DẠNG 10. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LOGARIT

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tính chất của logarit.

• **Công thức 1:** $\log_a a^x = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$; $1 \neq a > 0$.

• **Công thức 2:** $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ với $x, y, a > 0$ và $a \neq 1$.

$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$ với $x, y, a > 0$ và $a \neq 1$.

Chú ý: Với $x; y < 0$ và $0 < a \neq 1$ ta có: $\log_a(xy) = \log_a(-x) + \log_a(-y)$.

• **Công thức 3:** $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ và $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$ $(a, b > 0;\ a \neq 1)$.

Như vậy: $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \cdot \log_a b$.

• **Công thức 4:** (đổi cơ số) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Cách viết khác của công thức đổi cơ số: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ với $a; b; c > 0$ và $a; b \neq 1$.

Hệ quả: Khi cho $a = c$ ta có: $\log_c b \cdot \log_b c = \log_c c = 1 \Leftrightarrow \log_c b = \dfrac{1}{\log_b c}$ (gọi là nghịch đảo).

Tổng quát với nhiều số: $\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdots \log_{x_{n-1}} x_n = \log_{x_1} x_n$ (với $1 \neq x_1; \ldots; x_n > 0$).

• **Công thức 5:** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ với $a; b; c > 0$; $b \neq 1$.

* **Logarit thập phân, logarit tự nhiên.**

• **Logarit thập phân:** Logarit cơ số $a = 10$ gọi là logarit thập phân ký hiệu: $\log x$ $(x > 0)$ ($\log x$ được hiểu là $\log_{10} x$). Đọc là lốc x.

• **Logarit tự nhiên:** Logarit cơ số $a = \mathrm{e} \approx 2,712818$ gọi là logarit tự nhiên ký hiệu: $\ln x$ $(x > 0)$. Đọc là len x hoặc lốc nepe của x ($\ln x$ được hiểu là $\ln_{\mathrm{e}} x$).

2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. (ĐỀ MINH HỌA BDG 2019-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

(A) $2 + \log_2 a$. (B) $\dfrac{1}{2} + \log_2 a$. (C) $2\log_2 a$. (D) $\dfrac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng tính chất logarit.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa trên giả thiết với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng.

B2: Áp dụng công thức $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Với $a > 0$ thì: $\log_2(a^2) = \log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn phương án (C)

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(3a) = 3\log a$. (B) $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$. (C) $\log a^3 = 3\log a$. (D) $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$.

Lời giải.

Vì với $a > 0$ thì $\log a^3 = 3\log a$.

Câu 2. Với a, b là các số thực dương bất kỳ $a \neq 1$. Mệnh đề nào đúng?

(A) $\log_{\sqrt{a}} b = -2\log_a b$. (B) $\log_{\sqrt{a}} b = -\frac{1}{2}\log_a b$. (C) $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{2}\log_a b$. (D) $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$.

Lời giải.

Vì với $a, b > 0$ và $a \neq 1$ thì $\log_{\sqrt{a}} b = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_a b = 2\log_a b$.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Với $a > 0$ và $a \neq 1$, cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính $P = \log_a\left(x^2y^3\right)$

(A) P = 3. (B) P = 10. (C) P = -14. (D) P = 65.

Lời giải.

Vì với $a > 0$ và $a \neq 1$ thì

$$P = \log_a\left(x^2y^3\right) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2\log_a x + 3\log_a y = 10.$$

Chọn phương án (B)

Câu 4. Cho các số dương a, b, c, và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b + c)$. (B) $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$.

(C) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$. (D) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b - c)$.

Lời giải.

Theo tính chất logarit ta có: $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

Chọn phương án (C)

Câu 5. Với a và b là các số thực dương. Biểu thức $\log_a\left(a^2b\right)$ bằng

(A) $2 - \log_a b$. (B) $2 + \log_a b$. (C) $1 + 2\log_a b$. (D) $2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a\left(a^2b\right) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \log_a b$.

Chọn phương án (B)

Câu 6. Cho a, b, c với a, b là các số thực dương khác 1, $c > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. (B) $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

(C) $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$. (D) $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$.

Lời giải.

Biểu thức ở đáp án C chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện $c \neq 1$.

Chọn phương án (C)

Câu 7. Cho $\log_2 3 = a$, $\log_2 7 = b$. Biểu diễn $\log_2 2016$ theo a và b.

A. $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$.
B. $\log_2 2016 = 5 + 3a + 2b$.
C. $\log_2 2016 = 2 + 2a + 3b$.
D. $\log_2 2016 = 2 + 3a + 2b$.

