DẠNG 44. NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$.

a) Công thức nguyên hàm từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = g(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) (C = 0). \end{cases}$

Khi đó ta có $\displaystyle\int u \cdot \mathrm{d}v = u \cdot v - \int v \cdot \mathrm{d}u$ hay $\displaystyle\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Công thức tích phân từng phần $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = g(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) (C = 0). \end{cases}$

Khi đó ta có $\displaystyle\int\limits_a^b u \cdot \mathrm{d}v = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v \cdot \mathrm{d}u$ hay $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b G(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Công thức đạo hàm của hàm số sơ cấp và hàm hợp

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
- $(uv)' = u'v + uv'$.
- $(\sin u)' = u' \cos u$.
- $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
- $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u u'$.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

d) Nguyên hàm các hàm số thường gặp

- $\displaystyle\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, với $\alpha \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$ là

(A) $-\sin 2x + \cos 2x + C$.
(B) $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.
(C) $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.
(D) $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

b) HƯỚNG GIẢI:

— **Bước 1:** Dựa trên giả thuyết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$ ta tìm được hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$.

— **Bước 2:** Áp dụng công thức nguyên hàm từng phân ta tính được $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Ta có $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$ suy ra $f(x)\cdot \mathrm{e}^x = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$$

Khi đó ta có $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x - \int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Chọn phương án (C)

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cdot \mathrm{e}^x$ là

(A) $3\cos 3x - \sin 3x + C$.
(B) $-3\cos 3x - \cos 3x + C$.
(C) $3\sin 3x - \cos 3x + C$.
(D) $3\cos 3x - \cos 3x + C$.

Lời giải.

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$ suy ra $f(x)\cdot \mathrm{e}^x = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó ta có $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x - \int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\cos 3x - \sin 3x + C$.

Chọn phương án A

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cdot x^2$ là

A $x\cdot \mathrm{e}^x + C$. **B** $x\cdot \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C$. **C** $-x\cdot \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C$. **D** $x\cdot \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Suy ra $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x}{x^2}$.

Xét $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x}{x^2}\cdot x^2\cdot \mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$, suy ra

$$\int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left(x\cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\cdot \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C.$$

Chọn phương án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x^2 - 3x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}$ là

A $\dfrac{4x - 11\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$. **B** $2x - 2\mathrm{e}^{2x} + C$. **C** $\dfrac{4x - 5\mathrm{e}^{x}}{2} + C$. **D** $\dfrac{4x - 5\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{x} = \left(x^2 - 3x + 1\right)' = 2x - 3$.

Suy ra $f(x) = 2x^2 - 3x$ suy ra $f(x) = 4x - 3$.

Xét $I = \displaystyle\int (4x - 3)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 4x - 3 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Khi đó ta có

$$I = \int (4x - 3)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{(4x - 3)\cdot \mathrm{e}^{2x}}{2} - 2\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{(4x - 3)\cdot \mathrm{e}^{2x}}{2} - \mathrm{e}^{2x} + C = \frac{4x - 5\mathrm{e}^{2x}}{2} + C.$$

Chọn phương án D

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cdot \mathrm{e}^x$ là

(A) $2\cos x - \cos 2x + C$. (B) $\sin 2x - \sin^2 x + C$. (C) $2\sin x - \sin^2 x + C$. (D) $\sin 2x + \sin^2 x + C$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^x$ suy ra $f(x)\cdot \mathrm{e}^x = \left(\sin^2 x\right)' = \sin 2x$.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó ta có $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x - \int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \sin 2x - \sin^2 x + C$.

Chọn phương án (B)

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}$ là

(A) $-\sin 2x + 2\cos^2 x + C$. (B) $\sin 2x - 2\cos^2 x + C$.
(C) $-\sin 2x - 2\sin^2 x + C$. (D) $-\sin 2x - 2\cos^2 x + C$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}$ suy ra $f(x)\cdot \mathrm{e}^{2x} = \left(\cos^2 x\right)' = -\sin 2x$.

Xét $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó ta có $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -\sin 2x - 2\cos^2 x + C$.

Chọn phương án (D)

Câu 6. Cho $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

(A) $\displaystyle\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.
(C) $\displaystyle\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{1}{2x^2}\right)' = -\dfrac{1}{x^3}$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x == -\frac{1}{x^3}(x\ln x) - \frac{1}{2x^2} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

Chọn phương án (C)

Câu 7. $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=2x^2-2x+C$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-2x^2+2x+C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-x^2+x+C$.

