CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

a) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

b) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

c) Nếu $f\left(x_0\right)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2 - Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3 - Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

a) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

b) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

4 - Kiến thức cần nhớ:

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

b) Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$:

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c) Diện tích tam giác ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

II - HÀM BẬC BA

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

□ $b^2-3ac\le 0$ hàm số **không** có điểm cực trị.

□ $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a=0 \end{cases}$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị.

□ $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a\ne 0 \end{cases}$ hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 là nghiệm của phương trình:

Với $y'=0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$, có $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}$, $x_1.x_2=\dfrac{c}{3a} \Rightarrow \left|x_1-x_2\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^2-3ac}{a^2}}$.

Khi đó:

□ Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d: y=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

□ Hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị là $k=\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)$.

□ Tọa độ 2 điểm cực trị là $A\left(x_1;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_1+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$, $B\left(x_2;\dfrac{2}{3}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)x_2+d-\dfrac{bc}{9a}\right)$.

□ Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{1+\dfrac{4}{9}\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)^2}\left|x_1-x_2\right|$.

□ Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}\left|\left(d-\dfrac{bc}{9a}\right)\left(x_1-x_2\right)\right|$.

□ Trung điểm I của AB cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, tức hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$, vì vậy $I\left(-\dfrac{b}{3a};d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$.

2 - Các dạng toán hay gặp:

□ $AB\perp\Delta \Leftrightarrow k.k_\Delta=-1$

□ $AB//\Delta \Rightarrow k=k_\Delta$

□ $(AB,\Delta)=\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$

□ A,B cách đều $\Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB//\Delta \\ I\in\Delta \end{array}\right.$

□ >> **Cụ thể:** $AB//\Delta$ (A,B nằm cùng phía Δ); $I\in\Delta$ (A,B nằm về hai phía với Δ).

- A,B đối xứng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} I \in \Delta \\ k.k_{\Delta} = -1 \end{cases}$.

- A,B nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y = 0$ có ba nghiệm phân biệt

- ΔABC cân tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB} = 0$

- ΔABC đều $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB} = 0, CI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và trục hoành chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành và chúng có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc trục hoành, tức $y\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0 \Leftrightarrow d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} = 0$.

3 - Thủ thuật casio (tham khảo) viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

*** Chú ý:** có $y'' = 6ax + 2b \Rightarrow y = \frac{y'.y''}{18a} + \frac{2}{3}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$

Suy ra $\frac{2}{3}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{bc}{9a} = y - \frac{y'.y''}{18a}$

Do đó bằng máy tính ta có thể tìm nhanh được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hàm số bằng cách

MODE 2 (Vào môi trường số phức)

Nhập biểu thức $y - \frac{y'.y''}{18a}$

Calc với $x = i$, **(CALC ENG)**

Ta được kết quả là $mi + n$, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = mx + n$.

III - HÀM TRÙNG PHƯƠNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

- Với điều kiện $ab < 0$ hàm số có 3 cực trị.

- Khi hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị là $0; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}; \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

- Tọa độ 3 điểm cực trị tương ứng của đồ thị hàm sô là: $\begin{cases} A(0;c) \\ B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right); C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{cases}$

Nhận xét: tam giác ABC cân tại A, có $A \in Oy$; $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}}$; $BC = \sqrt{\frac{-b}{2a}}$

- Các điểm cực trị đồ thị hàm số thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow b^2 = 4ac$

- Điểm $(0; y_0)$ là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow 3y_0 = 3c - \frac{b^2}{2a}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = -\dfrac{8a+b^3}{4ab}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = \dfrac{8a-b^3}{4ab}$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}(*)$ và $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}$

□ Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = 0 \Leftrightarrow b^3 = -8a$.

□ Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 = -24a$.

□ Tam giác ABC có một góc bằng $120°$ $\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3b^3 = -8a$

Lưu ý, chỉ cần nhớ công thức $(*)$ để suy ra 3 trường hợp đặc biệt trên.

□ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \left|\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right|$.

□ Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \dfrac{b^2}{|a|\left(4+\sqrt{16-\dfrac{2b^3}{a}}\right)}$.

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

2 - Giao điểm với trục hoành

Với $ab < 0; ac > 0; b^2 - 4ac > 0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, khi đó:

□ Hoành độ 4 giao điểm lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$.

□ Cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow 9b^2 = 100ac$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có phần phía trên Ox và phần phía dưới Ox bằng nhau $5b^2 = 36ac$.

IV – CÁC DẠNG TOÁN

DANG 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1.(THPT Nghèn Lần 1) Trên khoảng $(0;\pi)$, hàm số $f(x) = x + 2\cos x$ đạt cực tiểu tại

A. $x = \dfrac{\pi}{6}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{3}$. **C.** $x = \dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 2. (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Hỏi hàm số $y = |\sin 2x + x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 3.(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|\sin x - \dfrac{x}{4}\right|$, $x \in (-\pi;\pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 4.Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{5}$. **C.** $R=10$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Câu 5. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7),B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$. **C.** $y(-1)=-11$. **D.** $y(-1)=-35$

Câu 6. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{1}{2}$. **D.** $S=4$.

Câu 7. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm cực đại của (C); B, C la hai điểm cực tiểu của (C). Gọi d là đưởng thẳng qua A; S la tổng khoảng cách từ B, C đến d. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S.

A. $4+\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $6+\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $4+4\sqrt{5}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Câu 9. (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 10. (ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Câu 11. (Ba Đình Lần2) Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 12. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2-8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=[f'(x)]^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right)f''\left(x\right)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right).f'\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)=x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. (Đặng Thành Nam Đề 15) Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn $\left(C\right)$. Bán kính của $\left(C\right)$ gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. $12,4$. **B.** $6,4$. **C.** $4,4$. **D.** 27.

Câu 20. Cho hàm số $y=\left|x\right|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

DANG 2: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ

DỰA VÀO BBT

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=3f\left(x\right)+1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm1$. **D.** $x=0$.

Câu 2. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(-x+3)$ đạt cực đại tại

x	-∞		-1		0		2		+∞
$f(x)$		↗	1	↘	-2	↗	1	↘	

A. $x=-1$ **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 4. Suy ra hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$?

(I) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$. (II) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(III) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.(IV) Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y = f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu**.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3 $\searrow$	1 $\searrow$	-1	$\nearrow$ 2	$\nearrow$ 4

Hàm số $g(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 9. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Câu 10. (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	$+$	0	-	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ là

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 11. (Cổ Loa Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

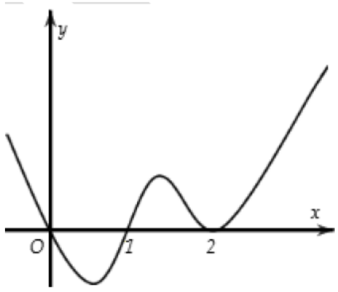
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

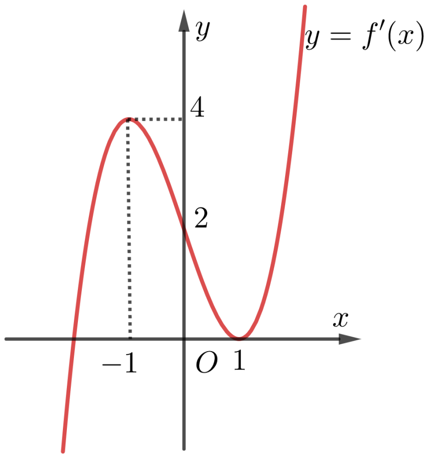
DỰA VÀO ĐỒ THỊ

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực trị của hàm $y=f\left(x\right)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

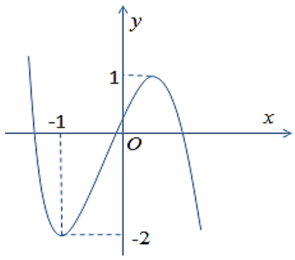
Câu 13. (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là

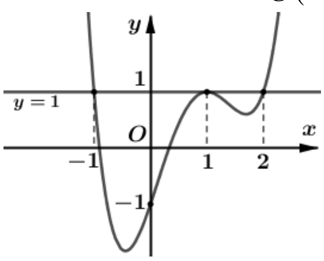
A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)+2x$ là



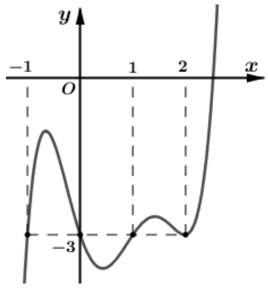
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x$. Tìm số cực trị của hàm số $g\left(x\right)$?



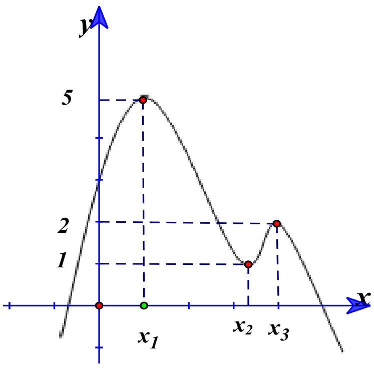
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



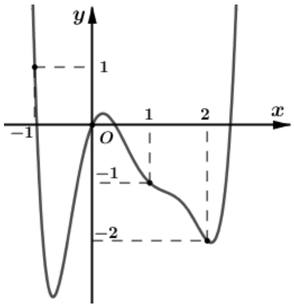
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?



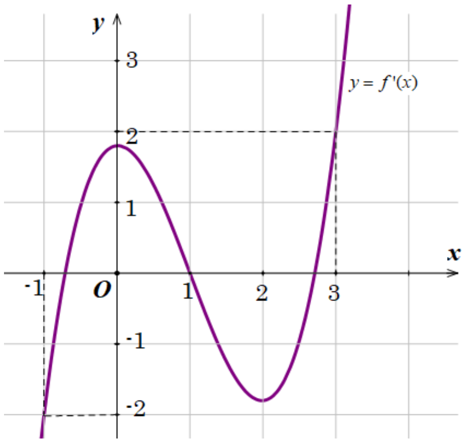
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 19. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+x+1$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng ?**

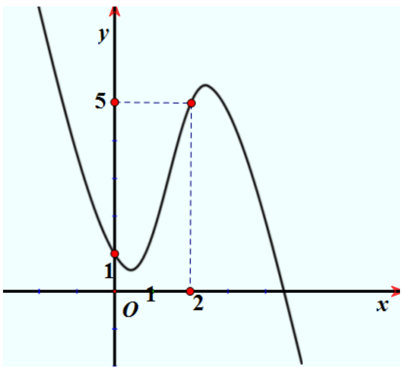
A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 20. (SGD-Nam-Định-2019) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

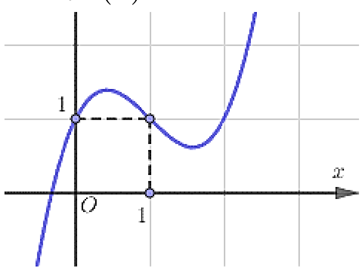
A. Hàm số $y = f\left(x\right) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f\left(x\right) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f\left(x\right) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = f\left(x\right) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

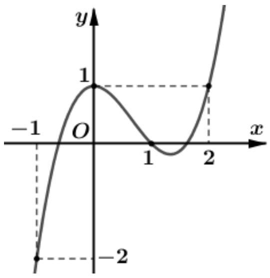
Câu 21. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Số điểm **cực tiểu** của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{1}{9}x^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

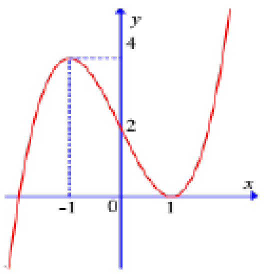
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

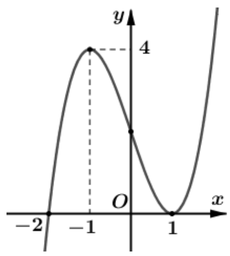
Câu 23. (Văn Giang Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

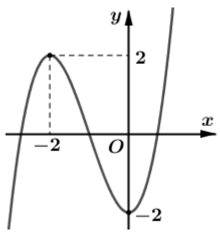
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

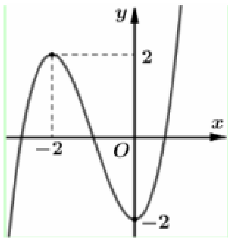
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu** ?

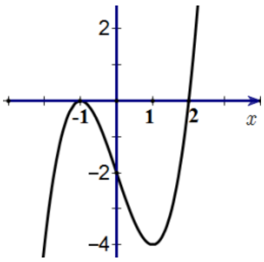
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

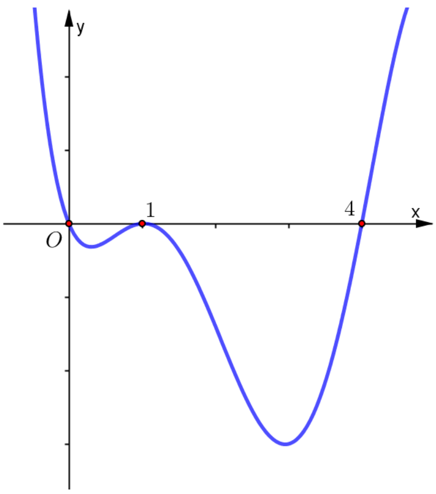
A. Hàm số có sáu cực trị.

B. Hàm số có năm cực trị.

C. Hàm số có bốn cực trị.

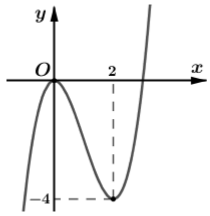
D. Hàm số có ba cực trị.

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x^3)$ là:



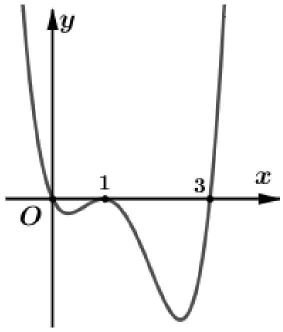
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 31. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

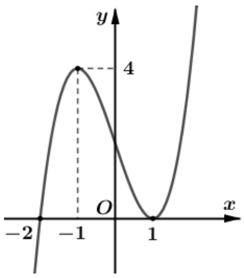
Câu 32. (Chuyên Thái Nguyên) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Khi đó đồ thị hàm số $y = [f(x)]^2$ có

A. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu
B. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
D. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 33. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f^2\left(x\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

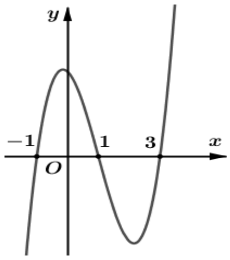
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y = \left(f(x)\right)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương và có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

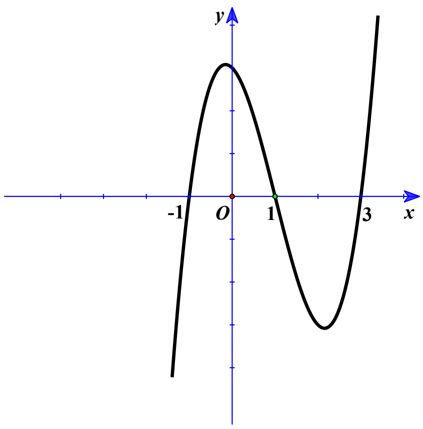
A. 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại. **B.** 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 1 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại. **D.** 1 điểm cực tiểu, 0 điểm cực đại.

Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



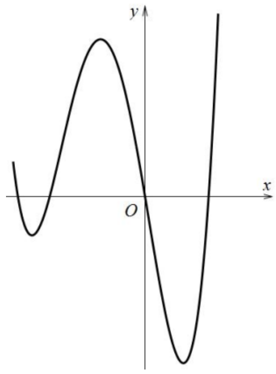
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

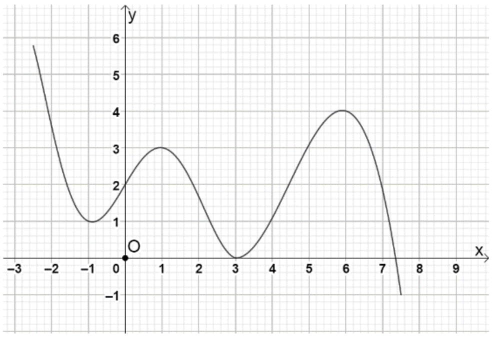
Câu 38. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$

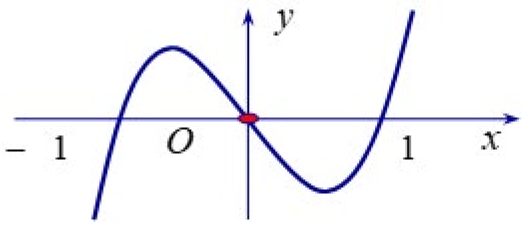
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 39. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

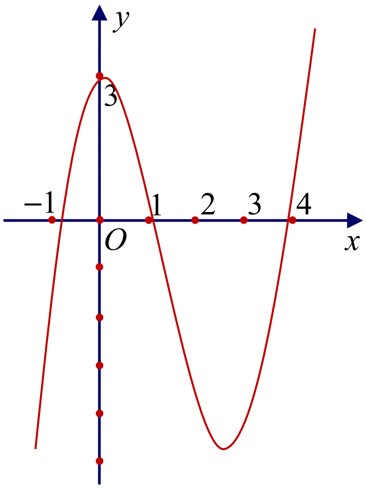
Câu 40. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

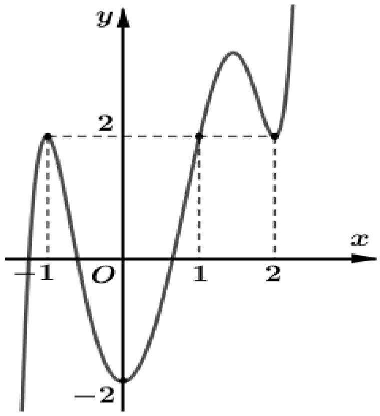
A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 41. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

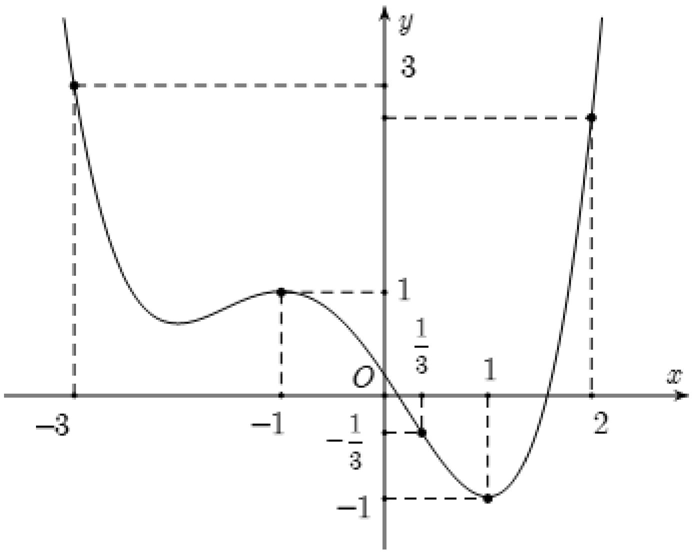
Câu 42. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

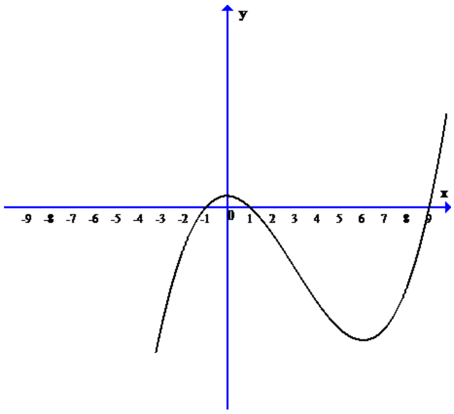
A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

Câu 43. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

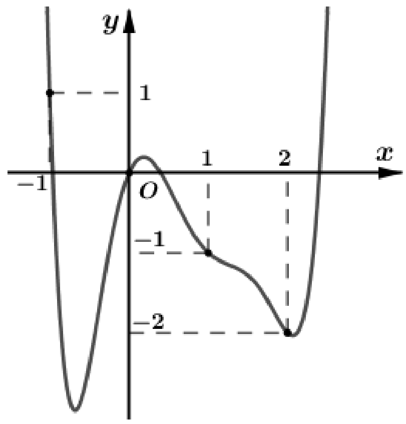
Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+1\right)$ là :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

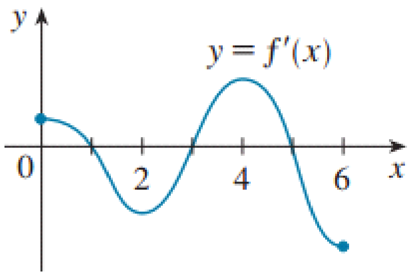
Câu 45. (Liên Trường Nghệ An) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

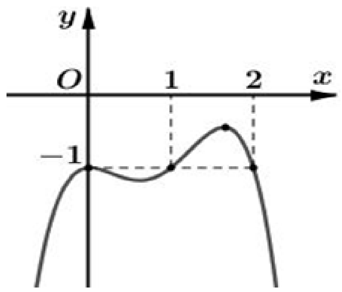
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[0;6\right]$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^2+2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $\left[0;6\right]$.



A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

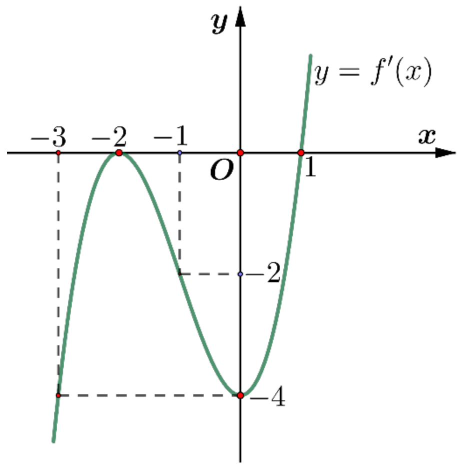
Câu 47. (Kim Liên) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x=1$. **B.** $x=2$.

C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

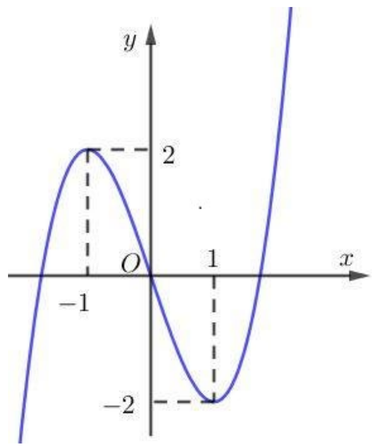
Câu 48. **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ là

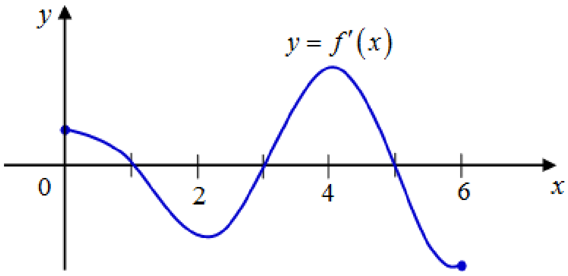
A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Biết đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



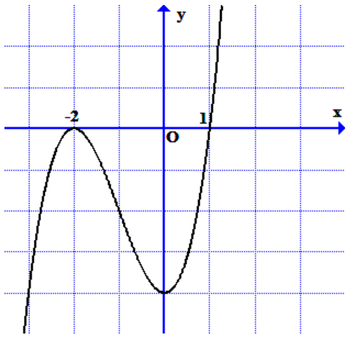
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 50. **(Lê Xoay lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và các mệnh đề sau:

I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

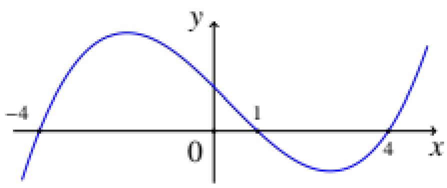
IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

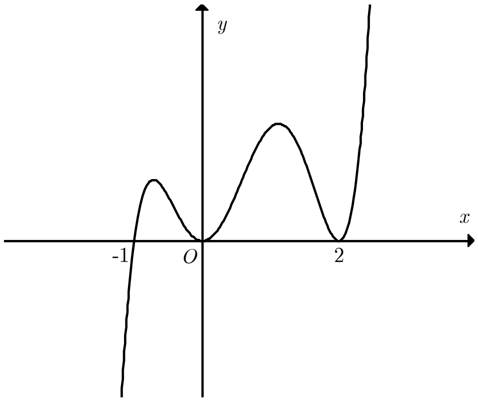
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 52. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

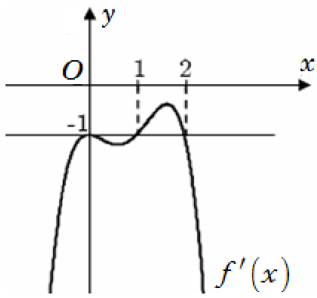
Câu 53. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

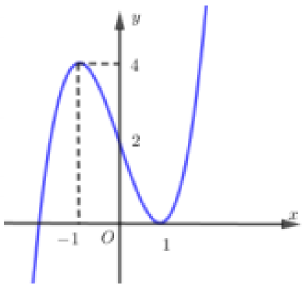
Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



A. Không có điểm cực tiểu. **B.** $x=0$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

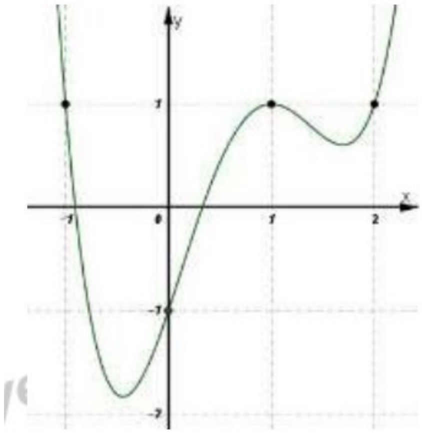
Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là

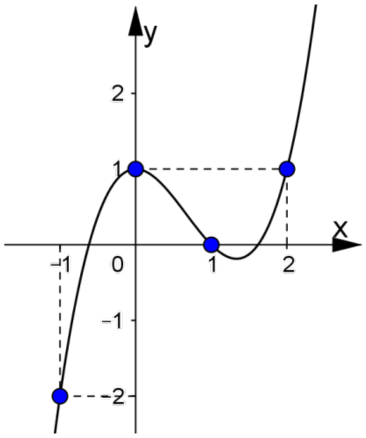
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đặt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-1$

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=2$

DẠNG 3: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BA CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. $m=3$ **B.** $m=1 \vee m=3$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Câu 3. (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Tìm m để hàm số $y=mx^3-(m^2+1)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 5. (Đoàn Thượng) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Câu 6. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8.$

A. $m=-1.$ **B.** $m=2.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=-2.$

Câu 7. (Chuyên Thái Bình Lần 3) Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+\frac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1,x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1x_2-2(x_1+x_2)$

A. $\min P=-9.$ **B.** $\min P=-1.$ **C.** $\min P=-\frac{1}{2}.$ **D.** $\min P=-\frac{9}{2}.$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $|x_1-x_2|\ge 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge\frac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m\le\frac{1-\sqrt{64}}{2}\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge\frac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m\le\frac{1-\sqrt{63}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge\frac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m\le\frac{1-\sqrt{61}}{2}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge\frac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\le\frac{1-\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.$.

Câu 10. Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$. Xác định m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 11. Tập hợp tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-18$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$ **B.** $(-3;+\infty)\backslash\{3\}$ **C.** $(-\infty;7)\backslash\{3\}$ **D.** $(-3;7)\backslash\{3\}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3m}{2}x^2+m$ nằm khác phía với đường thẳng $y=x$.

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\ne 0$. **D.** $0<m\ne 2$.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A,B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A,B nằm cùng một phía và cách đều đường thẳng $x+2y-1=0$. Tính tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$. **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=\pm 3$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^3$ có hai cực trị A và B sao cho góc $\widehat{AOB}=120^o$?

A. $m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$. **B.** $m=\pm 6\sqrt{\frac{3}{5}}$. **C.** $m=\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. **D.** $m=\pm\frac{12}{5}$.

Câu 17. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC đều với $C(2;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m^3$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $C\left(1;\frac{7}{8}\right)$ tạo thành một tam giác cân tại C.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+\frac{4}{27}m^3$ có hai điểm cực trị A,B cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;2)$.

A. $0<m<12$. **B.** $m=6$. **C.** $m=3$. **D.** $m=12$.

Câu 20. Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\,(1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-\frac{17}{11}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx-4my+5m^2-1=0$.

A. $1 < m < \frac{5}{3}$. **B.** $-1 < m < \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{5} < m < 1$. **D.** $-\frac{3}{5} < m < 1$.

Câu 23. Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (với $m < 0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 24. Với $m \in [-1;1]$, đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB có bán kính đường tròn nội tiếp có giá trị lớn nhất là M_0, đạt tại $m = m_0$. Tính $P = M_0 + m_0$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y = x + 2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Câu 26. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y = x - 1\ (d)$.

A. $m = 0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\frac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\frac{9}{2}$.

Câu 27. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + ax + 1$ và $g(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3ax - a$; với a là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho mỗi hàm số có hai cực trị đồng thời giữa hai hoành độ cực trị của hàm số này có một hoành độ cực trị của hàm số kia.

A. $-\frac{15}{4} < a < \frac{1}{5}$. **B.** $-4 < a < 15$. **C.** $-\frac{15}{4} < a < 0$. **D.** $-4 < a < 0$.

Câu 28. Kí hiệu $d_{\min}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm $d_{\min}$.

A. $d_{\min} = \frac{2}{3}$. **B.** $d_{\min} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $d_{\min} = \frac{4}{3}$. **D.** $d_{\min} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x - 1$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $A(a;b)$ sao cho A là điểm cực đại (C_m) tương ứng với $m = m_1$ và A là điểm cực tiểu (C_m) tương ứng với $m = m_2$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = -3$.

Câu 30. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 31. (Sở Quảng Ninh Lần1) Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 32. (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị là A,B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 34. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 35. (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 36. (Sở Ninh Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 38. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 39. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 40. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-(x-1)^3+3m^2(x-1)-2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

A. $m=\pm\dfrac{1}{3}$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Câu 41. Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $1<m<2$ **B.** $2<m<\dfrac{7}{2}$ **C.** $3<m<4$ **D.** $m<1$

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-ax^2-3ax+4$. Để hàm số đạt cực trị tại $x_1;x_2$ thỏa mãn $\dfrac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\dfrac{x_2^2+2ax_1+9a}{a^2}=2$ thì a thuộc khoảng nào?

