$, tạ đôi phải quay được một

góc tối thiểu bằng $\frac{\pi}{2}$.

- Từ $\varphi = \omega t \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \omega \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$.

- Mặt khác: $v_{AG} = \omega \frac{l}{2} - \frac{v_G}{2} \Rightarrow v_{0(min)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{gl}$.

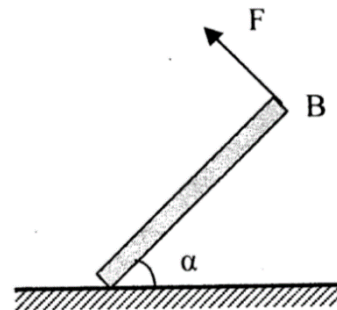
Vậy: Để quả cầu dưới này lên ngay khỏi sàn và tạ đôi sẽ chạm sàn ở tư thế nằm ngang thì $v_{0(min)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{gl}$.



Chuyên đề 11: CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN CÓ TRỤC QUAY CỐ ĐỊNH

15. Thanh đồng chất AB, đầu A tựa trên sàn ngang có ma sát, đầu B được giữ nhờ lực F vuông góc với AB. Thanh AB nằm nghiêng cân bằng. Hệ số ma sát trượt giữa AB với sàn là μ .

- a) Lập biểu thức xác định μ theo α .
- b) Với giá trị nào của α hệ số ma sát μ là nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất này là bao nhiêu?



(Trích đề thi Olympic 30/4, 1998)

Bài giải

a) Biểu thức xác định μ theo α

Quy tắc mômen lực đối với trục quay l : $Ql \cdot \cos \alpha = F_{ms} l \left(\sin \alpha + \frac{l}{\sin \alpha} \right)$.

(l là nửa chiều dài của thanh AB)

Suy ra: $F_{ms} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} Q = \frac{l}{2 \tan \alpha + \cot \alpha} Q$

Vì $F_{ms} \leq \mu N \Rightarrow \mu \geq \frac{l}{2 \tan \alpha + \cot \alpha}$; $N = Q$

Vậy: Biểu thức xác định μ theo α là $\mu \geq \frac{l}{2 \tan \alpha + \cot \alpha}$

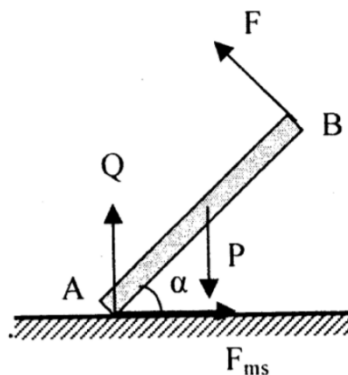
b) Giá trị của α để μ nhỏ nhất

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $2 \tan \alpha + \cot \alpha \geq 2\sqrt{2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha} = 2\sqrt{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi: $2 \tan \alpha = \cot \alpha = \frac{l}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{l}{\sqrt{2}}$ và $\mu = \mu_{min}$.

$\Rightarrow \alpha = 35,26^\circ$ và $\mu \geq \frac{l}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_{min} = \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy: Giá trị của α để μ nhỏ nhất là $\alpha = 35,26^\circ$ và $\mu_{min} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



16. Hai quả cầu đồng chất, tâm O_1 ; O_2 bán kính $R_1 > R_2$ trọng lượng $P_1 > P_2$ tựa vào nhau ở điểm B và cùng được treo vào điểm O nhờ dây $OA_1 = R_2$ và dây $OA_2 = R_1$. Tính góc nghiêng α của OA_1 với đường thẳng đứng khi cân bằng.

Bài giải

Ta có: $OO_1 = OA_1 + R_1 = R_2 + R_1 = O_1O_2$.

Và: $OO_2 = OA_2 + R_2 = R_1 + R_2 = O_1O_2$.

Do đó, ΔOO_1O_2 đều.

- Quả cầu O_1 chịu tác dụng của 3 lực: trọng lực \vec{P}_1 ; lực căng dây \vec{T}_1 ; áp lực \vec{N}_1 .

- Điều kiện cân bằng đối với trục quay qua O:

$$M_{\vec{P}_1/O} = M_{\vec{N}_1/O}$$

$$\Leftrightarrow P_1 \cdot O_1H_1 = N_1 \cdot OH$$

$$\Leftrightarrow P_1 (R_1 + R_2) \sin \alpha = N_1 (R_1 + R_2) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{2P_1\sqrt{3}}{3} \sin \alpha.$$

- Quả cầu O_2 chịu tác dụng của 3 lực: trọng lực \vec{P}_2 ; lực căng dây \vec{T}_2 ; áp lực \vec{N}_2 .

- Điều kiện cân bằng đối với trục quay qua O: $M_{\vec{P}_2/O} = M_{\vec{N}_2/O}$.

$$\Leftrightarrow P_2 \cdot O_2H_2 = N_2 \cdot OH \Leftrightarrow P_2 (R_1 + R_2) \sin(60^\circ - \alpha) = N_2 (R_1 + R_2) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{2P_2\sqrt{3}}{3} \sin(60^\circ - \alpha)$$

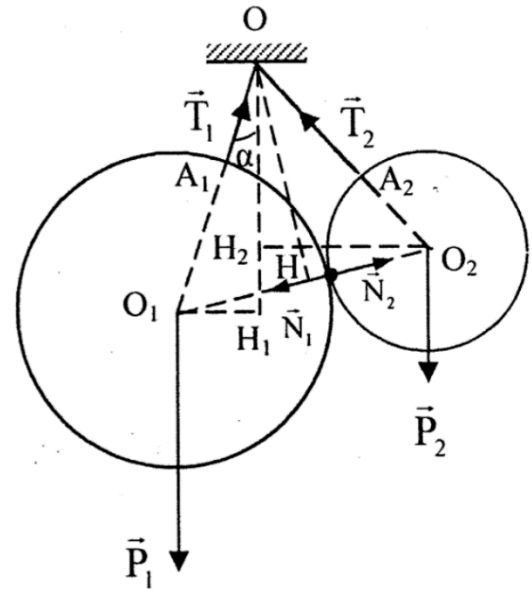
- Vì: $N_1 = N_2 \Rightarrow P_1 \sin \alpha = P_2 \sin(60^\circ - \alpha)$.

$$\Leftrightarrow P_1 \sin \alpha = P_2 \sin 60^\circ \cos \alpha - P_2 \sin \alpha \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow P_1 \sin \alpha = P_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - P_2 \frac{1}{2} \sin \alpha \Leftrightarrow (2P_1 + P_2) \sin \alpha = P_2 \sqrt{3} \cos \alpha$$

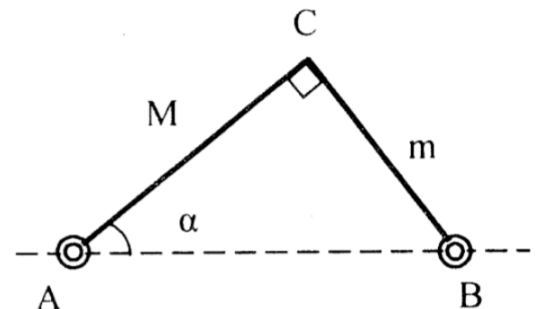
$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{P_2\sqrt{3}}{2P_1 + P_2} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{P_2\sqrt{3}}{2P_1 + P_2}$$

Vậy: Góc nghiêng α của OA_1 với đường thẳng đứng khi cân bằng là $\alpha = \arctan \frac{P_2\sqrt{3}}{2P_1 + P_2}$.



17. Hai thanh bê tông mỏng tạo thành hệ như hình vẽ. Các thanh có thể quay không ma sát quanh các trục đi qua các đầu A, B. Đầu trên của hai thanh tựa vào nhau và tạo thành góc 90° . Góc giữa thanh AC (khối lượng M) và phương ngang bằng α , thanh còn lại có khối lượng m.

a) Xác định hệ số ma sát nhỏ nhất giữa hai thanh để không xảy ra sự trượt.



b) Trong trường hợp $M = 3m, \alpha = 45^\circ$. Hãy xác định các phản lực tại A và B.

Bài giải

a) Hệ số ma sát nhỏ nhất giữa hai thanh để không xảy ra sự trượt

- Các lực tác dụng lên thanh AC: trọng lực \vec{P}_1 ; phản lực \vec{Q}_1 , của thanh BC; phản lực \vec{Q}_A của bản lề tại A; lực ma sát \vec{F}_{ms1} với thanh BC.

- Thanh AC cân bằng (đối với trục quay qua A): $M_{P_1/A} = M_{Q_1/A}$.

$$\Leftrightarrow P_1 \cdot \frac{AC}{2} \cdot \cos \alpha = Q_1 \cdot AC$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{1}{2} P_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} Mg \cos \alpha \quad (1)$$

- Các lực tác dụng lên thanh BC: trọng lực \vec{P}_2 ; áp lực \vec{N}_2 của thanh AC; phản lực \vec{Q}_B của bản lề tại B; lực ma sát \vec{F}_{ms2} với thanh AC.

- Thanh BC cân bằng (đối với trục quay qua B): $M_{P_2/B} = M_{F_{ms2}/B}$.

$$\Leftrightarrow P_2 \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin \alpha = F_{ms2} \cdot BC \Rightarrow F_{ms2} = \frac{1}{2} P_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} mg \sin \alpha \quad (2)$$

$$(Q_1 = N_2; F_{ms1} = F_{ms2})$$

- Để thanh không trượt: $F_{ms} \leq kN_2 \Rightarrow k \geq \frac{F_{ms}}{N_2} = \frac{\frac{1}{2} mg \sin \alpha}{\frac{1}{2} Mg \cos \alpha} = \frac{m}{M} \tan \alpha$.

$$\Rightarrow k_{min} = \frac{m}{M} \tan \alpha$$

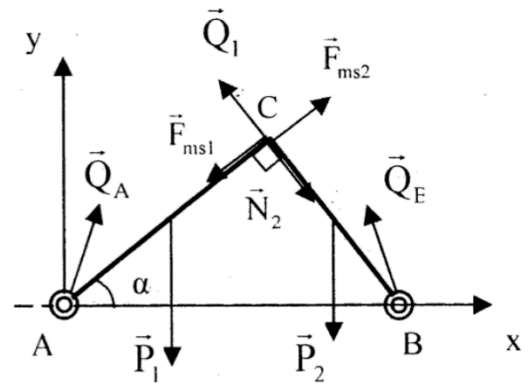
Vậy: Hệ số ma sát nhỏ nhất giữa hai thanh để không xảy ra sự trượt là $k_{min} = \frac{m}{M} \tan \alpha$.

b) Xác định các phản lực tại A và B khi $M = 3m, \alpha = 45^\circ$

Gọi X_A, Y_A, X_B, Y_B là các phản lực tại A và B theo các phương OX và OY. Ta có:

$$X_A - F_{ms1} \cos \alpha - Q_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow X_A = \frac{1}{4} (M + m) g \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow X_A = mg.$$

$$X_B - F_{ms2} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow X_B = \frac{1}{4} (M + m) g \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow X_B = -mg.$$



$$Y_A - F_{ms1} \sin \alpha + Q_1 \cos \alpha - Mg = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{1}{2} [M + (M + m) \sin^2 \alpha] g \Rightarrow 2,5mg.$$

$$Y_B + F_{ms2} \sin \alpha - N_2 \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{1}{2} [m + (M + m) \cos^2 \alpha] g \Rightarrow 1,5mg.$$

$$\text{Từ đó: } Q_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(mg)^2 + (2,5mg)^2} \approx 2,7mg.$$

$$Q_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{(-mg)^2 + (1,5mg)^2} \approx 1,8mg.$$

Góc giữa \vec{Q}_A, \vec{Q}_B và trục Ox được xác định bởi:

$$\tan \varphi = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{1,5mg}{-mg} = -1,5 \Rightarrow \varphi \approx 56,3^\circ.$$

Vậy: Phản lực tại A và B là $Q_A \approx 2,7mg$ và $Q_B \approx 1,8mg$.

18. Thanh AB đồng chất tiết diện đều, có chiều dài $AB = L$. Đầu A tựa trên sàn nằm ngang, đầu B được giữ bằng lực \vec{F} . Cho lực \vec{F} có giá hợp với phương thẳng đứng một góc β và ở vị trí cân bằng thanh hợp với phương thẳng đứng một góc α . Biết hệ số ma sát nghỉ nhỏ nhất giữa thanh và sàn để thanh cân bằng khi góc α thay đổi ($30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$) là $\mu_{min} = \frac{1}{3}$. Xác định góc β .

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực \vec{P} ; phản lực \vec{Q} ; lực ma sát \vec{F}_{ms} ; lực nâng \vec{F} .

- Điều kiện cân bằng của thanh AB đối với trục quay qua O:

$$M_{\vec{Q}/O} = M_{\vec{F}_{ms}/O} \Leftrightarrow Q \frac{L}{2} \sin \alpha = F_{ms} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha + OC \right) \quad (1)$$

- Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔBOC , ta được: $\frac{OC}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{L}{2 \sin \beta}$.

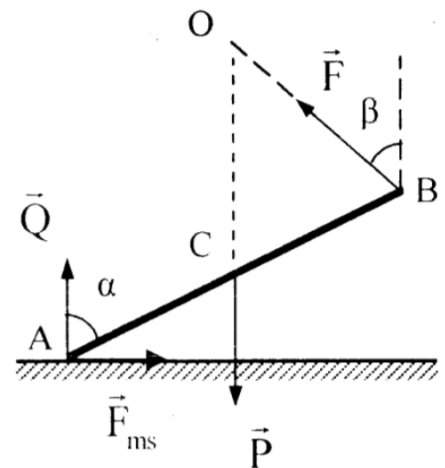
$$\Leftrightarrow \frac{OC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{L}{2 \sin \beta} \Rightarrow OC = \frac{L \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta} \quad (2)$$

- Thay (2) vào (1), ta được:

$$Q \frac{L}{2} \sin \alpha = F_{ms} \left(\frac{L}{2} \cos \alpha + \frac{L \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta} \right)$$

$$\Rightarrow F_{ms} = \frac{Q \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)} \leq \mu N = \mu Q$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$



$$\Leftrightarrow \mu \geq \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta} = \frac{1}{2 \cot \alpha + \cot \beta}$$

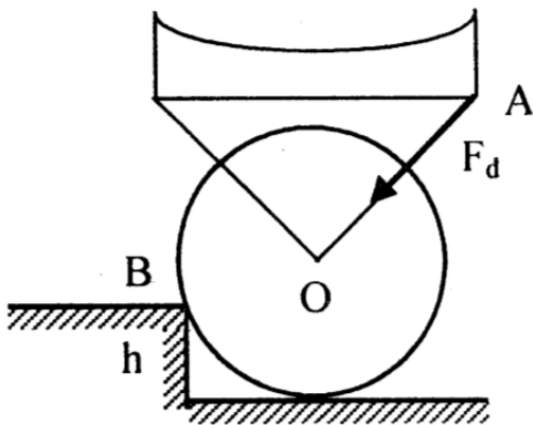
- Với $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{2 + \cot \beta} = \mu_{\min}$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2 + \cot \beta} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

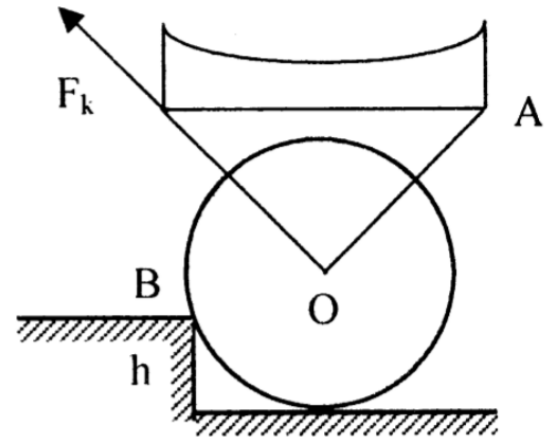
Vậy: Góc β giữa lực \vec{F} và phương thẳng đứng là $\beta = 45^\circ$.