(D) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-x^2+2x+C$.

Lời giải.

$F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ suy ra $f(x)\mathrm{e}^{2x}=2x$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{e}^{2x}-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=2x-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-2x^2+2x+C.$$

Chọn phương án (B)

Câu 8. Cho $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{2-x}{2}\mathrm{e}^x+C$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(4-2x)\mathrm{e}^x+C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(x-2)\mathrm{e}^x+C$.

(D) $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ suy ra $f(x)\mathrm{e}^{2x}=[(x-1)\mathrm{e}^x]'=\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned}\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x&=f(x)\mathrm{e}^{2x}-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\&=[\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x]-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\&=(\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x)-2(x-1)\mathrm{e}^x+C=(2-x)\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

Chọn phương án (D)

Câu 9. Cho $F(x)=\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{x^3}+C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}\right)+C$.

(D) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{1}{3x^3}\right)'=-\dfrac{1}{x^4}$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^3}(x\ln x) - \frac{1}{3x^3} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C.$$

Chọn phương án C

Câu 10. Cho $F(x) = \mathrm{e}^x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C$.

B. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C$.

C. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C$.

D. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C$.

Lời giải.

Vì $F(x) = \mathrm{e}^x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên $f(x)\mathrm{e}^{2x} = F'(x) = \mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

Ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= f(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) - 2\mathrm{e}^x\cos x + C = -\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 11. Cho $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $(f(x) + f'(x))\,\mathrm{e}^x$.

A. $\int \big(f(x) + f'(x)\big)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)}{x^2} + C$.

B. $\int \big(f(x) + f'(x)\big)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + C$.

C. $\int \big(f(x) + f'(x)\big)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + C$.

D. $\int \big(f(x) + f'(x)\big)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)}{x^2} + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ suy ra $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x) - \int \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \big(f(x) + f'(x)\big)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x) + C = \frac{\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)}{x^2} + C.$$

Chọn phương án A

Câu 12. Cho $F(x) = x^2\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(x^3\ln x + 2x^2\ln x + x^2\right) + C$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\left(x^3\ln x + 2x^2\ln x - x^2\right) + C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(x^3\ln x - 2x^2\ln x - x^2\right) + C$.

(D) $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(x^3\ln x + 2x^2\ln x - x^2\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = x^2\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ suy ra $\dfrac{f(x)}{x} = \left(x^2\mathrm{e}^x\right)' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned}
\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x &= f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{f(x)}{x}\right)(x\ln x) - x^2\mathrm{e}^x + C \\
&= x\ln x\left(2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x\right) - x^2\mathrm{e}^x + C \\
&= \mathrm{e}^x\left(x^3\ln x + 2x^2\ln x - x^2\right) + C.
\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 13. Cho $F(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$.

(A) $\displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2\sin x} + x\cos x + C$.

(B) $\displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2\sin x} - x\cos x + C$.

(C) $\displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x^2\sin x} + x\cos x + C$.

(D) $\displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x^2\sin x} - x\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ suy ra $f(x)\sin x = \left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' = \dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x &= f(x)\cos x - \int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= (f(x)\sin x)\cot x + \int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}\right)\cot x + x\cos x + C \\ &= -\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2\sin x} + x\cos x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án A

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) = 1$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 1$. **B** $I = -1$. **C** $I = 0$. **D** $I = 2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = (f(x)\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -f(0) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -1 + 1 = 0$.

Chọn phương án C

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left(f(x) + f'(x)\right)\,\mathrm{d}x = ae + b$. Tính $S = a^{2017} + b^{2018}$.

A $S = 1$. **B** $S = -1$. **C** $S = 0$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x f(x))\Big|_0^1 = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 \left(f(x) + f'(x)\right)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x f(x))\Big|_0^1 = f(1)e - f(0) = \mathrm{e} - 1.$$

Vậy $a = 1$; $b = -1 \Rightarrow S = 2$.

Chọn phương án D

Câu 16. Cho $0 < a < \frac{\pi}{2}$ và $b = \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\displaystyle\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx = e^a \cot a - b$.

(B) $\displaystyle\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx = -e^a \cot a - b$.

(C) $\displaystyle\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx = e^a \cot a + b$.

(D) $\displaystyle\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx = -e^a \cot a + b$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = -\cot x \end{cases}$. Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx = -e^x \cot x \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} e^x \cot x\,dx = e^a \cot a + b.$$

Chọn phương án (C)

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,dx = 1$ và $f(1) - 2f(0) = 2$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$.