A. $a\in\left(-3;\dfrac{-5}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(-5;\dfrac{-7}{2}\right)$. **C.** $a\in(-2;-1)$. **D.** $a\in\left(-\dfrac{7}{2};-3\right)$

Câu 43. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 44. (Quỳnh Lưu Lần 1) Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 45. (Sở Vĩnh Phúc) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\frac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=\frac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

DẠNG 4: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(2;+\infty)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in(0;2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-(m-1)x^2+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 4. **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5. **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 6. **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Câu 7. Biết rằng đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức: $P=m^2+2m+1$.

A. $P=1$ **B.** $P=4$ **C.** $P=0$ **D.** $P=2$.

Câu 8. **(Lê Xoay lần1)** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^4+2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=\sqrt[3]{4}$.

Câu 9. **(Trần Đại Nghĩa)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị thao thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. ***B.*** $m=1-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. ***C.*** $m=1$ ***D.*** $m=0$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m<-1$.

B. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$.

C. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 11. (Sở Lạng Sơn 2019) Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

A. $m=-\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc toạ độ O làm trực tâm.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Câu 16. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B,

Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Giá trị m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ O thoả mãn.

A. $m\in[-4;-3]$. **B.** $m\in[-2;-1]$. **C.** $m\in[-1;0]$. **D.** $m\in[0;1]$.

Câu 17. (Nguyễn Khuyến) Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k=-1; k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1; k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=1; k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{3}; k=\frac{1}{2}$.

Câu 18. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi, trong đó $D(0;-3), A$ thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-(2m-1)x^2+m+3$ có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Câu 21. (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 22. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m<-1$. **B.** $m>2$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 23. (Đoàn Thượng) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^4-2(m^8+16)x^2+m^2+2018$. Biết rằng $I(0;m^2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Bán kính đường tròn đó có giá trị là

A. $R=4$. **B.** $R=2$. **C.** $R=\sqrt{2018}$. **D.** $R=2018$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp?

A. $m=1$ **B.** $m=\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ **D.** $m=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

Câu 26. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\geq 1$. **B.** $m\leq 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 27. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+m^4$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C), S_1 và S_2 lần lượt là phần diện tích của tam giác ABC phía trên và phía dưới trục hoành. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

DẠNG 5: CỰC TRỊ VỚI CÁC HÀM SỐ KHÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Biết hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có hai cực trị x_1,x_2.Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $y=mx+n$. **B.** $y=\frac{m}{2}x+n$. **C.** $y=-mx+n$. **D.** $y=\frac{-m}{2}x+n$.

Câu 2. Biết rằng hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có hai cực trị x_1,x_2.Tính $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

A. $k=\frac{-2}{m}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{2}{m}$. **D.** $k=\frac{-1}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-2x+m-1}{2x+1}$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $\mathrm{y}'=\mathrm{x}^2-\sqrt{12}\mathrm{x}+\frac{1}{4}(\mathrm{b}+3\mathrm{a})$ $\forall \mathrm{x}\in\mathrm{R}$,biết hàm số luôn có hai cực trị với a,b là các số thực không âm thỏa mãn $3b-a\le 6$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathrm{P}=2\mathrm{a}+\mathrm{b}$?

A. 1**B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-mx^3+4x+m+2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là toạ độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{4x-m}$.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=3$

Câu 6. **(CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1)**Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\frac{m}{3}x^3+2019$.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 7. **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)**Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 8. (Lý Nhân Tông) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right|\le h^2, \forall x\in\mathbb{R}, \forall h>0$. Đặt $g\left(x\right)=\left[x+f'\left(x\right)\right]^{2019}+\left[x+f'\left(x\right)\right]^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$, m là tham số nguyên và $m<27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 100. **B.** 50. **C.** 108. **D.** 58.

Câu 10. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(mx^2+4mx-m+n-2\right)$ với $m, n\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. Trên đoạn $\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-\frac{7}{2}$. **B.** $x=-\frac{3}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{2}$. **D.** $x=-\frac{5}{4}$.

Câu 11. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 12. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ biết $f'\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)^3\left(x^2-2mx+m+6\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 18. (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+1\right)\left(x^2+2mx+5\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị, tìm số tập con khác rỗng của S?

A. 127. **B.** 15. **C.** 63. **D.** 31.

Câu 13. (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(x^2+3x-4\right)$. Gọi S là tập các số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng:

A. 10. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 4.

Câu 15. (Sở Hà Nam) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

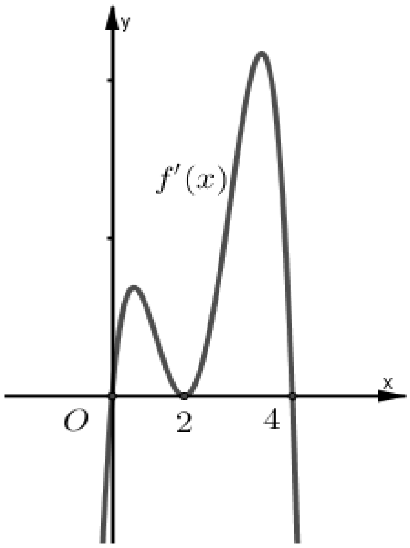
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 17. (Hàm Rồng) Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 18. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2-m)$ có ba điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 19. (THTT lần5) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y=\dfrac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019.

DẠNG 6: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trước khi đi vào các bài toán ta cần nhớ những kiến thức sau.

□ Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

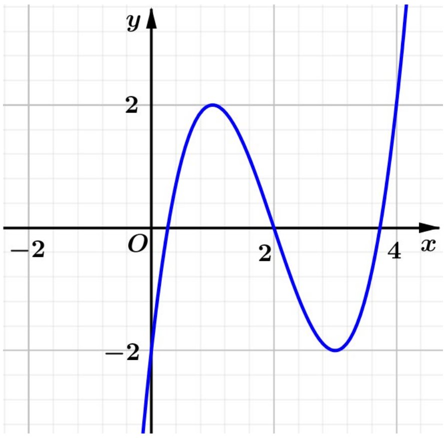
□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|mx+n|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{n}{m}$ của hàm số $f(x)$

□ Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số.

□ Cho hàm số có dạng $y=\left|ax^2+bx+c\right|+mx$, tìm điều kiện của tham số m để giá trị cực tiểu của hàm số đạt giá trị lớn nhất, khi đó ta có $\begin{cases}\max\left(y_{ct}\right)=c\\ m=-b\end{cases}$

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 2. **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 ‖ -1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

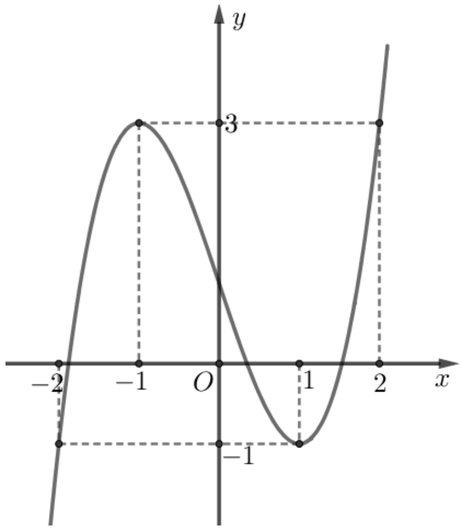
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

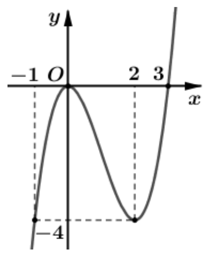
Câu 4. **(Chuyên Vinh Lần 3)**Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$

có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



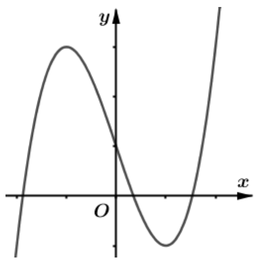
A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 5. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x\right) + 4\right|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng ?



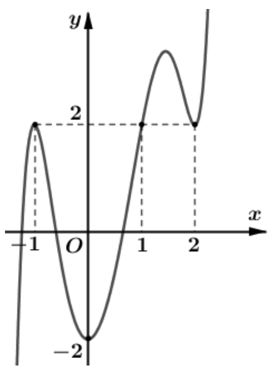
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right) = f\left(\left|x\right|\right) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



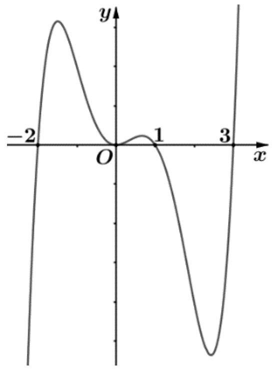
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right) = \left|2f\left(x\right) - 3\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



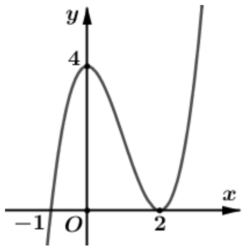
A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^4\left(x-2\right)^5\left(x+3\right)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)^4\left(x^2-4\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

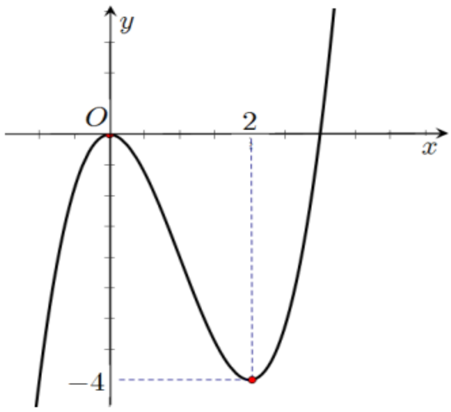
Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x+2\right)^4\left(x^2+4\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^3\left(x-2\right)^5\left(x+3\right)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ là

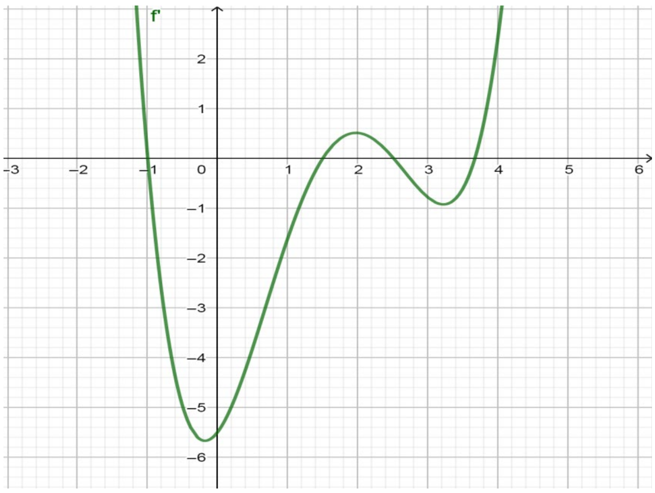
A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 14. **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ là



A. 2.   **B.** 3.   **C.** 5.   **D.** 7.

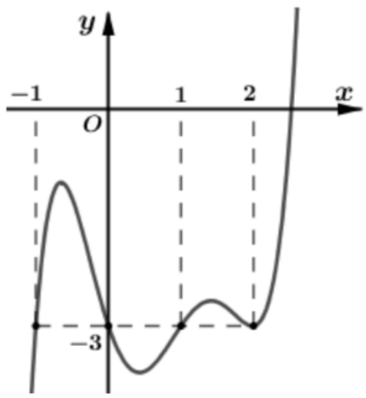
Câu 15. (THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH) Cho hàm số đa thức $f(x)=mx^5+nx^4+px^3+qx^2+hx+r$, $(m,n,p,q,h,r\in\mathbb{R})$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là -1; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-(m+n+p+q+h+r)\right|$ là

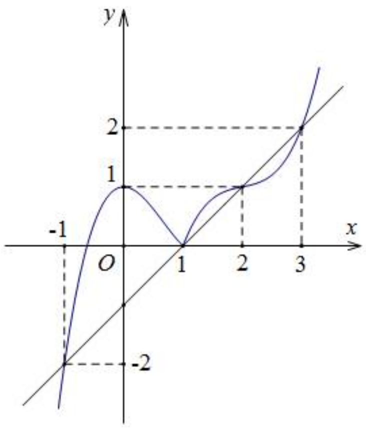
A. 6.   **B.** 7.   **C.** 8.   **D.** 9.

Câu 16. (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



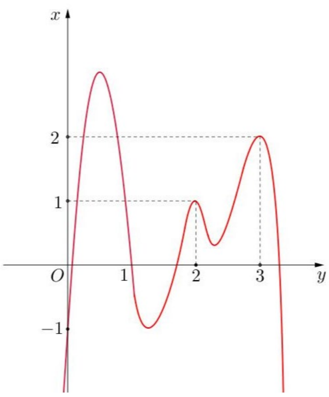
A. 4.   **B.** 5.   **C.** 3.   **D.** 6.

Câu 17. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f\left(-3\right)>8$; $f\left(4\right)>\dfrac{9}{2}$; $f\left(2\right)<\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-\left(x-1\right)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



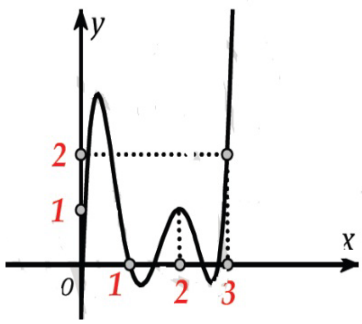
A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g\left(x\right)=\left|2f\left(x\right)-\left(x-1\right)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

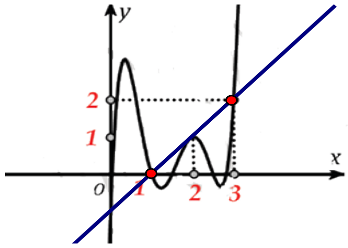


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D**

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3; x=a\left(a\in(1;2)\right)$

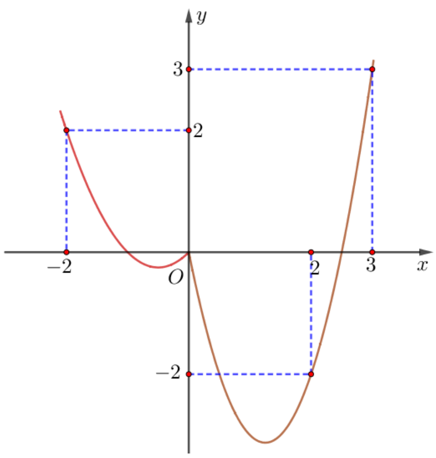
Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		1		a		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 20. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

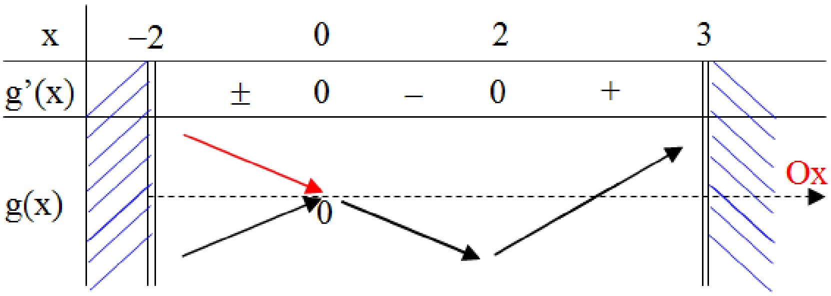


Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+\dfrac{x^2}{2}-f(0)$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

(Nhận xét: $x=2$ là nghiệm bội lẻ, $x=0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y=|g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$

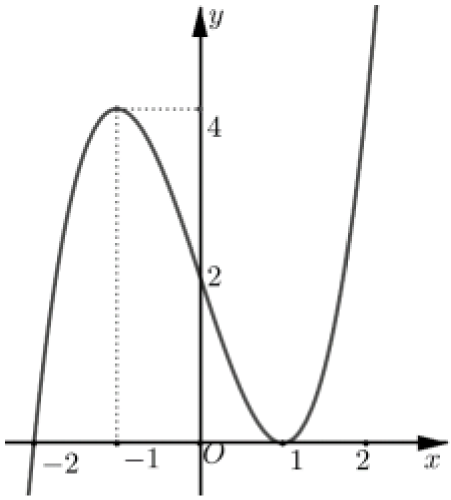
Câu 21. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

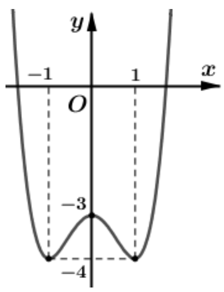
Câu 22. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x-2|\right)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=\left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Câu 25. **(Chuyên KHTN lần2)** Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^3-3x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị h

àm số $y=\left|f(\text{x}-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f(1-3\text{x})+1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\text{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3\left|f(2x-1)\right|-10=0$ là

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$-$	||		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

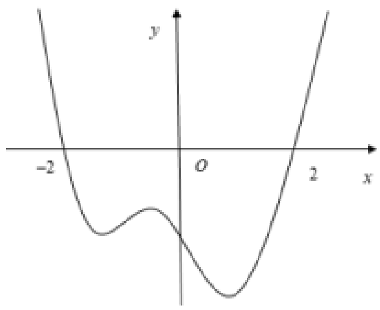
Câu 29. **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x-4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 31. (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y = \left|x^3 + (2m-1)x^2 + \left(2m^2 - 2m - 9\right)x - 2m^2 + 9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 4\right)|x| + 1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 4\right)|x| + 1$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left|3x^5 - 15x^3 - 60x + m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 289. **B.** 287. **C.** 286. **D.** 288.

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4<m<0$. **B.** $-4\le m\le 0$. **C.** $0<m<4$. **D.** $m\ge 4$ hoặc $m\le 0$.

Câu 38. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số

$y=\left|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 46. **(Lê Xoay lần1)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có ba điểm **cực tiểu**.

A. $m<5$. **B.** $5<m<9$. **C.** $5\le m<9$. **D.** $5<m\le 9$.

Câu 48.`Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-3+m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m=3$ hoặc $m=-1$. **B.** $m\geq 1$ hoặc $m\leq -3$.

C. $1\leq m\leq 3$. **D.** $m\geq 3$ hoặc $m\leq -1$.

Câu 49. (Nguyễn Đình Chiểu Tiền Giang) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 50. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 51. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+\left(m+6\right)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Câu 52. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^3-5x^2+\left(m+3\right)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 53. (Hải Hậu Lần1) Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in\left[0;100\right]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Câu 54. [THPT Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, lần 1, năm 2018]

Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Câu 55. (Đặng Thành Nam Đề 3) Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 56. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Câu 57. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ là

A. $S=3.$ **B.** $S=5.$ **C.** $S=2.$ **D.** $S=1.$

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $a>0$, $d>2018$, $a+b+c+d-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2018\right|$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 59. Biết rằng phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Câu 61. Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$, biết $m+n>0$ và $7+2(2m+n)<0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0;3)$ và $B(2;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 63. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\bc<0\end{cases}$. Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Số điểm cực trị của hàm số $\left|f(|x|)\right|$ lớn nhất có thể có là

A. 2. **B.** 9. **C.** 11 **D.** 5.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Câu 65. Biết phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ bốn nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 66. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 67. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\backslash\{2\}$. **D.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Câu 68. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 69. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=(x^2+2)|x^2-m|$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 17. **C.** 2. **D.** 16.

Câu 70. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x^4-mx^2+m|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 71. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x^4-4x^2+m|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 13.

Câu 72. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 73. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=|x^4-2(m-1)x^2+2m-3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\backslash\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 74. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y=|x^4-10x^2+m|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S\cap\mathbb{Z}$ là

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 75. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-7;7)$ để đồ thị hàm số $y=|x^4-3mx^2-4|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B. 2.** **C. 1.** **D. 3**

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ và $a>0$.

Biết $f(-1)<0, f(0)>0, f(1)<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 77. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2017$ và $a+b+c<2017$. Số cực trị của hàm số $y=|f(x)-2017|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

Câu 79. Cho hàm số $f(x)=(m^4+1)x^4+(-2^{m+1}.m^{2.-4})x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-1|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=(m^{2018}+1)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020$. Hàm số $y=|f(x)-2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 81. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 82. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019;2019)$ để hàm số $y=\left|x^2-4x+m\right|+6x+1$ có ba điểm cực trị.

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2013. **D.** 2015.

Câu 83. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m\left|x-m+1\right|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 84. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m\left|x-m+6\right|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 85. (Nguyễn Du số 1 lần3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

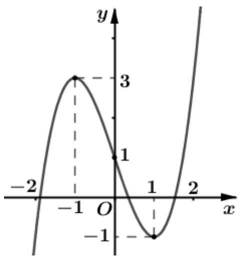
Câu 88. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 42. **B.** 21. **C.** 44. **D.** 22.

Câu 89. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=1; x=2; x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y=f\left(|x+m|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 8. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 19.

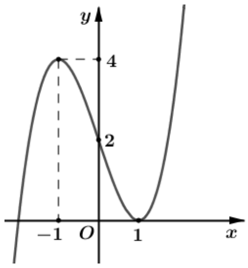
Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f\left(|x+m|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

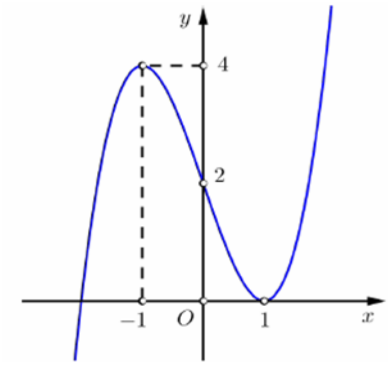
Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.

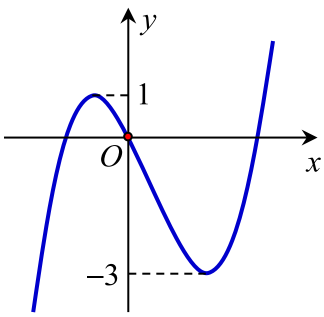
A. $m < -1$. **B.** $m > -1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 1$.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m > 1$. **B.** $m < -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m < 1$.

Câu 93. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

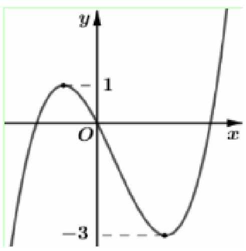


Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là

A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B.** $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \le m \le 3$.

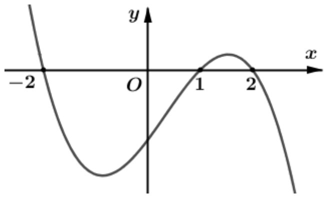
Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x)+m|$ có 5 điểm cực trị là



A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$. **B.** $-1 < m < 3$.

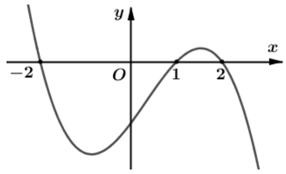
C. $m=-1$ hoặc $m=3$.   **D.** $1<m<3$.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3.   **B.** 4.   **C.** 5.   **D.** Vô số.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2.   **B.** 3.   **C.** 4.   **D.** Vô số.

Câu 97. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in\mathbb{Z};|m|\le 2019$) để đồ thị hàm số $y=|m+f(|x|)|$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2024.   **B.** 3.   **C.** 4.   **D.** 2020.

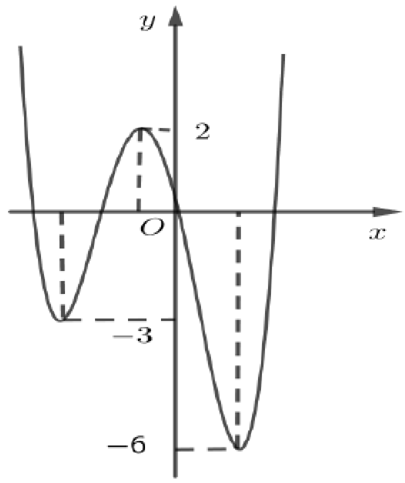
Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$.   **B.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.   **C.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$.   **D.** $m=3$.

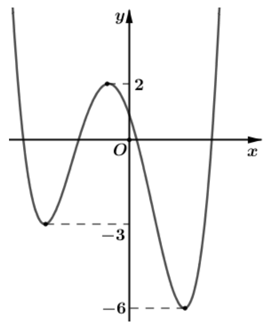
Câu 99. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

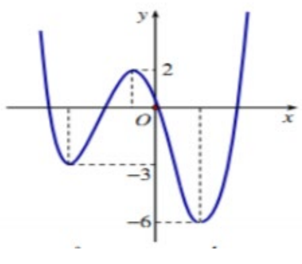
Câu 100. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-4;4\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

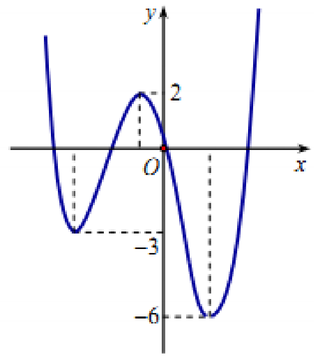
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 101. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

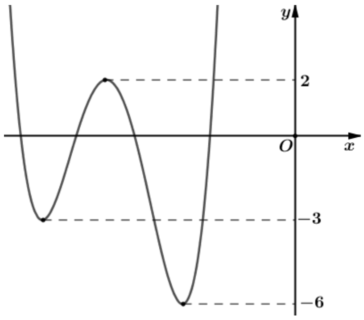
Câu 102. Cho đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Câu 103. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



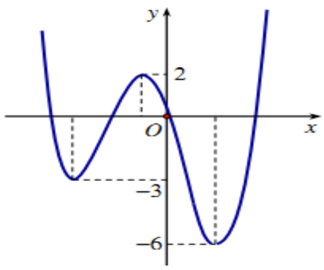
Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 104. (Chuyên Vinh Lần 3) Hàm số $f\left(x\right)=\left|\frac{x}{x^2+1}-m\right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

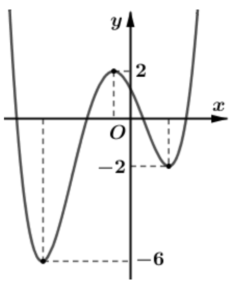
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 105. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Câu 106. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+5\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 5.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2+m^2-3m-4\right)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

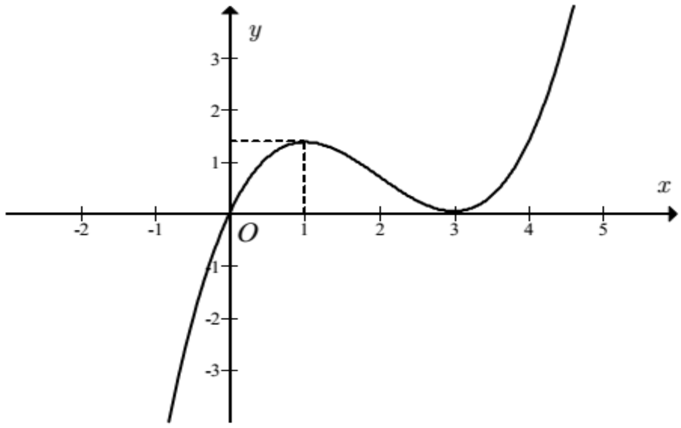
Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 114. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{\left|x^3-3x^2+m\right|}$ có 5 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;4)$.

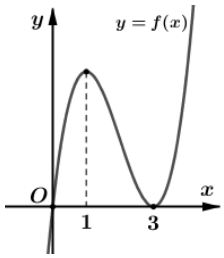
Câu 115. (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x+2)+4f(x+2)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047 . **B.** 5049 . **C.** 5050 . **D.** 5043 .

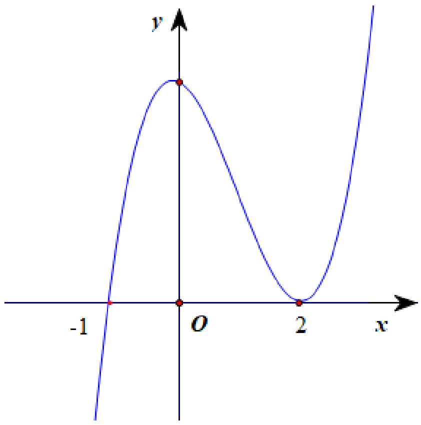
Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\le 1$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. $m\ge 1$. **B.** $m>1$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m<-1$

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I – LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

a) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

b) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

c) Nếu $f\left(x_0\right)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2 - Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3 - Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $\left(a;b\right)\backslash\left\{x_0\right\}$

a) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

b) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

*) Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

4 - Kiến thức cần nhớ:

a) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

b) Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ đến đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$:

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c) Diện tích tam giác ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

II - HÀM BẬC BA

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- $b^2 - 3ac \le 0$ hàm số **không** có điểm cực trị.
- $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị.
- $\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$ hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

Với $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$, có $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$, $x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^2 - 3ac}{a^2}}$.

Khi đó:

- Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d: y = \dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}$.
- Hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm cực trị là $k = \dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)$.
- Tọa độ 2 điểm cực trị là $A\left(x_1; \dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x_1 + d - \dfrac{bc}{9a}\right)$, $B\left(x_2; \dfrac{2}{3}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x_2 + d - \dfrac{bc}{9a}\right)$.
- Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{1 + \dfrac{4}{9}\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)^2}\,|x_1 - x_2|$.
- Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2}\left|\left(d - \dfrac{bc}{9a}\right)(x_1 - x_2)\right|$.
- Trung điểm I của AB cũng chính là điểm uốn của đồ thị hàm số, tức hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$, vì vậy $I\left(-\dfrac{b}{3a}; d - \dfrac{bc}{3a} + \dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$.

2 - Các dạng toán hay gặp:

- $AB \perp \Delta \Leftrightarrow k.k_\Delta = -1$
- $AB // \Delta \Rightarrow k = k_\Delta$
- $(AB, \Delta) = \alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{k - k_\Delta}{1 + k.k_\Delta}\right|$
- A, B cách đều $\Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // \Delta \\ I \in \Delta \end{array}\right.$
- >> **Cụ thể:** $AB // \Delta$ (A, B nằm cùng phía Δ); $I \in \Delta$ (A, B nằm về hai phía với Δ).
- A, B đối xứng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} I \in \Delta \\ k.k_\Delta = -1 \end{cases}$.