19. Xe cút kít trên đường nằm ngang phải vượt qua một bậc có chiều cao $h = 5\text{cm}$. Bánh xe có bán kính $R = 20\text{cm}$. Càng xe OA làm với phương nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Trọng lực của xe và tải $P = 1200\text{N}$ có giá đi qua tâm O của bánh xe. Xét hai trường hợp: đẩy xe (hình a) và kéo xe (hình b). Lực của tay có phương của càng xe.

- Tính các lực đẩy F_d và kéo F_k tối thiểu cần tác dụng. Kết luận.
- Tính các phản lực Q_d và Q_k của điểm tiếp xúc B giữa bánh xe và bậc. Bánh xe không trượt ở B.
- Định α để $F_d = F_k$.



Hình a



Hình b

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1997)

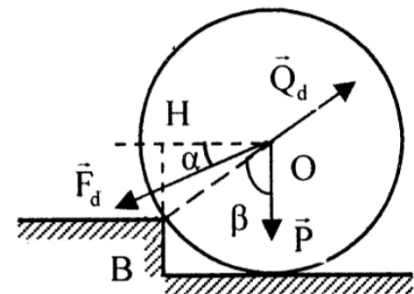
Bài giải

a) Lực đẩy F_d và kéo F_k tối thiểu cần tác dụng

* Trường hợp đẩy xe:

- Các lực tác dụng lên bánh xe: Trọng lượng xe \vec{P} ; lực đẩy xe \vec{F}_d và phản lực của bậc \vec{Q}_d .

- Khi lực đẩy $F_d = F_{\min}$ thì mômen của nó đối với trục B phải cân bằng với mômen của trọng lực P:



Hình a

$$M_{F_d/B} = M_{P/B} = P.OH \quad (1)$$

$$\text{Với } OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7} \text{ cm} = 0,05\sqrt{7} \text{ m}$$

$$\text{- Cánh tay đòn của lực đẩy } F_d \text{ là: } d_d = R \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = R \cos(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow M_{F_d/B} = F_d R \cos(\alpha + \beta) \quad (2)$$

$$\text{Với } \cos \beta = \frac{15}{20} = 0,75 \Rightarrow \beta = 41,4^\circ$$

$$\text{- Từ (1) và (2) ta có: } F_d = \frac{P.OH}{R \cos(\alpha + \beta)} = \frac{1200.0,05\sqrt{7}}{0,20 \cos(30 + 41,4)} = 2488 \text{ N}$$

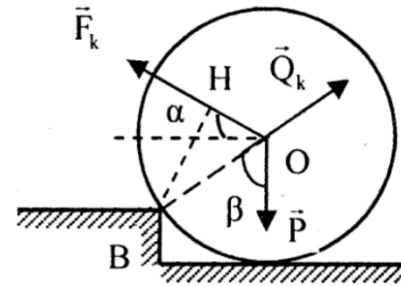
* Trường hợp kéo xe:

- Mômen của P như cũ, cánh tay đòn của lực kéo F_k là:

$$d_k = R \sin \left[\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \right] = R \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha) \right] = R \cos(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow d_k = 20 \cos(11,4^\circ) = 19,4 \text{ cm} = 0,194 \text{ m}$$

$$\text{- Lực kéo: } F_k = \frac{P.OH}{R \cos(\beta - \alpha)} = \frac{1200.0,05\sqrt{7}}{0,20 \cos(41,4 - 30)} = 810 \text{ N}$$



Hình b

Vậy: Lực đẩy và lực kéo tối thiểu cần tác dụng là $F_d = 2488 \text{ N}$ và $F_k = 810 \text{ N}$.

Vi $F_k < F_d$ nên kéo dễ hơn đẩy.

b) Phản lực Q_d và Q_k của điểm tiếp xúc B giữa bánh xe và bậc

* Trường hợp đẩy xe: Ta có: $Q_d \cos \beta = P + F_d \sin \alpha$.

$$\Rightarrow Q_d = \frac{P + F_d \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{1200 + 2488 \cdot \sin 30^\circ}{\cos 41,4^\circ} = 3259 \text{ N}$$

* Trường hợp kéo xe: Ta có: $Q_k \cos \beta = P - F_k \sin \alpha$.

$$\Rightarrow Q_k = \frac{P - F_k \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{1200 - 810 \cdot \sin 30^\circ}{\cos 41,4^\circ} = 1060 \text{ N}$$

Vậy: Phản lực Q_d và Q_k của điểm tiếp xúc B giữa bánh xe và bậc khi đẩy xe là $Q_d = 3259 \text{ N}$ và khi kéo xe là $Q_k = 1060 \text{ N}$.

c) Tính α để $F_d = F_k$.

- Vì $M_{F_d/B} = M_{F_k/B}$ (khi F_{min}) nên $F_d = F_k$ khi $d_d = d_k$ hay:

$$R \cos(\alpha + \beta) = R \cos(\beta - \alpha)$$

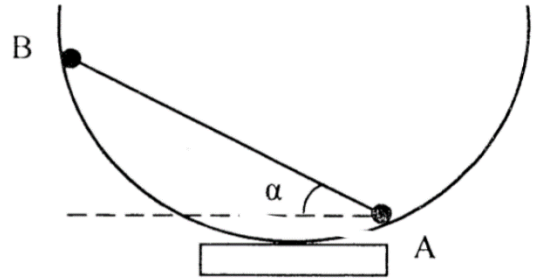
$$\Rightarrow \alpha = 0: \text{ Hai lực có phương nằm ngang.}$$

- Khi đó, ta có: $F_d = F_k = \frac{P.OH}{R.\cos \beta} = \frac{1200.0,05\sqrt{7}}{0,20.\cos 41,4^\circ} = 1058N$

Vậy: Để $F_d = F_k$ thì $\alpha = 0$.

20. Trên mặt trong rất nhẵn của một bán cầu bán kính R , người ta đặt một thanh AB khối lượng không đáng kể có chiều dài $l = R$, hai đầu thanh có gắn hai quả cầu nhỏ có khối lượng $m_A = 200g$ và $m_B = 100g$.

- Thanh nằm cân bằng ở trạng thái hợp với đường nằm ngang một góc α bằng bao nhiêu?
- Tính các phản lực Q_A ; Q_B của bán cầu tác dụng lên các quả cầu. Lấy $g = 10m/s^2$.



Bài giải

a) Tính góc α

Gọi G là khối tâm của thanh AB ,

vì $m_A = 2m_B$ nên $GA = \frac{l}{2}GB = \frac{R}{3}$;

đặt $OG = d, P = Mg = 3mg$.

- Áp dụng định lí hàm số sin cho ΔAOG , ta được:

$$\frac{d}{\sin 60^\circ} = \frac{R}{3 \sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{R}{2d\sqrt{3}} \quad (1)$$

- Áp dụng định lí hàm số cosin cho ΔAOG , ta được:

$$d^2 = R^2 + \frac{R^2}{9} - 2R \frac{R}{3} \cos 60^\circ \Rightarrow d = \frac{R\sqrt{7}}{3} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta được: $\beta = 19^\circ 6'$; $\alpha = 90^\circ - 60^\circ - \beta = 10^\circ 54'$.

Vậy: Thanh nằm cân bằng ở trạng thái hợp với đường nằm ngang một góc $\alpha = 10^\circ 54'$.

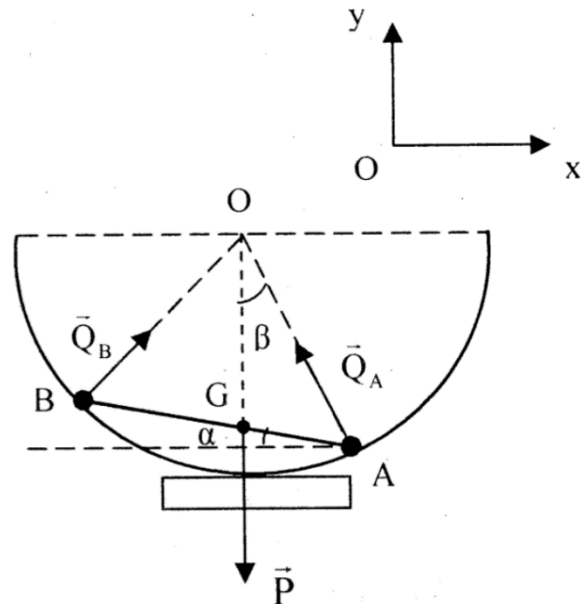
b) Các phản lực Q_A ; Q_B của bán cầu tác dụng lên các quả cầu

- Áp dụng quy tắc momen lực với trục quay qua A , ta được:

$$Q_B R \sin 60^\circ = P \frac{R}{3} \cos \alpha \Rightarrow Q_B = \frac{Mg \cdot \cos 10^\circ 54'}{3 \sin 60^\circ} = \frac{0,3 \cdot 10 \cdot 0,98}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,134N$$

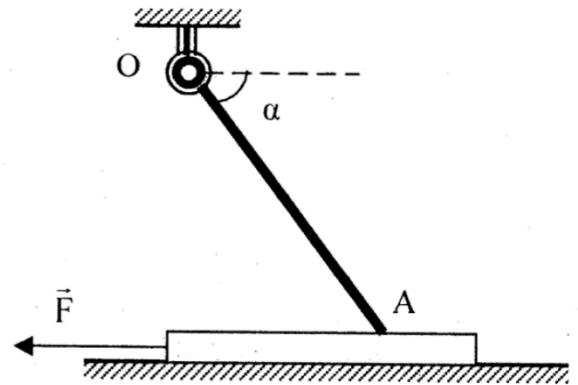
- Áp dụng quy tắc momen lực với trục quay qua B , ta được: $Q_A R \sin 60^\circ = P \frac{2R}{3} \cos \alpha$.

$$\Rightarrow Q_A = \frac{Mg \cdot \cos 10^\circ 54'}{3 \sin 60^\circ} = \frac{0,3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0,98}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,268N$$



Vậy: Độ lớn các phản lực của bán cầu tác dụng lên các quả cầu là $Q_A = 2,268N$ và $Q_B = 1,134N$

21. Một thanh nặng OA tựa trên một tấm gỗ có thể quay quanh khớp O xung quanh một trục nằm ngang (hình vẽ). Biết thanh nặng có khối lượng m_1 và hợp với phương ngang một góc α ; tấm gỗ nằm ngang trên sàn có khối lượng m_2 ; hệ số ma sát giữa thanh nặng và tấm gỗ là μ_1 , giữa tấm gỗ và sàn là μ_2 . Hỏi phải tác dụng vào tấm gỗ một lực nằm ngang bằng bao nhiêu để có thể kéo nó ra về phía trái? Biện luận kết quả tìm được. Biết gia tốc trọng trường là g .



Bài giải

- Các lực tác dụng lên các vật như hình vẽ.

- Thanh nặng m_1 : Phương trình momen lực đối với trục quay qua O:

$$Q_1 l \cos \alpha - F_{ms1} l \sin \alpha - P_1 \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

- Tấm ván m_2 :

+ Khi tấm ván chuyển động đều: $a = 0$

$$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F} + \vec{F}_{ms2} + \vec{F}'_{ms1} + \vec{N}_1 = \vec{0} \quad (2)$$

+ Chiều (2) lên các trục tọa độ Ox và Oy, ta được:

$$F - F'_{ms1} - F_{ms2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{và } Q_2 = P_2 + N_1 \quad (4)$$

$$\text{Trong đó: } N_1 = Q_1; F'_{ms1} = F_{ms1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 Q_1; F_{ms2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 Q_2 \quad (5)$$

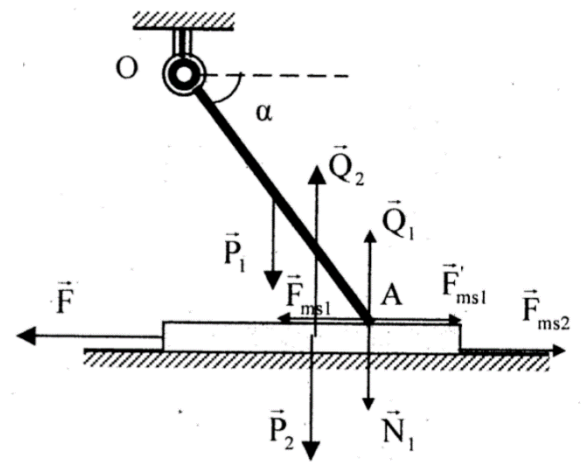
$$\text{- Từ (1), (4) và (5) ta được: } \begin{cases} Q_1 = \frac{P_1 \cos \alpha}{2(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)} & (6) \\ Q_2 = P_2 + \frac{P_1 \cos \alpha}{2(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)} & (7) \end{cases}$$

$$\text{- Từ (3), (5), (6) và (7) ta được: } F = \mu_2 P_2 + \frac{P_1(\mu_1 + \mu_2)}{2(1 - \mu_1 \tan \alpha)} \quad (8)$$

Vậy: Từ (8) ta thấy:

$$\text{+ Với } \mu_1 \tan \alpha < 1 \text{ thì lực cần tìm là: } F = \mu_2 P_2 + \frac{P_1(\mu_1 + \mu_2)}{2(1 - \mu_1 \tan \alpha)}$$

+ Với $\mu_1 \tan \alpha \geq 1$ thì không thể kéo tấm gỗ về phía bên trái (xảy ra sự nêch chặt).



22. Một vận động viên leo núi có khối lượng $m = 60\text{kg}$, đang ngồi nghỉ giữa hai khe núi của một vách núi có độ rộng $l = 1\text{m}$. Khối tâm của người này cách vách đá mà vai tì vào một đoạn $d = 0,2\text{m}$. Hệ số ma sát giữa giày và đá là $k_2 = 0,9$, giữa vai và đá là $k_1 = 0,6$. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

- Người này phải ép vào tường một lực nhỏ nhất bao nhiêu để khỏi rơi?
- Với lực ép nhỏ nhất ở câu (a) người này phải giữ khoảng cách thẳng đứng giữa chân và vai bao nhiêu mới ngồi vững?
- Thực tế vận động viên đặt chân thấp hơn vị trí đã tính trong câu (b) 10cm. Anh ta làm cách nào để giữ được thế cân bằng, tính các lực ma sát lúc này.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1999)

Bài giải

a) Lực ép vào tường nhỏ nhất để khỏi bị rơi

- Các lực tác dụng vào người: Trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 ; các lực ma sát $\vec{f}_{ms1}, \vec{f}_{ms2}$.