(A) $I = 0$. (B) $I = 3$. (C) $I = -1$. (D) $I = 1$.

Lời giải.

Xét tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,dx = 1$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x+1} \\ dv = f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$I = \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,dx = \frac{f(x)}{x+1}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}f(1) - f(0) + \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx = 1 + I \Rightarrow I = 0.$$

Chọn phương án (A)

Câu 18. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ với $F(1) = 1$, $\displaystyle\int\limits_0^1 F(x)\,dx = -1$.

Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,dx$.

(A) $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = 0$. (B) $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = -1$. (C) $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = -2$. (D) $\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,dx = 2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = F(x). \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$I = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = (xF(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 1 - (-1) = 2.$$

Chọn phương án D

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)\sin 1 = 10$. Tính $I = \int \left(f(x)\cos x + f'(x)\sin x\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 20$. **B** $I = -10$. **C** $I = -20$. **D** $I = 10$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \cos x \cdot \mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u = f(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^1 f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = (\sin x f(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $I = \int_0^1 \left(f(x)\cos x + f'(x)\sin x\right)\,\mathrm{d}x = f(1)\sin 1 = 10$.

Chọn phương án D

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)+f(0) = 0$ và $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = 2018$.

B $\int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = -4036$.

C $\int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = -2018$.

D $\int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = 4036$.

Lời giải.

Xét tích phân $\int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \\ \mathrm{d}v = f''(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u = (2x-1)\,\mathrm{d}x \\ v = f'(x). \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int\limits_0^1 \left(x^2-x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(x^2-x\right) f'(x)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Xét tích phân $\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Ta có

$$\int\limits_0^1 (2x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x = (2x-1)f(x)\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy $\int\limits_0^1 \left(x^2-x\right) f''(x)\,\mathrm{d}x = \left(x^2-x\right) f'(x)\Big|_0^1 - (2x-1)f(x)\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4036.$

Chọn phương án D

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

A $-\sin x + \cos x + C$. **B** $-\sin x - \cos x + C$. **C** $\sin x - \cos x + C$. **D** $\sin x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$(\cos x)' = f(x)\cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow -\sin x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x.$$

Tính $I = \int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \int f'(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x - \int f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\sin x - \cos x + C.$

Chọn phương án B

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

A $\cos x - \sin x + C$. **B** $-\sin x - \cos x + C$. **C** $\sin x - \cos x + C$. **D** $\sin x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$(\sin x)' = f(x)\cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \cos x = f(x)\cdot \mathrm{e}^x.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot \mathrm{e}^x - \int f(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \cos x - \sin x + C$.

Chọn phương án A

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

A. $3\cos 3x - \sin 3x + C$.
B. $-3\cos 3x - \sin 3x + C$.
C. $-3\cos 3x + \sin 3x + C$.
D. $3\cos 3x + \sin 3x + C$.

Lời giải.

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$(\sin 3x)' = f(x) \cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow 3\cos 3x = f(x) \cdot \mathrm{e}^x.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot \mathrm{e}^x - \int f(x) \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 3\cos 3x - \sin 3x + C$.

Chọn phương án A

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^3}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

A. $x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2} + C$.
B. $x^2\ln x + \dfrac{x^2}{2} + C$.
C. $x^2\ln x - x + C$.
D. $-x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^3}$ nên ta có

$$(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x) \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \,\mathrm{d}x = x^2\ln x - \int x\,\mathrm{d}x = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn phương án A

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^2}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

(A) $x\ln x - x + C$. (B) $-x\ln x + x + C$. (C) $x\ln x + x + C$. (D) $-x\ln x - x + C$.

Lời giải.

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^2}$ nên ta có

$$(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.

Chọn phương án (A)

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

(A) $\dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2} + C$. (B) $\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$. (C) $\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x} + C$. (D) $\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ nên ta có

$$(\ln x)' = xf(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = xf(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Chọn phương án (D)

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = x^2 + 2x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

(A) $2x - x^2 + C$. (B) $x^2 + C$. (C) $-x^2 + C$. (D) $2x + 2 + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = x^2 + 2x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$\left(x^2 + 2x + 3\right)' = xf(x) \Leftrightarrow 2x + 2 = \mathrm{e}^x f(x).$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^x - \int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2x + 2 - \int (2x+2)\,\mathrm{d}x = -x^2 + C$.