□ A,B nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y=0$ có ba nghiệm phân biệt

□ ΔABC cân tại $C \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=0$

□ ΔABC đều $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=0, CI=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và trục hoành chia thành hai phần, phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành và chúng có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc trục hoành, tức $y\left(-\frac{b}{3a}\right)=0 \Leftrightarrow d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}=0$.

3 - Thủ thuật casio (tham khảo) viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số

*** Chú ý:** có $y''=6ax+2b \Rightarrow y=\frac{y'.y''}{18a}+\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$

Suy ra $\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}=y-\frac{y'.y''}{18a}$

Do đó bằng máy tính ta có thể tìm nhanh được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị hàm số bằng cách **MODE 2** (Vào môi trường số phức)

Nhập biểu thức $y-\frac{y'.y''}{18a}$

Calc với $x=i$, **(CALC ENG)**

Ta được kết quả là $mi+n$, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=mx+n$.

III - HÀM TRÙNG PHƯƠNG

1 - Cực trị của hàm số

Xét hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

□ Với điều kiện $ab<0$ hàm số có 3 cực trị.

□ Khi hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị là $0;-\sqrt{-\frac{b}{2a}};\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

□ Tọa độ 3 điểm cực trị tương ứng của đồ thị hàm sô là: $\begin{cases} A(0;c) \\ B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}};c-\frac{b^2}{4a}\right);C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}};c-\frac{b^2}{4a}\right) \end{cases}$

Nhận xét: tam giác ABC cân tại A, có $A\in Oy$; $AB=AC=\sqrt{\frac{b^4-8ab}{16a^2}}$; $BC=\sqrt{\frac{-b}{2a}}$

□ Các điểm cực trị đồ thị hàm số thuộc các trục tọa độ $\Leftrightarrow b^2=4ac$

□ Điểm $(0;y_0)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow 3y_0=3c-\frac{b^2}{2a}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0-c=-\frac{8a+b^3}{4ab}$.

□ Điểm $(0;y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow y_0 - c = \dfrac{8a-b^3}{4ab}$.

Do đó $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}(*)$ và $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{-b^5}{32a^3}}$

CÔNG THỨC TÍNH NHANH

Ba điểm cực trị tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện

STT	Dữ kiện	Công thức thỏa $ab<0$
1	Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a+b^3=0$
2	Tam giác ABC đều	$24a+b^3=0$
3	Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$\tan\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{8a}{b^3}$
4	Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$
5	Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0=\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$
6	Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0=\dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}$
7	Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$a.m_0^2+2b=0$
8	Tam giác ABC có độ dài $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9	Tam giác ABC có cực trị $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
10	Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a+b^3)>0$
11	Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
12	Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13	Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R_0$	$R=\left\lvert\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right\rvert$
14	Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$
15	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
16	Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
17	Tam giác ABC có cạnh $BC=k.AB=k.AC$	$b^3.k^2-8a(k^2-4)=0$
18	Trục hoành chia $\triangle ABC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
19	Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$
20	Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$	

2 - Giao điểm với trục hoành

Với $ab<0; ac>0; b^2-4ac>0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, khi đó:

□ Hoành độ 4 giao điểm lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 9b^2=100ac$.

□ Cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow 9b^2=100ac$

□ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có phần phía trên Ox và phần phía dưới Ox bằng nhau $5b^2=36ac$.

IV – CÁC DẠNG TOÁN

DANG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1.(THPT Nghèn Lần 1) Trên khoảng $(0;\pi)$, hàm số $f(x)=x+2\cos x$ đạt cực tiểu tại

A. $x=\frac{\pi}{6}$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}$. **C.** $x=\frac{5\pi}{6}$. **D.** $x=\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=1-2\sin x$; $f''(x)=-2\cos x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$ mà $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$; $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}>0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{5\pi}{6}$.

Câu 2. (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Hỏi hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có $f'(x)=2\cos 2x+1$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x\in(-\pi;\pi)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3} \\ x=\pm\frac{2\pi}{3} \end{array}\right..$$

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}<0; f\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}<0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}>0; f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}>0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\pi$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	π

Từ bảng biến thiên ta thấy: trên $(-\pi;\pi)$ đồ thị hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có 4 điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x=0$. Do đó hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$.

Câu 3.(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, $x\in(-\pi;\pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=\sin x-\frac{x}{4}$ với $x\in(-\pi;\pi)$.

Ta có $f'(x)=\cos x-\frac{1}{4}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right) \\ x=x_2\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right.$.

$f(x_1)=\sin x_1-\frac{x_1}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{x_1}{4}<-\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\pi}{8}<0$.

$f(x_2)=\sin x_2-\frac{x_2}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{x_2}{4}>\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\pi}{8}>0$.

BBT

x	$-\pi$		x_1		x_2		π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$\frac{-\pi}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1,x_2. Suy ra hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, với $x\in(-\pi;\pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 4. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{5}$. **C.** $R=10$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{array}{l} y'=3x^2-3 \\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-1 \Rightarrow y=7 \end{array}\right. \end{array}$

Vậy $A(1;3),B(-1;7)$

Lúc đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}.|1.7-3.(-1)|=5 \Rightarrow R_{OAB}=\frac{OA.OB.AB}{4S_{OAB}}=5$

Câu 5. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7),B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$. **C.** $y(-1)=-11$. **D.** $y(-1)=-35$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Theo bài cho ta có: $\begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ a+b+c+d=-7 \\ 8a+4b+2c+d=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ 7a+3b+c=-1 \\ d=-7-a-b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-9 \\ c=12 \\ d=-12 \end{cases}$

Suy ra $y=2x^3-9x^2+12x-12$. Do đó $y(-1)=-35$.

Câu 6. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{1}{2}$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4x; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1); \overrightarrow{AC}=(1;-1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ AB=AC=\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S=\frac{1}{2}AB.AC=1$.

Câu 7. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y'=4x^3-4x$. Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có $\mathrm{BC}.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Mà $AB=AC=\sqrt{2}$ và $BC=2$ nên suy ra $I\left(0;\dfrac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y=3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=d(I,BC)=\sqrt{2}-1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r=\frac{S_{ABC}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{2}-1$$

trong đó $a=BC=2$; $b=c=AB=AC=\sqrt{2}$; $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$r=(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{2}-1$ với $\cos A=\dfrac{(-2)^3+8.1}{(-2)^3-8-1}=0 \Rightarrow \widehat{A}=90^0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm cực đại của (C); B, C la hai điểm cực tiểu của (C). Gọi d là đường thẳng qua A; S la tổng khoảng cách từ B, C đến d. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S.

A. $4+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $6+\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $4+4\sqrt{5}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A(0;2)$, $B(-1;-1)$, $C(1;-1)$. Khi đó $d: y=kx+2$ và $S=\dfrac{|k+3|+|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}$.

Dễ có $\max S=6$, $\min S=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 9. (THPT Nghèn Lần1) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=-x^3+3x^2+3x-3 \Rightarrow y'=f''(x)-2x=-3x^2+4x+3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$;

$y''=-6x+4$; $y''\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-2\sqrt{13}<0$; $y''\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=2\sqrt{13}>0$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 10. **(ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)\left(x-4\right)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(x^2\right)'.f'\left(x^2\right)=2x.f'\left(x^2\right)$ (1)

Mà $f'\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)\left(x-4\right)^2\Rightarrow f'\left(x^2\right)=x^4\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g'\left(x\right)=2x^5\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)^2\rightarrow$ Bảng biến thiên (tự vẽ)

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $y=g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị $x=0, x=\pm 1$.

Câu 11. **(Ba Đình Lần2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x)=0$ có ba nghiệm (đơn hoặc bội lẻ) là $x=-2; x=-1; x=0$.

Đặt $g\left(x\right)=f(x^2-2x)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(2x-2\right).f'(x^2-2x)$. Vì $f'(\mathrm{x})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$. Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 12. **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\left(x-4\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=-f'\left(3-x\right)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ ta có

$$g'\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow f'\left(3-x\right)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x\leq -1\\1\leq 3-x\leq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 4\\-1\leq x\leq 2\end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2(x-4)f'(x^2-8x) = 2(x-4)\left[(x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x)\right]$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)\left[(x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Ta thấy $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $x = 0$, $x = 2$ và $x = 4$ đều là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = (x+1)(x-1)^2(x-2)$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta thấy $x = -1$ và $x = 2$ là các nghiệm đơn còn $x = 1$ là nghiệm kép $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = \left[f'(x)\right]^2 - 2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f''(x)f'(x) - 2f'(x).f''(x) - 2f(x).f'''(x) = -2f(x).f'''(x)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow f(x).f'''(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x+4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-1)^2=0\\x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right.$.

Ta thấy $x=0$ và $x=-4$ là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x.$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4+12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\end{array}\right.$.

Nhận thấy $x=0$ và $x=\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 17. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)=x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$ $\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$F'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 18. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y=\frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x)=F(t)\Big|_{2x}^{x^2}=F(x^2)-F(2x)\Rightarrow f'(x)=2x.F'(x^2)-2F'(2x)$

$=2x.\frac{2x^2}{1+x^4}-2.\frac{4x}{1+4x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^5+4x^3-8x=0 \Leftrightarrow 4x\left(2x^4+x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x^2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1=\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \\ x=x_2=-\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			$f(x_2)$				$f(x_1)$		

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 19. (Đặng Thành Nam Đề 15) Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. $12,4$. **B.** $6,4$. **C.** $4,4$. **D.** 27.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$$y'=x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+1}{x^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\approx 2,8794 \\ x_2\approx 0,6527 \\ x_3\approx -0,5321 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A\approx(2,879;-4,84), B\approx(0,653;-3,277), C\approx(-0,532;3,617)$.

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A,B,C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a-9,68b-c\approx 31,71 \\ 1,306a-6,554b-c\approx 11,17 \\ -1,064a+7,234b-c\approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\approx 5,374 \\ b\approx 1,0833 \\ c\approx -11,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R\approx\sqrt{a^2+b^2-c}\approx\sqrt{41,3}\approx 6,4$$

Câu 20. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\sqrt{x^6}-mx+5$

Suy ra: $y' = \dfrac{3x^5}{|x|^3} - m = \dfrac{3x^5 - m|x|^3}{|x|^3}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

TH1: $m = 0$. Ta có: $y' = \dfrac{5x^5}{|x|^3} = 0$ vô nghiệm và hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH2: $m > 0$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^5 = m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^5 = mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH3: $m < 0$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^5 = m|x|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^5 = -mx^3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

Vậy trong mọi trường hợp hàm số có đúng một cực trị với mọi tham số m

Chú ý: Thay vì trường hợp 2 ta xét $m > 0$, ta có thể chọn m là một số dương (như $m = 3$) để làm. Tương tự ở trường hợp 3, ta chọn $m = -3$ để làm sẽ cho lời giải nhanh hơn.

DANG 2: TÌM CỰC TRỊ DỰA VÀO BBT, ĐỒ THỊ

DỰA VÀO BBT

Câu 1. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right) = 3f\left(x\right) + 1$ đạt **cực tiểu** tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = \pm 1$. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right) = 3f'\left(x\right)$

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left(x\right)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x = \pm 1$.

Câu 2. (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-2	↗	1	↘	

A. $x = -1$ **B.** $x = 2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $-x+3 = t$.

Ta thấy $\left[f\left(-x+3\right)\right]' = -f'(-x+3) = -f'(t)$ nên để hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại thì hàm số $y = f(t)$ phải đạt cực tiểu

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y = f(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 0$

Câu 3. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $g\left(x\right) = f\left(3-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \left[\begin{array}{l} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4. Suy ra hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$?

(I) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$. (II) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(III) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2.(IV) Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $g'(x) = -f'(2-x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=0 \\ 2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

Cách 2: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị của $f(x)$ để thu được đồ thị của hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$, ta thực hiện phép biến đổi đồ thị như sau:

- Lấy đối xứng đồ thị $f(x)$ qua trục Oy ta thu được đồ thị hàm số $f(-x)$.

- Tịnh tiến đồ thị $f(-x)$ theo vec tơ $\vec{k} = 2\vec{i}$ (với $\vec{i}(1;0)$ là vectơ đơn vị) thu được đồ thị hàm số $f(2-x)$.

- Cuối cùng thực hiện phép tịnh tiến đồ thị $f(2-x)$ theo vec tơ $\vec{m}=-2\vec{j}$ (với $\vec{j}(0;1)$ là vectơ đơn vị) ta thu được đồ thị hàm số $g(x)=f(2-x)-2$

Thay vì thực hiện trên đồ thị ta có thể biến đổi dựa trên bảng biến thiên, ta thu được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Do đó chỉ có phát biểu IV là đúng.
$x=3$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2+1)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1) \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=-2 \\ x^2+1=1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nghiem don)} \\ x=0 \text{ (nghiem kep)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0 \text{(nghiem boi 3)}.$$

Vậy $g'(x)=0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x=0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=2xf'\left(x^2-2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'\left(x^2-2\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'\left(x^2-2\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0;\left[\begin{array}{l}x^2-2<-2\\ 0<x^2-2<2\end{array}\right.\\ x<0;\left[\begin{array}{l}x^2-2>2\\ -2<x^2-2<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}<x<2\\ x<-4\\ -\sqrt{2}<x<0\end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-4\right),\left(-\sqrt{2};0\right),\left(\sqrt{2};2\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-4;-\sqrt{2}\right),\left(0;\sqrt{2}\right),\left(2;+\infty\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $y=f'\left(x\right)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu**.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)$.

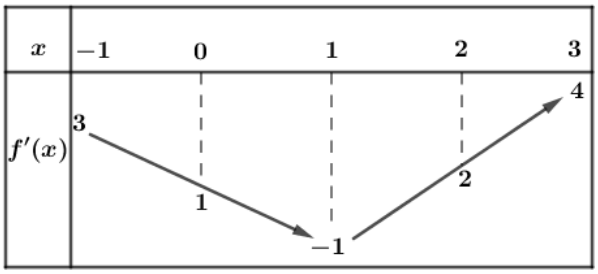
$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x=-1;x=3\end{array}\right.$ và $f'\left(x^2-2x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x<-2\\ x^2-2x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có một cực tiểu.

Câu 8. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-4;-2\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(2;4\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$. Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2$

- TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2\Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3\Leftrightarrow -4<x<-2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.
- TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2\Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a\ <0\Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Câu 9. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2,x=5$ và đạt cực đại tại $x=2$, nên: $\begin{cases}f''(-2)>0\\f''(2)<0\\f''(5)>0\end{cases}$.

$+\ g'(x)=-f'(1-x)+x^2-2x-3\Rightarrow\begin{cases}g'(-1)=-f'(2)+0=0\\g'(3)=0\\g'(2)=-f'(-1)-3<0\\g'(-3)=-f'(4)+12>0\end{cases}$.

Mặt khác: $g''(x)=f''(1-x)+2x-2\Rightarrow\begin{cases}g''(-1)=f''(2)-4<0\\g''(3)=f''(-2)+4>0\end{cases}$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 10. (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ là

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = 6f'(x)f^2(x) + 8f'(x)f(x) = 2f'(x)f(x)\left(3f(x)+4\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right..$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$+ \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Suy ra $x_1 < -1$ và $1 < x_2$.

+ Phương trình $f(x) = -\dfrac{4}{3}$ có 4 nghiệm x_3, x_4, x_5 x_6 (giả sử $x_3 < x_4 < x_5 < x_6$). Và 4 giá trị thỏa mãn yêu cầu sau: $x_1 < x_3 < -1; -1 < x_4 < 0; 0 < x_5 < 1; 1 < x_6 < x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		$x1$		$x3$		-1		$x4$		0		$x5$		1		$x6$		$x2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3f(x)+4$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 11. (Cổ Loa Hà Nội) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = 3f(-x^4+4x^2-6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y' = -(12x^3 - 24x).f'(-x^4+4x^2-6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x$

$= -12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6) + 12x\left(x^4 - x^2 - 2\right)$

$= -12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6) - \left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{cases}$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0, \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\ge 1, \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

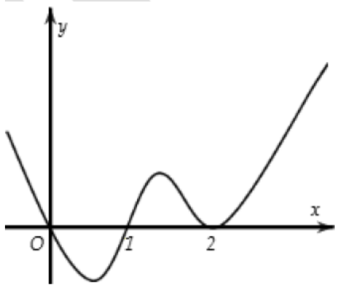
Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DỰA VÀO ĐỒ THỊ

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Xác định số điểm cực trị của hàm $y=f(x)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

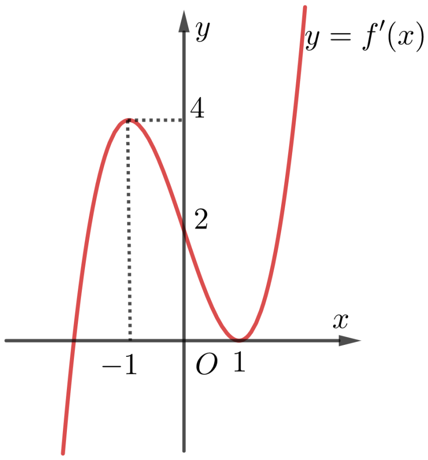
Từ đồ thị của hàm $y=f'(x)$, ta đi phục dựng lại bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ với chú ý rằng nếu $x<0;1<x<2;x>2$ thì $f'(x)$ luôn dương nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến. Còn nếu $0<x<1$ thì $f'(x)$ luôn âm nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến.

Còn tại các giá trị $x\in\{0;1;2\}$ thì đạo hàm $f'(x)=0$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét
dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0;x=1$.

Câu 13. (Ngô Quyền Hà Nội) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

A. 3.　　**B.** 4.　　**C.** 1.　　**D.** 2.

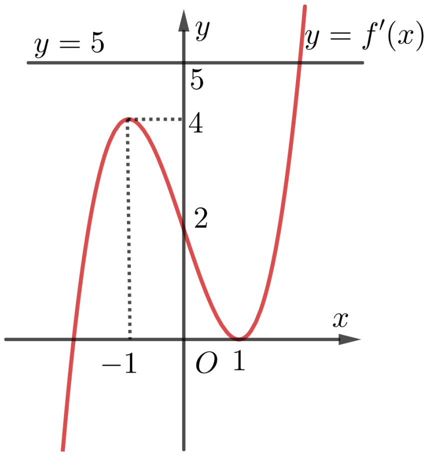
Lời giải

Chọn C

Ta có $y = f(x) - 5x$. Suy ra $y' = f'(x) - 5$.

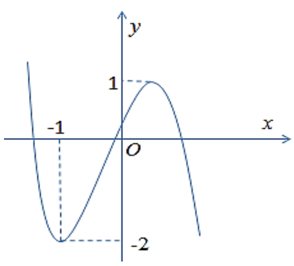
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Ta có $y' = f'(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$.



Dựa vào đồ thị ta có $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 5$ tại duy nhất một điểm. Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là 1.

Câu 14. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right) + 2x$ là



A. 4.　　**B.** 1.　　**C.** 3.　　**D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) + 2x$. Ta có $g'\left(x\right) = f'\left(x\right) + 2$. Từ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ ta thấy:

+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\alpha\ (\alpha>0) \end{array}\right.$.

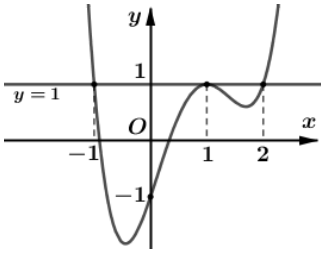
+ $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x<\alpha \\ x\neq -1 \end{cases}$.

+ $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<-2 \Leftrightarrow x>\alpha$.

Từ đó suy ra hàm số $y=f(x)+2x$ liên tục và có đạo hàm chỉ đổi dấu khi qua giá trị $x=\alpha$.

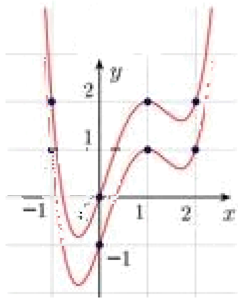
Vậy hàm số đã cho có đúng một cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Đặt $g(x)=f(x)+x$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

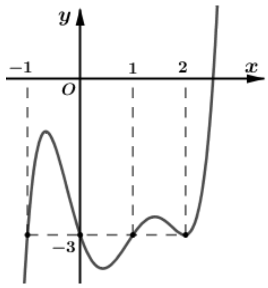
Lời giải



Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)+1$. Đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ theo phương Oy lên trên 1 đơn vị, khi đó đồ thị hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

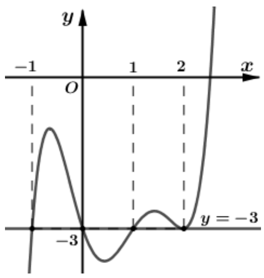


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

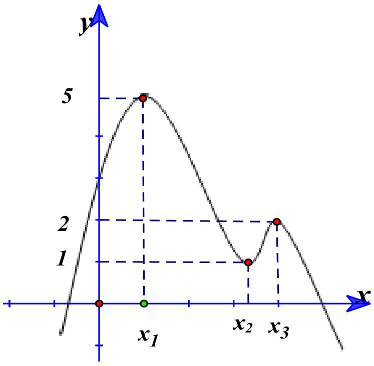
Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)+3$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-3$. Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta thấy $x=-1,\ x=0,\ x=1$ là các nghiệm đơn và $x=2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có 3 điểm cực trị.

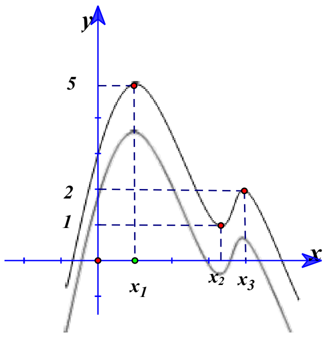
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

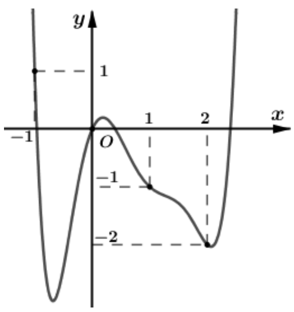


Ta có $y'=g'(x)=f'(x)-\dfrac{2018}{2017}$. Suy ra đồ thị của hàm số $g'(x)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới $\dfrac{2018}{2017}$ đơn vị.

Ta có $1<\dfrac{2018}{2017}<2$ và dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta suy ra

đồ thị của hàm số $g'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



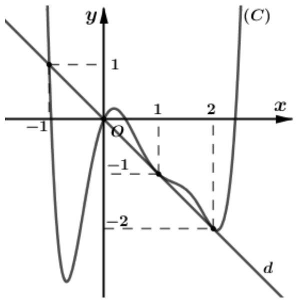
A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$.



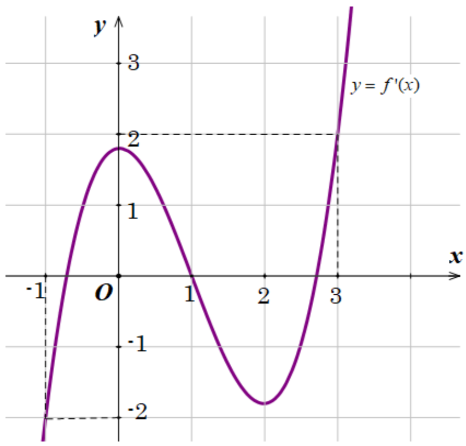
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=-x$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Câu 19. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+1$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng ?**

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

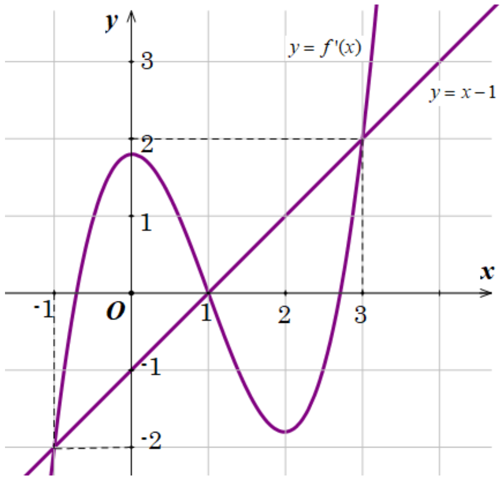
D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x-1)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$ đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$.



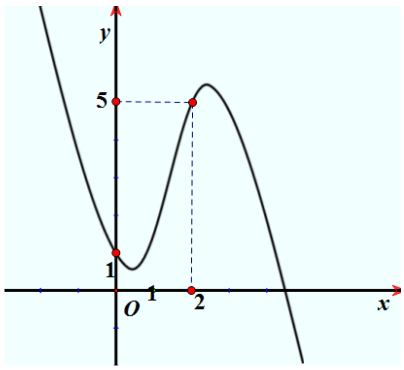
Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1,\ x=1,\ x=3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 20. (SGD-Nam-Định-2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x+2019$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x+2019$ không có cực trị.

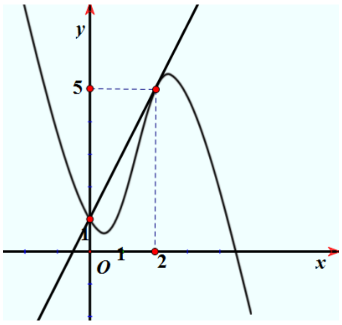
D. Hàm số $y=f\left(x\right)-x^2-x+2019$ không có cực trị tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'\left(x\right)-2x-1$.

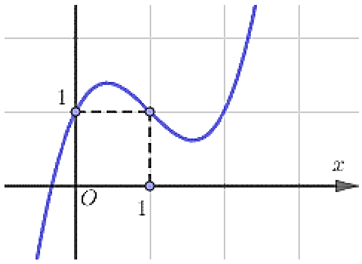
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \ (1)$.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có thể nhận thấy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

Xét dấu $x = 1 \in (0;2)$, ta có $y'(1) = f'(1) - 5 < 0$ từ đó ta nhận định hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$. Ta chọn

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm **cực tiểu** của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{9}x^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

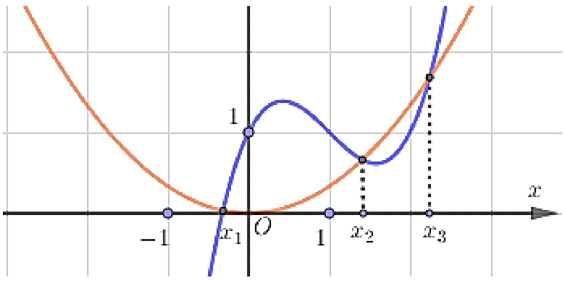
Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{3}x^2$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ trên mặt phẳng toạ độ đã có đồ thị $f'(x)$.

Dựa vào hình vẽ trên ta thấy phương trình $f'(x) = \frac{1}{3}x^2$ có ba nghiệm đơn $x_1 < x_2 < x_3$

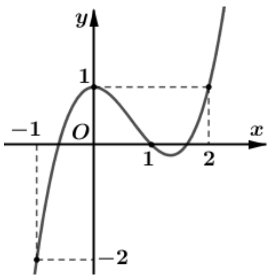


x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta lập được bảng xét dấu của g' như sau

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy dấu của g' thay đổi từ $(-)$ sang $(+)$ hai lần. Vậy có hai điểm cực tiểu.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại

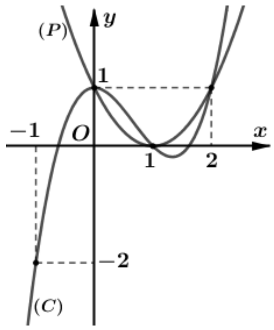
A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parapol $(P): y=(x-1)^2$.



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

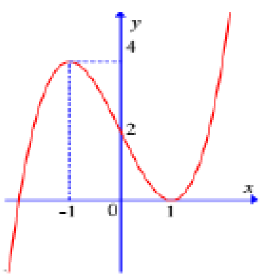
Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0$; $x=1$; $x=2$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm $g'(x)$ đổi dấu.

Câu 23. (Văn Giang Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

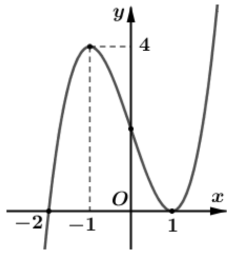
$y=f(x-2018)-2019x+1 \Rightarrow y'=f'(x-2018)-2019$.

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow f'(x-2018)=2019$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với đường thẳng $y=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy (1) chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2-3)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \text{ (nghiem kep)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \text{ (nghiem kep)} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
g		↘		↘		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

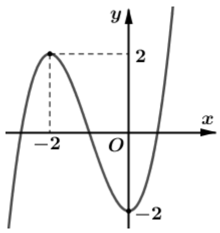
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$

- $x\in(2;+\infty)\to x>0$. (1)
- $x\in(2;+\infty)\to x^2>4 \longrightarrow x^2-3>1 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x^2-3)>0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=2xf'(x^2-3)>0$ trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm $x=\pm 1$ và $x=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x=\pm 2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại**?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right.$$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có **đúng** ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\\ x=0\end{array}\right.$.

Đặt $g(x)=f(u), u=x^2-2x$ thì $g'(x)=2(x-1).f'(u)$ nên

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(u)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2\,(\text{VN}) \\ x^2-2x=-1\,(1) \\ x^2-2x=0\,(2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm kép là $x=1$; phương trình (2) có hai nghiệm đơn là $x=0; x=2$ nên phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm đơn là $x=0; x=2$ và một nghiệm bội ba là $x=1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm **cực tiểu** ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1\,(\text{nghiem kep}) \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2}\,(\text{nghiem kep}) \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↘		↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

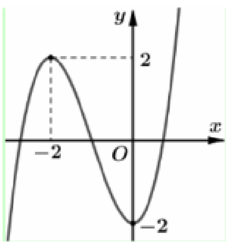
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3;+\infty)$

- $x\in(3;+\infty)\to 2x-2>0.\ (1)$
- $x\in(3;+\infty)\to x^2-2x>3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'(x^2-2x)<0.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)<0$ trên khoảng $(3;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=\pm1$ và $x=3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm **cực đại** ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án

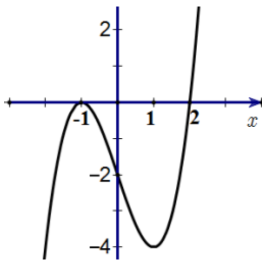
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số có sáu cực trị. **B.** Hàm số có năm cực trị.