- Để người không rơi: $\vec{P} + \vec{f}_{ms1} + \vec{f}_{ms2} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{0}$

- Chiếu hệ thức trên lên hai phương nằm ngang và thẳng đứng, ta được:

$$Q_1 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q$$

$$P - f_{ms1} - f_{ms2} = 0$$

- Vì ma sát là ma sát nghỉ nên: $f_{ms1} \leq k_1 N_1 = k_1 Q_1$; $f_{ms2} \leq k_2 N_2 = k_2 Q_2$.

$$\Rightarrow P = f_{ms1} + f_{ms2} \leq (k_1 + k_2) Q$$

$$\text{và } Q \geq \frac{P}{k_1 + k_2} = \frac{600}{1,5} = 400\text{N}$$

Vậy: Lực ép tối thiểu phải đặt lên vách đá là $N_{min} = Q_{min} = 400\text{N}$.

b) Khoảng cách thẳng đứng giữa chân và vai để người ngồi vững

- Áp dụng quy tắc mômen, với trục quay là điểm tựa của vai đặt vào vách đá, ta được:

$$M_P + M_{Q_2} = M_{f_{ms2}}$$

$$\text{Với: } P = f_{ms1} + f_{ms2} \Rightarrow \begin{cases} f_{ms2} = \frac{mgd + Qh}{l} \leq k_2 Q \\ f_{ms1} = P - f_{ms2} \leq k_1 Q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mgd + Qh \leq k_2 Ql \\ mgl - mgd - Qh \geq k_1 Ql \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60 \cdot 10 \cdot 0,2 + 400h \leq 0,9 \cdot 400 \cdot 1 \\ 60 \cdot 10 \cdot 1 - 60 \cdot 10 \cdot 0,2 - 400h \geq 0,6 \cdot 400 \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 120 + 400h \leq 360 \\ 480 - 400h \geq 240 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h \leq 0,6m \text{ và } h \geq 0,6m \Rightarrow h = 0,6m$$

Vậy: Khoảng cách thẳng đứng giữa chân và vai để người ngồi vững là $h = 0,6m$.

c) Cách để giữ được thế cân bằng

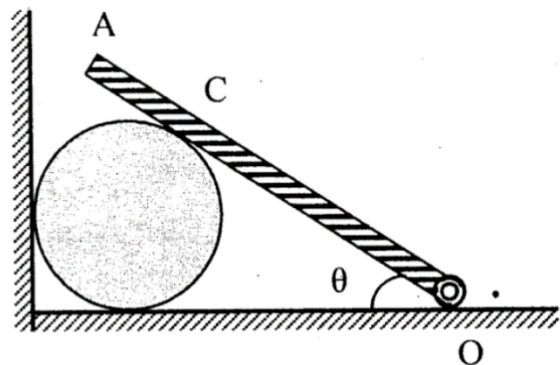
Theo đề: $h = 0,7m$. Từ (1) và (2), ta có:

$$\begin{cases} Q \geq \frac{mgd}{k_2 l - h} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,9 \cdot 1 - 0,7} = 600N \\ Q \geq \frac{mgl - mgd}{k_1 l + h} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 1 - 60 \cdot 10 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 1 + 0,7} = 369N \end{cases} \Rightarrow Q \geq 600N$$

Vậy: Muốn cân bằng người ấy phải ép mình vào vách đá một lực có độ lớn $Q \geq 600N$.

Chuyên đề 12: CÂN BẰNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

23. Một thanh mỏng đồng chất OA, khối lượng m, có thể quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh trục cố định O nằm ngang. C là điểm tiếp xúc của thanh với khối trụ đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Khối trụ khối lượng m được giữ cân bằng bởi một tấm chắn thẳng đứng như hình vẽ. Biết góc nghiêng của thanh là θ . Đoạn AC dài bằng $\frac{1}{4}$ chiều dài l của thanh. Bỏ qua mọi ma sát. Hỏi tấm chắn tác dụng lên khối trụ một lực là bao nhiêu? (Giải theo các hằng số m, g, θ).



Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh OA: trọng lực \vec{P} ; phản lực \vec{Q} của hình trụ tại C và phản lực \vec{R} của bản lề O (hình vẽ).

- Điều kiện cân bằng của thanh với trục quay qua O: $M_{P/O} = M_{Q/O}$ (1)

$$\Leftrightarrow P \frac{l}{2} \cos \theta = Q \frac{3}{4} l \Leftrightarrow mg \frac{l}{2} \cos \theta = Q \frac{3}{4} l$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2}{3} mg \cos \theta$$

- Các lực tác dụng lên khối trụ: trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 của tấm chắn và mặt phẳng nằm ngang; và áp lực \vec{N} của thanh OA ($N = Q$).

- Khối trụ cân bằng nên:

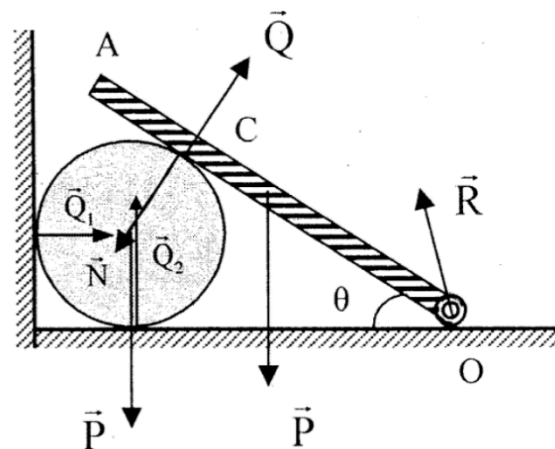
$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{N} = \vec{0} \quad (2)$$

- Chiếu (2) lên phương nằm ngang, ta được:

$$Q_1 = N \sin \theta = Q \sin \theta = \frac{2}{3} mg \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} mg \sin 2\theta$$

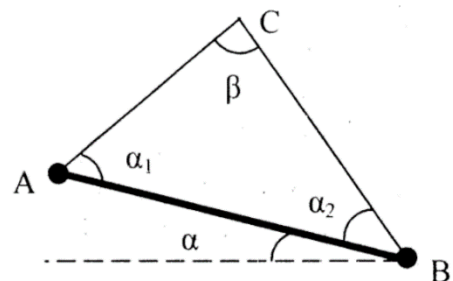
Vậy: Lực do tấm chắn tác dụng lên hình trụ là

$$Q_1 = \frac{1}{3} mg \sin 2\theta.$$



24. Thanh AB có khối lượng không đáng kể. Đầu A gắn vật nặng $m_1 = 600g$, đầu B gắn vật nặng $m_2 = 400g$. Bộc một sợi dây không dẫn vào hai đầu AB rồi treo vào một điểm C cố định không ma sát sao cho thanh cân bằng.

Biết $AC + CB = 30cm$.



- a) Tính chiều dài mỗi đoạn CA và CB.
 b) Biết thanh AB hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 10^\circ$. Tính chiều dài của AB.

Bài giải

a) Chiều dài mỗi đoạn CA và CB

- Các lực tác dụng lên thanh AB: các trọng lực \vec{P}_1, \vec{P}_2 ; các lực căng \vec{T}_1, \vec{T}_2 .

- Vì thanh AB cân bằng nên: $M_{T_1/B} = M_{P_1/B}; M_{T_2/A} = M_{P_2/A}$.

$$\Leftrightarrow T_1 AB \sin \alpha_1 = P_1 AB \cos \alpha \Leftrightarrow T_1 \sin \alpha_1 = P_1 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\text{Và } T_2 AB \sin \alpha_2 = P_2 AB \cos \alpha \Leftrightarrow T_2 \sin \alpha_2 = P_2 \cos \alpha \quad (2)$$

- Vì $T_1 = T_2 = T$ (không có ma sát tại điểm treo C)

$$P_1 = m_1 g = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ N và } P_2 = m_2 g = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ N.}$$

$$\text{- Từ (1) và (2), ta được: } \sin \alpha_1 = \frac{3 \sin \alpha_2}{2} \quad (3)$$

- Áp dụng định lí hàm sin cho ΔABC , ta được:

$$\frac{CB}{\sin \alpha_1} = \frac{AC}{\sin \alpha_2} \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{3}{2}$$

- Mặt khác: $AC + CB = 30 \text{ cm}$, suy ra: $AC = 12 \text{ cm}; CB = 18 \text{ cm}$.

Vậy: $AC = 12 \text{ cm}; CB = 18 \text{ cm}$.

b) Chiều dài thanh AB

$$\text{- Thanh AB cân bằng nên: } \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = \vec{0} \quad (4)$$

- Chiếu (4) lên phương nằm ngang, ta được:

$$T_1 \cos(\alpha_1 - \alpha) = T_2 \cos(\alpha_2 + \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha = \alpha_2 + \alpha \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 + 2\alpha = \alpha_2 + 20^\circ$$

$$\text{- Từ (3): } \sin(\alpha_2 + 20^\circ) = \frac{3 \sin \alpha_2}{2}$$

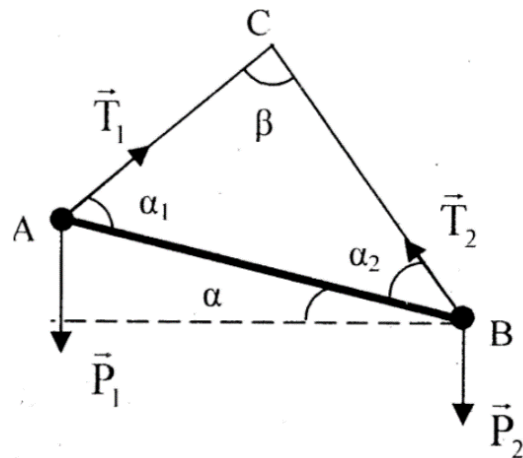
$$\Rightarrow \alpha_2 = 31,38^\circ \text{ và } \alpha_1 = 51,38^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= 180^\circ - (51,38^\circ + 31,38^\circ) = 97,24^\circ$$

- Áp dụng định lí hàm số sin cho ΔABC , ta được:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha_1}$$



$$\Rightarrow AB = BC \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_1} = 18 \cdot \frac{\sin 97,24^\circ}{\sin 51,38^\circ} = 22,89 \text{ cm.}$$

Vậy: Chiều dài thanh AB là 22,89cm.

25. Một thanh đồng chất BC tựa vào tường thẳng đứng ở B nhờ dây AC dài l hợp với tường góc α . Cho $BC = d$. Hỏi hệ số ma sát giữa thanh và tường phải thỏa mãn điều kiện nào để thanh cân bằng?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 1995)

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh: Phản lực \vec{R} của tường đặt vào đầu B; trọng lượng thanh \vec{P} ; lực căng dây \vec{T} .

- Thanh nằm cân bằng nên: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$

và: $M_p = M_T$ (đối với trục quay qua B)

$$\text{hay: } \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{và: } mg \cdot \frac{d}{2} \sin \beta = T h \sin \alpha \quad (2)$$

(Phân tích \vec{R} làm hai phần: Phản lực vuông góc \vec{N} và phản lực ma sát \vec{f} ;

đặt $AB = h$ và góc $\widehat{ABC} = \beta$, hệ quy chiếu là Bxy; trọng lượng thanh là

$P = mg$).

- Chiếu (1) lên hai trục Bx và By, ta được:

$$N = T \sin \alpha; f = mg - T \cos \alpha \quad (1')$$

$$\text{- Từ (2) suy ra: } T = \frac{mgd \cdot \sin \beta}{2h \cdot \sin \alpha} \quad (2')$$

- Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác ABC:

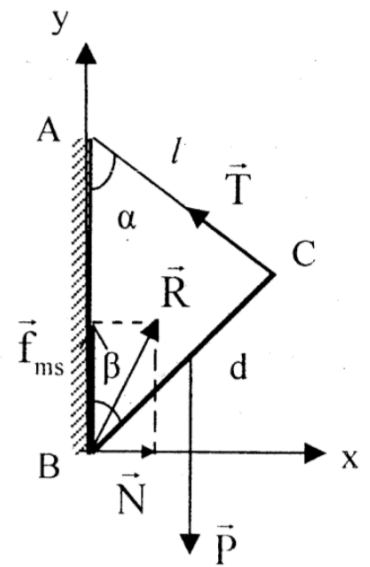
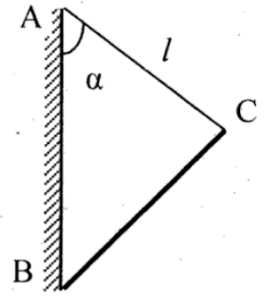
$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3)$$

$$\Rightarrow h = \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \quad \text{và} \quad T = \frac{mg \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad (4)$$

$$\text{Suy ra: } N = \frac{mg \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{và: } f = mg \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \right) = mg \cdot \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad (5)$$

- Để có cân bằng thì ma sát phải là ma sát nghỉ và ta có: $f \leq kN$ với k là hệ số ma sát.



$$\Leftrightarrow mg \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \leq k \frac{mg \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha} \quad (6)$$

- Từ (3) ta có: $\sin \beta = \frac{1}{d} \sin \alpha \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{d}$

- Thay vào (6) ta được: $k \geq \frac{2\sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha}$.

Vậy: Để thanh cân bằng thì $k \geq \frac{2\sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha}$.

26. Thanh AB đồng chất. Đầu A tựa lên sàn nhám. Đầu B giữ cân bằng bởi sợi dây treo vào C. Hệ số ma sát giữa thanh và sàn là k. Góc giữa thanh và sàn là 45° . Hỏi dây BC nghiêng với phương ngang góc α bằng bao nhiêu thì thanh bắt đầu trượt?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2000)

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh AB: Trọng lực \vec{P} ; lực căng \vec{T} ; phản lực \vec{Q} và lực ma sát nghỉ \vec{F}_{ms} .

- Thanh nằm cân bằng khi: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = \vec{0}$ (1)

và $M_{F_{ms}/B} + M_{F_Q/B} = M_{F_P/B}$ (với trục quay qua B) (2)

- Chiếu (1) xuống hai trục nằm ngang và thẳng đứng, ta được:

$$F_{ms} = T \cos \alpha \quad (1)$$

$$P = Q + T \sin \alpha \quad (2)$$

- Từ (2): $F_{ms} \cdot AB \cdot \sin 45^\circ + Q \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2} P \cdot AB \cdot \cos 45^\circ$

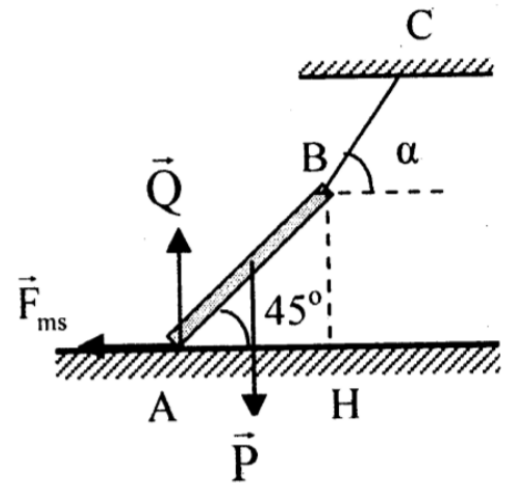
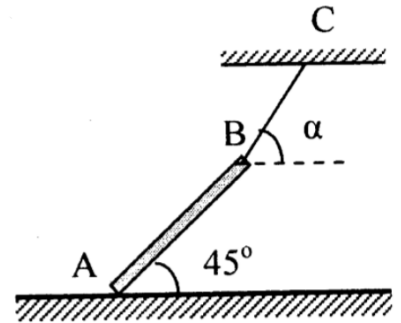
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} P - F_{ms} = \frac{1}{2} (Q + T \sin \alpha) - F_{ms}$$

$$\Rightarrow Q = T \sin \alpha - 2T \cos \alpha = T (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)$$

- Thanh nằm cân bằng nên ma sát phải là ma sát nghỉ, do đó: $F_{ms} \leq kN = kQ$.