Lời giải.

Vì: $\log_2 2016 = \log_2 \left(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = \log_2 2^5 + \log_2 3^2 + \log_2 7 = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7$.

Do đó $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$.

Chọn phương án A

Câu 8. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\sqrt{2}$.
D. $-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x = 2\log_2 x - \dfrac{3}{2}\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x = \log_2 x = \sqrt{2}$.

Chọn phương án C

Câu 9. Giá trị của biểu thức $M = (\ln a + \log_a \mathrm{e})^2 + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e}$ khi được rút gọn là

A. 2.
B. $2 + 2\ln^2 a$.
C. $2\ln^2 a - 2$.
D. $\ln^2 a$.

Lời giải.

$M = (\ln a + \log_a \mathrm{e})^2 + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e} = \ln^2 a + 2\ln a \cdot \log_a \mathrm{e} + \log_a^2 \mathrm{e} + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e} = 2\ln^2 a + 2$.

Chọn phương án B

Câu 10. Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a \left(\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$

A. $T = 3$.
B. $T = \dfrac{12}{5}$.
C. $T = \dfrac{9}{5}$.
D. $T = 2$.

Lời giải.

Ta có: $T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right) = \log_a \dfrac{a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3$.

Chọn phương án A

Câu 11. Cho $a, b, c > 0$; $a, b \neq 1$. Tính $A = \log_a(b^2) \cdot \log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c)$

A. $\log_a c$.
B. 1.
C. $\log_a b$.
D. $\log_a bc$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
A &= \log_a(b^2) \cdot \log_b(\sqrt{bc}) - \log_a(c) \\
&= 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_b(bc) - \log_a(c) \\
&= 2\log_a b \cdot \frac{1}{2}(\log_b b + \log_b c) - \log_a(c) \\
&= \log_a b \cdot (1 + \log_b c) - \log_a c \\
&= \log_a b + \log_a b \cdot \log_b c - \log_a c \\
&= \log_a b + \log_a c - \log_a c = \log_a b.
\end{aligned}$$

Chọn phương án (C)

Câu 12. Cho $\log_{12} 18 = a + \dfrac{b}{c + \log_2 3}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $T = a + b + c$?

(A) $T = 1$. (B) $T = 0$. (C) $T = 2$. (D) $T = 7$.

Lời giải.

Ta có $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{1 + 2 \cdot \log_2 3}{2 + \log_2 3} = \dfrac{2 \cdot (2 + \log_2 3)}{2 + \log_2 3} + \dfrac{-3}{2 + \log_2 3} = 2 + \dfrac{-3}{2 + \log_2 3}$.

Vậy $a = 2$; $b = -3$; $c = 2$.

Chọn phương án (A)

Câu 13. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 5ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\log \dfrac{a + 2b}{3} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

(B) $5 \log(a + 2b) = \log a - \log b$.

(C) $2 \log(a + 2b) = 5 (\log a + \log b)$.

(D) $\log(a + 1) + \log b = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& a^2 + 4b^2 = 5ab \\
\Leftrightarrow & (a + 2b)^2 = 9ab \\
\Leftrightarrow & \log \left[(a + 2b)^2\right] = \log(9ab) \\
\Leftrightarrow & 2 \cdot \log(a + 2b) = 2 \cdot \log 3 + \log a + \log b \\
\Leftrightarrow & 2 \cdot \log \frac{a + 2b}{3} = \log a + \log b \\
\Leftrightarrow & \log \frac{a + 2b}{3} = \frac{\log a + \log b}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn phương án (A)

Câu 14. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\log(a + 1) + \log b = 1$.

(B) $\log \dfrac{a + 3b}{4} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$.

(C) $3 \log(a + 3b) = \log a - \log b$.

(D) $2 \log(a + 3b) = 2 \log a + \log b$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& a^2 + 9b^2 = 10ab \\
\Leftrightarrow & \frac{(a + 3b)^2}{16} = ab \\
\Leftrightarrow & \log \frac{(a + 3b)^2}{16} = \log ab \quad (\text{do } a > 0,\ b > 0) \\
\Leftrightarrow & 2 \log \frac{a + 3b}{4} = \log a + \log b \\
\Leftrightarrow & \log \frac{a + 3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn phương án (B)

Câu 15. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.
B $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.
C $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.
D $\frac{1}{2}+\log a+\log b$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&a^2+b^2=8ab\\ \Leftrightarrow\ &a^2+b^2+2ab=10ab\\ \Leftrightarrow\ &\log\left(a^2+b^2+2ab\right)=\log(10ab)\\ \Leftrightarrow\ &\log(a+b)^2=1+\log a+\log b\\ \Leftrightarrow\ &\log(a+b)=\frac{1}{2}\cdot(1+\log a+\log b)\,.\end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 16. Cho $\log_{27}5=a$, $\log_3 7=b$, $\log_2 3=c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b và c.