C. Hàm số có bốn cực trị. **D.** Hàm số có ba cực trị.

Lời giải

Chọn D

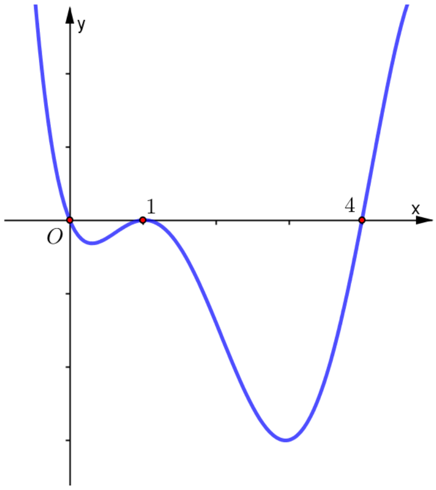
Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x-1)$. Nhận xét: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-1=-1\\ x^2-2x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=2;x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x		-1		0		1		2		3	
g'(x)	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
g(x)	↘		↗		↗		↘		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có đúng ba cực trị.

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3\right)$ là:



A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

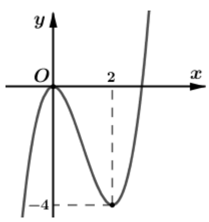
Chọn C

Ta có: $y'=3x^2f'\left(x^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=\sqrt[3]{4}\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị đạo hàm ta thấy $f'\left(x^3\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3>4\\x^3<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt[3]{4}\\x<0\end{array}\right.$.

Do đó khi vẽ bảng biến thiên của $y=f\left(x^3\right)$ chỉ có 2 điểm $\left(x=0,x=\sqrt[3]{4}\right)$ làm đạo hàm của nó đổi dấu nên có 2 điểm cực trị.

Câu 31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

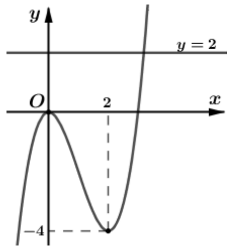
Lời giải

Chọn B

Cách 1: Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=0,\ x=2$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nghiem don)} \\ x=2 \text{ (nghiem don)} \end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=f'(x).f'[f(x)]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'[f(x)]=0 \end{array}\right.$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nghiem don)} \\ x=2 \text{ (nghiem don)} \end{array}\right.$. ● $f'[f(x)]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \ (1) \\ f(x)=2 \ (2) \end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị suy ra:

- ✔ Phương trình (1) có hai nghiệm $x=0$ (nghiệm kép) và $x=a\ (a>2)$.
- ✔ Phương trình (2) có một nghiệm $x=b\ (b>a)$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x=0,\ x=2,\ x=a$ và $x=b$. Suy ra hàm số $g(x)=f[f(x)]$ có 4 điểm cực trị.

Cách 2:

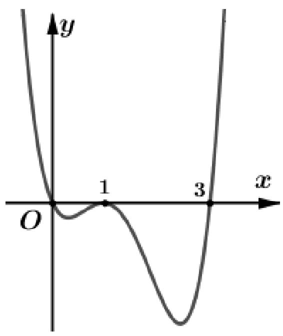
+) Ta có với $u=f(x)$ thì $f'(f(x))_x = f'_u.u_x = f'_u.f'_x \Rightarrow f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'_u=0 \\ f'_x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=f(x)=0 \\ u=f(x)=2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

+) Ta thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm $x_{1,2}=0 \vee x_3>2$.

+) Ta thấy $f(x)=2$ có hai nghiệm $x_4>x_3$

$\Rightarrow f'(f(x))=0$ có nghiệm $x=0$ bậc 3, $x=2, x_3, x_4$ bậc 1 $\Rightarrow$ hàm số có 4 cực trị.

Câu 32. (Chuyên Thái Nguyên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Khi đó đồ thị hàm số $y=[\text{f(x)}]^2$ có

A. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu
B. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
D. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=[\text{f(x)}]^2 \Rightarrow y'=2.f(x).f'(x)$

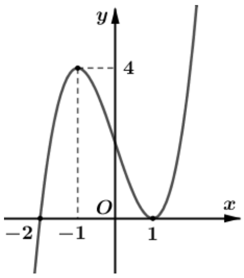
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = a \in (0;1) \\ x = b \in (2;3) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-		-	0	-		-	0	+	
$f'(x)$		-		-	0	+	0	-	0	+		+	
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$y = [f(x)]^2$			CT		CĐ		CT		CĐ		CT		

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị có 2 điểm CĐ và 3 điểm CT

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

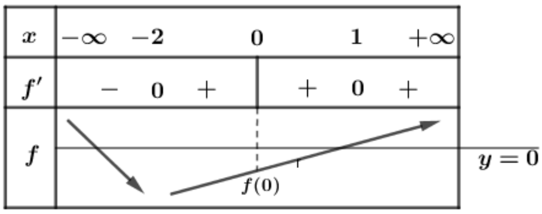
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \quad (\text{nghiem kep}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$



Xét $g'(x) = 2f'(x)f(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \ \ (\text{nghiem kep}) \\ x = a(a < -2) \\ x = b(b > 0) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		b		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=0\in(-1;b)$

- $x=0 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0)>0.$ (1)
- Theo giả thiết $f(0)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0)<0$ trên khoảng $(-1;b)$.

Nhận thấy $x=-2;\ x=a;\ x=b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x=1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x=1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y=(f(x))^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=(f(x))^3 \Rightarrow y'=3f'(x).f^2(x)$.

Từ đồ thị ta có: $f'(x)=0$ tại $x=-1, x=1$. Bởi $f^2(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $y=(f(x))^3$ có hai điểm cực trị là $x=-1, x=1$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ luôn dương và có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại. **B.** 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại. **D.** 1 điểm cực tiểu, 0 điểm cực đại.

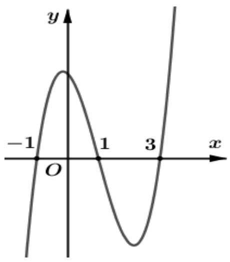
Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sqrt{f(x)}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Bởi $\sqrt{f(x)}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, nên ta suy ra được số điểm cực trị của $y=\sqrt{f(x)}$ bằng số điểm cực trị của $y=f(x)$.

Từ đồ thị trên ta thu được $y=\sqrt{f(x)}$ có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

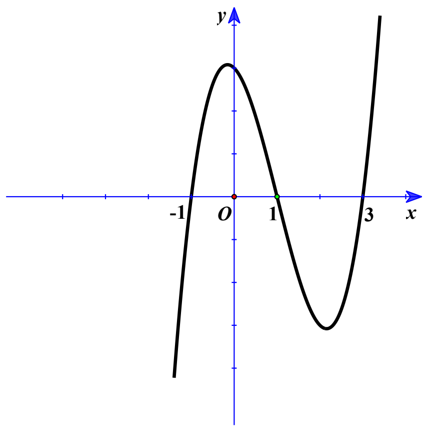
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 1 điểm cực đại.

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x_0=0 \longrightarrow g'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$.

Câu 37. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)$.

$$g'\left(x\right)=f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2019}}=f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}.$$

$$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right).\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)=0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2019}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+2019}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2019}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2019}=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+2019}=-1\,(vn) \\ x^2+2x+2018=0\,(vn) \\ x^2+2x+2010=0\,(vn) \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $x>3$ thì $f'(x)>0$.

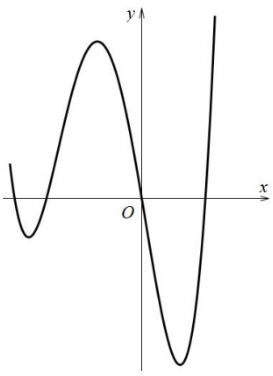
Mà $\sqrt{x^2+2x+2019} \ge \sqrt{2018} > 3$ nên $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)>0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy $g'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=-1$. Số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 38. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=g(x)=\left(\dfrac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\dfrac{1}{2018}\right)-f'(x)2019^{f(x)}\ln 2019$

$$= f'(x)\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)}\ln 2019\right] \ (1)$$

Ta có: $\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)}\ln 2019\right] < 0; \forall x \ (2)$.

Xét phương trình:

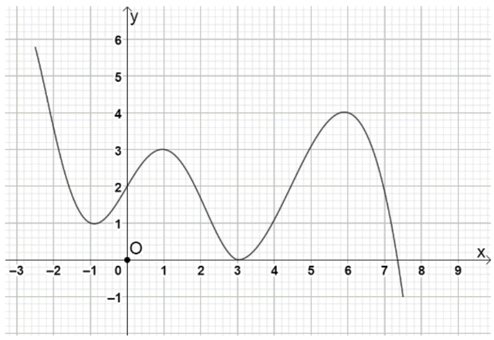
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}\ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)}\ln 2019\right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Mà từ (1) và (2) ta thấy $g'(x)$ trái dấu với $f'(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

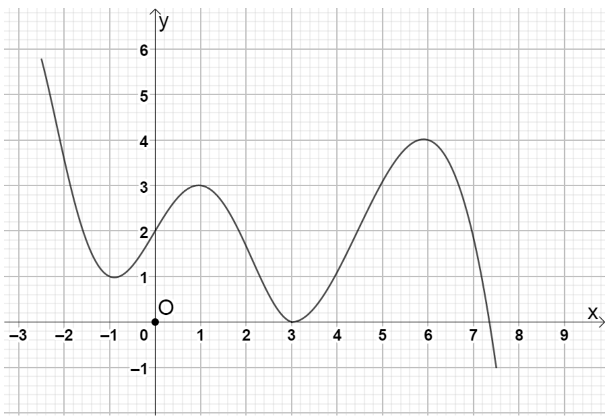
Câu 39. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = f'(x)f'(f(x)-1)2019^{f(f(x)-1)}\ln 2019$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=1 \\ x_3=3 \\ x_4=6 \end{array}\right.$

Giải (2) : $f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=-1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=3 \\ f(x)-1=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=4 \\ f(x)=7 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có

+) $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x_5>6$ là nghiệm bội l,

+) $f(x)=2$ có 5 nghiệm $x_6<-1;-1<x_7<1;1<x_8<3;3<x_9<6;6<x_{10}<x_5$ là các nghiệm bội 1,

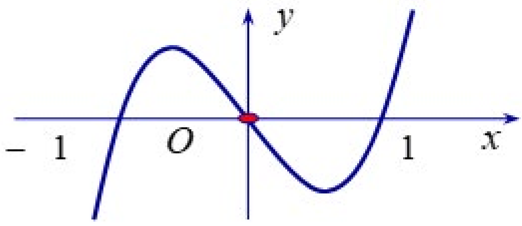
+) $f(x)=4$ có 1 nghiệm $x_{11}<x_6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x)=7$ có 1 nghiệm $x_{12}<x_{11}$ là nghiệm bội 1,

Suy ra $y'=0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

Câu 40. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị, nhận thấy đồ thị hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $O(0;0);A(-1;0);B(1;0)$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b=-1 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1.$$

Đặt: $g(x)=f(f'(x))$

Ta có: $g'(x)=\left(f\left[f'(x)\right]\right)'=f'\left[f'(x)\right].f''(x)=\left[\left(x^3-x\right)^3-\left(x^3-x\right)\right]\left(3x^2-1\right)$

$=x(x-1)(x+1)\left(x^3-x-1\right)\left(x^3-x+1\right)\left(3x^2-1\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x^3-x-1=0 \\ x^3-x+1=0 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=a\,(\approx 0,76) \\ x=b\,(b\approx -1,32) \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

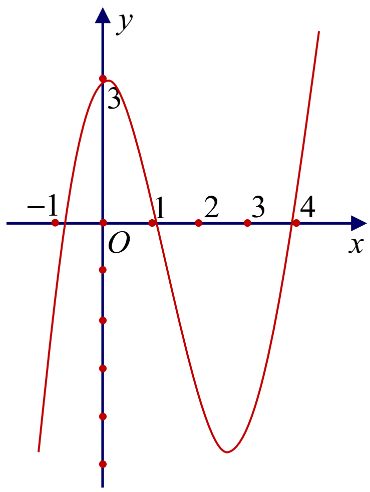
x	$-\infty$		b		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		a		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

*** Cách xét dấu:** $g'(x)$: chọn $x=2\in(1;+\infty)$ ta có: $g'(2)>0\Rightarrow g'(x)>0\,\forall x\in(1;+\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

*** Trắc nghiệm:** Số điểm cực trị bằng số nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ) của phương trình đa thức $g'(x)=0$. PT $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

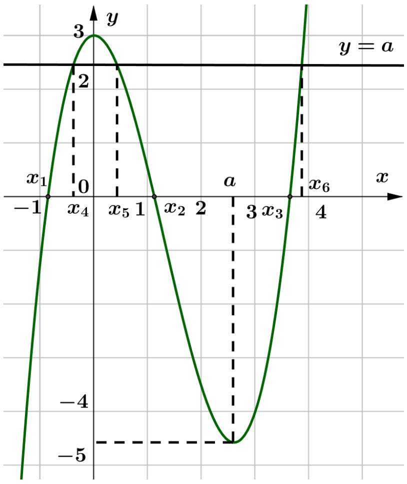
Câu 41. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x) = 3f'(f(x)).f'(x)$.

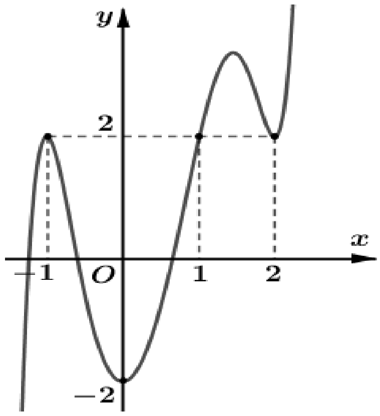
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{array}\right., (2 < a < 3)$.

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 42. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

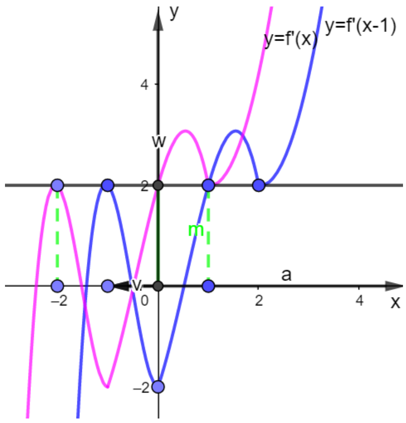
Lời giải:

Chọn B

Ta có: $y' = [2f'(x) - 4]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



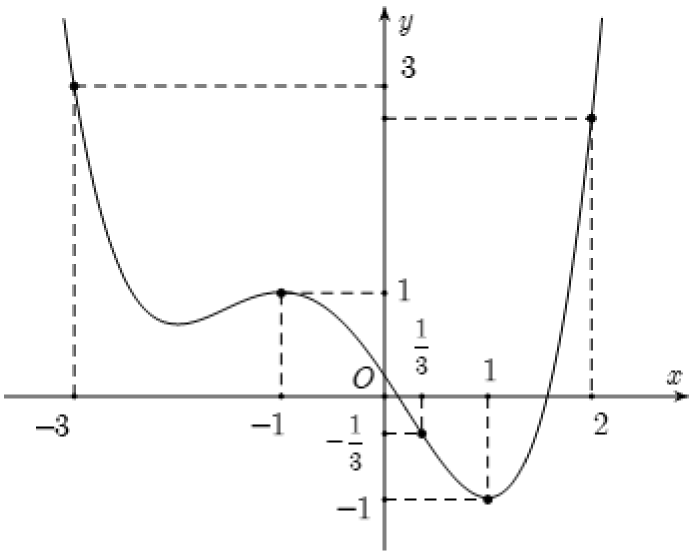
nên $f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0 $-$	0 $+$	0 $+$	
y	$+\infty$ ↘		↗		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hà
m số đạt cực tiểu tại $x=0$.

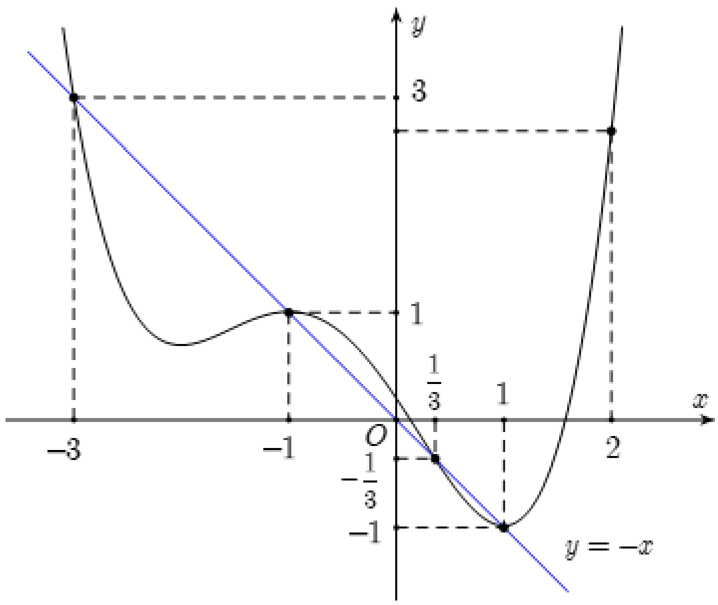
Câu 43. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)^2+3$

$$g'(x)=\frac{5\cos x}{2}\left[2f'\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

Đặt $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$ vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow t\in[-3;2]$

Khi đó: $2f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+2.\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)=0$ thành $f'(t)=-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{3}\\ t=-1\\ t=-3\end{array}\right.$

□Với $t=1\Rightarrow\dfrac{5\sin x-1}{2}=1\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_1\in(0;2\pi)\\ x=\alpha_2\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

□Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{5\sin x-1}{2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_3\in(0;2\pi)\\ x=\alpha_4\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

□Với $t=-1\Rightarrow\dfrac{5\sin x-1}{2}=-1\Leftrightarrow\sin x=-\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha_5\in(0;2\pi)\\ x=\alpha_6\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

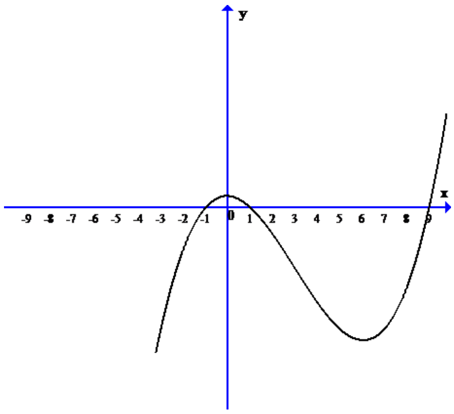
□Với $t=-3\Rightarrow\dfrac{5\sin x-1}{2}=-3\Leftrightarrow\sin x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}\in(0;2\pi)$.

□ $\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\in(0;2\pi)\\ x=\dfrac{3\pi}{2}\in(0;2\pi)\end{array}\right.$.

Vì $x=\frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép nên không là điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)$.

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị trên khoảng $\left(0;2\pi\right)$.

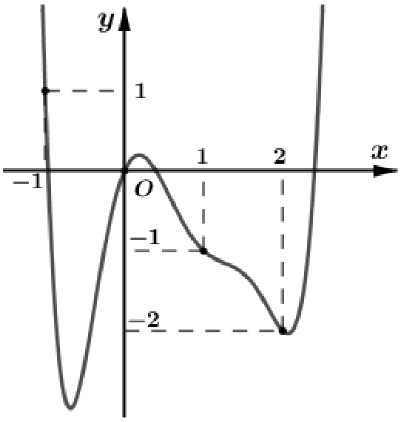
Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+1\right)$ là :

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45. (Liên Trường Nghệ An) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

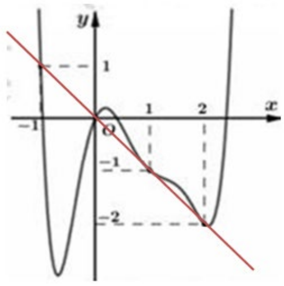
Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(x+2\right)+2x+4$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)=-\left(x+2\right)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'\left(t\right)=-t$. $\left(1\right)$

$\left(1\right)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'\left(t\right)$ và đường thẳng d : $y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

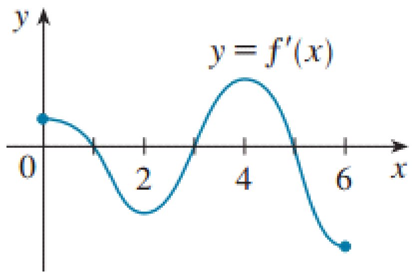
ta có $f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗		↗		↗	

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 46. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2+2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.



A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2f(x)f'(x)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

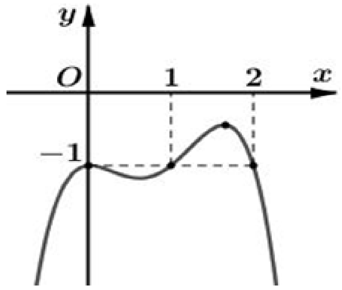
Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;6]$:

x	0		1		3		5		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$y=0$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt trong $[0;6]$ là $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (1;3)$, $x_3 \in (3;5)$, $x_4 \in (5;6)$.

Vậy hàm số $y=\left[f(x)\right]^2+2019$ có tối đa 7 điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.

Câu 47. (Kim Liên) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x=1$. **B.** $x=2$.
C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)+1$. Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ (1).

Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$ có ba điểm chung có hoành độ là $0;1;2$. Do đó $f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Trên $(-\infty;1)$ đường thẳng $y=-1$ tiếp xúc hoặc nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Trên $(1;2)$ đường thẳng $y=-1$ nằm dưới đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

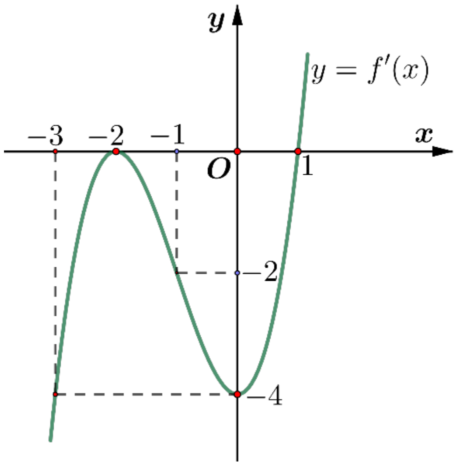
Trên $(2;+\infty)$ đường thẳng $y=-1$ nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$			$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 48. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^3-3=0 & (1) \\ f'(x^3-3x)=0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=-2 \\ x^3-3x=1 \end{array}\right.$

Trong đó phương trình $x^3-3x=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

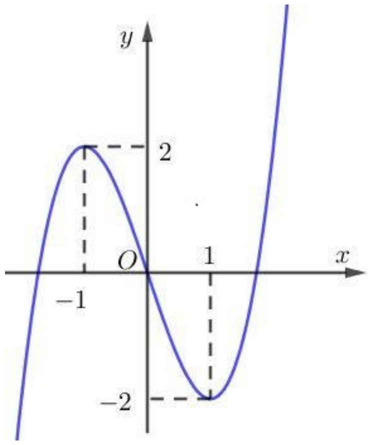
Còn phương trình: $x^3-3x=1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2<x_1<-1$, $-1<x_2<0$ và $1<x_3<2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực đại

Câu 49. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2)** Biết đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x\right)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

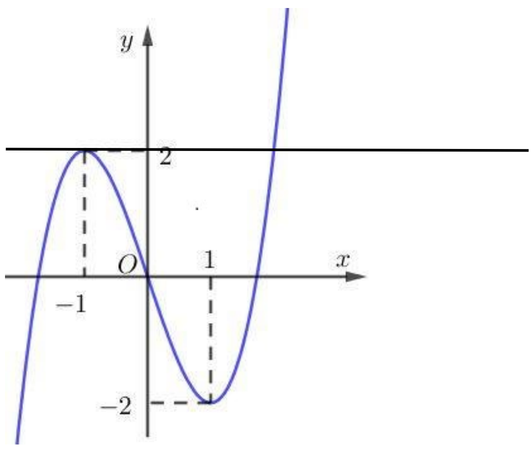
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x\right)-2x$

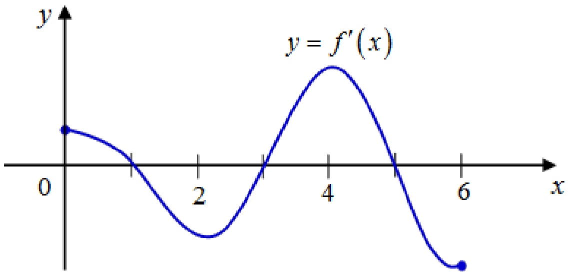
$g'(x)=f'\left(x\right)-2=0 \Leftrightarrow f'(x)=2$.

Dựa vào đồ thị $f'\left(x\right)$ thì phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm ($x_1<x_2$).



Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu một lần từ âm sang dương tại điểm x_2 nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 50. **(Lê Xoay lần1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[0;6\right]$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;3;5\}$.

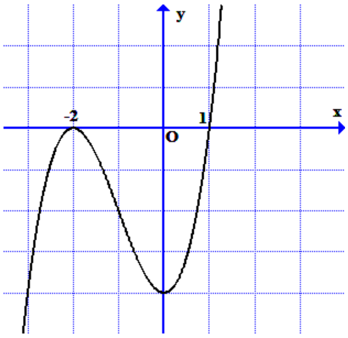
Dựa vào đồ thị hàm số của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ là

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm phân biệt với $0<x_1<1<x_2<3<x_3<5<x_4<6$.

Do đó, phương trình $y'=0$ có tối đa 7 nghiệm phân biệt và đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ và các mệnh đề sau:

I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

và từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có $f'(x^2-3)>0 \Leftrightarrow x^2-3>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x		-		-		-	0	+		+		+	
$f'(x^2-3)$		+	0	-	0	-	0	-	0	-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Suy ra các mệnh đề I và IV đúng, còn lại sai.

ĐỀ XUẤT LỜI GIẢI

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ (đơn), $x=-2$ (kép)

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$, $x^2-3=1$, hoặc $x^2-3=-2$ (kép)

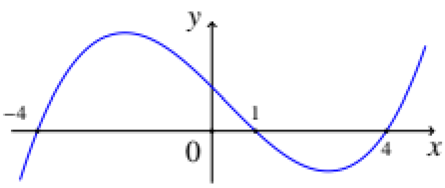
$\Leftrightarrow x=0$ (đơn), $x=\pm 2$ (đơn), $x=\pm 1$ (kép)

Ta có BBT thu gọn như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó, (I) đúng, (II) sai, (III) sai, (IV) đúng, (V) sai.

Câu 52. (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(2x-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

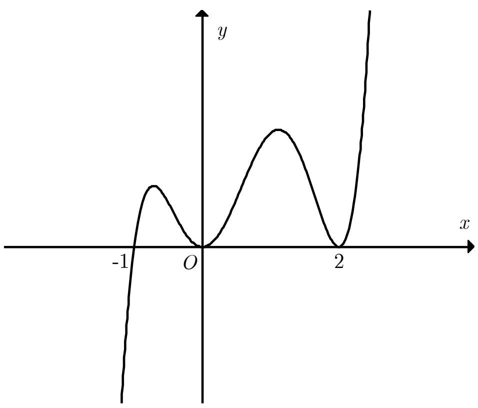
Ta có: $y' = (2-2x).f'(2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x-x^2=-4 \\ 2x-x^2=1 \\ 2x-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f'(2x-x^2)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Lưu ý: Ở bài toán này, vấn đề mấu chốt là chúng ta phải xét dấu được lượng $f'(2x-x^2)$.

Câu 53. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

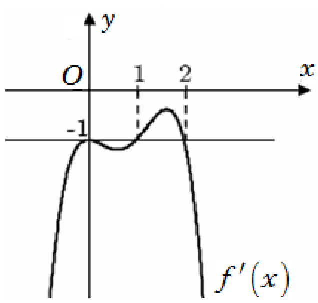
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (và hai nghiệm kép) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn này. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Chọn B

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị. Dạng này sẽ xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi lần sau.

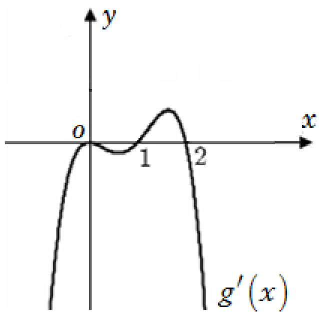
Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



A. Không có điểm cực tiểu. **B.** $x=0$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải



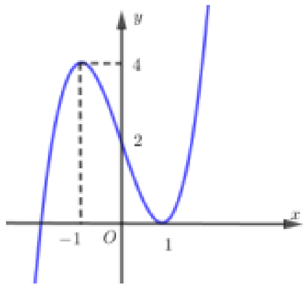
Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=f'(x)+1;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $g'(x)$ là đồ thị hàm số $f'(x)$ tịnh tiến lên trên trục Oy một đơn vị (hình bên), khi đó

- $g'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ suy ra $x=0$ không là điểm trị của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua điểm $x=1$ suy ra $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $g'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua điểm $x=2$ suy ra $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn C

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



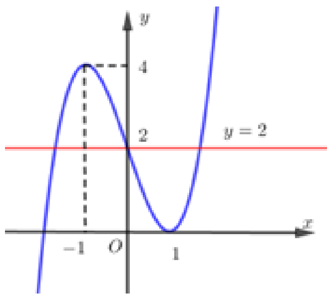
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

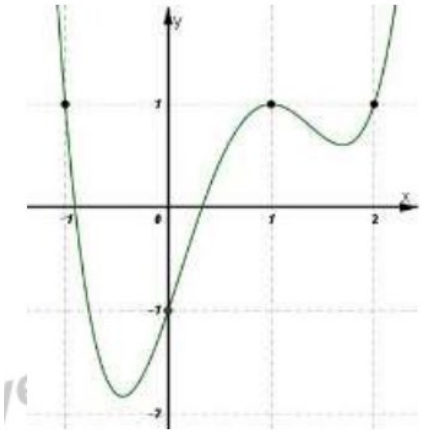
Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $f'(x)=x^3-3x+2$



Hàm số $y=f(x)-2x\Rightarrow y'=f'(x)-2=x^3-3x$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số $g(x)$ đặt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp: Hàm số $y=g\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \Leftrightarrow g'\left(x\right)=0$ bà qua điểm x_0 thì $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải: Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1 \Rightarrow f'\left(x_0\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=2 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$

$g'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)>1 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

$g'\left(x\right)<0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)<1 \Leftrightarrow x\in\left(-1;1\right)\cup\left(1;2\right)$

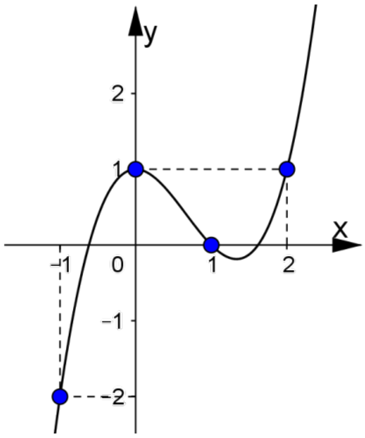
Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		+	0	-	0	-	0	+	
$g\left(x\right)$		↗			↘			↗	

Ta thấy qua $x_0=-1$ thì $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm, qua $x_0=1$ thì $g'\left(x\right)$ không đổi dấu (luôn mang dấu âm) và qua $x_0=2$, $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Vậy $x_0=-1$ là điểm cực đại của hàm số $y=g\left(x\right)$.