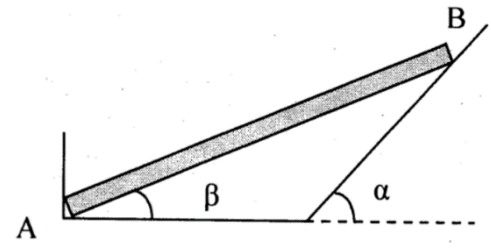
$$\Rightarrow T \cos \alpha \leq kT (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (1 + 2k) \leq k \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{1 + 2k}{k}$$



Vậy: Thanh sẽ bắt đầu trượt khi: $\alpha \leq \arctan \frac{1+2k}{k}$.

27. Một thanh đồng chất AB khối lượng phân bố đều, trọng lượng P. Đầu A tựa lên sàn nằm ngang tại vị trí có một gờ thẳng đứng. Đầu B tựa lên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Khi cân bằng, thanh hợp với phương ngang một góc β . Bỏ qua mọi ma sát. Xác định áp lực do thanh nén lên mặt ngang, mặt nghiêng và gờ thẳng đứng.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2001)

Bài giải

Gọi $\vec{Q}_A, \vec{Q}_B, \vec{Q}_D$ là phản lực do mặt ngang, mặt nghiêng và gờ thẳng đứng tác dụng lên thanh.

- Thanh AB cân bằng nên: $\vec{P} + \vec{Q}_A + \vec{Q}_B + \vec{Q}_D = \vec{0}$ (1)

và $M_{th} = M_{ng}$ (trục quay qua A) (2)

- Từ (1):

$Q_D = Q_B \sin \alpha; P = Q_A + Q_B \cos \alpha$ (1')

- Từ (2): $P \frac{l}{2} \cos \beta = Q_B AK = Q_B l \cos(\alpha - \beta)$ (2')

- Từ (2'): $Q_B = \frac{P \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)}$.

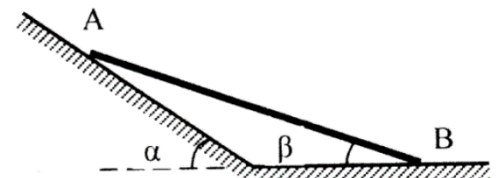
- Thay Q_B vào (1') ta được: $Q_D = \frac{P \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)}$.

- Từ (1'): $Q_A = P \left(1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)} \right)$.

Vậy: Áp lực do thanh nén lên mặt ngang, mặt nghiêng và gờ thẳng đứng là

$N_A = Q_A = P \left(1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)} \right); N_B = Q_B = \frac{P \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)}; N_D = Q_D = \frac{P \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos(\alpha - \beta)}$.

28. Thanh AB đồng chất tiết diện đều, khối lượng $m = 100\text{kg}$. Thanh được đặt nằm nghiêng một góc ($\varphi = 20^\circ$) với phương nằm ngang. Đầu B của thanh tựa trên mặt sàn nằm ngang với hệ số ma sát $k_1 = 0.5$.



Đầu A của thanh tựa trên mặt phẳng nghiêng với hệ số ma sát $k_2 = 0,1$, góc hợp bởi mặt phẳng nghiêng với phương ngang là $\alpha = 30^\circ$. Tác dụng lên đầu A của thanh một lực kéo \vec{F} hướng lên dọc theo mặt phẳng nghiêng.

Tính giá trị cực đại của lực kéo \vec{F} để thanh vẫn nằm yên cân bằng.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2003)

Bài giải

- Các lực tác dụng lên thanh AB: lực kéo \vec{F} ; trọng lực \vec{P} ; các lực ma sát $\vec{f}_{ms1}, \vec{f}_{ms2}$; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 .

- Giá trị cực đại của F ứng với thanh AB có xu hướng trượt lên, đồng thời các lực ma sát nghỉ có trị cực đại:

$$F_{ms1} = k_1 N_1 \text{ và } F_{ms2} = k_2 N_2 \quad (N_1 = Q_1; N_2 = Q_2).$$

- Thanh nằm cân bằng khi:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{f}_{ms1} + \vec{f}_{ms2} = \vec{0} \quad (1)$$

$$M_{th} = M_{ng} \text{ (với trục quay qua A)} \quad (2)$$

-Chiếu (1) lên phương nằm ngang và phương thẳng đứng, ta được:

$$- F \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha + k_2 Q_2 \cos \alpha + k_1 Q_1 = 0 \quad (3)$$

$$F \sin \alpha + Q_2 \cos \alpha - k_2 Q_2 \sin \alpha + Q_1 - P = 0 \quad (4)$$

$$\text{- Từ (2): } \frac{l}{2} P \cos \varphi - Q_1 l \cos \varphi - k_1 Q_1 \sin \varphi = 0 \quad (5)$$

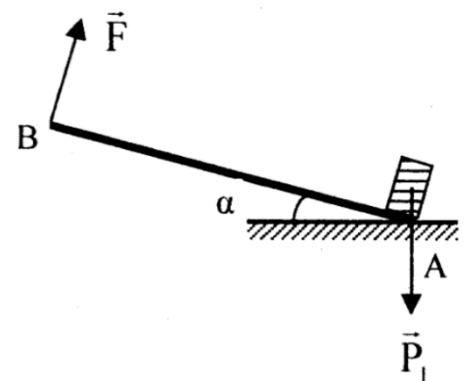
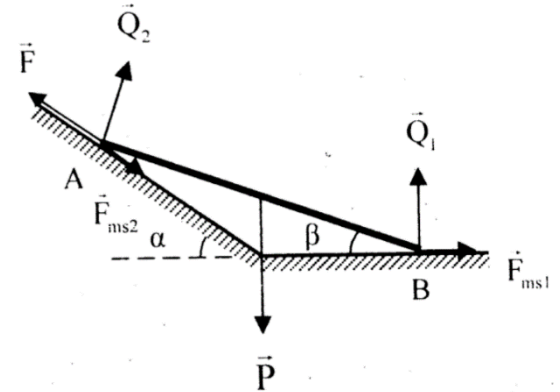
$$\text{- Từ (5) suy ra: } Q_1 = \frac{mg}{2(1+k_1 \tan \varphi)} = \frac{100 \cdot 10}{2(1+0,5 \tan 30^\circ)} = 423 N$$

$$\text{- Từ (3) và (4) ta được: } Q_2 = 394 N \text{ và } F = 511 N.$$

Vậy: Giá trị cực đại của lực kéo F để thanh vẫn nằm cân bằng là $F_{max} = 511 N$.

29. Thanh AB có trọng lượng $P = 2N$, chiều dài $AB = 20cm$; đầu A tựa vào mặt đất, đầu B chịu tác dụng của lực \vec{F} vuông góc với thanh tại B. Tại đầu A của thanh người ta đặt lên nó một hình hộp có trọng lượng $P_1 = 1N$, phương trọng lực của vật \vec{P}_1 đi qua điểm A như hình vẽ. Hệ thống cân bằng tại vị trí thanh hợp với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 20^\circ$. Gọi hệ số ma sát giữa thanh và mặt đất là k_1 , giữa thanh và vật hình hộp là k_2 . Lấy $g = 10m/s^2$.

a) Tìm độ lớn của lực \vec{F} .



b) Tìm điều kiện của k_1, k_2 để hệ cân bằng.

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2004)

Bài giải

1. Độ lớn của lực F

- Các lực tác dụng lên vật hình hộp: Trọng lực \vec{P}_1 ; phản lực \vec{Q}_1 ; lực ma sát \vec{F}_{ms1} .

- Để vật hình hộp không trượt trên thanh AB thì: $P_1 \sin \alpha \leq F_{ms2}$.

$$\Leftrightarrow P_1 \sin \alpha \leq k_2 P_1 \cos \alpha \Rightarrow k_2 \geq \tan 20^\circ = 0,364$$

- Xét hệ gồm thanh AB và vật hình hộp. Điều kiện cân bằng của hệ:

$$\vec{P} + \vec{P}_1 + \vec{Q}_{12} + \vec{F}_{ms} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$M_{\vec{F}/A} = M_{\vec{P}/A} \quad (\text{trục quay qua A}) \quad (2)$$

- Chiều (1) lên hai trục Ox (nằm ngang) và Oy (thẳng đứng), ta được:

$$-F_{ms} + F \sin \alpha \quad (3)$$

$$\text{và } -P - P_1 + Q_{12} + F \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

$$\text{- Từ (2): } F \cdot AB = P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha \quad (5)$$

$$\Rightarrow F = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ = 0,94 \text{ N}$$

Vậy: Độ lớn của lực F = 0.94N.

2. Điều kiện của k_1, k_2 để hệ cân bằng

- Từ(3): $F_{ms} = F \sin \alpha = 0,94 \cdot \sin 20^\circ = 0,32 \text{ N}$.

- Từ (4): $Q_{12} = P + P_1 - F \cos \alpha = 2 + 1 - 0,94 \cdot \cos 20^\circ = 2,12 \text{ N}$.

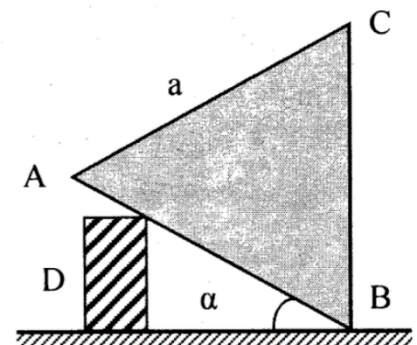
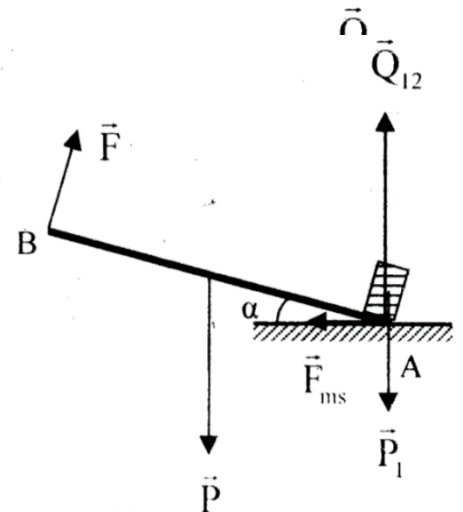
Để hệ cân bằng thì: $F_{ms} < k_1 N_{12} = k_1 Q_{12}$.

$$\Rightarrow k_1 \geq \frac{F_{ms}}{Q_{12}} = \frac{0,32}{2,12} = 0,15$$

Vậy: Để hệ cân bằng thì $k_1 \geq 0,15; k_2 \geq 0,364$.

30. Một vật có khối lượng 10kg hình lăng trụ đồng chất có tiết diện thẳng là tam giác đều ABC cạnh $a = 60\text{cm}$. Vật được kê trên một giá đỡ cố định D sao cho mặt BC thẳng đứng, mặt AB tiếp xúc với giá đỡ tại E, với $EB = 40\text{cm}$. Coi hệ số ma sát giữa vật với giá đỡ và giữa vật với sàn là như nhau.

Biết hệ nằm cân bằng, tìm hệ số ma sát giữa vật và sàn.



Bài giải

- Các lực tác dụng vào vật:

+ Trọng lực \vec{P} .

+ Phản lực \vec{Q}_1 , lực ma sát \vec{F}_{ms1} của sàn.

+ Phản lực \vec{Q}_2 , lực ma sát \vec{F}_{ms2} của giá đỡ.

- Vật nằm cân bằng: $\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{ms1} + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms2} = \vec{0}$ (1)

và $M_{th} = M_{ng}$ (trục quay qua B) (2)

- Chiều (1) lên hai trục Ox (nằm ngang) và Oy (thẳng đứng), ta được:

$$\begin{cases} Q_2 \sin 30^\circ - F_{ms2} \cos 30^\circ - F_{ms1} = 0 & (3) \\ Q_1 + Q_2 \cos 30^\circ + F_{ms2} \sin 30^\circ - P = 0 & (4) \end{cases}$$

- Từ (2): $Q_2 \cdot BE - P \cdot GH = 0$

$$\text{Với: } GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}; BE = \frac{2a}{3} \Rightarrow Q_2 = \frac{\sqrt{3}P}{4}$$

- Thay $Q_2 = \frac{\sqrt{3}P}{4}$ vào (3) và (4) ta được:

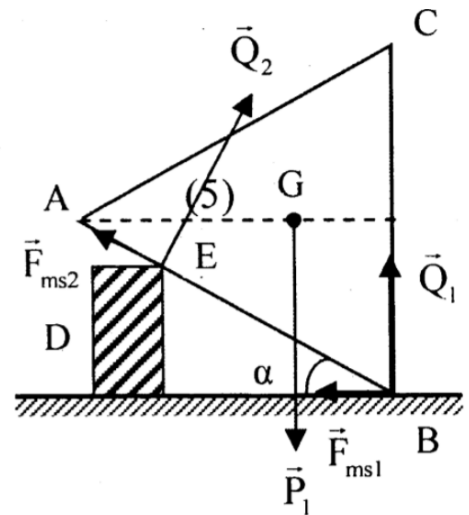
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}P}{4} \cdot \frac{1}{2} - F_{ms2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F_{ms1} = 0 \\ Q_1 + \frac{\sqrt{3}P}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F_{ms2} \cdot \frac{1}{2} - P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}P}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{ms2} - F_{ms1} = 0 \\ Q_1 + \frac{5P}{8} + \frac{1}{2} F_{ms2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}P}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{5P}{4} - 2Q_1 \right) - F_{ms1} = 0 \\ F_{ms2} = \frac{5P}{4} - 2Q_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{ms1} = -\frac{\sqrt{3}P}{2} + \sqrt{3}Q_1 \\ F_{ms2} = \frac{5P}{4} - 2Q_1 \end{cases}$$

- Vật không trượt: $F_{ms1} = -\frac{\sqrt{3}P}{2} + \sqrt{3}Q_1 \leq \mu Q_1 \Rightarrow \mu \geq \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{P}{Q_1}$

- Khi xảy ra sự trượt: $\begin{cases} F_{ms1} = \mu Q_1 \\ F_{ms2} = \mu Q_2 = \mu \cdot \frac{\sqrt{3}P}{4} \Rightarrow Q_1 = \frac{5P}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\mu P}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mu \geq 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\frac{1}{8}(5 - \mu\sqrt{3})} \Leftrightarrow \mu^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}\mu + 1 > 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \mu > \frac{4}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{13}{3}} \\ \mu < \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{13}{3}} \end{cases}$$

- Chọn điều kiện: $\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{13}{3}} \leq \mu \Rightarrow \mu \geq 0,23$ vì điều kiện trên không thỏa ($F_{ms1} \neq \mu Q_1$).