Chọn phương án C

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng của $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

(A) $-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+C$. (B) $-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+C$. (C) $\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+C$. (D) $\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=f(x)\mathrm{e}^x\Leftrightarrow -\frac{2}{x^3}=\mathrm{e}^xf(x).$$

Tính $I=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Suy ra $I=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{e}^x-\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{x^3}+\int\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+C$.

Chọn phương án B

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trênmỗi khoảng của tập hợp $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết $F(x)=\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $x^2f(x)$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)x^2\ln x$ là

(A) $-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+C$. (B) $\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+C$. (C) $\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+C$. (D) $-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $x^2f(x)$ nên ta có

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=x^2f(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=x^2f(x)\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^4}.$$

Tính $I=\displaystyle\int f'(x)x^2\ln x\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=-\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Suy ra $I=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{e}^x-\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{x^3}+\int\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+C$.

Chọn phương án D

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x)=\dfrac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

(A) $\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C$. (B) $\dfrac{x^4}{4}\ln x+\dfrac{x^4}{16}+C$. (C) $\dfrac{x^4}{4}\ln x+\dfrac{x^4}{4}+C$. (D) $-\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \dfrac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ nên ta có

$$\left(\frac{x^4}{16}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)x^2\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

Chọn phương án B

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = -x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A $(-2x+1)\mathrm{e}^x + C$. **B** $-(3x+1)\mathrm{e}^{2x} + C$. **C** $-(3x+1)\mathrm{e}^x + C$. **D** $-(3x-1)\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = -x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên ta có

$$(-x\mathrm{e}^x)' = f(x)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow -(x+1)\mathrm{e}^x = f(x)\mathrm{e}^{2x}.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^{2x} - 2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -(x+1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + C = -(3x+1)\mathrm{e}^x + C.$

Chọn phương án C

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $f(0) = 0$,họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là

A $\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^x + C$. **B** $\left(-x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{2x} + C$.

C $\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x + C$. **D** $\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên ta có

$$(2(x-1)\mathrm{e}^x)' = f(x)\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^x = f'(x)\mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

Có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C.$

Và $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$.

Tính $I = \displaystyle\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{e}^x - \int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^x + C.$

Chọn phương án C

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cos x$ là

A $x\sin x + \cos x + C$. **B** $\sin x - x\cos x + C$. **C** $x\sin x + x\cos x + C$. **D** $\sin x + x\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên ta có

$$\left(\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x\right)' = f(x)\sin x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\sin x = f(x)\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = f(x)\cos x + \int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\cos x + \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x + C = \cos x + x\sin x + C$.

Chọn phương án A

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)\sin x + x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\sin x$ là

A $x\sin x + \cos x + C$. **B** $\sin x - x\cos x + C$. **C** $x\sin x + x\cos x + C$. **D** $\sin x + x\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)\sin x + x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$ nên ta có

$$\left(\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin x + x\cos x\right)' = f(x)\cos x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\cos x = f(x)\cos x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(x)\sin x - \int f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\sin x - \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)\sin x + x\cos x + C = \sin x + x\cos x + C$.

Chọn phương án D

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = x^2\sin x + 2x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\sin x$ là

A $2\sin x - 2x\cos x + C$.
B $2\sin x + x\cos x + C$.
C $2\sin x - x\cos x + C$.
D $-2\sin x - 2x\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = x^2\sin x + 2\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên ta có

$$\left(x^2\sin x + 2x\cos x\right)' = f(x)\cos x \Leftrightarrow \left(x^2+2\right)\cos x = f(x)\cos x \Rightarrow f(x) = x^2+2.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $I = \displaystyle\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f(x)\sin x - \int f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left(x^2+2\right)\sin x - \left(x^2\sin x + 2x\cos x\right) + C =$ $2\sin x - 2x\cos x + C$.

Chọn phương án A

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \left(x^2-4\right)\cos x - 2x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cos x$ là

A $2x\sin x - 2\cos x + C$.
B $-2\cos x - 2x\sin x + C$.
C $2\cos x + 2x\sin x + C$.
D $2\cos x - 2x\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \left(x^2+1\right)\cos x + 2\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên ta có

$$\left(\left(x^2-4\right)\cos x - 2x\sin x\right)' = f(x)\sin x \Leftrightarrow \left(2-x^2\right)\sin x = f(x)\sin x \Rightarrow f(x) = 2-x^2.$$

Tính $I = \displaystyle\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = f(x)\cos x + \int f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2-x^2\right)\cos x + \left(x^2-4\right)\cos x - 2x\sin x + C \\ &= -2\cos x - 2x\sin x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết x^2+2x là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $[f(x)+xf'(x)]\ln^2 x$ là

A $x(2x+2)\ln x + 2\left(x^2+2x\right) + C$.
B $x(2x+2)\ln x - 2\left(x^2+2x\right) + C$.
C $(2x+2)\ln x - 2\left(x^2+2x\right) + C$.
D $(2x+2)\ln x + 2\left(x^2+2x\right) + C$.