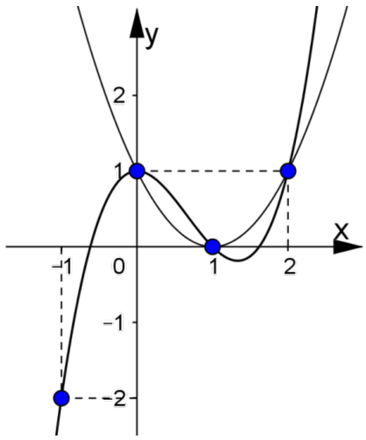
Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=1$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=2$

Lời giải

Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=(x-1)^2$; $g'(x)>0$ khi đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên $y=(x-1)^2$ và ngược lại.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

DẠNG 3: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BA CHỨA THAM SỐ

Câu 1. **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ (1)

$\Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1.(7m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. $m = 3$ **B.** $m = 1 \vee m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp:

Điểm $x = x_0$ là điểm cựa tiểu của hàm số bậc ba $y = f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Cách giải:

TXĐ: $D = R$

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \rightarrow y'' = 6x - 4m$

Để $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số bậc ba với hệ số x^3 dương thì:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; m = 3 \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Chú ý khi giải:

Nhiều HS sẽ nhầm lẫn điều kiện để điểm x_0 là điểm cực tiểu là $f''(x_0) > 0$ dẫn đến chọn đáp án $m = 3$ là sai.

Câu 3. **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2+1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3mx^2 - 2(m^2+1)x + 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{0; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Thử lại:

+)Với $m = 0$ thì $y = -2x^2 + 2x - 3$ và $y' = -2x + 2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ (KTM)

+)Với $m=\frac{3}{2}$ thì $y'=\frac{9}{2}x^2-\frac{13}{2}x+2$; $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{4}{9}\right\}$. Hàm số y là hàm số bậc ba có $a=\frac{3}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ (Thỏa mãn).

Vậy $m=\frac{3}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1>0 \\ 2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m>\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m\neq\frac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 5. (Đoàn Thượng) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.\ (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là: $y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m(m+2)$.

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(x_1+x_2)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\,(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là

$\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>2\end{array}\right.\ (*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\,(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện:

$\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương:

$y'=x^2-2mx+m+2,\ y''=2x-2m$

$y''=0 \Leftrightarrow 2x-2m=0 \Leftrightarrow x=m$

Ta có: $y(m)>0 \Rightarrow \frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right) (***)$

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Bình luận: đáp án của đề gốc bị sai chúng tôi đã thảo luận và sửa lại đáp án như trên.

Câu 6. (THPT Nghèn Lần1) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.

A. $m = -1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (1).

Để hàm số có 2 cực trị x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Với điều kiện $m \neq 1$ ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 4m \end{cases}$.

Do đó $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8 \Leftrightarrow 2m + 2 + 8m = -8 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 7. (Chuyên Thái Bình Lần 3) Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 - 4x - 10 \Rightarrow y' = x^2 - mx - 4$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

$\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lí viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -4 \end{cases}$.

$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1x_2)^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2] + 1 = 16 - (m^2 + 8) + 1 = 9 - m^2 \leq 9$.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + \dfrac{1}{2}$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$

A. $\min P = -9$. **B.** $\min P = -1$. **C.** $\min P = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $\min P = -\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2x^2 + 2\left(m+1\right)x + m^2 + 4m + 3$

Vì hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 theo Viet ta có

$\begin{cases} x_1.x_2 = \dfrac{m^2+4m+3}{2} \\ x_1+x_2 = -(m+1) \end{cases}$ thay vào biểu thức $P = x_1x_2 - 2(x_1+x_2)$ ta được

$$P = \frac{m^2+4m+3}{2} + 2(m+1) = \frac{m^2+8m+7}{2} = \frac{(m+4)^2-9}{2}$$

Vậy để $p_{\min} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 0$ hay $P_{\min} = -\dfrac{9}{2}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ sao cho: $|x_1 - x_2| \ge 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2mx + m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.,\ (2)$

Ta có: $|x_1 - x_2| \ge 8 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \ge 64, (1)$

Theo Đl vi-et Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được:

$$(2m^2) - 4m \ge 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 64 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right., (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Xác định m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;4)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \ne -1 \Leftrightarrow m \ne 3$.

● Nếu $-1 < 2 - m \Leftrightarrow m < 3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < -1 < 2 - m < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

● Nếu $2-m<-1 \Leftrightarrow m>3$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2<2-m<-1<3 \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m<4 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m<4$.

Vậy $m \in (-1;3) \cup (3;4)$.

Chọn A

Câu 11. Tập hợp tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-18$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$ **B.** $(-3;+\infty) \setminus \{3\}$ **C.** $(-\infty;7) \setminus \{3\}$ **D.** $(-3;7) \setminus \{3\}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 6x^2+6(m-1)x+6(m-2), \forall x \in \mathbb{R}$

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2+m(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)+m(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2-m \end{array}\right.$

Để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq -1 \\ -5<2-m<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 7>m>-3 \end{cases}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3m}{2}x^2+m$ nằm khác phía với đường thẳng $y=x$.

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m \neq 0$. **D.** $0<m \neq 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2-3mx;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$.

Điều kiện để có hai cực trị là $m \neq 0$, khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$. Hai điểm $A(0;m)$, $B\left(m;m-\frac{1}{2}m^3\right)$ nằm khác phía với đường thẳng $x-y=0$

$(0-m)\left(m-m+\frac{1}{2}m^3\right)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^4>0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A,B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy với mọi m hàm số luôn có hai cực trị.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\frac{2x}{3}+\frac{m(m^2-1)}{3}$.

Vì A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$ nên trung điểm AB thuộc đường thẳng $y=5x-9$. Do đó :

$$5\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}\Leftrightarrow 5\left(\frac{2m}{2}\right)-9=-\frac{2}{3}\left(\frac{2m}{2}\right)+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$$

$\Leftrightarrow m^3-18m+27=0$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 0.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A,B nằm cùng một phía và cách đều đường thẳng $x+2y-1=0$. Tính tổng các phần tử S.

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6mx; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.\Rightarrow A\left(0;4m^3\right),B\left(2m;0\right),\left(m\neq 0\right)$

Khi đó hệ số góc của đường thẳng $AB:k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4m^3}{2m}=-2m^2$. Hệ số góc của $x+2y-1=0$ là $k_d=-\frac{1}{2}$. Theo giả thiết $k_{AB}=k_d\Leftrightarrow -2m^2=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

Thử lại $m=\frac{1}{2}\Rightarrow AB:y=-\frac{1}{2}(x-1)\equiv d$ (loại) ; $m=-\frac{1}{2}\Rightarrow AB:y=-\frac{1}{2}(x+1)//d$.

Vậy $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, tổng các phần tử S bằng $-\frac{1}{2}$.

Theo giả thiết, ta có: $S_{OAB}=2\left|m^2-1\right|=6\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$. **B.** $m=\pm 2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=\pm 3$

Lời giải

Ta có:

$y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right), y'=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0.(1)$

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right);B\left(2m;-m^3\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right)\Rightarrow OA=3\left|m^3\right|.$ (2)

Ta thấy $A\in Oy\Leftrightarrow OA\equiv Oy\Rightarrow d\left(B,OA\right)=d\left(B,Oy\right)=2\left|m\right|.$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\frac{1}{2}.OA.d\left(B,OA\right)=3m^4$

Do đó: $S_{OAB}=48\Leftrightarrow 3m^4\Leftrightarrow 48\Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1)

Vậy $m=\pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^3$ có hai cực trị A và B sao cho góc $\widehat{AOB}=120^o$?

A. $m=\pm 2\sqrt[4]{\frac{27}{25}}$. **B.** $m=\pm 6\sqrt{\frac{3}{5}}$. **C.** $m=\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. **D.** $m=\pm\frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-4mx, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4m}{3} \end{array}\right.$.

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là $m\neq 0$, khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;m^3\right), B\left(\dfrac{4m}{3};-\dfrac{5m^3}{27}\right)$ và

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OA}=\frac{-\dfrac{5m^6}{27}}{\left|m^3\right|\sqrt{\left(\dfrac{4m}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{5m^3}{27}\right)^2}}=-\frac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}$$

Có $\widehat{AOB}=120^o \Leftrightarrow -\dfrac{5m^2}{\sqrt{25m^4+1296}}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt[4]{\dfrac{27}{25}}$.

Câu 17. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC đều với $C(2;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}(m>0)$, khi đó $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{m}};\dfrac{2}{\sqrt{m}}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}};-\dfrac{2}{\sqrt{m}}\right)$.

Khi đó gốc tọa độ là trung điểm AB, nên tam giác ABC đều trước tiên cần có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=0$.

Ta có $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=2.\dfrac{2}{\sqrt{m}}+1.\dfrac{-4}{\sqrt{m}}=0$ (luôn đúng).

Mặt khác $OC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Leftrightarrow \sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{m}}\right)^2+\left(\dfrac{4}{\sqrt{m}}\right)^2} \Leftrightarrow m=3$.

Vậy, tổng tất cả giá trị các phần tử của S bằng 3.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m^3$ có hai điểm cực trị cùng với điểm $C\left(1;\dfrac{7}{8}\right)$ tạo thành một tam giác cân tại C.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m\neq 0$, khi đó giả sử tọa độ hai điểm cực trị là

$$A\left(0;m^3\right),\ B\left(2m;-3m^3\right).$$

Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là $I\left(m;-m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}=\left(m;-2m^3\right)$, $\overrightarrow{CI}=\left(m-1;-m^3-\dfrac{7}{8}\right)$.

Tam giác ABC cân tại C $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=0 \Leftrightarrow m-1+2m^5+\frac{7}{4}m^2=0$.

$$\Leftrightarrow (2m-1)\left(x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+x+1=0\ (2)\end{array}\right..$$

$$(2)\Leftrightarrow x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{15}{16}x^2+\frac{1}{16}x^2+x+1=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{15}{16}x^2+2.\frac{\sqrt{15}}{4}x.\frac{2}{\sqrt{15}}+\frac{4}{15}+\frac{11}{15}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}x+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2+\frac{11}{15}=0\,(\text{VN}).$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+\frac{4}{27}m^3$ có hai điểm cực trị A,B cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;2)$.

A. $0<m<12$. **B.** $m=6$. **C.** $m=3$. **D.** $m=12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-2mx; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{2m}{3}\end{array}\right.$

Điều kiện để có hai cực trị là $m\neq 0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;\frac{4}{27}m^3\right),B\left(\frac{2m}{3};0\right)$

Thấy tam giác OAB là tam giác vuông tại O, do đó tâm đường tròn ngoại tiếp I là trung điểm cạnh AB.

Vì vậy ta có $\begin{cases} \frac{m}{3}=1 \\ \frac{2m^3}{27}=2\end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Câu 20. Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\ (1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Ta có $y'=3(x-m)^2-3, y''=6(x-m)$

Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1\end{array}\right.$.

Vì $x=x_1=m-1, y''(m-1)<0$ nên hàm số đạt cực đại $x=x_1=m-1$ tại và giá trị cực đại là $y_1=m^2-3m+2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_2=m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2=m^2-3m-2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đạ của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với với giá trị m_2.

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1 = \dfrac{3}{2}, m_2 = -\dfrac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điểm $M\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn A

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = -\dfrac{17}{11}$.

D. $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{17}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m-3); B(2; -m-3)$.

Ta có: $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

A. $1 < m < \dfrac{5}{3}$.

B. $-1 < m < \dfrac{5}{3}$.

C. $\dfrac{3}{5} < m < 1$.

D. $-\dfrac{3}{5} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Dễ có $A(0;2)$, $B(2;-2)$ và (C_m) có tâm $I(m;2m)$, $R = 1$.

Cách 1: Thay tọa độ vào phương trình (C_m) lấy tích âm.

$(4 - 8m + 5m^2 - 1)(8 - 4m + 8m + 5m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 8m + 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} < m < 1$.

Cách 2: Ta có $IB = \sqrt{5m^2 + 4m + 7} > R = 1$. Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $IA < R \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 8m + 4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} < m < 1$.

Câu 23. Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (với $m < 0$ là tham số thực). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1;0)$ bán kính $R = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Hỏi S có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+3m$

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m<0$.

Ta có $d:y=2mx+1$.

Do đó $x=d\left(I,d\right)=\dfrac{\left|-2m+1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}\le\dfrac{\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\left(-2m\right)^2+1^2\right)}}{\sqrt{4m^2+1}}=\sqrt{2},AB=2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$.

Vậy $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}AB.x=x\sqrt{9-x^2}\le\max\limits_{\left(0;\sqrt{2}\right]}x\sqrt{9-x^2}=y\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{14}$.

Dấu bằng đạt tại $\dfrac{-2m}{1}=\dfrac{1}{1}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn A

Câu 24. Với $m\in\left[-1;1\right]$, đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB có bán kính đường tròn nội tiếp có giá trị lớn nhất là M_0, đạt tại $m=m_0$. Tính $P=M_0+m_0$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}A\left(m-1;-2\left(m-1\right)\right)\\B\left(m+1;-2\left(m+1\right)\right)\end{array}\right.$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Do đó theo yêu cầu bài toán, ta có: $r_{OAB}=\dfrac{S}{p}=\dfrac{4\left|m^2-1\right|}{\sqrt{5\left(m-1\right)^2}+\sqrt{5\left(m+1\right)^2}+2\sqrt{5}}\le\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\forall m\in\left[-1;1\right]$.(AM-MG)

Dấu bằng xảy ra tại $m=m_0=0$, $M_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

Ta có: $y=6x^2-6\left(m+1\right)x+6m$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là: $m\ne1$

Ta có: $A\left(1;3m-1\right)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là: $k=-\left(m-1\right)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\dfrac{\left(6x^2-6(y+1)x+6y\right)\left(12x-6(y+1)\right)}{36}$

Bước 3: Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả: $1001000-9980001.i$. Hay: $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là: $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow (m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

Câu 26. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\ (d)$.

A. $m=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có: $x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$

$-\dfrac{994}{3}-\dfrac{2006}{3}i=-\dfrac{1000-6}{3}-\dfrac{2000+6}{3}i=-\dfrac{2m+6}{3}x-\dfrac{m-6}{3}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;-\dfrac{2m+6}{3}x_1-\dfrac{m-6}{3}\right)$; $B\left(x_2;-\dfrac{2m+6}{3}x_2-\dfrac{m-6}{3}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;-m)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\dfrac{2m+6}{3}x-\dfrac{m-6}{3}\ (\Delta)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta//d\ or\ \Delta\equiv d \\ I\in d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2m+6}{3}=1 \\ -m=1-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{9}{2} \\ m=0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 27. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+ax+1$ và $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+3ax-a$; với a là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho mỗi hàm số có hai cực trị đồng thời giữa hai hoành độ cực trị của hàm số này có một hoành độ cực trị của hàm số kia.

A. $-\dfrac{15}{4}<a<\dfrac{1}{5}$. **B.** $-4<a<15$. **C.** $-\dfrac{15}{4}<a<0$. **D.** $-4<a<0$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^2-x+a$ và $g'(x)=x^2+2x+3a$.

Ta cần tìm a sao cho $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2\ (x_1<x_2)$ và $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3;\ x_4\ (x_3<x_4)$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} x_3<x_1<x_4<x_2 \\ x_1<x_3<x_2<x_4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_f=1-4a>0\\ \Delta_g'=1-3a>0\\ f'(x_3).f'(x_4)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<\dfrac{1}{4}\\ (x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)<0\end{cases}$. (*)

Lại có $(x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)=[g'(x_3)-(3x_3+2a)][g'(x_4)-(3x_4+2a)]$
$=(3x_3+2a)(3x_4+2a)=9x_3.x_4+6a(x_3+x_4)+4a^2$.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases}x_3+x_4=-2\\ x_3x_4=3a\end{cases}$.

Suy ra $(x_3^2-x_3+a)(x_4^2-x_4+a)=9.3a+6.(-2)a+4a^2=4a^2+15a$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a<\dfrac{1}{4}\\ 4a^2+15a<0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{15}{4}<a<0$.

Chọn C

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đáp án A & B chứa giá trị $a=0$, đáp án C & D không chứa $a=0$.
Ta thử $a=0$, khi đó $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=1$;
$g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0,\ x=-2$.
Do đó $a=0$ không thỏa mãn nên loại A & B
Bây giờ ta chọn $a=-\dfrac{15}{4}$ thuộc đáp án D nhưng không thuộc đáp án C để thử.
Với $a=-\dfrac{15}{4}$ thì $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=-\dfrac{3}{2},\ x=\dfrac{5}{2}$;
$g(x)$ có hai điểm cực trị $x=-\dfrac{9}{2},\ x=\dfrac{5}{2}$.
Do đó $a=-\dfrac{15}{4}$ không thỏa mãn nên loạiD

Câu 28. Kí hiệu $d_{\min}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm $d_{\min}$.

A. $d_{\min}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $d_{\min}=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$. **C.** $d_{\min}=\dfrac{4}{3}$. **D.** $d_{\min}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $b^2-3ac>0\Leftrightarrow m^2+1>0$. Khi đó độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là
$$d=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}}.\sqrt{1+\frac{4}{9}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{(m^2+1)\left(4(m^2+1)^2+9\right)}\geq\frac{2\sqrt{13}}{3}.$$
Dấu bằng xảy ra khi $m=0$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x-1$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $A(a;b)$ sao cho A là điểm cực đại (C_m) tương ứng với $m=m_1$ và A là điểm cực tiểu (C_m) tương ứng với $m=m_2$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right. \Rightarrow M\left(m-1; \dfrac{m^3 - 3m - 1}{3}\right), N\left(m+1; \dfrac{m^3 - 3m - 5}{3}\right)$ là các điểm cực trị của (C_m).

Ta có $M \in (H_1): y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3}{3}, N \in (H_2): y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 3}{3}$.

Khi đó $A(0;-1) = (H_1) \cap (H_2) \Rightarrow S = 0 - 1 = -1$.

Câu 30. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;m-2)$, $B(-1;m+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -2x + m$ hay $2x + y - m = 0$

Theo giả thiết $d(O;AB) \le \sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|-m|}{\sqrt{5}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow |-m| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le m \le 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 31. (Sở Quảng Ninh Lần1) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k = -3$. **B.** $k = \dfrac{1}{3}$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3m+2$	$\searrow$	$-3m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1; -3m+2)$.

Nhận xét: $y_M = -3m + 2 = -3(m-1) - 1 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x - 1, \forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y = -3x - 1$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k = -3$.

Câu 32. (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$.

$$y' = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 3m^2), B(2m; 3m^2 - 4m^3)$.

Phương trình đường thẳng OA: $x = 0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA.d(B; OA) = \frac{1}{2} 3m^2.|2m| = 24 \Rightarrow m^2|m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$ có $\Delta' = -2m^2 + 2m + 7$.

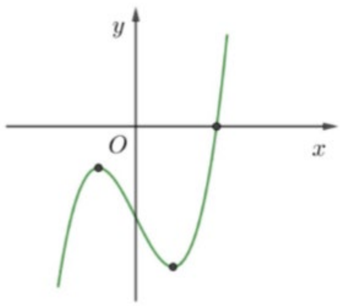
Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{15}}{2},$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên được $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1).f(x_2) > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm (hình vẽ minh họa bên dưới), tức là, phương trình $x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3 = 0$ (*) có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m = -1$ thì phương trình (*) là $x^3 - x + 2 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m = -1$.

Xét $m = 0$ thì phương trình (*) là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m = 0$.

Xét $m = 1$ thì phương trình (*) là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt (dùng MTCT) nên không chọn $m = 1$.

Xét $m=2$ thì phương trình (*) là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=2$.
Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$.

Câu 34. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x-m$

Để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ thì phương trình $y'=0$ hay $3x^2-6x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;3)$.

Cách 1:

Khi đó, đặt $f(x)=3x^2-6x-m$ thì

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f(3)>0\\ a.f(-3)>0\\ -3<\dfrac{S}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+3m>0\\ 45-m>0\\ 9-m>0\\ -3<1<3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Khi đó, đặt $f(x)=3x^2-6x-m$ thì

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ -3<x_1<x_2<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+3m>0\\ -3<\dfrac{3-\sqrt{9+3m}}{3}<\dfrac{3+\sqrt{9+3m}}{3}<3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3:

Ta có: $y'=3x^2-6x-m$

Hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ hay $3x^2-6x=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;3)$.

Đặt $f(x)=3x^2-6x,\ x\in(-3;3)$. Ta có:

$f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	$\searrow$	-3	$\nearrow$	9

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<9$.
Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35. (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

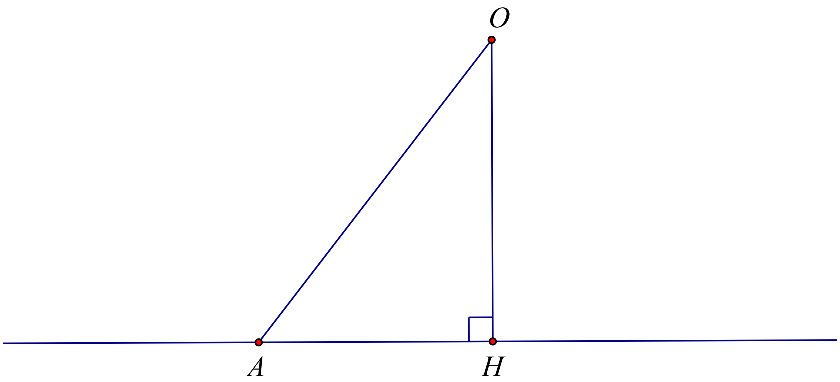
Mà $y(x) = y'(x).\left(\frac{1}{3}x - \frac{2m}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ:

$y = -\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$.

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Khi đó ta có $d(O;\Delta) = OH \le OA$ (Hình vẽ)



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp OA$.

Câu 36. (Sở Ninh Bình Lần1) Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra:

$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên Lần2) Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m \in (-1;1]$. **B.** $m \in (-3;-1]$. **C.** $m \in (3;5]$. **D.** $m \in (1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y' = -3x^2 + 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$; $B(2m;4m^3-3m-1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m;2m^3-3m-1)$.

Đường thẳng d: $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=(8;-1)$.

và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ AB\perp d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+8(2m^3-3m-1)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ 16m-4m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$). Suy ra $m\in(1;3]$.

Câu 38. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$ Ta có

$OA=OB\Leftrightarrow \sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2}\Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Câu 39. (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$ Ta có

$OA=OB\Leftrightarrow \sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2}\Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Câu 40. (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-(x-1)^3+3m^2(x-1)-2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

A. $m=\pm\frac{1}{3}$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-3(x-1)^2+3m^2$.

$y'=0 \Leftrightarrow -3(x-1)^2+3m^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=m \\ x-1=-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+m \\ x=1-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có 2 cực trị thì $m \neq 0$.

Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $x_A=1+m; x_B=1-m$. Khi đó $A(1+m;2m^3-2)$; $B(1-m;-2m^3-2)$.

Hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ nên $OA=OB \Leftrightarrow OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow (1+m)^2+(2m^3-2)^2=(1-m)^2+(-2m^3-2)^2 \Leftrightarrow 4m^3-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(ktm) \\ m=\pm\frac{1}{2}(tm) \end{array}\right.$.

Vậy $m=\pm\frac{1}{2}$.

Câu 41. Với giá trị thực dương của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ có các điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $1<m<2$ **B.** $2<m<\frac{7}{2}$ **C.** $3<m<4$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng qua hai điểm cực trị $y=(2-2m^2)x+m+1=px+q$

Điều kiện có hai điểm cực trị là $m^2>1$. Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1;px_1+q)$ và $B(x_2;px_2+q) \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|x_1(px_2+q)-x_2(px_1+q)| \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|q|.|x_1-x_2|$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.|m+1|.\sqrt{4m^2-4}$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=|m+1|.\sqrt{m^2-1}=8\sqrt{2} \Rightarrow (m^2+2m+1)(m^2-1)=128$

$\Rightarrow (m-3)(m^3+5m^2+15m+43)=0 \Rightarrow m=3$.

Câu 42. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-ax^2-3ax+4$. Để hàm số đạt cực trị tại $x_1;x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{x_2^2+2ax_1+9a}{a^2}=2$ thì a thuộc khoảng nào?

A. $a\in\left(-3;\frac{-5}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(-5;\frac{-7}{2}\right)$. **C.** $a\in(-2;-1)$. **D.** $a\in\left(-\frac{7}{2};-3\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2ax-3a$. Để phương trình đã cho có hai điểm cực trị x_1,x_2 thì ta cần phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2ax-3a=0 (1)$ có hai nghiệm phân biệt. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta'=a^2-(-3a)=a^2+3a>0 \Leftrightarrow a(a+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-3 \end{array}\right.$

Khi đó áp dụng định lý Vi-et ta nhận được $x_1+x_2=2a(2)$. Chú ý x_1 là nghiệm của (1) và sử dụng (2) nên

$x_1^2-2ax_1-3a=0\Rightarrow x_1^2+2ax_2+9a=\left(x_1^2-2ax_1-3a\right)+2a\left(x_1+x_2\right)+12a=2a\left(x_1+x_2\right)+12a=4a^2+12a$

Tương tự ta có $x_2^2+2ax_1+9a=4a^2+12a$

Từ đó

$$\frac{x_1^2+2ax_2+9a}{a^2}+\frac{a^2}{x_2^2+2ax_1+9a}=2\Leftrightarrow\frac{4a^2+12a}{a^2}+\frac{a^2}{4a^2+12a}=2\Leftrightarrow\frac{4a+12}{a}+\frac{a}{4a+12}=2.$$

$$\Leftrightarrow\left(4a+12\right)^2+a^2-2a\left(4a+12\right)=0\Leftrightarrow\left[\left(4a+12\right)-a\right]^2=0\Leftrightarrow a=-4\in\left(-5;\frac{-7}{2}\right)$$

Câu 43. (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in\left(3;4\right)$. **B.** $m_0\in\left(1;2\right)$. **C.** $m_0\in\left(0;1\right)$. **D.** $m_0\in\left(2;3\right)$.

Lời giải.

Chọn C

Xét hàm số $y=x^3-6mx+4$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6m;y'=0\Leftrightarrow x^2=2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Ta có $y=\frac{1}{3}y'.x-4mx+4$.

Gọi $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases}y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)=0\\ y_1=y\left(x_1\right)=\frac{1}{3}y'\left(x_1\right).x_1-4mx_1+4\\ y_2=y\left(x_2\right)=\frac{1}{3}y'\left(x_2\right).x_2-4mx_2+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-4mx_1+4\\ y_2=-4mx_2+4\end{cases}$.

Suy ra M,N thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-4mx+4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của $\left(C_m\right)$ là: $y=-4mx+4$.

Gọi $\left(T\right)$ là đường tròn có tâm $I\left(1;0\right)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0<d\left(I,d\right)<R\Leftrightarrow 0<d\left(I,d\right)<\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ \frac{\left|-4m+4\right|}{\sqrt{16m^2+1}}<\sqrt{2}\end{cases}$ (*).

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K\left(0;4\right)$, $IK=\sqrt{17}>R\Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A,B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó: $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}IA.IB$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA\perp IB\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=\frac{R}{\sqrt{2}}=1$ (thỏa mãn (*)).

$\Leftrightarrow\frac{\left|-4m+4\right|}{\sqrt{16m^2+1}}=1\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}$.

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d) = t\ (0 < t \le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB} = f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + y^2 = 2\ \ (C)$

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 2 \\ y = -4mx + 4\end{cases} \Rightarrow (16m^2+1)x^2 - 2(16m+1)x + 15 = 0\ (1)$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt $a, b \Leftrightarrow (16m+1)^2 - 15(16m+1) > 0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4), B(b;-4mb+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IA} = (a-1;-4ma+4) \\ \overrightarrow{IB} = (b-1;-4mb+4)\end{array}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = ab - (a+b) + 16\left[m^2ab - m(a+b) + 1\right] + 1 = 0$

$\Leftrightarrow ab - (a+b) + 16m^2ab - 16m(a+b) + 17 = 0 \Leftrightarrow (16m^2+1)ab - (16m+1)(a+b) + 17 = 0$

$\Leftrightarrow 15 - \frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1} + 17 = 0 \Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1} = 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$.

Câu 44. (Quỳnh Lưu Lần 1) Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$. Hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi: $a^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow a < -\sqrt{6} \vee a > \sqrt{6}\ (1)$.

$g'(x) = -3x^2 + 2bx - 3$. Hàm số $y = g(x)$ có cực trị khi $b^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow b < -3 \vee b > 3\ (2)$.

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x_0^2 + 2ax_0 + 2 = 0 \\ -3x_0^2 + 2bx_0 - 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b = \frac{1}{2x_0} \\ b = \frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -\frac{1}{x_0} - \frac{3}{2}x_0 \\ b = \frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)\end{cases}$$

$$P = |a| + |b| = \left|\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0\right| + \left|\frac{3}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)\right| \ge \left|\frac{5}{2x_0} + 3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{25}{4x_0^2} + 9x_0^2 + 15 \ge 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2}.9x_0^2} + 15 = 30 \Rightarrow P \ge \sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) > 0 \\ \frac{25}{4x_0^2} = 9x_0^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) > 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}\end{cases} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a, b thoả (1) và (2). Vậy $\min P = \sqrt{30}$.