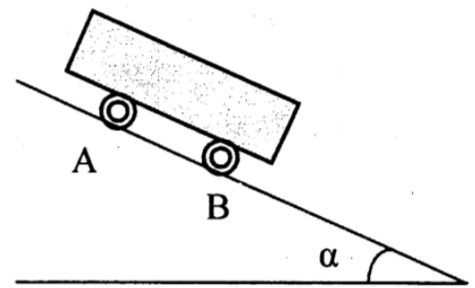
- Từ (5) suy ra: $Q_2 = \frac{GH}{BE} P = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{2a}{3}} P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10 \cdot 10 = 43,3N$.

- Thay $Q_2 = 43,3N$ vào các phương trình (3) và (4), ta được: $2,65\mu^2 - 100\mu + 21,65 = 0$, với điều kiện $\mu < 1 \Rightarrow \mu \approx 0,22$.

Vậy: Hệ số ma sát giữa vật và sàn là $\mu \approx 0,22$.

31. Một kiện hàng hình hộp chữ nhật đồng chất thả trượt trên mặt phẳng nghiêng nhờ hai con lăn rất nhỏ A và B. Hình hộp có chiều cao h gấp μ lần chiều dài l . Hệ số ma sát giữa các con lăn A, B với mặt phẳng nghiêng là k . Mặt phẳng nghiêng hợp với phương ngang một góc nhọn α (hình vẽ). Để kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật thì hệ số $\mu = \frac{h}{l}$ phải thỏa mãn điều kiện

gì?



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2011)

Bài giải

- Các lực tác dụng lên kiện hàng: Trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_A, \vec{Q}_B ; các lực ma sát $\vec{f}_{msA}, \vec{f}_{msB}$.

- Phương trình định luật II Niu-ton chuyển động của kiện hàng:

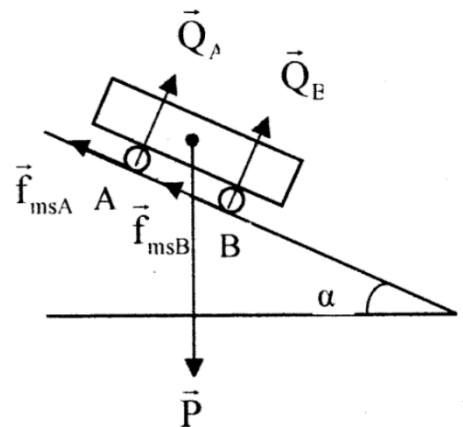
$$\vec{P} + \vec{Q}_A + \vec{Q}_B + \vec{f}_{msA} + \vec{f}_{msB} = \vec{0} \quad (1)$$

- Để kiện hàng trượt mà không bị lật thì đối với tâm quay là khối tâm: $M_{th} = M_{ng}$ (2)

- Chiều (1) lên phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng, ta được:

$$P \cos \alpha - Q_A - Q_B = 0 \quad (3)$$

- Từ (2): $Q_A \frac{l}{2} + f_{msA} \frac{h}{2} + f_{msB} \frac{h}{2} = Q_B \frac{l}{2}$



$$\Leftrightarrow Q_A l + kQ_A h + kQ_B h = Q_B l$$

$$\Rightarrow Q_A = Q_B \frac{l - kh}{l + kh} = Q_B \frac{l - k\mu}{l + k\mu} \quad (4)$$

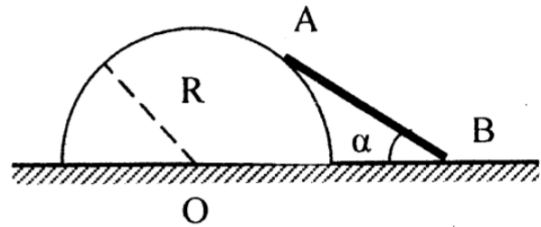
- Từ (3) và (4), ta được: $Q_A = \frac{l - k\mu}{2} mg \cos \alpha$; $Q_B = \frac{l + k\mu}{2} mg \cos \alpha$.

- Nhận xét: $Q_B \geq 0$ nên để kiện hàng không bị lật chỉ cần điều kiện của Q_A là $Q_A \geq 0$.

$$\Leftrightarrow Q_A = \frac{l - k\mu}{2} mg \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow \mu \leq \frac{l}{k}$$

Vậy: Để kiện hàng vẫn trượt mà không bị lật thì hệ số $\mu = \frac{h}{l} \leq \frac{l}{k}$.

32. Trên mặt bàn nằm ngang có một khối bán trụ cố định bán kính R . Trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với trục O của bán trụ (hình vẽ) có một thanh đồng chất AB chiều dài bằng R tựa đầu A lên bán trụ, đầu B ở trên mặt bàn. Trong lượng của thanh là P . Bỏ qua ma sát giữa bán trụ của thanh. Hệ số ma sát giữa thanh và mặt bàn



là $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Góc α (góc hợp bởi thanh AB và mặt bàn) phải thỏa mãn điều kiện gì để thanh ở trạng thái cân bằng?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2011)

Bài giải

- Thanh AB chịu tác dụng của các lực: Trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{Q}_1 của bán trụ ở A , phản lực \vec{Q}_2 của mặt bàn ở B , lực ma sát \vec{F}_{ms} .

- Điều kiện cân bằng của thanh AB :

$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms} = \vec{0} \quad (1)$$

$$M_{th} = M_{ng} \quad (\text{đối với trục quay qua } B) \quad (2)$$

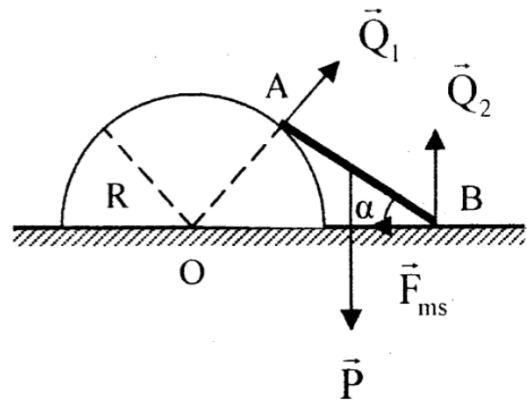
- Chiếu (1) lên hai trục Ox, Oy ta được:

$$Q_1 \cos \alpha - F_{ms} = 0 \quad (3)$$

$$Q_1 \sin \alpha + Q_2 - P = 0 \quad (4)$$

$$\text{- Từ (2): } P \frac{R \cos \alpha}{2} = Q_1 R \sin 2\alpha \quad (5)$$

(ΔOAB cân, nên $\widehat{BAN} = 2\alpha$)



- Mặt khác: $F_{ms} \leq \mu Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} Q_2$ (6)

- Từ (5) ta được: $Q_1 = \frac{R \cos \alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{P}{4 \sin \alpha}$

Thay biểu thức Q_1 vào (3) và (4) ta được:

$$F_{ms} = \frac{P}{4 \tan \alpha}; Q_2 = P - Q_1 \sin \alpha = \frac{3P}{4} \quad (7)$$

- Từ đó: $F_{ms} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} Q_2 \Leftrightarrow \frac{P}{4 \tan \alpha} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3P}{4} = \frac{\sqrt{3}P}{4}$

$$\Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \geq 30^\circ$$

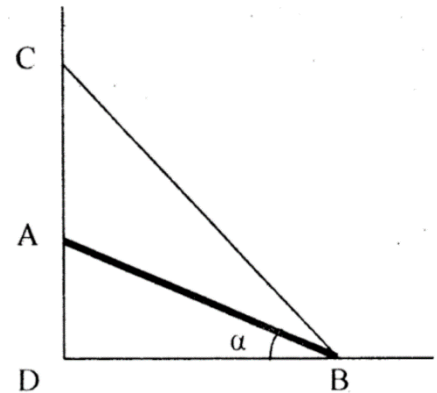
- Mặt khác, do đầu A của thanh luôn tựa trên bán trụ nên giá trị lớn nhất của góc α đạt được khi thanh AB trùng với phương tiếp tuyến với bán trụ tại A.

Suy ra: $\alpha_{max} = 45^\circ$

Vậy: Trạng thái cân bằng của thanh ứng với điều kiện: $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$.

33. Thanh AB đồng chất tiết diện đều, dài 2m, trọng lượng của thanh 50N. Đầu A tựa vào tường nhẵn thẳng đứng, đầu B nối với dây mảnh BC để thanh cân bằng. Thanh AB cân bằng ứng với góc $\alpha = \widehat{DBA} = 30^\circ$.

- Tính độ dài đoạn AC.
- Tính lực căng dây BC và phản lực của tường tác dụng lên thanh tại A.
- Giả sử bây giờ giữa tường và thanh có ma sát. Để thanh AB cân bằng như trên ($\alpha = 30^\circ$) thì dây BC hợp với phương ngang BD một góc $\beta = 60^\circ$. Tìm điều kiện của hệ số ma sát k giữa tường và thanh.



Bài giải

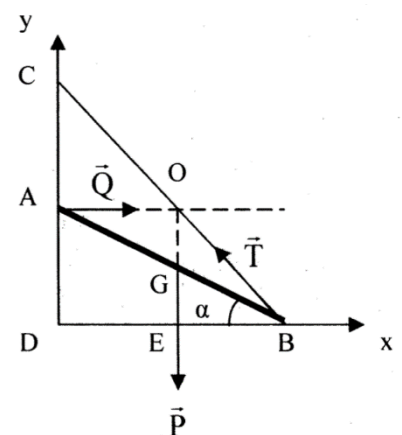
Ta có: $AB = 2m; P = 50N; \alpha = \widehat{DBA} = 30^\circ; \beta = \widehat{CBD}$.

a) Độ dài đoạn AC

- Các lực tác dụng lên thanh AB: trọng lực \vec{P} ; lực căng dây \vec{T} ; phản lực \vec{Q} của tường lên thanh.

- Thanh cân bằng nên: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} = \vec{0}$ (1)

Vì $\vec{F}_{hl} = \vec{0}$ nên điểm đồng quy O của 3 lực trên phải ở trên dây BC. Do đó:



$$\sin \alpha = \frac{OG}{AG} = \frac{GE}{GB} \text{ mà } GA = GB$$

$$\Rightarrow OG = GE$$

$$\text{và } OG = \frac{1}{2} AC; GE = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AD = AC$$

$$\text{Vì } \alpha = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{1}{2} AB = 1m \Rightarrow AC = 1m$$

Vậy: Độ dài đoạn $AC = 1m$.

b) Lực căng dây BC và phản lực của tường tác dụng lên thanh tại A

- Chiều (1) lên hai trục Dx và Dy (hình vẽ), ta được:

$$Q - T \cos \beta = 0 \Rightarrow Q = T \cos \beta$$

$$T \sin \beta - P = 0 \Rightarrow P = T \sin \beta$$

$$\text{Ta có: } DB = AB \cdot \cos \alpha = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m.$$

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}m.$$

$$\sin \beta = \frac{DC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ mà } T = \frac{P}{\sin \beta} = \frac{50}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = \frac{50}{2} \sqrt{7} = 25\sqrt{7} = 66,14N$$

$$\text{và } Q = T \cos \beta = 25\sqrt{7} \left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right)^2 \right) = 25\sqrt{3} = 43,3N.$$

Vậy: Lực căng dây BC và phản lực của tường tác dụng lên thanh tại A là $T = 66,14N$ và $Q = 43,3N$.

c) Điều kiện của hệ số ma sát k giữa tường và thanh

- Các lực tác dụng lên thanh AB: trọng lực \vec{P} ; lực căng dây \vec{T} ; phản lực \vec{Q} ; lực ma sát nghỉ \vec{F}_{ms} .

$$\text{- Thanh cân bằng nên: } \vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\text{và } M_{\vec{P}/A} = M_{\vec{T}/A} \quad (3)$$

- Chiều (2) lên hai trục Dx và Dy, ta được:

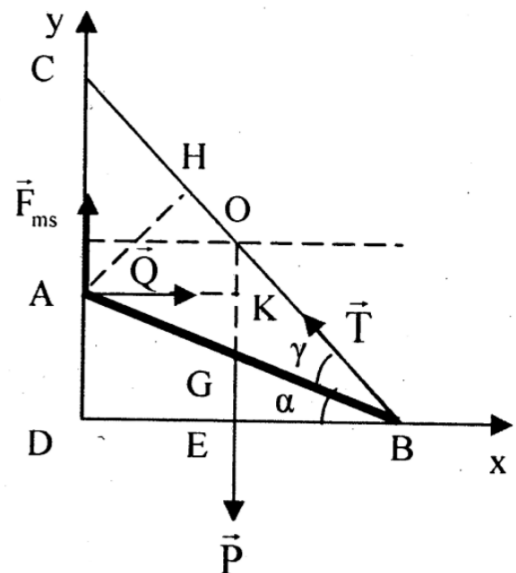
$$-T \cos \beta + Q = 0 \Rightarrow Q = T \cos \beta \quad (2')$$

$$-P + T \sin \beta + F_{ms} = 0 \Rightarrow F_{ms} = P - T \sin \beta \quad (2'')$$

- Để thanh AB không trượt:

$$F_{ms} \leq kN = kQ \quad (4)$$

Thay (2') và (2'') vào (3), ta được:



$$P - T \sin \beta \leq kT \cos \beta.$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{P - T \sin \beta}{T \cos \beta} \quad (5)$$

$$\text{- Từ (3): } AK \cdot P = T \cdot AH \Rightarrow T = \frac{AK}{AH} P \quad (6)$$

$$\text{Với: } \sin \gamma = \frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \sin \gamma = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1m (\gamma = \alpha = 30^\circ; \beta = 60^\circ).$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{AG} \Rightarrow AK = AG \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} m$$

$$\text{- Thay vào (6), ta được: } T = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 = 25\sqrt{3} N.$$

$$\text{- Từ (5), ta được: } k \geq \frac{50 - 25\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12,5}{12,5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy: Điều kiện của hệ số ma sát k giữa tường và thanh là $k \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

34. Một con lắc gồm một thanh nhẹ chiều dài l và một quả nặng ở đầu. Đầu kia của con lắc gắn một ống lót hình trụ nhẹ có bán kính r áp vào trục quay nằm ngang. Hệ số ma sát giữa ống và trục là μ . Hãy xác định góc lệch cực đại của thanh khỏi phương thẳng đứng khi cân bằng.



Bài giải

- Các lực tác dụng lên hệ “con lắc + ống lót”: trọng lực \vec{P} tác dụng vào vật m ; phản lực \vec{Q} của trục quay; lực ma sát với trục \vec{F}_{ms} .