A $\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$.
B $\dfrac{(3a+b)c}{1+b}$.
C $\dfrac{(3a+b)c}{1+a}$.
D $\dfrac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\log_{27}5=a\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\log_3 5=3a$.

Ta có $\log_2 5=\log_2 3\cdot\log_3 5=3ac$ và $\log_2 7=\log_2 3\cdot\log_3 7=bc$.

Vậy $\log_6 35=\dfrac{\log_2 35}{\log_2 6}=\dfrac{\log_2 5+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3}=\dfrac{3ac+bc}{1+c}=\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$.

Chọn phương án D

Câu 17. Cho $t=a^{\frac{1}{1-\log_a u}}$, $v=a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$ với $a>0$; $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $u=a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$.
B $u=a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$.
C $u=a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$.
D $u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$.

Lời giải.

$v=a^{\frac{1}{1-\log_a t}}\Leftrightarrow\log_a v=\dfrac{1}{1-\log_a t}\Rightarrow\log_a t=1-\dfrac{1}{\log_a v}=\dfrac{\log_a v-1}{\log_a v}\quad(1).$

$t=a^{\frac{1}{1-\log_a u}}\Leftrightarrow\log_a t=\dfrac{1}{1-\log_a u}\Rightarrow\log_a u=1-\dfrac{1}{\log_a t}\quad(2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\log_a u=1-\dfrac{1}{\dfrac{\log_a v-1}{\log_a v}}=1-\dfrac{\log_a v}{\log_a v-1}=\dfrac{\log_a v-1+\log_a v}{\log_a v-1}=-\dfrac{1}{\log_a v-1}=\dfrac{1}{1-\log_a v}$.

Vậy $u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$.

Chọn phương án D

Câu 18. Cho $\log_3\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)=2$. Giá trị của biểu thức $\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right)$ bằng

A 2.
B 3.
C 4.
D 0.

Lời giải.

Nhóm: PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3\left(2a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}\right) &= \log_3\left(a^2+9-2a\sqrt{a^2+9}+a^2\right)\\ &= \log_3\left[\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)^2\right]\\ &= 2\log_3\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)\\ &= 2\log_3\frac{\left(\sqrt{a^2+9}-a\right)\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)}{\sqrt{a^2+9}+a}\\ &= 2\log_3\frac{9}{\sqrt{a^2+9}+a}\\ &= 2\log_3 9-2\log_3\left(\sqrt{a^2+9}+a\right)=4-2\cdot 2=0.\end{aligned}$$

Chọn phương án D

Câu 19. Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]$.

A 9. **B** 3. **C** 10. **D** 4.

Lời giải.

Chọn $n=1$ ta có

$$f(m+1)=f(m)+f(1)+m=f(m)+m+1\Rightarrow f(m+1)-f(m)=m+1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}f(96)-f(69) &= (f(96)-f(95))+(f(95)-f(94))+(f(94)-f(93))+\ldots+(f(70)-f(69))\\ &= 96+95+94+\cdots+70=\frac{27(70+96)}{2}=2241.\end{aligned}$$

Vậy $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]=\log\left[\dfrac{2241-241}{2}\right]=\log(1000)=3$.

Chọn phương án B

Câu 20. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\le b<a$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A 6. **B** 7. **C** 5. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+4\cdot(\log_b a-1)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\log_b a}}+4\cdot(\log_b a-1)$.

Đặt $t=\log_b a$.

Vì $\sqrt{a}\le b<a\Rightarrow \log_b(\sqrt{a})\le 1\le \log_b a\Leftrightarrow \dfrac{t}{2}<1<t\Leftrightarrow 1<t<2$.

Khi đó $P=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{t}}+4(t-1)=\dfrac{t}{t-1}+4(t-1)$ với $t\in(1;2)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t-1} + 4(t-1)$ với $t \in (1;2)$.

$f'(t) = \dfrac{-1}{(t-1)^2} + 4$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \text{ (TM)} \\ t = \dfrac{1}{2} \text{ (L)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(t)$						$-$	0	$+$			
$f(t)$					$+\infty$		5		6		

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(1;2)} f(t) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 5.

Chọn phương án C

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. C	5. B	6. C	7. A	8. C	9. B	10. A
11. C	12. A	13. A	14. B	15. B	16. D	17. D	18. D	19. B	20. C