Câu 45. (Sở Vĩnh Phúc) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^3-3mx+2\Rightarrow y'=3x^2-3m$

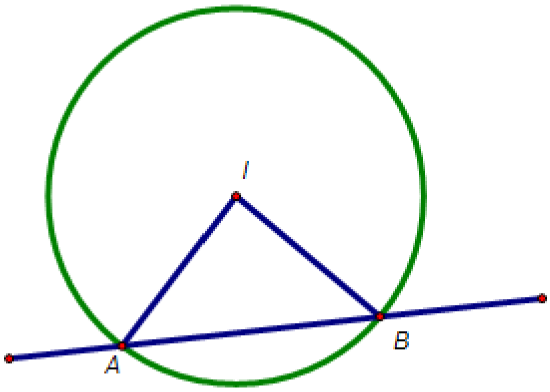
Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0\ (1)$

Ta có $y=\dfrac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$y=-2mx+2\Leftrightarrow 2mx+y-2=0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<R\Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<1 \Leftrightarrow |2m-1|<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow -4m<0$ luôn đúng do $m>0$

Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}.\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$d(I;\Delta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

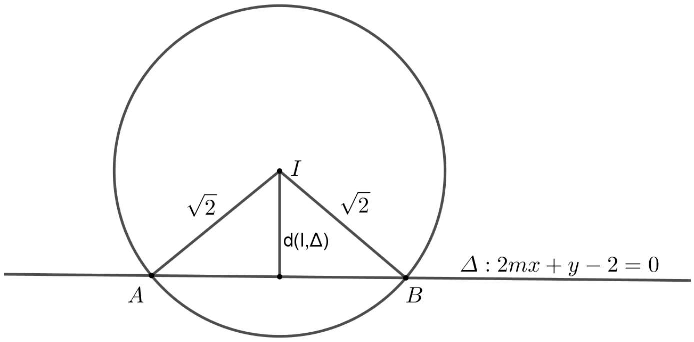
Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3\left(x^2 - m\right)$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là $\Delta: y = -2mx + 2$ hay $\Delta: 2mx + y - 2 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 < 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 2 > 0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}$.

Mà $\frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}R^2 = 1$.

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^{\circ}$.

Từ đó $\mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.R\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{3}{8}$.

DẠNG 4: CỰC TRỊ VỚI HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(2;+\infty)$. **B.** $m\in(-2;2)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=x^4+2(m-2)x^2+3m-2$

$y'=4x^3+4(m-2)x=4x(x^2+m-2)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2-m\quad(1)\end{array}\right.$

y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-(m-1)x^2+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4(m+1)x^3-2(m-1)x=2x\left[(m+1)x^2-(m-1)\right]$

Để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\left\{\begin{array}{l}m+1<0\\\dfrac{m-1}{m+1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing$

Câu 3. (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$

** Điều kiện cần:*

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ là $f'(-1)=0\Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

** Điều kiện đủ:*

Trường hợp 1: $m=0$ hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2020	$\searrow$	2019	$\nearrow$	2020	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.
Trường hợp 2: $m=2$ hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	2019	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$. Chọn $m=2$.
Vậy với $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Cách 2: Kiểm tra điều kiện đủ

- Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$.

$y'=-4x^3+4x$, $y''=-12x^2+4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=-8<0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

- Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

$y'=4x^3-4x$, $y''=12x^2-4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=8>0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ nên chọn $m=2$.

Kết luận: $m=2$.

Câu 4. (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2 \Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Khi $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0;3m-2)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

Khi $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A\left(0;3m-2\right)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Biết $m = m_0$; $m_0 \in \mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in \left(0;3\right)$. **B.** $m_0 \in \left[-5;-3\right)$. **C.** $m_0 \in \left(-3;0\right]$. **D.** $m_0 \in \left(3;7\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A\left(0;1\right)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A. Nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m\left(1+m^3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. Kết hợp $m < 0$ ta có $m = -1$.

Cách 2. (Dùng công thức tính nhanh).

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3 = -8a \Rightarrow \left(2m\right)^3 = -8 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$.

Câu 7. Biết rằng đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức: $P = m^2 + 2m + 1$.

A. $P = 1$ **B.** $P = 4$ **C.** $P = 0$ **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{array}\right.$ với $m > 0$

Các điểm cực trị là $A(0;2)$; $B(\sqrt{m};2-m^2)$; C(- $\sqrt{m}$; 2 - m^2)

Tam giác ABC luôn cân tại A, tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $BC^2 = 2AB^2$

$\Rightarrow 2(m+m^4) = 4m \Leftrightarrow m^4 = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vì $m > 0 \Rightarrow m = 1$

Vậy $P = 4$

Câu 8. **(Lê Xoay lần1)** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = \sqrt[3]{3}$. **D.** $m = \sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$

Hàm số trùng phương có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1).

Gọi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A,\ B,\ C$ với A là điểm thuộc trục tung.

Khi đó, $A(0; m^4 + 2m)$, $B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$, $C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$.

Vì đồ thị hàm số trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng. Ở bài này, hai điểm cực tiểu đối xứng nhau qua trục tung và điểm cực đại nằm trên trục tung nên ΔABC cân tại A. Do đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều $\Leftrightarrow \Delta ABC$ có $AB = BC$

$\Leftrightarrow \sqrt{m + m^4} = \sqrt{4m} \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^4 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$.

Từ điều kiện (1) kết luận $m = \sqrt[3]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. **(Trần Đại Nghĩa)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4\left(m-1\right)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị thao thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **B.** $m = 1 - \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **C.** $m = 1$ **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$y' = 4x^3 - 8(m-1)x$. $\forall x \in R$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1)\ \ (*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 vậy $m > 1$.

Khi đó, gọi A $(0; 2m-1)$. B$\left(\sqrt{2}\sqrt{m-1}; -4m^2 + 10m - 5\right)$ và C$\left(-\sqrt{2}\sqrt{m-1}; -4m^2 + 10m - 5\right)$ là tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác ABC cân tại A vậy đề tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sqrt{m-1})^2 + (-4m^2 + 8m - 4)^2 = (-2\sqrt{2}\sqrt{m-1})^2 + 0^2$

$\Leftrightarrow 2(m-1) + (-4(m-1)^2)^2 = 8(m-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1) + 16(m-1)^4 = 8(m-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\left(8(m-1)^3 - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(m-1) = 0 \\ 8(m-1)^3 - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\ \ (l) \\ (m-1)^3 = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$.

Với $(m-1)^3 = \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + \left(m+1\right)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m < -1$. **B.** $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$.

C. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3+2(m+1)x=2x(2x^2+m+1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=-m-1\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó

$A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}};-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{-\frac{m+1}{2}+\frac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A.

Từ giả thiết suy ra $A=120°$.

Gọi H là trung điểm BC, ta có $H\left(0;-\frac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$

$BH=AH\tan 60°\Leftrightarrow\frac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3}=\sqrt{-\frac{m+1}{2}}$

$\Leftrightarrow\frac{3(m+1)^4}{16}=-\frac{m+1}{2}\Leftrightarrow 3(m+1)^3=-8\Leftrightarrow m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 11. (Sở Lạng Sơn 2019) Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m},(m>0)\end{array}\right.$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0;m-1),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC, ta có $\left\{\begin{array}{l}AH=m^2\\BC=2\sqrt{m}\end{array}\right.$ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=m^2\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{4}$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

A. $m=-\frac{5}{3}$. **B.** $-\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{3m+1}{2} \end{array}\right.$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -\dfrac{3m+1}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}$. Khi đó $A(0;-3)$, $B\left(\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}}; \dfrac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$, $C\left(-\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}}; \dfrac{-9m^2-6m-13}{4}\right)$. Tam giác ABC luôn cân tại A nên cạnh đáy $BC = 2\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}}$, cạnh bên $AB = \sqrt{\dfrac{-3m-1}{2} + \left(\dfrac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có : $BC = \dfrac{2}{3}AB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\dfrac{3m+1}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{-3m-1}{2} + \left(\dfrac{-9m^2-6m-1}{4}\right)^2} \Rightarrow$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m = 1$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

[Phương pháp tự luận]

$y' = 4x^3 - 4(1-m^2)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi: $|m| < 1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0; m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{1-m^2}; 0\right)$

Phương trình đường thẳng BC: $y + m^4 - 2m^2 - m = 0$

$d(A, \mathrm{BC}) = m^4 - 2m^2 + 1$, $BC = 2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.d[A, BC] = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 - 1\right)$

Khi đó S = $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1-m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc toạ độ O làm trực tâm.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để hàm số có ba điểm cực trị là $m>0$.

Toạ độ các điểm cực trị là $A(0;1-m)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$.

Vì ba điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng phương luôn tạo thành tam giác cân tại đỉnh $A(0;1-m)$ và nhận trục tung làm trục đối xứng nên $AO\perp BC$, ta chỉ cần tìm m để $BO\perp AC$ là xong.

Ta có $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{m};-m^2-m+1\right)$.

$$AC\perp OB\Leftrightarrow -m+m^2\left(m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m^3+m^2-m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\\ m=-1\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện hàm số có ba cực trị thì chỉ có giá trị $m=1$ thoả.

Phân tích và phát triển bài toán.

Xét hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $ab<0$. Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0,c)$, $B\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$; $C\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, ở đây $\Delta=b^2-4ac$.

NHẬN XÉT.

Ba điểm A, B, C tạo thành tam giác cân tại đỉnh A, nhận trục Oy làm trục đối xứng. Theo đó có những kết quả phổ biến như sau:

□ $S_{ABC}=|a|\sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^5}$.

□ Tam giác ABC vuông cân khi $b^3+8a=0$; Tam giác ABC đều khi $b^3+24a=0$; Tam giác ABC có góc tại đỉnh cân là α khi $8a+b^3\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$.

□ Trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác luôn nằm trên trục Oy.

Gọi $G(0;g)$, $H(0;h)$, $I(0;m)$ và $J(0;n)$ lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Sau đây ta sẽ xây dựng các công thức liên hệ giữa g,h,m,n với a,b,c.

□ $G(0;g)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $3g=y_A+y_B+y_C$, có nghĩa là

$$c-\frac{2\Delta}{4a}=3g\Leftrightarrow b^2=6a(c-g)$$

□ $H(0;h)$ là trực tâm tam giác ABC nên $BH\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0$

$$\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}-c\right).,\overrightarrow{BH}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};h+\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0\Leftrightarrow-\frac{b}{2a}-\left(\frac{\Delta}{4a}+c\right)\left(h+\frac{\Delta}{4a}\right)=0\Leftrightarrow 8ab+b^2\left(b^2+4ah-4ac\right)=0$

$$\Leftrightarrow h=c-\frac{b^3+8a}{4ab}$$

Áp dụng kết quả này vào bài tập trên ta có:

$$1-m-\frac{-8m^3+8}{-8m}=0\Leftrightarrow\frac{m^3-1}{m}+m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-1\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện có ba điểm cực trị ta thấy $m=1$ thoả.

□ Do tam giác ABC cân tại A và $I(0;m)$ nên $IB=IC$. Để I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì cần thêm điều kiện

$$IA=IB \Leftrightarrow IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (c-m)^2=-\frac{b}{2a}+\left(\frac{\Delta}{4a}+m\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2+4am-4ac\right)^2-16a^2(m-c)^2=8ab \Leftrightarrow c-m=\frac{8a-b^3}{8ab}$$

Từ đây ta cũng rút ra biểu thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R_{ABC}=IA=|c-m|=\left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|$$

□ $J(0;n)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có đẳng thức

$$BC.\overrightarrow{JA}+CA.\overrightarrow{JB}+AB.\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OJ}=\frac{BC.\overrightarrow{OA}+CA.\overrightarrow{OB}+AB.\overrightarrow{OC}}{BC+CA+AB}$$

Ta dễ dàng tính được $AB=AC=\sqrt{-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}}$, $BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Từ đó suy ra được đẳng thức

$$c-n=\frac{\frac{b^2}{4a}.\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}}{1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}}$$

Đẳng thức này thực sự khó nhớ, nên để làm nhanh ta nên nhớ đẳng thức tìm toạ độ tâm ở trên.

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Khi $m>0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;m-1)$, $B\left(-m;-m^2+m-1\right)$, $C\left(m;-m^2+m-1\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^2\right)$, $\overrightarrow{OC}=\left(m;-m^2+m-1\right)$.

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương nên hiển nhiên $AO\perp BC$. Để O là trực tâm ΔABC thì $CO\perp AB$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0 \Leftrightarrow -m^2-m^2\left(-m^2+m-1\right)=0 \Leftrightarrow -m^2\left(-m^2+m\right)=0 \Leftrightarrow m=0$ (loại) hoặc $m=1$ (nhận).

Câu 16. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$. Giá trị m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ O thoả mãn.

A. $m\in[-4;-3]$. **B.** $m\in[-2;-1]$. **C.** $m\in[-1;0]$. **D.** $m\in[0;1]$.

Chọn A

Áp dụng công thức ở trên ta có $b^2=6a(c-g) \Leftrightarrow 4m^2=6(m^2+m) \Leftrightarrow m=-3$ hoặc $m=0$.

Kiểm tra lại ta thấy $m=-3$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 17. (Nguyễn Khuyến) Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k=-1;k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1;k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=1;k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{3};k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=4x^3-4kx=4x\left(x^2-k\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=k\ \ (1)\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k>0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;k)$, $B\left(-\sqrt{k};k-k^2\right)$, $C\left(\sqrt{k};k-k^2\right)$.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{k+\left(k-k^2\right)+\left(k-k^2\right)}{3}$

$\Leftrightarrow -2k^2+3k-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 18. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B

$y'=y=4x^3-4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B(-m;1),C(m;1)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng, ta có: A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB\perp OB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow m^2-m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m=\pm1$ (thỏa mãn).

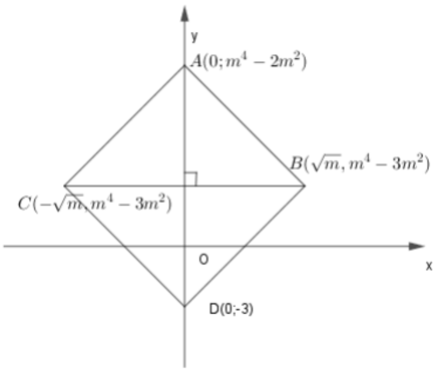
Câu 19. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi, trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4mx$ Để đồ thị có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0\Leftrightarrow4x^3-4mx=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.



$4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$

Khi đó điều kiện cần là $m>0$. Ta có ba nghiệm là $x=0, x=\sqrt{m}, x=-\sqrt{m}$

Với $x=0$ thì $y=m^4-2m^2$

Với $x=\pm\sqrt{m}$ thì $y=m^4-3m^2$

Do A thuộc trục tung nên $A\left(0;m^4-2m^2\right)$ Giả sử điểm B nằm bên phải của hệ trục tọa độ, khi đó $B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right), C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$

Ta kiểm tra được $AD\perp BC$. Do đó để ABDC là hình thoi thì trước hết ta cần $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Ta có

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};\left(m^4-3m^2\right)-\left(m^4-2m^2\right)\right)=\left(\sqrt{m};-m^2\right)$

$\overrightarrow{CD}=\left(\sqrt{m};-3-\left(m^4-3m^2\right)\right)=\left(\sqrt{m};-m^4+3m^2-3\right)$

Do đó

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left(\sqrt{m};-m^2\right)=\left(\sqrt{m};-m^4+3m^2-3\right) \Leftrightarrow -m^2=-m^4+3m^2-3$

$\Leftrightarrow -m^4+4m^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=1 \\ m^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do điều kiện để có ba điểm cực trị là $m>0$ nên ta chỉ có $m=1$ hoặc $m=\sqrt{3}$

Với $m=1$ thì $A(0;-1), B(1;-2), C(-1;-2)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1) \Rightarrow AB=\sqrt{2}$. Tương tự ta có $BD=CD=CA=\sqrt{2}$. Như vậy ABDC là hình thoi. Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m=1\notin\left(\frac{9}{5};2\right),\left(-1;\frac{1}{2}\right),(2;3)$ nên các Chọn A, B, C đều sai.

Với $m=\sqrt{3}$ Trong trường hợp này $B\left(\sqrt[4]{3};0\right), C\left(-\sqrt[4]{3};0\right), A(0;3)$. Ta kiểm tra được $AB=BD=DC=CA=\sqrt{9+\sqrt{3}}$. Do đó ABDC cũng là hình thoi và $m=\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nhận xét. Đối với bài toán thi trắc nghiệm đòi hỏi cần tiết kiệm thời gian thì chỉ cần xét trường hợp $m=1$ thì chúng ta đã có thể kết luận được chọn là D mà không cần xét thêm trường hợp $m=\sqrt{3}$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-(2m-1)x^2+m+3$ có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $y'=\frac{1}{2}x^3-2(2m-1)x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=4(2m-1) \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $2m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Giả sử ba điểm cực trị là

$A(0;m+3)$, $B\left(2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2+m+3\right)$, $C\left(-2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2+m+3\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-2\sqrt{2m-1};-2(2m-1)^2\right)$.

Điều kiện để ba cực trị tạo thành một tam giác vuông là:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -4(2m-1)+4(2m-1)^4=0 \Leftrightarrow 4(2m-1)\left[(2m-1)^3-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow (2m-1)^3=1 \Leftrightarrow m=1$ (do $m>\frac{1}{2}$).

Khi đó $A(0;4)$, $B(2;2)$, $C(-2;2)$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Vậy $m=1$.

Câu 21. (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Hàm số có 3 cực trị khi $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Xét $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$ $(m>0)$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0;m)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $H\left(0;-m^2+m\right)$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{AB.AC.BC}{4R}$ (do ΔABC cân tại A)

$\Leftrightarrow AB^2=2AH.R$ trong đó $\left\{\begin{array}{l} AH=m^2 \\ AB=\sqrt{m+m^4} \end{array}\right.$

Suy ra $m+m^4=2m^2 \Leftrightarrow m\left(m^3-2m+1\right)=0 \Leftrightarrow m(m-1)\left(m^2+m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $S=\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Do đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 22. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m<-1$. **B.** $m>2$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m),B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right),C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow I\left(0;m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AI.BC=m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p=AB+BC+AC=2\left(\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}=\dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4}>1$ (vì $m>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)>m^2\Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^5}>m^2+m\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>2\end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}\Rightarrow r=\dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}}=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3}>1\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}-1>m$

$\sqrt{1+m^3}>m+1\Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}>m+1\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>2\end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Câu 23. **(Đoàn Thượng)**Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm\sqrt{m}$ với $m>0$

Gọi $A(0;1),B\left(\sqrt{m};-m^2+1\right),C\left(-\sqrt{m};-m^2+1\right)$ là 3 điểm cực trị của hàm số (1); khi đó tam giác ΔABC cân tại A,I là tâm đường tròn đi qua A,B,C nên $I\in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA=R=1\Leftrightarrow 1-b=1\Leftrightarrow b=0$

$IB=R=1\Leftrightarrow m+m^4-2m^2+1=1\Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$

$\Leftrightarrow m(m-1)\left(m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow m_1=0;m_2=1;m_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m>0$ nên loại m_4 và m_1

Ta có $m_2^3+m_3^3=-1+\sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án **D**

Câu 24. Cho hàm số $y=x^4-2(m^8+16)x^2+m^2+2018$. Biết rằng $I\left(0;m^2\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Bán kính đường tròn đó có giá trị là

A. $R=4$. **B.** $R=2$. **C.** $R=\sqrt{2018}$. **D.** $R=2018$.

ChọnD

Áp dụng công thức trên ta có $R_{ABC}=|c-m|=\left|m^2+2018-m^2\right|=2018$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp?

A. $m=1$ **B.** $m=\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$ để tồn tại ba điểm cực trị thì $m>0$ khi đó tọa độ ba điểm cực trị là

$A\left(0;m^4+2m\right),B\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right),C\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

$\Rightarrow AB=AC=\sqrt{m^4+m}$, $BC=2\sqrt{m}$ gọi M là trung điểm

$BC\Rightarrow MB=\sqrt{m}\Rightarrow AM=\sqrt{AB^2-MB^2}=\sqrt{m^4+m-m}=m^2$ $\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AM.BC=\dfrac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}$

Mặt khác $\begin{cases} r=\dfrac{S}{P}=\dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m^4+m}+\sqrt{m}}=\dfrac{m^2}{\sqrt{m^3+1}+1}=\dfrac{\sqrt{m^3+1}-1}{m} \\ R=\dfrac{AB.AC.BC}{4S}=\dfrac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m^3+1}{m} \end{cases}$ theo giả thiết $R=2r$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(m^3+1\right)}{m}=2\dfrac{\left(\sqrt{m^3+1}-1\right)}{m}\Leftrightarrow\left(m^3+1\right)=4\sqrt{m^3+1}-4\Leftrightarrow\left(\sqrt{m^3+1}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{m^3+1}=2$

$\Leftrightarrow m^3=3\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$

Câu 26. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2-m+1\right)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4\left(m^2-m+1\right)x=4x\left(x^2-m^2+m-1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2-m+1\end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2-m^2+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow m^2-m+1>0\Leftrightarrow\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1=-\sqrt{m^2-m+1},x_2=\sqrt{m^2-m+1},x_3=0$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$ và $C\left(\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC=2\sqrt{m^2-m+1}=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge\sqrt{3}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $m=\frac{1}{2}$.

Câu 27. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-4\left(m^2+m+1\right)x=4x\left[x^2-\left(m^2+m+1\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\sqrt{m^2+m+1}\\x_2=0\\x_3=\sqrt{m^2+m+1}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	y_{CD}	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d=\left|x_3-x_1\right|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge\sqrt{3}$.

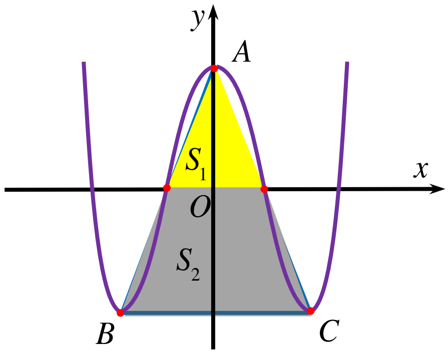
Dấu bằng xảy ra khi $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+m^4$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C), S_1 và S_2 lần lượt là phần diện tích của tam giác ABC phía trên và phía dưới trục hoành. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



$D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4\left(m^2+1\right)x$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4\left(m^2+1\right)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2+1 \quad (1) \end{array}\right.$.

Do $m^2+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi $m\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đã cho luôn có ba điểm cực trị.

Giả sử ba điểm cực trị của (C) là $A\left(0;m^4\right)$, $B\left(-\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB, AC với trục hoành.

Ta có $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{S_{AMN}}{S_{MNCB}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ (do $MN \,//\, BC$) $\Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm đoạn AB $\Leftrightarrow y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ (do M, A, B thẳng hàng) $\Leftrightarrow m^4-2m^2-1=0$

$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Vậy có hai giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 5: CỰC TRỊ VỚI CÁC HÀM SỐ KHÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Biết hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có hai cực trị x_1,x_2.Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $y=mx+n$. **B.** $y=\dfrac{m}{2}x+n$. **C.** $y=-mx+n$. **D.** $y=\dfrac{-m}{2}x+n$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có dạng:

$$y=\frac{\left(x^2+mx+n\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\frac{2x+m}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$.Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2+mx+n\right)=\left(x^2+1\right)\left(2x+m\right)\Leftrightarrow mx^2+\left(2n-2\right)x-m=0$.

Ta tìm k thỏa $2x+m+k\left[mx^2+\left(2n-2\right)x-m\right]=0$ có nghiệm $x=0$.Khi đó $k=1$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+n}{x^2+1}$ có dạng:

$$y=\frac{2x+m+1\left[mx^2+\left(2n-2\right)x-m\right]}{2x}=\frac{2x+mx^2+2\left(n-1\right)x}{2x}=\frac{m}{2}x+n.$$

Câu 2. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có hai cực trị x_1,x_2.Tính $k=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$.

A. $k=\dfrac{-2}{m}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\dfrac{2}{m}$. **D.** $k=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường cong đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+m}{x^2+2}$ có dạng:

$$y=\frac{\left(x^2-2x+m\right)'}{\left(x^2+2\right)'}=\frac{2x-2}{2x}.$$

Gọi tọa độ của hai điểm cực trị là $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$.Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của pt:

$2x\left(x^2-2x+m\right)=\left(x^2+2\right)\left(2x-2\right)\Leftrightarrow 2x^2+\left(4-2m\right)x-4=0$.

Ta tìm k thỏa $2x-2+k\left[2x^2+\left(4-2m\right)x-4\right]=0$ có nghiệm $x=0$.Khi đó $k=\dfrac{-1}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+m-1}{2x+1}$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\dfrac{\left(mx^2-2x+m-1\right)'}{(2x+1)'}=\dfrac{2mx-2}{2}=mx-1$ có hệ số góc bằng m.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có hệ số góc $k=1$;
Hai đường thẳng vuông góc với nhau nên $m.1=-1 \Leftrightarrow m=-1$.

Chọn C

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2-\sqrt{12}x+\frac{1}{4}(b+3a)\ \forall x\in R$,biết hàm số luôn có hai cực trị với a,b là các số thực không âm thỏa mãn $3b-a\le 6$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+b$?

A. 1 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=x^2-\sqrt{b}x-\frac{3}{4}a+3,\ \forall x\in R$

Hàm số luôn có hai cực trị khi và chỉ khi: $\Delta>0 \Leftrightarrow 12-b-3a>0$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \\ 3b-a\le 6 \\ b+3a<12 \end{cases}$ nếu biểu diễ lên hệ trục tọa độ ta sẽ được miền tứ giác OABC với $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(3;3)$, $C(4;0)$ trong các điểm có tọa độ nguyên thuộc miền OABC có điểm $M(3;2)$ làm biểu thức P có giá trị lớn nhất là $P_{max}=2.3+2=8$

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-mx^3+4x+m+2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là toạ độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x}{4x-m}$.

A. $m=2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=3$

Lời giải

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi phong trình y'(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3-3mx^2+4=0$ có 3nghiệm phân biệt

Xét g(x) = $4x^3-3mx^2+4$ có g'(x) = $12x^2-6mx \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{m}{2}$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ và $g(0)=4>0$, $g(\frac{m}{2})=\dfrac{16-m^3}{4}$ nên g(x) = 0

có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2}>0 \\ \frac{16-m^3}{4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2\sqrt[3]{2}$ (học sinh có thể lập bảng biến thiên

của hàm $\mu(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ trên $R\setminus\{0\}$ để tìm ra kết quả trên)

Khi đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x}{4x-m}$ là $I(\frac{m}{4};1)$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phong trình: $4x^3-3mx^2+4=0$ nên theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{3m}{4} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{m}{4} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\dfrac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Viết hàm số ban đầu dới dạng: $y(x)=y'(x)(\frac{x}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x^2}{16}+3x+\frac{5m}{4}+2)$, vì thế

$$y_i=y(x_i)=y'(x_i)(\frac{x_i}{4}-\frac{m}{16})+(-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2)=-\frac{3m^2x_i^2}{16}+3x_i+\frac{5m}{4}+2$$

$do\ y'(x_i)=0 \quad (i=1,2,3)$

Từ đó: $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=-\dfrac{m^2}{16}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1+x_2+x_3)+\dfrac{5m}{4}+2=-\dfrac{9m^4}{16^2}+\dfrac{5m}{4}+2$

Trọng tâm của tam giác ABC là G$(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})\equiv I(\dfrac{m}{4};1)$ khi và chỉ

khi: $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=1 \Leftrightarrow -\dfrac{9m^4}{16^2}+\dfrac{5m}{4}+2=1 \Leftrightarrow (m-4)(9m^3+36m^2+144m+64)=0$

Vì $m>2\sqrt[3]{2}$ nên $m=4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Chọn C

Câu 6. (CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT 2019 lần 1) Cho hàm số $y=\dfrac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\dfrac{m}{3}x^3+2019$.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'.Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$.Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$.Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$.Khi đó $g(0)=0 \Leftrightarrow m=0$.

Thử lại,với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\dfrac{m-1}{5}x^5+\dfrac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(m-1)x^4+(m+2)x^3$.

+ **TH1:** $m=1$.Khi đó $y=\frac{3}{4}x^4+6\Rightarrow y'=3x^3$.Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ (loại).

+ **TH2:** $m\neq 1$.Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=0\\ x_2=-\dfrac{m+2}{m-1}\end{array}\right.$.

Nhận thấy nếu $x_2=x_1=0\Rightarrow m=-2\Rightarrow y'=-3x^4\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m-1>0\\ x_1<x_2\end{cases}\\ \begin{cases} m-1<0\\ x_1>x_2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m>1\\ -2<m<1\end{cases}\\ \begin{cases} m<1\\ \left[\begin{array}{l} m<-2\\ m>1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ là 2016.

Câu 8. (Lý Nhân Tông)Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^9+(m-2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$y'=9x^8+7(m-2)x^6-6(m^2-4)x^5\Rightarrow y'(0)=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$y''=9.8x^7+7.6(m-2)x^5-6.5(m^2-4)x^4\Rightarrow y''(0)=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $y'''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Ta có $y^{(6)}=9.8.7.6.5.4x^3+7.6.5.4.3.2(m-2)x-6.5.4.3.2.1(m^2-4)\Rightarrow y^{(6)}(0)=-6.5.4.3.2.1(m^2-4)$.

*TH1: $y^{(6)}(0)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=2\\ m=-2\end{array}\right.$ thì:

$+m=2\Rightarrow y'=9x^8\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

$+m=-2\Rightarrow y'=x^6(9x^2-28)$ không đổi dấu khi qua $x=0$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

*TH2: $y^{(6)}(0)\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 2$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì cần thêm

$y^{(6)}(0)>0\Leftrightarrow -6.5.4.3.2.1(m^2-4)>0\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 9. (Chuyên Phan Bội Châu Lần2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h)-f(x-h)|\leq h^2,\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h>0$.Đặt

$g(x)=[x+f'(x)]^{2019}+[x+f'(x)]^{29-m}-(m^4-29m^2+100)\sin^2 x-1$, m là tham số nguyên và $m<27$ .Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 100. **B.** 50. **C.** 108. **D.** 58.

Lời giải.

Chọn A

Từ giả thiết ta có

$\left|f\left(x+2h\right)-f\left(x\right)\right|\le h^2,\ \forall h>0\Rightarrow \dfrac{\left|f\left(x+2h\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(x+2h\right)-x}\le \dfrac{h}{2},\ \forall h>0$.