- Khi con lắc cân bằng:

+ Đối với trục quay qua điểm tiếp xúc của ống lót con lắc với trục:

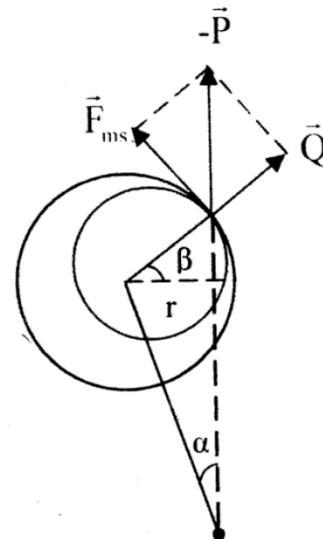
$$\sum M = 0 \quad (1)$$

$$+ \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = \vec{0} \quad (2)$$

- Từ (2):

$$F_{ms} \sin \beta = Q \cos \beta \Rightarrow \tan \beta = \frac{Q}{F_{ms}} = \frac{N}{F_{ms}} = \frac{1}{\mu} \quad (3)$$

$$\text{- Trên hình vẽ: } r \cos \beta = l \sin \alpha \quad (4)$$

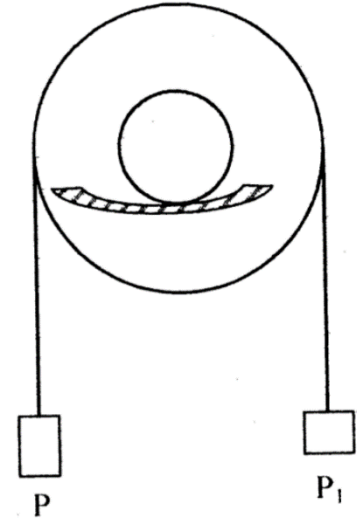


$$\text{Mà } \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (5)$$

$$\text{- Từ (4) và (5): } \sin \alpha = \frac{r}{l} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{r}{l} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right).$$

$$\text{Vậy: Góc lệch cực đại của thanh khỏi phương thẳng đứng khi cân bằng là } \alpha = \arcsin \left(\frac{r}{l} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right).$$

35. Một ròng rọc có trọng lượng Q , bán kính R , trục ròng rọc có bán kính r . Trục ròng rọc được đặt lên hai giá có dạng máng hình trụ bán kính R_0 có đường sinh song song với trục hình trụ như hình bên. Một sợi dây không dẫn khối lượng không đáng kể vắt quanh ròng rọc hai đầu mang hai trọng lượng P_1 và P (sợi dây không trượt trên rãnh của ròng rọc). Hệ số ma sát giữa trục ròng rọc và giá đỡ là μ .



- P_1 phải có giá trị trong khoảng nào để ròng rọc còn cân bằng?
- Kích thước bé nhất của máng trụ (cung AB) là bao nhiêu để ròng rọc không bị lăn ra khỏi máng?
- Áp dụng: $P = 100N$, $Q = 10N$, $R = 10cm$, $r = 1cm$, $R_0 = 20cm$, $\mu = 0,2$.

Bài giải

a) Giá trị của P_1

- Trường hợp $P_1 > P$

+ Ròng rọc bị lăn sang phải đến vị trí C và cân bằng.

$$\text{Ta có: } \vec{P}_1 + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F}_{ms} = \vec{0} \quad (1)$$

$$M_{th} = M_{ng} \quad (2)$$

+ Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy. ta được:

$$N \cos \alpha + F_{ms} \sin \alpha - (P_1 + P + Q) = 0 \quad (3)$$

$$F_{ms} \cos \alpha - N \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow F_{ms} = N \tan \alpha \leq \mu N \Rightarrow \tan \alpha \leq \mu \quad (5)$$

$$\text{+ Từ (2): } (P_1 - P)R - F_{ms}r = 0 \Rightarrow F_{ms} = \frac{R}{r}(P_1 - P) \quad (6)$$

$$\text{+ Từ (5) và (6): } N = \frac{R}{r \tan \alpha}(P_1 - P)$$

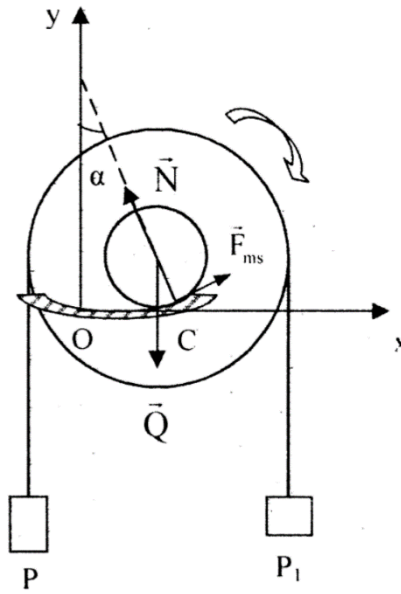
+Thay N và F vào (3), ta được:

$$P_1 = \frac{P \left(1 + \frac{R}{r \sin \alpha} \right) + Q}{\frac{R}{r \sin \alpha} - 1}$$

+ Từ (6) ta thấy $P_{1\max}$ ứng với $F_{ms} = \mu N \tan \alpha = \mu$

$$\text{và } P_{1\max} = \frac{P \left(1 + \frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} \right) + Q}{\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} - 1}$$

- Trường hợp $P_1 < P$



Tương tự như trên nhưng thay P_1 bởi P và P bởi P_1 , ta được: $P_{1\min}$ khi $\tan \alpha = \mu$.

$$\text{Và } P_{1\min} = \frac{P \left(\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} \right) + Q}{\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} + 1}$$

Từ đó: $P_{1\min} < P_1 < P_{1\max}$

$$\Leftrightarrow \frac{P \left(\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} \right) + Q}{\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} + 1} < P_1 < \frac{P \left(1 + \frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} \right) + Q}{\frac{R \sqrt{1 + \mu^2}}{r \mu} - 1}$$

Vậy: Để ròng rọc cân bằng thì P_1 phải nằm trong khoảng: $P_{1\min} < P_1 < P_{1\max}$.

b) Kích thước bé nhất của máng trụ để ròng rọc không bị lăn ra khỏi máng

Ta có: $\widehat{AB} = 2R_0 \cdot \tan \alpha = 2R_0 \mu$.

Vậy: Kích thước bé nhất của máng trụ là $\widehat{AB} = 2R_0 \mu$.

c) Áp dụng

Với $P = 100N$, $Q = 10N$, $R = 10cm$, $r = 1cm$, $R_0 = 20cm$, $\mu = 0,2$, ta được:

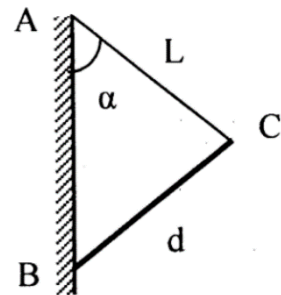
$$P_{1\max} = \frac{100 \cdot \left(1 + \frac{10}{1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 0,2^2}}{0,2} \right) + 10}{\frac{10 \sqrt{1 + 0,2^2}}{1} - 1} = 104N$$

$$P_{lmin} = \frac{100 \cdot \left(\frac{10}{1} \cdot \frac{\sqrt{1+0,2^2}}{0,2} \right) + 10}{\frac{R}{r} \cdot \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} + 1} = 96 N$$

$$\widehat{AB}_{min} = 2.20.0,2 = 40 cm.$$

Vậy: Với các giá trị đã cho trên thì $P_{lmin} = 96 N$; $P_{lmax} = 104 N$ và $\widehat{AB}_{min} = 40 cm$.

36. Một thanh rắn đồng chất, tiết diện đều BC tựa vào tường thẳng đứng tại B nhờ dây AC có chiều dài L hợp với tường một góc như hình vẽ. Biết thanh BC có độ dài d. Xác định hệ số ma sát giữa thanh và tường để thanh cân bằng.



Bài giải

Đặt $AB = h$ và $\widehat{ABC} = \beta$

- Các lực tác dụng vào thanh BC: trọng lực \vec{P} ; lực căng \vec{T} ; phản lực \vec{Q} ; lực ma sát \vec{F}_{ms} .

- Điều kiện cân bằng của thanh: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{F}_{ms} = \vec{0}$ (1)

và: $M_{th/B} = M_{ng/B}$ (trục quay qua B) (2)

- Chiều (1) lên các trục tọa độ của hệ tọa độ Bxy (hình vẽ), ta được:

$$Q - T \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$F_{ms} - P + T \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

- Từ (2): $P \frac{d}{2} \cdot \sin \beta = Th \cdot \sin \alpha \Rightarrow T = mg \cdot \frac{d \cdot \sin \beta}{2h \cdot \sin \alpha}$ (5)

- Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ABC, ta được:

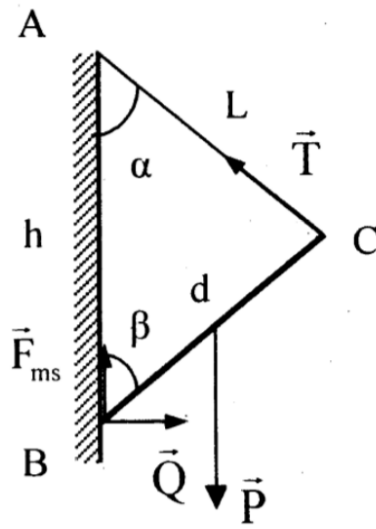
$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{L}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \quad (6)$$

- Từ (5), (6) và (3) ta được:

$$T = \frac{mg \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}; Q = \frac{mg \cdot \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad (7)$$

- Từ (4): $F_{ms} = mg \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \right)$ (8)



- Để thanh cân bằng thì lực ma sát phải là ma sát nghỉ nên: $F_{ms} \leq kN = kQ$, với k là hệ số ma sát.

$$\Leftrightarrow mg \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \right) \leq k \frac{mg \cdot \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad (9)$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{2 \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = \left(\frac{2}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) \quad (10)$$

- Từ định lý hàm số sin ở trên, ta có: $\sin \beta = \frac{L \cdot \sin \alpha}{d}$.

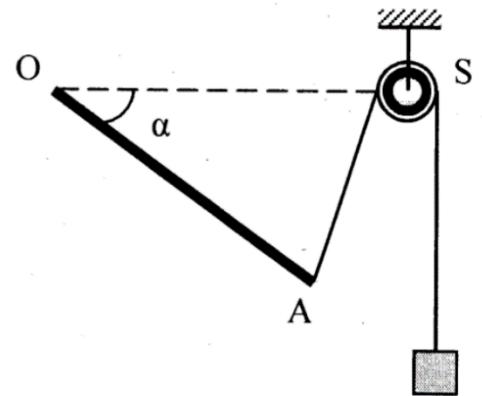
$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{d^2 - L^2 \sin^2 \alpha}}{d} \quad (11)$$

$$\text{- Từ (10): } k \geq \frac{2\sqrt{d^2 - L^2 \sin^2 \alpha}}{L \cdot \sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \quad (12)$$

Vậy: Để thanh cân bằng thì hệ số ma sát giữa thanh và tường phải là $k \geq \frac{2\sqrt{d^2 - L^2 \sin^2 \alpha}}{L \cdot \sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha}$.

37. Một thanh đồng chất, trọng lượng $Q = 2\sqrt{3}N$ có thể quay quanh chốt ở đầu O (hình vẽ). Đầu A của thanh được nối bằng dây không dẫn, vắt qua ròng rọc S, với một vật có trọng lượng $P = 1N$. S ở cùng độ cao với O và $OS = OA$. Khối lượng của ròng rọc và dây nhỏ không đáng kể.

- Tính góc $\alpha = \widehat{SOA}$ ứng với cân bằng của hệ thống và tìm phản lực của chốt O.
- Cân bằng này là bền hay không bền?



Bài giải

- Tính góc $\alpha = \widehat{SOA}$ ứng với cân bằng của hệ thống và tìm phản lực của chốt O

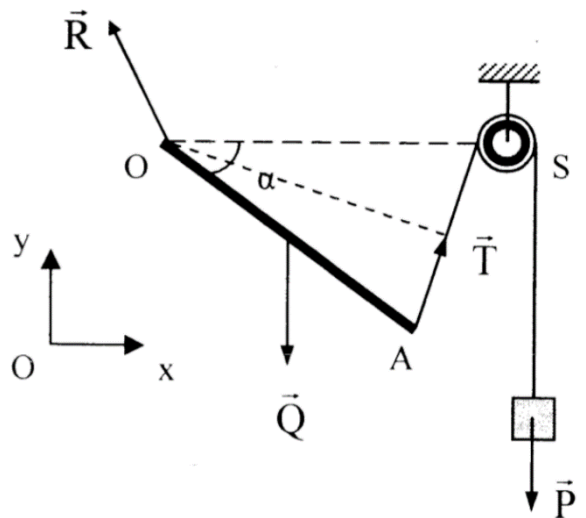
- Các lực tác dụng lên thanh OA: trọng lực \vec{Q} ; lực căng \vec{T} ($T = P$); phản lực \vec{R} (của chốt O).

- Thanh OA cân bằng nên: $\vec{Q} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$ (1)

$$\text{Và: } M_{P/O} = M_{Q/O} \quad (2)$$

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy của hệ tọa độ Oxy, ta được:

$$R_x = -P \cos \beta = -P \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$



$$R_y = Q - P \sin \beta = Q - P \cos \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

$$\text{- Từ (2): } Pl \cos \frac{\alpha}{2} = Q \frac{l}{2} \cos \alpha \quad (5)$$

($\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; l là chiều dài của thanh OA)

Đặt $\cos \frac{\alpha}{2} = x$ ta được $Px = \frac{Q}{2}(2x^2 - 1)$.

Thay $P = 1N$ và $Q = 2\sqrt{3}N$ vào ta được:

$$4\sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}}$$

- Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$: ΔSOA là tam giác đều.

Từ đó: $R_x = -P \sin \frac{\alpha}{2} = -1 \cdot \sin 30^\circ = -0,5N$;

$$R_y = Q - P \cos \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{3} - 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}N.$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,5)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}N.$$

Vậy: Góc $\alpha = 60^\circ$ và phản lực của chốt O lên thanh là $R = \sqrt{7}N$.

b) Loại cân bằng? Thanh OA đang cân bằng với góc $\alpha = 60^\circ$:

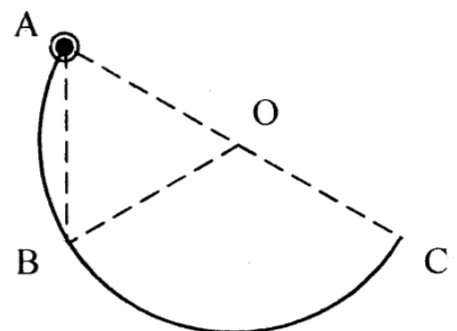
- Khi làm cho thanh OA quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O một góc nhỏ (tức điểm A dịch lên trên) thì góc α giảm khi đó $\cos \alpha$ sẽ tăng nhanh hơn $\cos \frac{\alpha}{2}$ làm cho $M_{Q/O} > M_{P/O}$. Kết quả này làm cho thanh OA quay trở về vị trí cân bằng.

- Ngược lại, khi làm cho thanh OA quay theo cùng chiều kim đồng hồ quanh trục O một góc nhỏ (tức điểm A dịch xuống dưới) thì góc α tăng khi đó $\cos \alpha$ sẽ giảm nhanh hơn $\cos \frac{\alpha}{2}$ làm cho $M_{Q/O} < M_{P/O}$. Kết quả này

làm thanh OA quay trở về vị trí cân bằng.

Vậy: Cân bằng của thanh OA là cân bằng bền.