Lời giải.

Ta có x^2+2x là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$ nên ta có
$\left(x^2+2x\right)'=f(x)\ln x \Leftrightarrow 2x+2=f(x)\ln x$.
Tính $I=\displaystyle\int \left[f(x)+xf'(x)\right]\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.
Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ \mathrm{d}v=\left[f(x)+xf'(x)\right]\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=xf(x). \end{cases}$
Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \left[f(x)+xf'(x)\right]\ln^2 x\,\mathrm{d}x = xf(x)\ln^2 x - 2\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= x(2x+2)\ln x - 2\left(x^2+2x\right)+C. \end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $[f(x)+xf'(x)]\ln^2 x$ là

(A) $x\sin x\ln x-2\sin x+C$.
(B) $x\cos x\ln x+2\sin x+C$.
(C) $x\cos x\ln x-2\sin x+C$.
(D) $x\sin x\ln x-2\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$ nên ta có

$$(\sin x)'=f(x)\ln x \Leftrightarrow \cos x=f(x)\ln x.$$

Tính $I=\displaystyle\int \left[f(x)+xf'(x)\right]\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.
Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ \mathrm{d}v=\left[f(x)+xf'(x)\right]\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=xf(x). \end{cases}$
Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \left[f(x)+xf'(x)\right]\ln^2 x\,\mathrm{d}x = xf(x)\ln^2 x - 2\int f(x)\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= x\cos x\ln x-2\sin x+C. \end{aligned}$$

.
Chọn phương án (C)

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\dfrac{\cos x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $[f(x)+xf'(x)]\ln^2 x$ là

(A) $-\dfrac{1}{2}x\sin x\ln x+\cos x+C$.
(B) $\dfrac{1}{2}x\sin x\ln x-\cos x+C$.
(C) $\dfrac{1}{2}x\sin x\ln x+\cos x+C$.
(D) $-\dfrac{1}{2}x\sin x\ln x-\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\cos x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$ nên ta có

$$\left(\frac{\cos x}{2}\right)'=f(x)\ln x \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{2}=f(x)\ln x.$$

Tính $I = \int \left[f(x) + xf'(x)\right] \ln^2 x \, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = \left[f(x) + xf'(x)\right] \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \\ v = xf(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \left[f(x) + xf'(x)\right] \ln^2 x \, \mathrm{d}x = xf(x) \ln^2 x - 2 \int f(x) \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} x \sin x \ln x - \cos x + C. \end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x^2 - 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\sin^2 x$ là

A $(2-2x)\sin x - 4\cos x + C$.

B $(2-2x)\sin x + 4\cos x + C$.

C $(2x-2)\sin x - 4\cos x + C$.

D $(2-2x)\sin x - 2\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên ta có

$$\left(x^2 - 2x\right)' = f(x)\sin x \Leftrightarrow 2x - 2 = f(x)\sin x.$$

Tính $I = \int f'(x) \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \sin^2 x \\ \mathrm{d}v = f'(x) \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\sin x \cos x \, \mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x) \sin^2 x \, \mathrm{d}x = f(x)\sin^2 x - 2\int f(x) \sin x \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= (2x-2)\sin x - 2\int (2x-2)\cos x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tính $I_1 = \int (2x-2)\cos x \, \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x - 2 \\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2 \, \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

Suy ra $I_1 = (2x-2)\sin x - 2\int \sin x \, \mathrm{d}x = (2x-2)\sin x + 2\cos x + C$.

Vậy $I = (2-2x)\sin x - 4\cos x + C$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. B	5. D	6. C	7. B	8. D	9. C	10. A
11. A	12. D	13. A	14. C	15. D	16. C	17. A	18. D	19. D	20. D
21. B	22. A	23. A	24. A	25. A	26. D	27. C	28. B	29. D	30. B
31. C	32. C	33. A	34. D	35. A	36. B	37. B	38. C	39. D	40. A