$\Rightarrow 0\le \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left|f\left(x+2h\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(x+2h\right)-x}\le \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{2}=0\Rightarrow f'\left(x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)=C$,với C là hằng số.Ta có

$$g'\left(x\right)=2019\left[x+f'\left(x\right)\right]^{2018}\left(1+f''\left(x\right)\right)+\left(29-m\right)\left[x+f'\left(x\right)\right]^{28-m}\left(1+f''\left(x\right)\right)$$
$$-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x$$
$$=2019x^{2018}+\left(29-m\right)x^{28-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x.$$

$g''\left(x\right)=2019.2018x^{2017}+\left(29-m\right)\left(28-m\right)x^{27-m}-2\left(m^4-29m^2+100\right)\cos 2x$.

Khi đó $g'\left(0\right)=0$; $g''\left(0\right)=-2\left(m^4-29m^2+100\right)$.

$g''\left(0\right)>0\Leftrightarrow m^4-29m^2+100<0\Leftrightarrow 4<m^2<25\Leftrightarrow m\in\left(-5;-2\right)\cup\left(2;5\right)$.

Trường hợp $m=2$,ta có $g'\left(x\right)=2019x^{2018}+27x^{26}=x^{26}\left(2019x^{1992}+27\right)$.

Vì $x=0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'\left(x\right)=0$ nên trường hợp này loại.

Trường hợp $m=5$,ta có $g'\left(x\right)=2019x^{2018}+24x^{23}=x^{23}\left(2019x^{1995}+24\right)$.

Trường hợp $m=-2$,ta có $g'\left(x\right)=2019x^{2018}+31x^{30}=x^{30}\left(2019x^{1988}+31\right)$.

Vì $x=0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'\left(x\right)=0$ nên trường hợp này loại.

Trường hợp $m=5$,ta có $g'\left(x\right)=2019x^{2018}+24x^{23}=x^{23}\left(2019x^{1995}+24\right)$.

Dễ thấy $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp $m=-5$,ta có $g'\left(x\right)=2019x^{2018}+34x^{33}=x^{33}\left(2019x^{1985}+34\right)$.

Dễ thấy $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m\in S=\left\{-5;-4;-3;3;4;5\right\}$ nên tổng các bình phương của các phần tử của S là 100.

Câu 10. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(mx^2+4mx-m+n-2\right)$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\dfrac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. Trên đoạn $\left[-\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-\dfrac{7}{2}$. **B.** $x=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $x=-\dfrac{5}{2}$. **D.** $x=-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(4mx^2+10mx-6m+2n-4\right)$.

Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4mx^2+10mx-6m+2n-4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4mx^2+10mx-6m+2n-4=0\ (1) \end{array}\right.$.

Trên khoảng $\left(-\frac{7}{6};0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x_1=-1$.

$\Rightarrow m\neq 0$ và $x_2=-\frac{3}{2}$(vì theo Vi – ét $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ và $x_1=-1$).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Vậy trên đoạn $\left[-\frac{7}{2};-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-\frac{3}{2}$.

Câu 11. (HSG Bắc Ninh) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ .Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)$ đổi dấu đúng một lần.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=x^2+2mx+5$.Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị xảy ra các khả năng sau:

+)TH1: $g(x)=0$ có nghiệm kép,điều kiện là $\Delta'=m^2-5=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ không thỏa mãn m nguyên.

+)TH2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt,trong đó có một nghiệm bằng -1.TH này xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ g(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

+)TH3: $g(x)=0$ vô nghiệm tức $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-5<0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$:có 5 giá trị của m .Vậy có 6 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$ .Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\g(x)=x^2-2mx+m+6=0\end{array}\right.$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn và $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Hàm số đã có một cực trị khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu một lần khi và chỉ khi $f'(x)=0$ có một nghiệm bội lẻ.

+ Trường hợp 1:Phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép:

Khi đó: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2-m-6\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

+ Trường hợp 2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt,trong đó có 1 nghiệm $x_1=1$

Với $x_1=1$,ta có: $g(1)=1-2m+m+6=0\Leftrightarrow m=7$.

Với $m=7\Rightarrow g(x)=x^2-14x+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=13\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m\in[-2;3]\cup\{7\}$,mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2;3;7\}$.

Câu 18. (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$.Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị,tìm số tập con khác rỗng của S?

A. 127. **B.** 15. **C.** 63. **D.** 31.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi:

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2mx+5=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.
Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\Delta'=m^2-5\le 0\Leftrightarrow -\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5}$ $(*)$.

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+2mx+5=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là -1.Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\(-1)^2-2m+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\sqrt{5}\\m<-\sqrt{5}\end{array}\right.\\m=3\end{cases}\Leftrightarrow m=3\ (**).$$

Từ $(*),(**)$ suy ra $m\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\cup\{3\}$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$ hay $S=\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Suy ra số tập con khác rỗng của S bằng $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=63$.

Câu 13. (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x+2)^4=0 \\ (x+4)^3=0 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=-4 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0\ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

<u>Trường hợp 1</u>. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3$

$\Rightarrow m\in\{-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

<u>Trường hợp 2</u>. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

<u>Trường hợp 3</u>. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1=-4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta=4m^2-36>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=-4+x_2=-2m-6 \\ P=x_1.x_2=-4.x_2=6m+18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2m-2 \\ x_2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m-2=-\dfrac{3}{2}m-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m\in\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;3\ ;5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 14. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2+3x-4\right)$.Gọi S là tập các số nguyen $m\in[-10;10]$để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị.Số phần tử của S bằng:

A. 10. **<u>B.</u>** 5. **C.** 14. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{array}\right.$

Đặt $y=g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$

$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+m)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \left(x^2-4x+m-2\right)^2=0 \\ h_1(x)=x^2-4x+m-1=0(1) \\ h_2(x)=x^2-4x+m+4=0(2) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình (1)và (2)có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h_2(2) \neq 0 \\ \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 5 \\ \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \leq m < 5$$

mà $m \in [-10;10]$ do đó $m \in \{0;1;2;3;4\}$ có 5 phần tử.

Câu 15. (Sở Hà Nam) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(2x^2-12x+m)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$$g(x)=f(2x^2-12x+m) \Rightarrow g'(x)=(4x-12)f'(2x^2-12x+m)$$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-12)f'(2x^2-12x+m)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1 & (l) \\ 2x^2-12x=-m & (1) \\ 2x^2-12x=4-m & (2) \end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$)

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C).

$y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $(1);(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

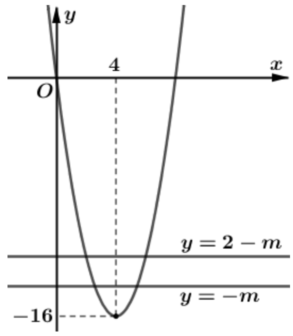
Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiem boi 2)}\\ x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\\ x^2-8x+m=1 \text{ (nghiem boi 2)}\\ x^2-8x+m=0 \quad (1)\\ x^2-8x+m=2 \quad (2)\end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m,\ d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).

Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow$ $d_1,\ d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m>-16\Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Cách 2: Đặt $g(x)=f(x^2-8x+m)$.Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$

$\Rightarrow g'(x)=(2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x+m-1 & (1)\\ x^2-8x+m=0 & (2)\\ x^2-8x+m-2=0 & (3)\end{array}\right.$ .Các phương trình $(1),(2),(3)$ không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-2)^2\ge 0$ vi $\forall m\in\mathbb{R}$ nên $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 4 $\Leftrightarrow \begin{cases}16-m>0\\ 16-m-2>0\\ 16-32+m\ne 0\\ 16-32+m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<16\\ m<18\\ m\ne 16\\ m\ne 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16$. Vậy m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 17. (Hàm Rồng) Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Dấu của:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

Vì $y'=(2x-10).f'(x^2-10x+m+9)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x^2-10x+m+9=1\\x^2-10x+m+9=2(L)\\x^2-10x+m+9=3\end{array}\right..$$

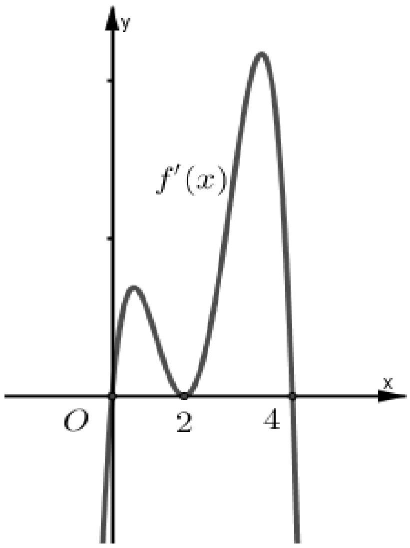
Vậy hàm số đã cho có 5 cực trị $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x^2-10x+m+9=1\ (1)\\x^2-10x+m+9=3\ (2)\end{array}\right.$ có 5 nghiệm phân biệt khác 5.

$\Leftrightarrow$Mỗi pt (1)và (2)có 2 nghiệm phân biệt khác 5.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}25-(m+8)>0\\25-(m+6)>0\\m\neq 17\\m\neq 19\end{array}\right.\Leftrightarrow m<17.$$

Vậy các giá trị m nguyên dương thõa mãn: $m\in\{1;\,2;\,3....;\,16\}$.

Câu 18. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^2-m)$ có ba điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y'=2x.f'(x^2-m)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-m=0\\ x^2-m=2\\ x^2-m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\\ x^2=m+2\\ x^2=m+4\end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta thấy

$f'\left(x^2-m\right)>0\Leftrightarrow 0<x^2-m<4\ \Leftrightarrow m<x^2<m+4$.

$$f'\left(x^2-m\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-m<0\\ x^2-m>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2<m\\ x^2>m+4\end{array}\right..$$

TH1: Với $m\le -4$.

$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ không thể có ba cực trị.

TH2: Với $-4<m\le -2$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m+4}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$

x		$-\sqrt{m+4}$		0		$\sqrt{m+4}$	
$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH3: Với $-2<m\le 0$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m+2}\\ x=\pm\sqrt{m+4}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		0		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH4: Với $m>0$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m}\\ x=\pm\sqrt{m+2}\\ x=\pm\sqrt{m+4}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$.

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
y'	+	0	−	0	−	0	+	0	−	0	+	0	+	0	−

Từ bảng trên suy ra hàm số có 5 cực trị.

Từ các trường hợp trên, hàm số $y = f\left(x^2 - m\right)$ có ba cực trị khi $m \in (-4; 0]$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Cách 2:

Ta có $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{array}\right..$$

Dễ thấy

$x = 0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - m\right)$.

$x^2 = m + 2$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Mặt khác $m < m + 4\ \forall m$ nên hai phương trình $x^2 = m$ (1) và $x^2 = m + 4$ (2) không có nghiệm trùng nhau.

Vậy để hàm số $y = f\left(x^2 - m\right)$ có 3 điểm cực trị thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 đồng thời (1) vô nghiệm hoặc (1) có 1 nghiệm kép bằng 0 $\Rightarrow -4 < m \le 0 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Câu 19. (THTT lần5) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y = \dfrac{x^2}{8} + \sqrt{x + m + 2}$ không có điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [-m - 2; +\infty)$

Ta có $y' = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x + m + 2}} \Leftrightarrow y' = \dfrac{x\sqrt{x + m + 2} + 2}{4\sqrt{x + m + 2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x + m + 2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x + m + 2} = -2 \quad (1)$

Hàm số $y = \dfrac{x^2}{8} + \sqrt{x + m + 2}$ không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

Vì m nguyên dương nên $-m - 2 < 0$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 < x < 0 \\ x^2(x + m + 2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 < x < 0 \\ x^3 + (m + 2)x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 < x < 0 \\ -m - 2 = x - \dfrac{4}{x^2} = g(x) \end{cases}$

$g'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-m-2$		-2		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$g(x)$			-3		$\Vert$
	$g(-m-2)$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ suy ra

(1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow -m-2 \geq -3 \ \Leftrightarrow m \leq 1$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương nên suy ra $m=1$.

DANG 6: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA GTTĐ

Trước khi đi vào các bài toán ta cần nhớ những kiến thức sau.

□ Số điểm cực trị của hàm số $\left|f(x)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

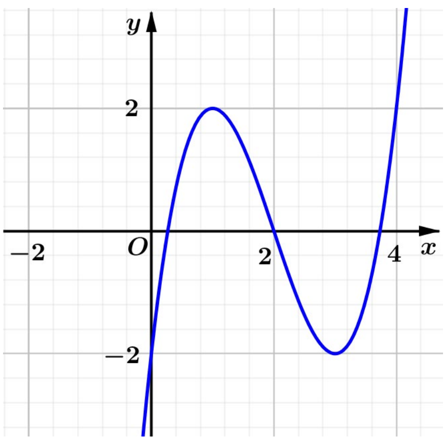
□ Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|mx+n\right|\right)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{n}{m}$ của hàm số $f(x)$

□ Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ bằng $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số.

□ Cho hàm số có dạng $y=\left|ax^2+bx+c\right|+mx$, tìm điều kiện của tham số m để giá trị cực tiểu của hàm số đạt giá trị lớn nhất, khi đó ta có $\begin{cases}\max\left(y_{ct}\right)=c\\ m=-b\end{cases}$

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1. (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

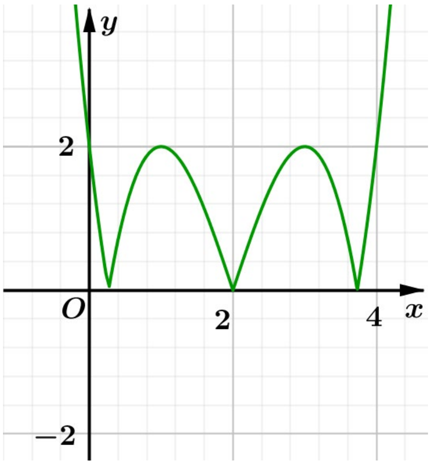


A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục Ox hợp với phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía dưới Ox lấy đối xứng qua Ox. Ta được đồ thị như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $\left(C\right)$.

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ và gọi $\left(C'\right)$ là đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)$. Đồ thị $\left(C'\right)$ được suy ra từ đồ thị $\left(C\right)$ như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của $\left(C\right)$ phía trên Ox ta được phần I.

+) Với phần đồ thị của $\left(C\right)$ phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được $\left(C'\right)$.

Từ cách suy ra đồ thị của $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$, kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y=\left|f\left(x\right)\right|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1 ‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$ / 2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

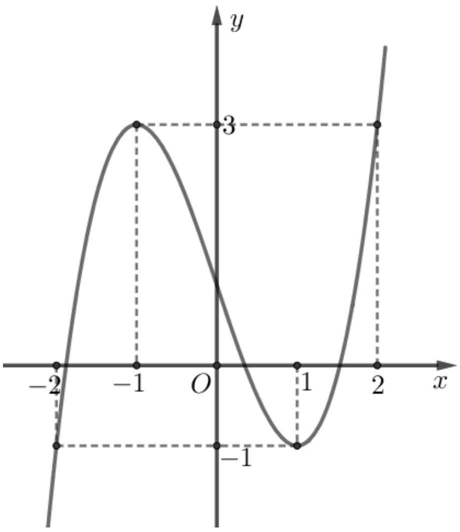
Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

- Đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.
- Hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 4. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$
có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ lần lượt là $x_1;x_2;x_3$ trong đó $x_1<0<x_2<1<x_3$.

$$y=\begin{cases} f(|x|) \text{ khi } f(|x|)\ge 0 \\ -f(|x|) \text{ khi } f(|x|)<0 \end{cases} = \begin{cases} f(x), \forall x\in(0;x_2)\cup(x_3;+\infty) \\ -f(x), \forall x\in(x_2;x_3) \\ f(-x), \forall x\in(-\infty;-x_3)\cup(-x_2;0) \\ -f(-x), \forall x\in(-x_3;-x_2) \end{cases}.$$

$$y' = \begin{cases} f'(x), \forall x \in (0; x_2) \cup (x_3; +\infty) \\ -f'(x), \forall x \in (x_2; x_3) \\ -f'(-x), \forall x \in (-\infty; -x_3) \cup (-x_2; 0) \\ f'(-x), \forall x \in (-x_3; -x_2) \end{cases}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

y' không xác định tại $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm x_2 \\ x = \pm x_3 \end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \left|f\left(|x|\right)\right|$ như sau:

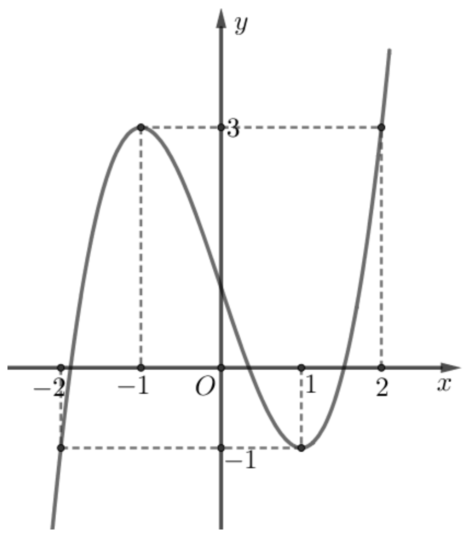
x	$-\infty$		$-x_3$		-1		$-x_2$		0		x_2		1		x_3		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Nên hàm số có 7 cực trị.

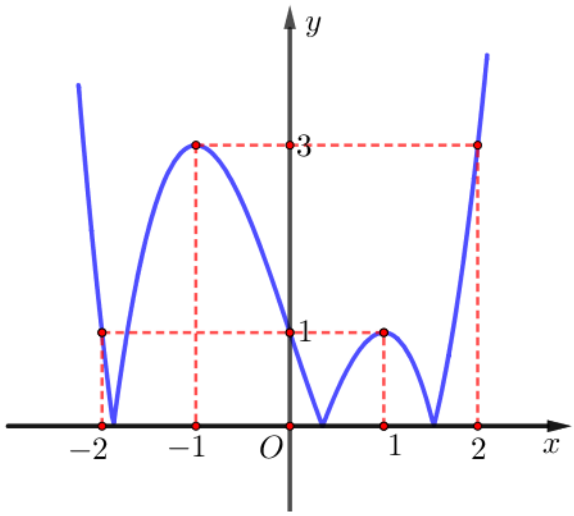
Cách 2:

Hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là $x = 1$ và phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm dương nên hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có 3 cực trị và phương trình $f\left(|x|\right) = 0$ có 4 nghiệm nên hàm số $y = \left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 cực trị.

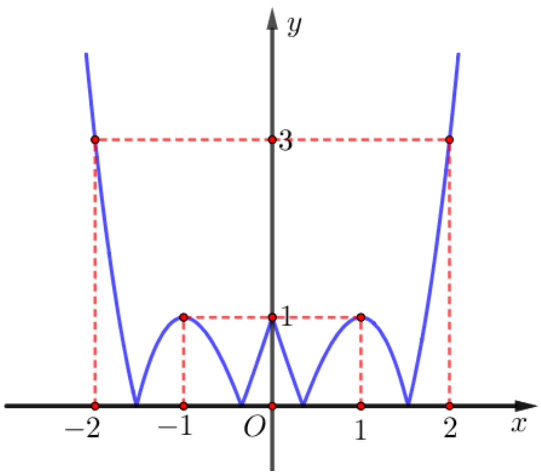
Cách khác: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y = \left|f(x)\right|$ là:

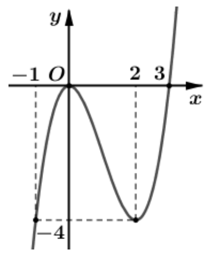


Và đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+4\right|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng ?



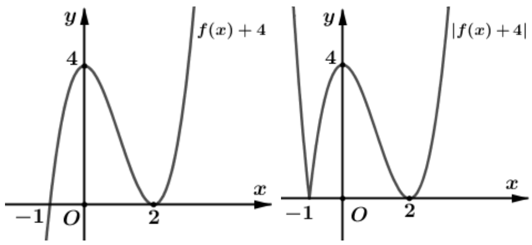
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)+4\right|$ có được bằng cách

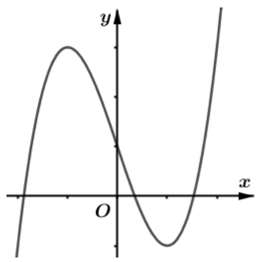
- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được $\left|f(x)+4\right|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1;0)$, $(0;4)$, $(2;0)$

$\longrightarrow$ tổng tung độ các điểm cực trị bằng $0+4+0=4$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

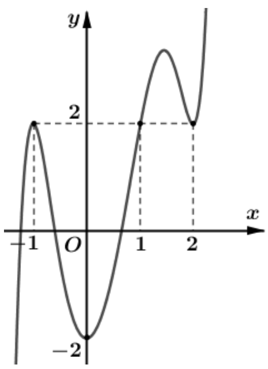
Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x)=2f(x)-3\longrightarrow g'(x)=2f'(x)$;

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thị } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=0\\ x=a\ \ (1<a<2)\\ x=2\end{array}\right.$. Ta tính được $\begin{cases} g(-1)=1\\ g(0)=-7\\ g(a)>1\\ g(2)=1\end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

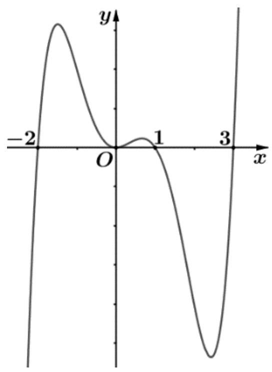
x	$-\infty$		-1		0		a		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	1	↘	-7	↗	$g(a)$	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

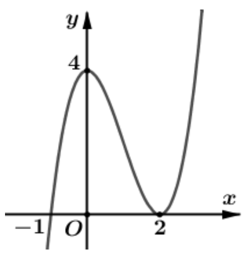
Chọn C

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

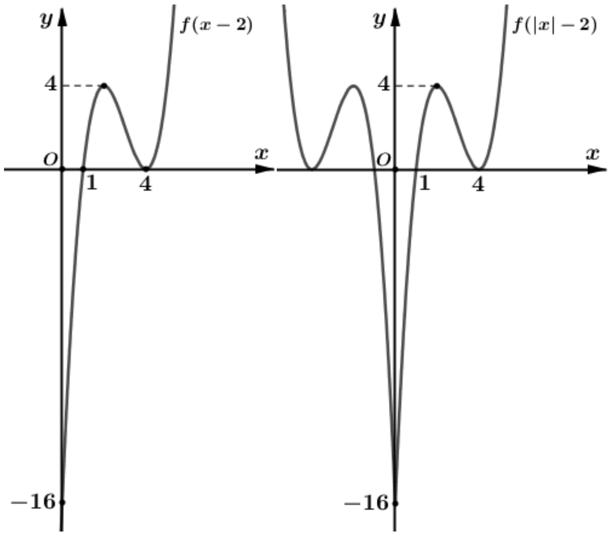


A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Trước tiên ta phải biết rằng, đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|-2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=-3$ và $x=2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị $x=2$, $x=-2$, $x=0$.

Cách 2: Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là $2a+1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 3 điểm $x=1$ và $x=\pm 2$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng có 2 điểm cực trị dương $x=1$ và $x=2$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị đó là $x=\pm 1$, $x=\pm 2$ và $x=0$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 13. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

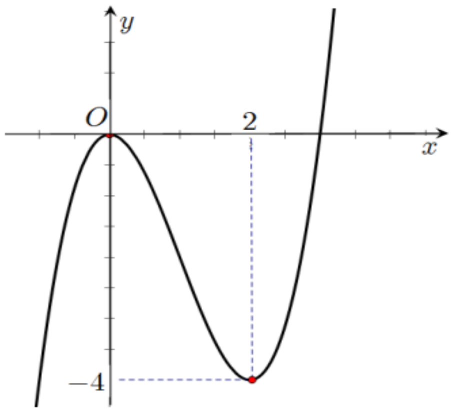
+ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$.

+ Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$ (nghiệm bội lẻ)

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên miền $x>0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2.1+1=3$.

Câu 14. (Thị Xã Quảng Trị) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=|2f(x)+5|+3$ là



A. 2.　　**B.** 3.　　**C.** 5.　　**D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3=\sqrt{\left(2f\left(x\right)+5\right)^2}+3$. Khi đó $y'=\dfrac{2\left(2f\left(x\right)+5\right)f'\left(x\right)}{\sqrt{\left(2f\left(x\right)+5\right)^2}}$.

Xét $f'\left(x\right)=0$ dựa vào đồ thị có hai nghiệm $x=0;\ x=2$.

Xét $2f\left(x\right)+5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-5}{2}$ dựa vào đồ thị có ba nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa mãn $x_1<0<x_2<2<x_3$.

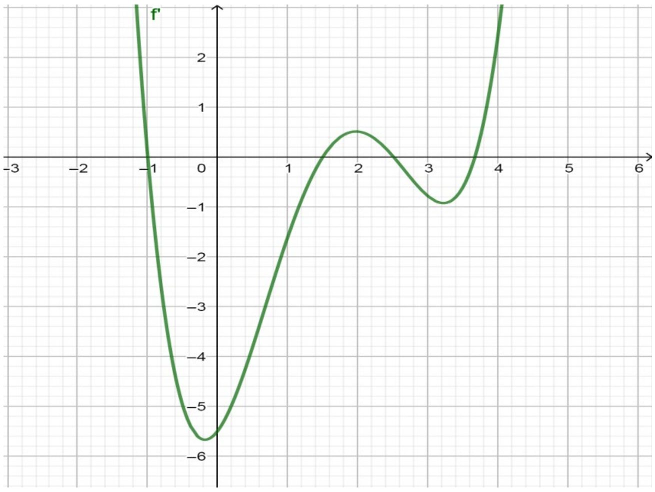
Khi đó hàm số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ có bảng biến thiên:

	$-\infty$	x_1		0	x_2		2	x_3		$+\infty$
y'		- +	||	0	- +	||	0	- +	||	
y	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm

số $y=\left|2f\left(x\right)+5\right|+3$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15. (THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH) Cho hàm số đa thức $f\left(x\right)=mx^5+nx^4+px^3+qx^2+hx+r$, $\left(m,n,p,q,h,r\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là -1; $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-(m+n+p+q+h+r)\right|$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ nên:

$f'(x)=5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{11}{3}\right)$.

Suy ra $5mx^4+4nx^4+3px^2+2qx+h=5m\left(x^4-\frac{20}{3}x^3+\frac{43}{4}x^2+\frac{14}{3}x-\frac{55}{4}\right)$.

Đồng nhất hệ số, ta được $n=\frac{-25}{3}m; p=\frac{215}{12}m; q=\frac{35}{3}m; h=\frac{-275}{4}m$.

Suy ra $g(x)=\left|f(x)+\frac{93}{2}m-r\right|$

□Xét $h(x)=f(x)+\frac{93}{2}m-r$.

$\Rightarrow h'(x)=f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt, nên $h(x)$ có bốn cực trị.

□Xét $h(x)=0 \Leftrightarrow mx^5-\frac{25}{4}mx^4+\frac{215}{12}mx^3+\frac{35}{3}mx^2-\frac{274}{4}mx+r=\frac{-93}{2}m+r$

$\Leftrightarrow x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}=0$.

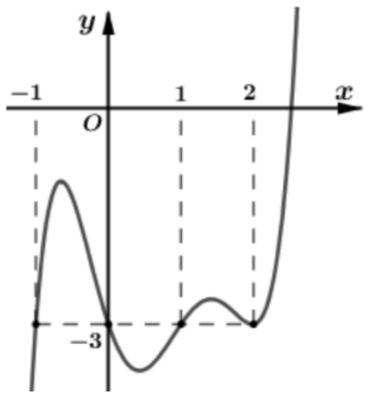
Đặt $k(x)=x^5-\frac{25}{4}x^4+\frac{215}{12}x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{274}{4}x+\frac{93}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$k(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{299}{3}$	↘	$\frac{-9}{2}$	↗	$\frac{-3}{8}$	↘	$k(\frac{11}{3})<0$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 16. (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f(x)+3x$, $x\in\mathbb{R}$.

$h'(x)=f'(x)+3$, $x\in\mathbb{R}$.

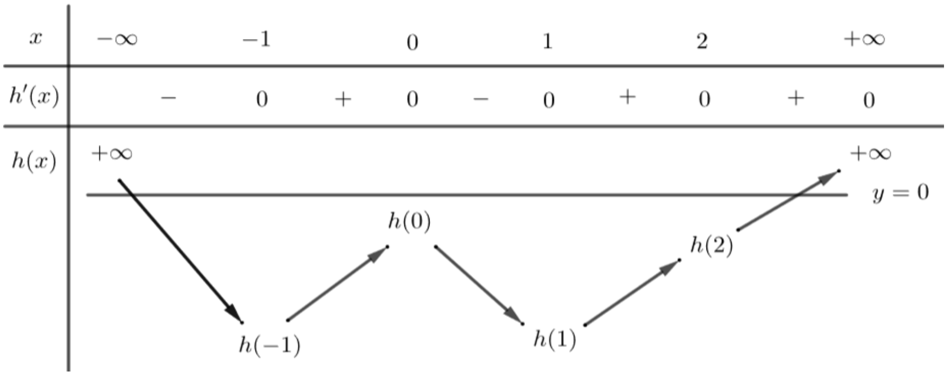
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$.

Với $x=2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x=2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

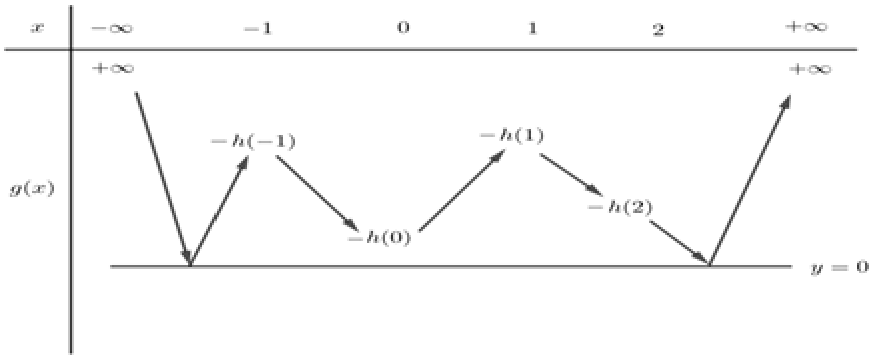
Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$, ta có: $\begin{cases} f'(x)<-3 & \forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1) \\ f'(x)>-3 & \forall x\in(-1;0)\cup(1;2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$.