38. Một đoạn dây thép đồng chất, tiết diện đều được uốn thành nửa vòng tròn bán kính R. Đầu trên được gắn chặt với một vòng nhỏ khối lượng không đáng kể rồi treo vào đỉnh A đóng nằm ngang trên tường nhẵn, thẳng đứng. Vòng được đỡ bởi đỉnh B đóng trên tường, hai



đỉnh cùng nằm trên đường thẳng đứng và cách nhau một khoảng bằng R . Nửa vòng dây nằm cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng. Cho biết khối tâm G của nửa vòng dây nằm cách tâm O của nó một khoảng $OG = \frac{2R}{\pi}$. Bỏ qua ma sát. Tìm lực do nửa vòng dây thép tác dụng lên đỉnh A .

Bài giải

Gọi P là trọng lượng nửa vòng dây thép. Các lực tác dụng lên nửa vòng dây thép: trọng lực \vec{P} ; các phản lực của đỉnh A và B : \vec{Q}_A, \vec{Q}_B .

- Nửa vòng dây thép nằm cân bằng nên:

$$\vec{P} + \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{M}_{\vec{Q}_B/A} = \vec{M}_{\vec{P}/A} \quad (2)$$

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy , ta được:

$$Q_{Ax} = Q_B \sin 60^\circ = Q_B \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1')$$

$$Q_{Ay} = P - Q_B \cos 60^\circ = P - \frac{Q_B}{2} \quad (1'')$$

- Từ (2): $Q_B \sin 60^\circ = P(R - OG \cot 60^\circ) \sin 60^\circ$

$$\Leftrightarrow Q_B R = P \left(R - \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow Q_B = P \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \right) \quad (3)$$

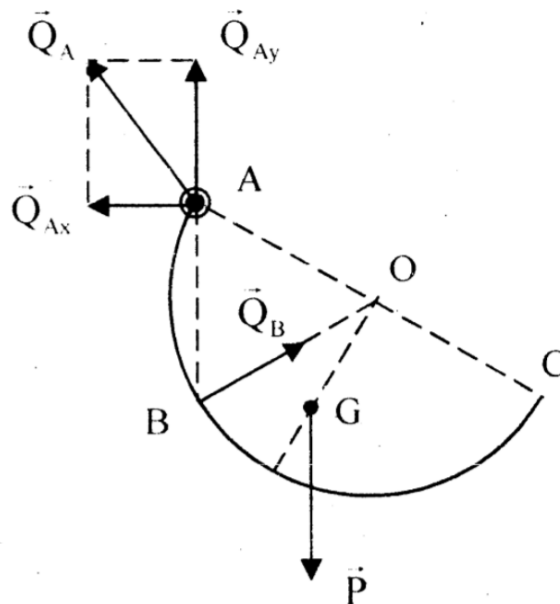
- Thay (3) vào (1) và (2) ta được:
$$\begin{cases} Q_{Ax} = \frac{P\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \right) \\ Q_{Ay} = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (4)$$

- Phản lực do đỉnh A tác dụng lên nửa vòng dây thép: $Q_A = \sqrt{Q_{Ax}^2 + Q_{Ay}^2}$.

$$\Leftrightarrow Q_A = \sqrt{\left[\frac{P\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \right) \right]^2 + \left[\frac{P}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \right) \right]^2} = P \sqrt{1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} + \frac{4}{3\pi^2}}$$

- Lực do nửa vòng dây thép tác dụng lên đỉnh A : $N_A = Q_A = P \sqrt{1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} + \frac{4}{3\pi^2}}$.

Vậy: Lực do nửa vòng dây thép tác dụng lên đỉnh A : $N_A = P \sqrt{1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}} + \frac{4}{3\pi^2}}$.



39. Trên mặt phẳng nằm ngang đặt một thanh AB đồng chất. Người ta nâng thanh một cách từ từ bằng cách tác dụng một lực \vec{F} không đổi vào đầu B và luôn vuông góc với thanh. Xác định hệ số ma sát giữa thanh và mặt ngang để nâng thanh đến vị trí thẳng đứng mà đầu dưới của nó không bị trượt?

Bài giải

Gọi l và m là chiều dài và khối lượng của thanh. Do nâng thanh từ từ nên có thể coi rằng thanh luôn cân bằng ở mọi vị trí.

- Tại vị trí thanh hợp với phương ngang một góc α , các lực tác dụng lên thanh: trọng lực \vec{P} ; phản lực \vec{Q}_A ; lực ma sát \vec{F}_{ms} ; lực nâng \vec{F} .

- Thanh luôn cân bằng nên:

$$\vec{P} + \vec{Q}_A + \vec{F}_{ms} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{Và } M_{\vec{P}/A} = M_{\vec{F}/A} \quad (2)$$

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$$F \sin \alpha = F_{ms} \quad (1')$$

$$Q_A = P - F \cos \alpha \quad (1'')$$

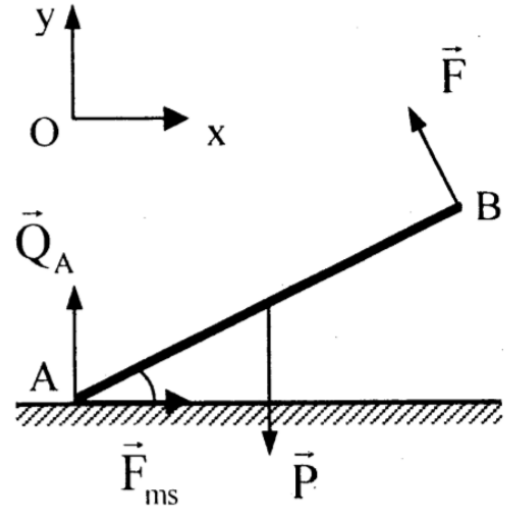
$$\text{- Từ (2): } P \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = F l \Leftrightarrow F = \frac{P}{2} \cos \alpha \quad (2')$$

$$\text{Từ (1'), (1'') và (2') ta được: } F_{ms} = \frac{P}{2} \cdot \sin \alpha \cos \alpha; Q_A = \frac{P}{2} (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$\text{- Để thanh không trượt thì: } F_{ms} \leq \mu N_A = \mu Q_A \Leftrightarrow \frac{P}{2} \sin \alpha \cos \alpha \leq \mu \frac{P}{2} (1 + \sin^2 \alpha)$$

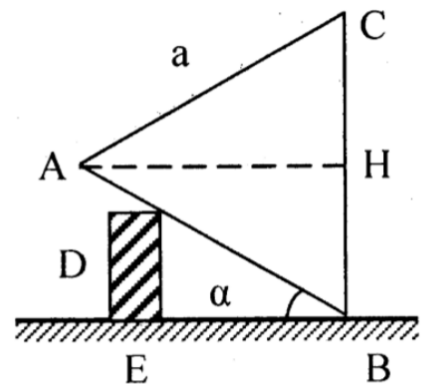
$$\Rightarrow \mu \geq \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + 2 \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + 2 \tan \alpha} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy: Để nâng thanh đến vị trí thẳng đứng mà đầu dưới không bị trượt thì: $\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.



40. Một vật khối lượng $m = 10\text{kg}$ hình lăng trụ đứng có tiết diện thẳng là tam giác đều ABC cạnh $a = 60\text{cm}$, được kê trên một giá đỡ cố định D sao cho mặt BC thẳng đứng, mặt AB tiếp xúc với giá đỡ tại E mà $EB = 35\text{cm}$.

Coi hệ số ma sát tại giá đỡ và sàn là như nhau. Tìm hệ số ma sát giữa vật và sàn. Xác định phản lực của giá đỡ và của sàn tác dụng lên vật. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



Bài giải

- Các lực tác dụng vào vật: trọng lực \vec{P} ; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 ; các lực ma sát $\vec{F}_{ms1}, \vec{F}_{ms2}$.

- Điều kiện cân bằng của vật:

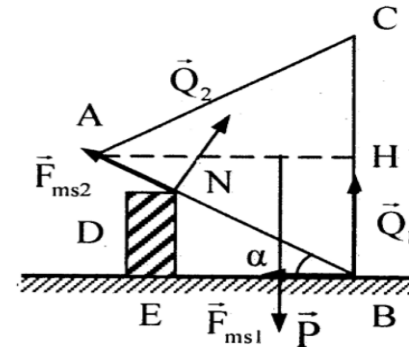
$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{ms1} + \vec{F}_{ms2} = \vec{0} \quad (1)$$

Và $M_{\vec{P}/B} = M_{\vec{Q}_2/B}$ (2)

- Chiếu (1) lên hai trục Ox và Oy, ta được:

$$Q_2 \sin 30^\circ - F_{ms2} \cos 30^\circ - F_{ms1} = 0 \quad (1')$$

$$-P + Q_1 + Q_2 \cos 30^\circ + F_{ms2} \sin 30^\circ = 0 \quad (1'')$$



- Từ (2): $P.GH = Q_2.BN \Leftrightarrow P \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = Q_2 \cdot \frac{EB}{\cos 30^\circ} = Q_2 \cdot \frac{2EB}{\sqrt{3}}$ (2')

- Từ (2'), ta được: $mg \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = Q_2 \cdot \frac{2EB}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow Q_2 = mg \cdot \frac{a}{4EB} = 10 \cdot 10 \cdot \frac{0.6}{4 \cdot 0.35} = 43,3N.$$

- Từ (1'), (1''), ta được:

$$\frac{1}{2} \cdot 43,3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu \cdot 43,3 - \mu \cdot 43,3 = 0$$

$$-10 \cdot 10 + Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 43,3 + \frac{1}{2} \mu \cdot 43,3 = 0$$

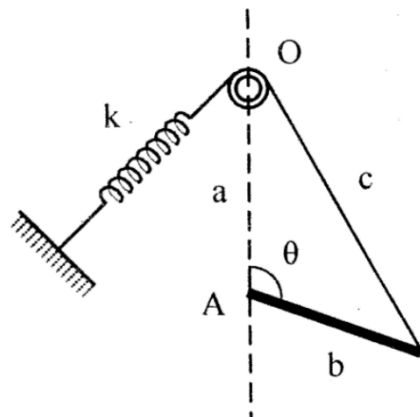
$$\Leftrightarrow 21,65\mu^2 - 100\mu + 21,65 = 0 \Rightarrow \mu = 0,22.$$

- Thay $\mu = 0,22$ vào phương trình trên tính được: $Q_1 = 57,75N$.

Vậy: Hệ số ma sát giữa vật và sàn là $\mu = 0,22$; phản lực của sàn và giá đỡ tác dụng lên vật là $Q_1 = 57,75N$ và $Q_2 = 43,3N$.

Chuyên đề 13: CÁC DẠNG CÂN BẰNG

41. Một thanh mảnh, đồng chất khối lượng M , độ dài b được gắn bằng một sợi dây nhỏ, không co giãn với một lò xo có hệ số đàn hồi k . Sợi dây được vắt qua một ròng rọc rất nhỏ và nhẵn cố định tại O . Thanh mảnh có thể quay tự do quanh A không ma sát trong khoảng góc $-\pi < \theta \leq \pi$ như hình vẽ. Khi $c = 0$, lò xo ở trạng thái tự nhiên. Giả sử $b < a$, OA thẳng đứng. Tìm các giá trị của θ để hệ thống cân bằng tĩnh và xác định trong mỗi trường hợp nếu hệ thống cân bằng bền, không bền hoặc phiếm định.



Bài giải

Gọi θ_1 là góc hợp bởi thanh với dây nối.

- Các lực tác dụng lên thanh: trọng lực \vec{P} ; lực căng \vec{T} ; phản lực \vec{Q} của trục quay tại A .
- Momen của trọng lực thanh đối với trục quay qua A :

$$M_{P/A} = P \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{Mgb}{2} \sin \theta \quad (1)$$

- Momen của lực căng dây đối với trục quay qua A :

$$M_{T/A} = Tb \sin \theta_1 = kcb \sin \theta_1 \quad (2)$$

- Theo định lí hàm sin trong tam giác AOB , ta có:

$$\frac{c}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin \theta_1} \Rightarrow c \sin \theta_1 = a \sin \theta$$

$$\text{Do đó: } M_{T/A} = kcb \sin \theta_1 = kba \sin \theta \quad (3)$$

- Khi thanh cân bằng: $M_{P/A} = M_{T/A} \Leftrightarrow \frac{Mgb}{2} \sin \theta = kba \sin \theta$.

$$\Rightarrow \frac{Mg}{2} \sin \theta = ka \sin \theta$$

- Nếu $ka = \frac{Mg}{2}$: thanh cân bằng với mọi θ và cân bằng là phiếm định.

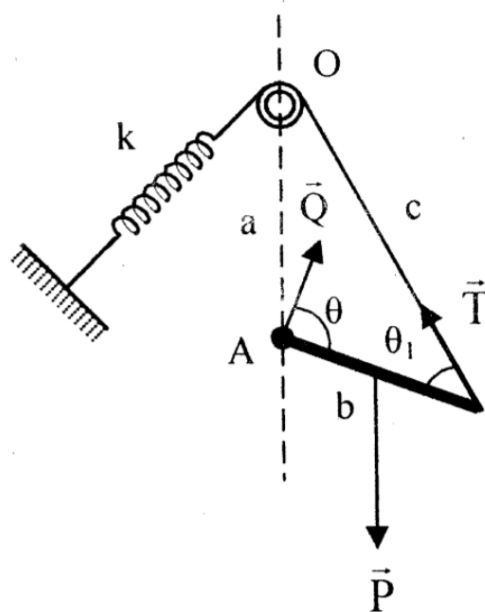
- Nếu $ka < \frac{Mg}{2}$: thanh cân bằng khi $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$.

+ Xét trường hợp: $\theta = 0$, coi $\theta = 0 \pm \varepsilon$ trong đó $\varepsilon > 0$ là một góc nhỏ. Khi đó, tổng momen lực:

$$M = \mp b \left(\frac{Mg}{2} - ka \right) \varepsilon$$

$$\Rightarrow M < 0 \text{ đối với } \theta = \pm \varepsilon; M > 0 \text{ đối với } \theta = -\varepsilon.$$

Do đó, M có xu hướng làm tăng ε trong cả hai trường hợp và cân bằng là không bền.



Xét trường hợp: $\theta = \pi$, coi $\theta = \pi \pm \varepsilon$ trong đó $\varepsilon > 0$ là một góc nhỏ. Khi đó, tổng momen lực:

$$M = \pm b \left(\frac{Mg}{2} - ka \right) \varepsilon$$

$\Rightarrow M < 0$ đối với $\theta = \pi$; $M > 0$ đối với $\theta = \pi + \varepsilon$.

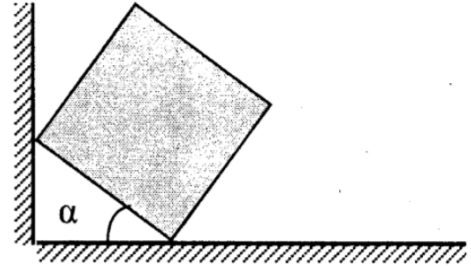
Do đó, M có xu hướng làm giảm ε trong cả hai trường hợp và cân bằng là bền.

- Nếu $ka > \frac{Mg}{2}$: thanh cân bằng khi $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$:

+ Xét trường hợp: $\theta = 0$, cân bằng là bền.

+ Xét trường hợp: $\theta = \pi$, cân bằng là không bền.

42. Một hộp hình khối lập phương đồng chất, một cạnh của hộp tựa vào tường nhẵn, một cạnh tựa trên sàn nhà, hệ số ma sát giữa sàn và khối hộp là k. Xác định góc α để khối hộp cân bằng.



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2002)

Bài giải

- Điều kiện cân bằng của khối hộp là:

+ Giá của trọng lực phải đi qua mặt chân đế (1)

+ Lực ma sát $F_{ms} \leq kQ_A$ (2)

- Xét điều kiện (1):

+ Khi $CA \perp OA$ thì giá của trọng lực đi qua A, ta có: $\widehat{OAC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BAO} = 45^\circ$: vật cân bằng.

+ Khi $\widehat{OAC} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} > 45^\circ$: vật trượt.

Do đó điều kiện (1) là: $\alpha < 45^\circ$ (3)

- Xét điều kiện (2):

+ Ta có: $\vec{P} + \vec{Q}_A + \vec{Q}_B + \vec{F}_{ms} = \vec{0}$ (4)

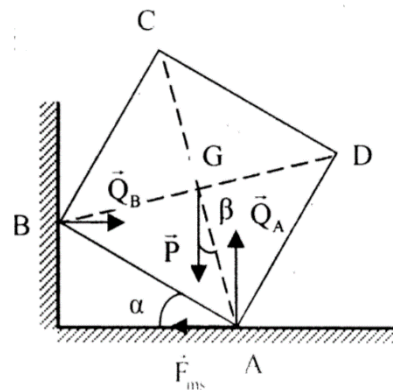
+ Vật cân bằng (chiều (4) lên Oxy) ta được:

$Q_A = P; Q_B = F_{ms}$ (5)

+ Xét trục quay qua trọng tâm G, gọi cạnh khối hộp là a, ta có:

$(Q_A - Q_B) \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \beta = F_{ms} \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \beta$ (6)

+ Thay (5) vào (6), ta được: $(P + F_{ms}) \sin \beta = F_{ms} \cos \beta$



$$\Rightarrow F_{ms} = \frac{P \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} \leq kQ_A = kP$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{2 \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{1}{2k+1} \Rightarrow \alpha_{\min} = \alpha_0 = \arctan \frac{1}{2k+1} \quad (7)$$

- Từ (3) và (7), điều kiện để khối hộp cân bằng là: $\alpha_0 \leq \alpha \leq 45^\circ$ với $\alpha_0 = \arctan \frac{1}{2k+1}$.

43. Một mặt phẳng nghiêng góc α có thể quay đều với vận tốc góc ω xung quanh trục thẳng đứng qua chân mặt phẳng nghiêng. Hỏi phải đặt một hòn bi khối lượng m ở vị trí nào trên máng để nó đứng yên đối với máng? Bỏ qua ma sát. Cho biết vị trí đó là cân bằng bền hay không bền?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2008)

Bài giải

Gọi r là khoảng cách từ trục quay đến vị trí trên máng nghiêng mà tại đó hòn bi nằm cân bằng.

- Xét hòn bi trong hệ quy chiếu gắn với máng quay.

- Các lực tác dụng vào hòn bi: Trọng lực \vec{P} ; phản lực \vec{Q} ; lực quán tính (li tâm) \vec{F}_{lt} với $F_{lt} = m\omega^2 r$.

- Hòn bi nằm cân bằng trên máng nên:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{lt} = \vec{0} \quad (1)$$

- Chiếu (1) xuống các trục Ox, Oy của hệ tọa độ Oxy, ta được:

$$Q \sin \alpha - F_{lt} = 0 \Leftrightarrow Q \sin \alpha - m\omega^2 r = 0 \quad (2)$$

$$Q \cos \alpha - P = 0 \Leftrightarrow Q \cos \alpha - mg = 0 \quad (3)$$

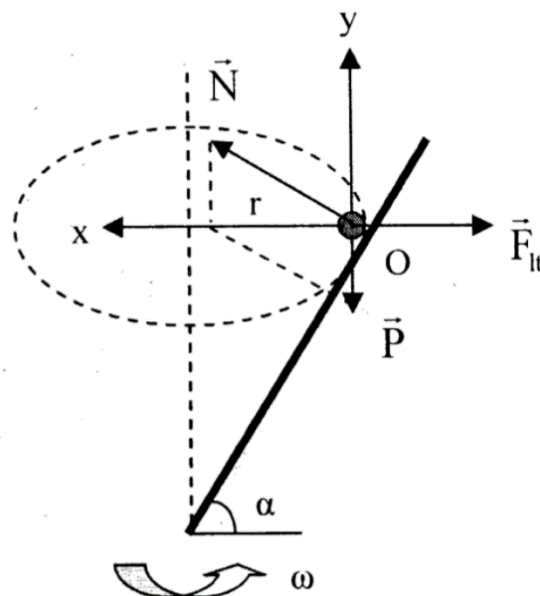
- Từ (2) và (3) ta được: $r = \frac{g}{\omega^2} \tan \alpha \quad (4)$

- Nhận xét: Từ (4) ta thấy, vận tốc góc ω của máng nghiêng càng lớn thì vị trí cân bằng tương ứng của hòn bi trên máng nghiêng càng ở gần trục quay, tức là càng thấp.

- Vị trí cân bằng đó là bền hay không bền?

+ Giả sử ta dịch hòn bi ra khỏi vị trí cân bằng O của hòn bi một

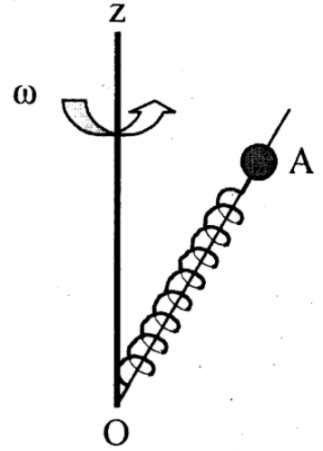
chút về phía dưới đến vị trí A' . Ở vị trí A' này, hợp lực $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$ có độ lớn lớn hơn F_{lt} cần có để giữ hòn bi trên vòng tròn quay bán kính r' (vì $r' < r$). Vì thế quả cầu sẽ trượt về phía dưới.



+ Giả sử ta dịch quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng O của hòn bi một chút về phía trên đến vị trí A". Ở vị trí A" này, hợp lực $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$ có độ lớn nhỏ hơn F_H cần có để giữ quả cầu trên vòng tròn quay bán kính r'' (vì $r'' > r$). Vì thế quả cầu sẽ trượt lên phía trên.

Vậy: A là vị trí cân bằng không bền của hòn bi trên máng nghiêng.

44. Thanh OA quay quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc ω , góc $\widehat{zOA} = \alpha$ không đổi. Một hòn bi nhỏ khối lượng m, xuyên qua thanh và trượt không ma sát dọc theo thanh OA. Một lò xo nhẹ có độ cứng k, chiều dài A tự nhiên l_0 , một đầu gắn hòn bi m, đầu còn lại cố định tại O. Trục lò xo trùng với thanh OA như hình vẽ.



1. Tìm vị trí cân bằng của hòn bi và điều kiện để có cân bằng.
2. Cân bằng này là bền hay không bền?

(Trích đề thi Olympic 30/4, 2011)

Bài giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với thanh OA, l là chiều dài của lò xo khi quay.
- Các lực tác dụng lên hòn bi: Trọng lực \vec{P} ; lực đàn hồi \vec{F}_d ; phản lực \vec{Q} : lực quán tính (lì tâm) \vec{F}_q ,
- Điều kiện cân bằng của hòn bi:

$$\vec{P} + \vec{F}_d + \vec{Q} + \vec{F}_q = \vec{0} \quad (*)$$

- Chiếu (*) lên trục OA, chiều dương hướng về O, ta được:

$$P \cos \alpha + F_d - F_q \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow mg \cos \alpha + k(l - l_0) - m\omega^2 l \sin^2 \alpha = 0;$$

$$R = l \sin \alpha$$

- Vị trí cân bằng của hòn bi

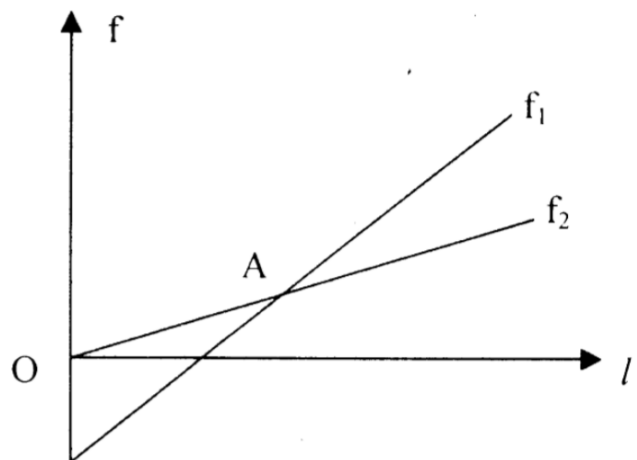
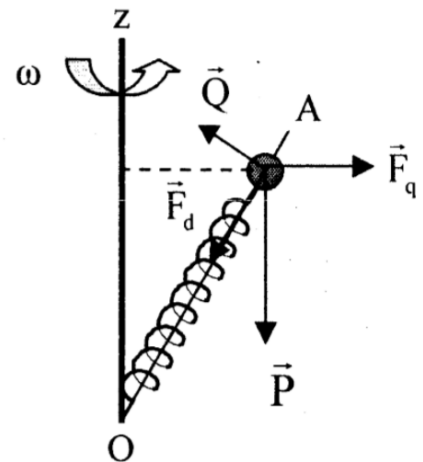
$$l = \frac{kl_0 - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

- Ban đầu khi chưa quay, vì m nhỏ nên lò xo bị nén một đoạn $x < l_0$:

$$mg \cos \alpha - kx = 0$$

$$\Rightarrow mg \cos \alpha = kx < kl_0 \text{ hay } kl_0 - mg \cos \alpha > 0$$

- Điều kiện để có cân bằng là: $l > 0 \Leftrightarrow k - m\omega^2 \sin^2 \alpha > 0$.



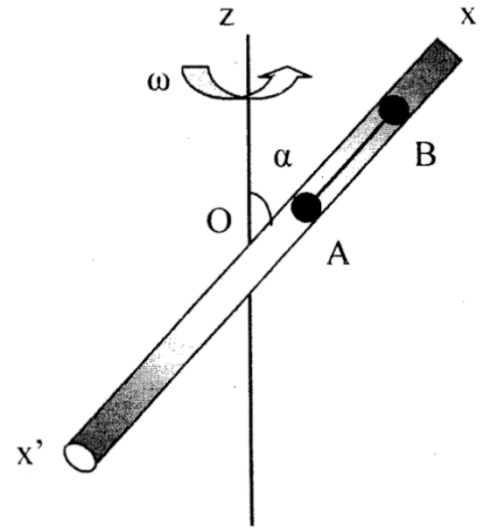
$$\Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{k}{m \sin^2 \alpha}} = \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Dạng cân bằng: Đặt $f_1(l) = mg \cos \alpha + k(l - l_0) = kl + mg \cos \alpha - kl_0$; $f_2(l) = m\omega^2 l \sin^2 \alpha$.

+ Đồ thị $f_1(l), f_2(l)$ trên hình vẽ.

+ Theo đồ thị ta thấy khi l tăng thì f_1 tăng nhanh hơn f_2 nên hòn bi bị kéo về vị trí cân bằng. Do đó cân bằng này là cân bằng bền.

45. Một ống $x'x$ đường kính nhỏ được gắn cố định vào trục quay thẳng đứng Oz tại điểm O . Ống hợp với trục Oz thành góc α như hình vẽ. Trục Oz quay với tốc độ góc ω . Trong ống có hai hòn bi nhỏ A có khối lượng M và B có khối lượng m , nối với nhau bằng thanh cứng, nhẹ chiều dài l . Hai bi có thể trượt không ma sát trong ống. Trong quá trình quay A và B luôn nằm trên O .



(Trích đề thi Olympic 30/4, 2012)

- Đặt $x = OB$, tính x khi hệ cân bằng.
- Tìm điều kiện về ω để hệ cân bằng.
- Tính lực căng thanh AB khi có cân bằng.
- Cân bằng của hệ là bền hay không bền? Giải thích.

Bài giải

a) Tính x khi hệ cân bằng

- Chọn hệ quy chiếu gắn với ống quay.

- Các lực tác dụng lên hệ hai hòn bi gắn với nhau: Các trọng lực \vec{P}_1, \vec{P}_2 ; các lực quán tính (li tâm) $\vec{F}_{q1}, \vec{F}_{q2}$; các phản lực \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 , với:

$$F_{q1} = M\omega^2(x-l)\sin\alpha; F_{q2} = m\omega^2 x \sin\alpha.$$

- Hệ cân bằng đối với ống quay nên:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{F}_{q1} + \vec{F}_{q2} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

- Chiếu (1) lên trục xOx' , ta được: $-P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha + F_{q1} \sin \alpha + F_{q2} \sin \alpha = 0$.

$$\Leftrightarrow -Mg \cos \alpha - mg \cos \alpha + M\omega^2(x-l)\sin^2 \alpha + m\omega^2 x \sin^2 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow -(M+m)g \cos \alpha + [M(x-l) + mx]\omega^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{Ml}{M+m} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

Vậy: Khi hệ cân bằng $x = \frac{Ml}{M+m} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$.

b) Điều kiện của ω để hệ cân bằng

- Vì trong quá trình quay A và B luôn nằm trên O nên ta phải có: $x > l$.

- Từ (3) suy ra: $\omega = \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{(M+m)g \cos \alpha}{ml}}$

Đặt: $\omega_0 = \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{(M+m)g \cos \alpha}{ml}}$ thì $\omega < \omega_0$.

Vậy: Điều kiện của ω để hệ cân bằng là

$$\omega < \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{(M+m)g \cos \alpha}{ml}} = \omega_0.$$

c) Lực căng thanh AB khi có cân bằng

- Xét hòn bi B, ta có: $\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{q2} = \vec{0}$ (4)

- Chiếu (4) lên $x'Ox$, ta được: $-T_2 - P_2 \cos \alpha + F_{q2} \sin \alpha = 0$.

$$\Leftrightarrow T_2 = m\omega^2 x \sin^2 \alpha - mg \cos \alpha.$$

- Thay $x = \frac{Ml}{M+m} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$,

ta được: $T_2 = m\omega^2 \left(\frac{Ml}{M+m} + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin^2 \alpha - mg \cos \alpha$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{Mm}{M+m} l \omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Vậy: Lực căng thanh AB khi có cân bằng là $T_2 = \frac{Mm}{M+m} l \omega^2 \sin^2 \alpha$.

d) Tính chất cân bằng

Nếu $\omega > \omega_0$ thì $F_2 = [M(x-l) + mx] \omega^2 \sin^2 \alpha$ tăng lên, $F_1 = (M+m)g \cos \alpha$ vẫn không đổi nên A, B sẽ dịch chuyển về phía trên. Do đó, cân bằng của hệ là không bền.