Mặt khác $h(0)=f(0)+3.0<0$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)=f(x)+3x$:

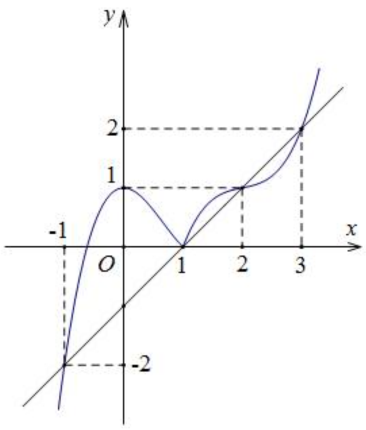


Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|f(x)+3x|=|h(x)|$:



$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)=|f(x)+3x|=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 17. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3)>8$; $f(4)>\dfrac{9}{2}$; $f(2)<\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành.

Đặt $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|, \forall x\in\mathbb{R}$ và $h(x)=2f(x)-(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x)=2f'(x)-2(x-1)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$ (*)

Dựa vào đồ thị, nghiệm của phương trình (*) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$, ta có: $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(3)$	$\nearrow$	

Ta có:

$h(2)=2f(2)-(2-1)^2<0$ vì $f(2)<\dfrac{1}{2}$

$h(-3)=2f(-3)-(-3-1)^2>0$ vì $f(-3)>8$

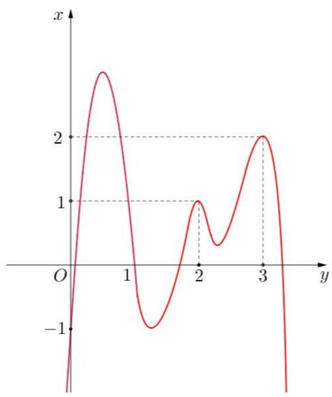
$h(4)=2f(4)-(4-1)^2>0$ vì $f(4)>\dfrac{9}{2}$

Suy ra $h(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1\in(-3;-1)$ và $x_2\in(3;4)$.

Suy ra $g(x)=|h(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

.

Câu 18. (Đặng Thành Nam Đề 9) Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.

• Tìm số điểm cực trị của $g(x)$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Kẻ đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0;\ x=1;\ x=2;\ x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2;\ x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0;\ x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0;\ x=1$

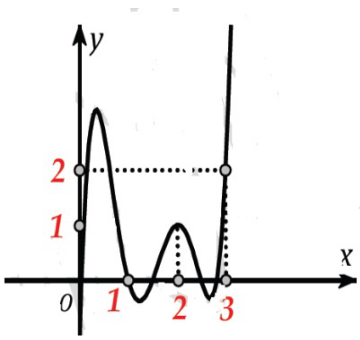
• Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Từ bảng biến thiên:

Suy ra phương trình có tối đa ba nghiệm phân biệt.

• Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 2 + 3 = 5 điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

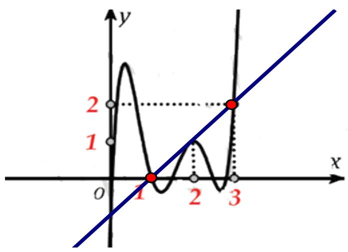


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D**

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3; x=a\ (a\in(1;2))$

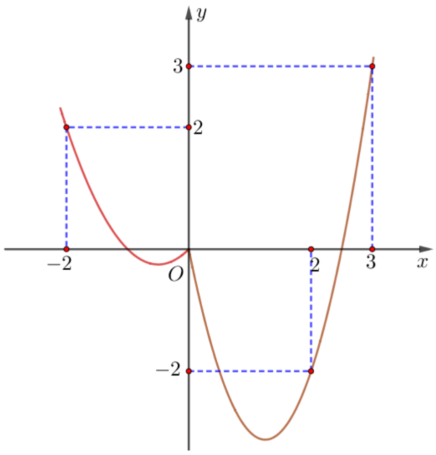
Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(a;2)\cup(3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		1		a		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 20. (Chuyên Vinh Lần 3) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$?

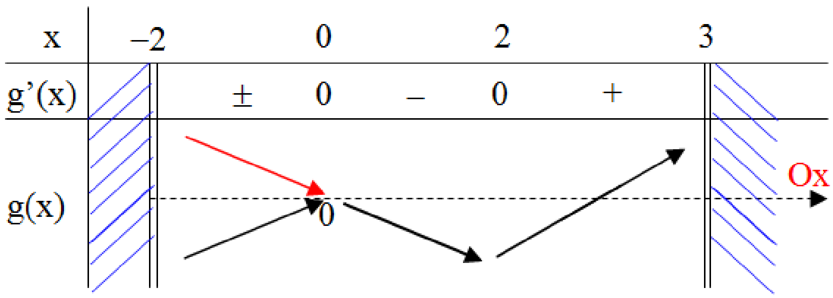


Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)+\frac{x^2}{2}-f(0)$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

(Nhận xét: $x=2$ là nghiệm bội lẻ, $x=0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y=|g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$

Câu 21. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=x\left(2-\dfrac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-|x|=-1 \\ x^2-|x|=1 \\ x=0\ (l) \\ 2-\dfrac{1}{|x|}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

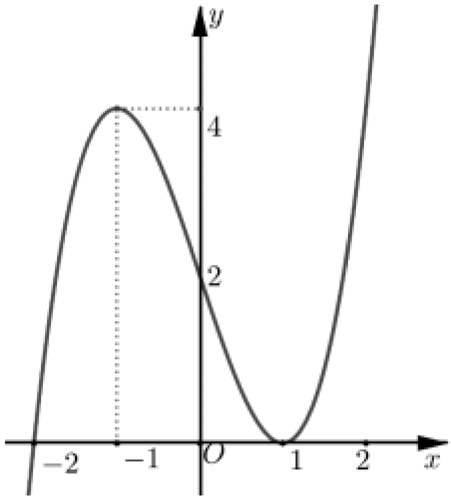
$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 22. (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ có $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$

Cho $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right.$

Dựa theo đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1; x=1$. Do đó

$f'\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

+ Với $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$ thì $0 < (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 2x < 1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right) < 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

+ Với $x < 1-\sqrt{2}$ hay $x > 1+\sqrt{2}$ thì $(x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 1$. Khi đó, $f'\left(x^2-2x\right) > 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$

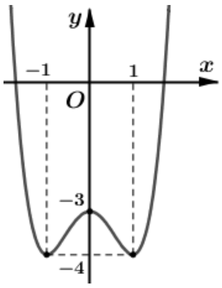
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$\left[f\left(x^2-2x\right)\right]'$		-	0	+	0	-	0	+	
$f\left(x^2-2x\right)$		↘		↗		↘		↗	

Bảng biến thiên của $y = f\left(x^2 - 2|x|\right)$ như sau

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$y = f\left(x^2-2\lvert x\rvert\right)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2|x|\right)$ có 5 cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = f\left(|x-2|\right) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $g(x) = f\left(|x-2|\right) + 1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \left(x^3 - 2x^2\right)\left(x^3 - 2x\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = \left|f(1-2018x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^3(x-2)(x^2-2)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 điểm phân biệt. Do đó $g(x)=\left|f(1-2018x)\right|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 25. (Chuyên KHTN lần2) Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

● Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x)=0$ và số cực trị (không phải là nghiệm phương trình $f(1-2019x)=0$) của hàm số $y=f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x)=x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

$\left[f(1-2019x)\right]'=-2019f'(1-2019x)$.

Do đó

$\left[f(1-2019x)\right]'=0\Leftrightarrow(1-2019x)^2(1-2019x-1)(1-2019x-\sqrt{3})(1-2019x+\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2019}\\ x=0\\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của $y=f(1-2019x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\frac{1}{2019}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó phương trình $f(1-2019x)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f(1-2019x)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f(1-2019x)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

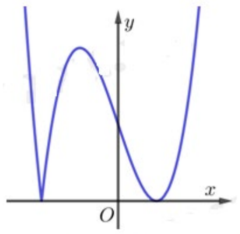
	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị h

àm số $y = \left|f\left(x - 2017\right) + 2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải



Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x - 2017\right) + 2018\right|$ có dạng như bên:

Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 4 . **B.** 3 . **C.** 6 . **D.** 5 .

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(1-3x)+1 \Rightarrow g'(x) = -3.f(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \\ 1-3x = 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$					$-\frac{2}{3}$					$\frac{2}{3}$					$+\infty$
$g'(x)$			$-$			0		$+$			0		$-$			
$g(x)$	$+\infty$		$\searrow$			-2		$\nearrow$			6		$\searrow$			$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		2		$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\nearrow$		$+\infty$

Vậy $|g(x)|=3$ có bốn nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ là

x	$-\infty$			0			1		$+\infty$
y'		$-$		‖		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2x-1$, ta có phương trình trở thành $|f(t)|=\frac{10}{3}$. Với mỗi nghiệm của t thì có một nghiệm $x=\frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)|=\frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của $3|f(2x-1)|-10=0$. Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ là

x	$-\infty$		x_0			0			1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$		‖		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình $|f(t)|=\frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 29. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f\left(|x-4|\right) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó hàm số $y = f(x-4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x-4)$ là :

x	$-\infty$		2		3		7		9		$+\infty$
$y = f(x-4)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

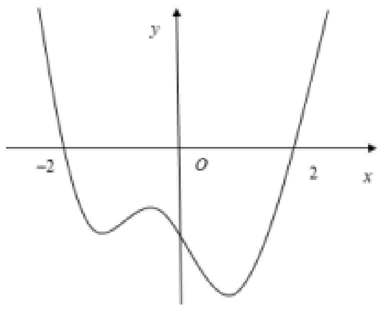
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(|x-4|\right)$ là

x	$-\infty$		-1		1		4		7		9		$+\infty$
$y = f\left(\lvert x-4\rvert\right)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số $y = f\left(|x-4|\right)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y = g(x) = f\left(|x-4|\right) + 2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?



A. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.

C. Hàm số $y = \left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

ừ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$		$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ giả thiết $f(-2)<0$ và $1-x^{2018}\le 1 \Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$ với mọi x.

Đặt $t=1-x^{2018}$, ta có $\begin{cases} f_t'(t)<0 \text{ khi } t\in(-2;1) \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt[2018]{3};\ \sqrt[2018]{3}\right) \\ f'(t)>0 \text{ khi } t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)\cup\left(\sqrt[2018]{3};+\infty\right) \end{cases}$

Đặt $g(x)=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$, ta có $g'(x)=-\dfrac{2018.x^{2017}.f_t'(t).f(t)}{2\sqrt{f^2(t)}}$

Do đó, ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$-\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

DẠNG 6: CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

CỰC TRỊ HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 31. (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

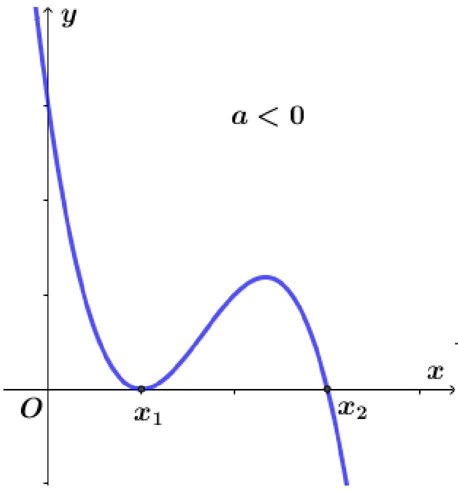
Lời giải

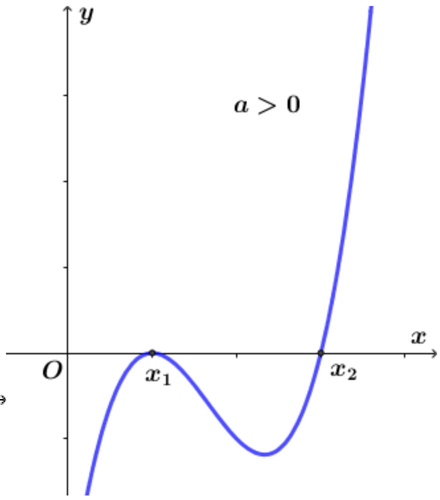
Chọn D

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ và trục hoành.

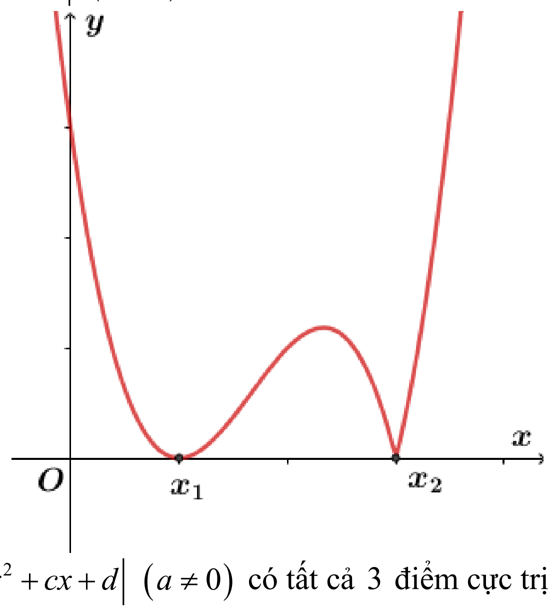
Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1<x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ ứng với từng trường hợp $a>0$ và $a<0$:





Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ $(a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số

$y=\left|x^3+(2m-1)x^2+\left(2m^2-2m-9\right)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

$ycbt \Leftrightarrow x^3(2m-1)x^2+\left(2m^2-2m-9\right)x-2m^2+9$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2mx+2m^2-9\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2mx+2m^2-9=0 \end{array}\right.$

Có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-\left(2m^2-9\right)>0 \\ 1+2m+2m^2-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<3 \\ m \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2,-1,0,1,2\}$

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x+1$ có đúng một điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=m-2; x=m+2$ có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow m-2 \le 0 < m+2 \Leftrightarrow -2<m\le 2 \Rightarrow m \in \{-1,0,1,2\}$.

Chọn D

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)|x|+1$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x+1$ có hai điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=m-2; x=m+2$ có hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow m-2>0 \Rightarrow m \in \{3,...,9\}$.

Chọn D

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|3x^5-15x^3-60x+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 289. **B.** 287. **C.** 286. **D.** 288.

Lời giải

Xét $y=3x^5-15x^3-60x$ có $y'=0 \Leftrightarrow 15x^4-45x^2-60=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy hàm số $y=3x^5-15x^3-60x$ có đúng 2 điểm cực trị $x=2; x=-2$

Bảng biến thiên

Vậy để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow 3x^5-15x^3-60x+m=0 \Leftrightarrow -m=3x^5-15x^3-60x$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3, tức $-144<-m<144 \Leftrightarrow -144<m<144 \Rightarrow m \in \{-143,..,143\}$. Có 287 số nguyên thỏa mãn.

Chọn B

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow y(0)=m, y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le 0\end{array}\right.$

Do đó $m\in\{-2017,...,2017\}$ có $2018+2014=4032$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-4<m<0$. **B.** $-4\le m\le 0$. **C.** $0<m<4$. **D.** $m\ge 4$ hoặc $m\le 0$.

Lời giải

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow y(0)=m, y(2)=m-4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2)\ge 0\Leftrightarrow m(m-4)<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Chọn C

Câu 38. Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Lời giải

Ta có $y=\left[\begin{array}{l}x^3-mx+5\,(x\ge 0)\\-x^3-mx+5\,(x<0)\end{array}\right.\Leftrightarrow y'=\left[\begin{array}{l}3x^2-m\,(x>0)\\-3x^2-m\,(x<0)\end{array}\right.$ và hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$

Nếu $m=0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2>0\,(x>0)\\-3x^2<0\,(x<0)\end{cases}$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ nê hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=0$

Nếu $m>0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\,(x>0)\\-3x^2-m<0\,(x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$ chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Nếu $m<0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m>0\,(x>0)\\-3x^2-m\,(x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị

Chọn B

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

yêu cầu bài toán tương đương hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có 2 điểm cực trị dương, tức $3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$\begin{cases}\Delta'=(2m+1)^2-9m>0.\\ S=\dfrac{2(2m+1)}{3}>0\\ P=\dfrac{3m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ 0<m<\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

Chọn D

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có $5=2a+1\Leftrightarrow a=2$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$

Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m\Rightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$

Chọn B

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

xét $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ và $f|(x)|=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$

ta có $3=2a+1\Leftrightarrow a=1$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$

vậy yêu cầu tương đương với: $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1\le 0<x_2\Leftrightarrow m\le 0$

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng một điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow g\left(x\right)=3x^2-2\left(2m+1\right)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3.g\left(0\right)<0 \\ \begin{cases} g\left(0\right)=0 \\ S>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\left(m+2\right)<0 \\ \begin{cases} m+2=0 \\ \dfrac{2\left(2m+1\right)}{3}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-2$

Vậy $m\in\left\{-5,-4,-3\right\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 43. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(m+2\right)x+1$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có năm điểm cực trị.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow g\left(x\right)=3x^2-2\left(2m+1\right)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1<x_2$ thỏa mãn $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3.g\left(0\right)>0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\left(m+2\right)>0 \\ \left(2m+1\right)^2-3\left(m+2\right)>0 \Leftrightarrow m>1 \\ \dfrac{2\left(2m+1\right)}{3}>0 \end{array}\right.$

Vậy $m\in\left\{2,3,4,5\right\}$ có 4 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m<10$ để hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

yêu cầu bài tóan tương đương hàm số $f\left(x\right)=x^3-mx+1$ có hai điểm cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt ta có

$f'\left(x\right)=3x^2-m; f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{3}}\left(m>0\right)$. và $f\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)=\dfrac{9-2\sqrt{3m^3}}{9}; f\left(-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)=\dfrac{9+2\sqrt{3m^3}}{9}$

khi đó điều kiện để có 3 nghiệm phân biệt là $f\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)<0 \Leftrightarrow 81-12m^3<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Chọn D

chú ý các em có thể đưa về xét hàm số $m=x^2+\dfrac{1}{x}$. cho kết quả tương tự

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số

$y=\left|mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình
$mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(mx^2-2mx+m-2\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0 \Leftrightarrow m>0 \Rightarrow m\in\{1,2,...,10\} \text{ có tất cả 10 giá trị} \\ m-2m+m-2\neq 0 \end{cases}$$

Chọn B

Câu 46. (Lê Xoay lần1) Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$, có $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$.

Hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1\leq 0<x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1\leq 0<x_2$.

Ta có phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thoả mãn $x_1\leq 0<x_2$ thì

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ P\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-5m+1>0 \\ m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \vee m<\dfrac{1}{4} \\ m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 0.$$

Thử lại: +) với $m<0$ thì phương trình $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$ có hai nghiệm $x_1<0<x_2$ (thỏa mãn).

+) với $m=0$ thì $f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in(-\infty;0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9$. Tìm m để đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm **cực tiểu**.

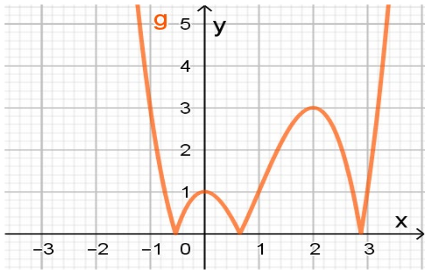
A. $m<5$. **B.** $5<m<9$. **C.** $5\leq m<9$. **D.** $5<m\leq 9$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $F(x)=f(x)+m$. Đặt $\begin{cases} y_{ct}=-5+m \\ y_{cd}=-9+m \end{cases}$. Xét hàm số $y=|F(x)|=\begin{cases} F(x) & khi\ F(x)\geq 0 \\ -F(x) & khi\ F(x)<0 \end{cases}$

Để hàm số có 3 điểm cực tiểu $\begin{cases} y_{cd}>0 \\ y_{ct}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+m>0 \\ -9+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 5<m<9$ (Minh họa đồ thị bên dưới)



Vậy khoản

g cách lớn nhất là $OA = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 48.`Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \left|x^3 + 3x^2 - 3 + m\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $m = 3$ hoặc $m = -1$. **B.** $m \geq 1$ hoặc $m \leq -3$.

C. $1 \leq m \leq 3$. **D.** $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

Phân tích: Xét hàm số $y = g(x) = x^3 + 3x^2 - 3 + m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a = 1 > 0$.

Hàm số có $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Hàm số $y = g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì hàm số $y = \left|g(x)\right|$ có năm cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có một hoặc hai nghiệm thì hàm số $y = \left|g(x)\right|$ sẽ có ba cực trị.

Điều kiện: $g(x_{cd}).g(x_{ct}) \geq 0 \Leftrightarrow g(0).g(-2) \geq 0$ hay $(-3+m)(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

Câu 49. (Nguyễn Đình Chiểu Tiền Giang) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 - m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	$-m-4$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị. Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là $-m-4<0<-m \Leftrightarrow -4<m<0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 50. Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ có **đúng** 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Để $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. $(*)$

Xét $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(mx^2-2mx+m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ mx^2-2mx+m-2=0 \quad (1)\end{array}\right.$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m\left(m-2\right)>0\\ f\left(1\right)=-2\neq 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m>0\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 10\right\}$.

Cách 2: Hàm số $y=\left|mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(mx^2-2mx+m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f\left(x\right)=mx^2-2mx+m-2=0\,(2)\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m\left(m-2\right)>0\\ f\left(1\right)=-2\neq 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m>0$. Vì m nguyên và $m\in\left[-10;10\right]$, nên $m\in\left\{1,2,3,\ldots,10\right\}$. Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}\left|x\right|^3-mx^2+\left(m+6\right)\left|x\right|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m+6\right)x+2019$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y' = x^2 - 2mx + (m+6) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Câu 52. (Chuyên Bắc Giang) Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + (m+3)$.

* Trường hợp 1: $m = 1$.

Lúc đó $f'(x) = -10x + 4$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị dương.

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m \neq 1$.

Lúc này hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$ hoặc $x_1 = 0 < x_2$.

□Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $(m-1).(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

□Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_1 = 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \\ \dfrac{10}{3(m-1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m > 1 \end{cases}$$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3 < m \leq 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 53. (Hải Hậu Lần1) Gọi S là tập giá trị nguyên $m \in [0;100]$ để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$ có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$

Có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 - 12m - 8 \\ x = 2m \Rightarrow y = -12m - 8 \end{array}\right.$

Hai cực trị của hàm số $y = f(x)$ là: $A\left(0; 4m^3 - 12m - 8\right), B(2m; -12m - 8)$

Để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi $\left(4m^3 - 12m - 8\right)(-12m - 8) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$

Mà: $m \in [0; 100] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; ...; 100\}$

Vậy tổng các giá trị của m là: $\frac{(3+100)98}{2} = 5047$.

Câu 54. [THPT Hoàng Hoa Thám, Hưng Yên, lần 1, năm 2018]

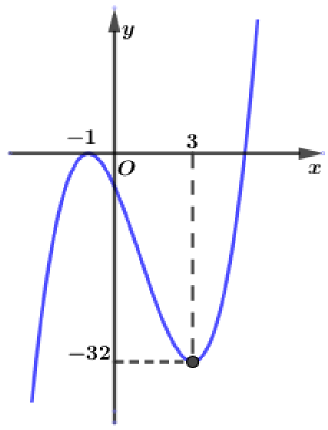
Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Lời giải

Chọn A

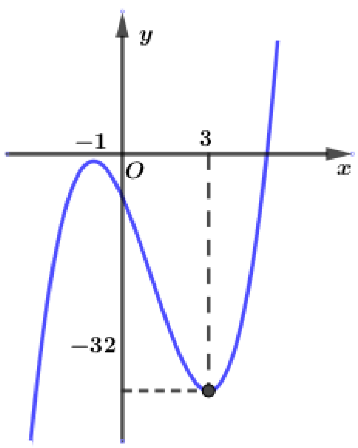
Xét đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.



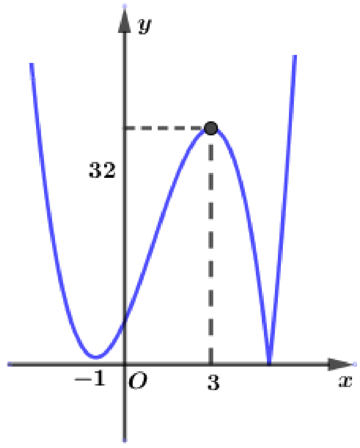
Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m > 0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m < 0$.

Có 3 trường hợp:

TH1. $m \le 0$, ta có đồ thị như sau



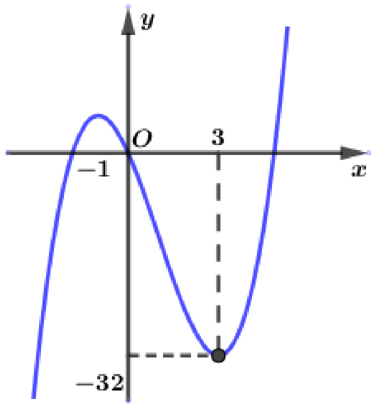
$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}$



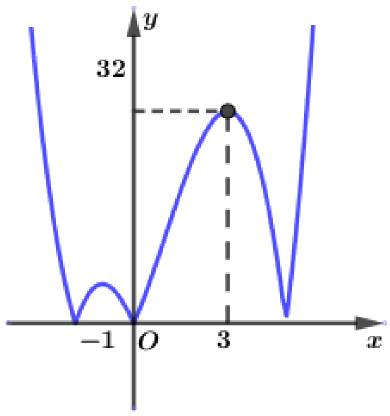
$y = |x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}|$

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $0 < \dfrac{m}{2} < 32$, ta có đồ thị như sau



$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}$



$y = |x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}|$

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}\right|$ có năm cực trị. Thỏa yêu cầu bài toán.

TH3. $\dfrac{m}{2} \geq 32$, ta có đồ thị như sau

Hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}\right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < \dfrac{m}{2} < 32 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1, 2, \ldots 63\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là 2016.

Câu 55. (Đặng Thành Nam Đề 3) Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x)=f\left(x^3\right)$.

Ta có $h'(x)=3x^2.f'\left(x^3\right)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3=a\\x^3=b\\x^3=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{a}\\x=\sqrt[3]{b}\\x=\sqrt[3]{c}\end{array}\right.$.

Ta thấy, dấu của hàm số $h'(x)$ chính là dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ (vì $x^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Mặt khác hàm số $y=x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ trên mỗi khoảng $(m;n)$ chính là dấu của hàm số $f'(x)$ trên mỗi khoảng $\left(m^3;n^3\right)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Chú ý rằng $g(x)=\begin{cases}h(x) & \text{khi } x\geq 0\\ h(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{b}$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 5.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

□Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$

□Ta có $f(-2)=-8+4a-2b+c>0$; $f(2)=8+4a+2b+c<0$

và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Do đó, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 57. (NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2019=x^3+ax^2+bx+c-2019$.

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\begin{cases} c>2019 \\ a+b+c-2018<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(0;1)$. (1)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \\ g(0)>0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty;0)$.

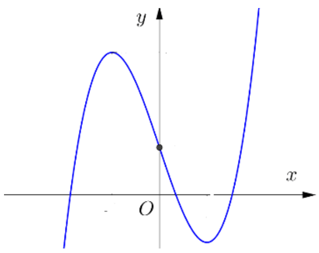
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(-\infty;0)$. (2)

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ g(1)<0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;+\infty)$.

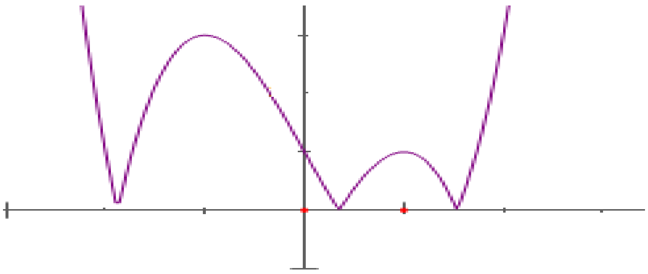
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(1;+\infty)$. (3)

Và hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3

Nên từ (1), (2), (3) đồ thị hàm số $g(x)$ có dạng



Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)-2019|$ có dạng



Vậy hàm số $y=|f(x)-2019|$ có 5 điểm cực trị

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $a>0$, $d>2018$, $a+b+c+d-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $g(x)=f(x)-2018=ax^3+bx^2+cx+d-2018$.

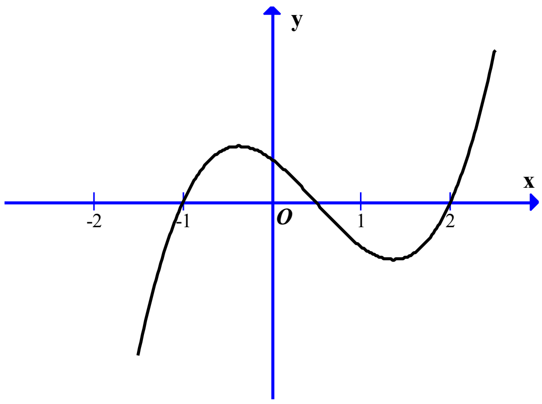
Ta có: $\begin{cases} g(0)=d-2018 \\ g(1)=a+b+c+d-2018 \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta được $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$.

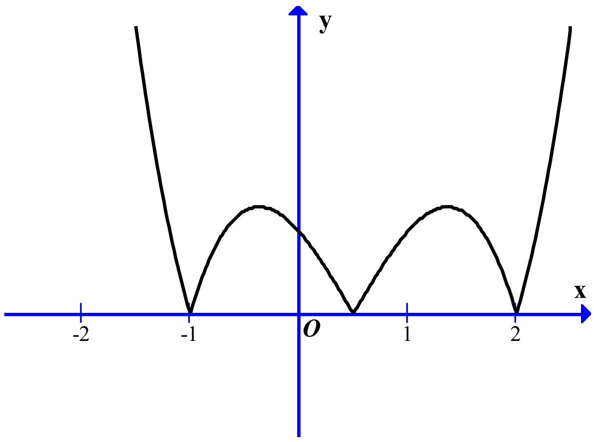
- Lại do: $a>0$ nên $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \exists\beta>1: g(\beta)>0$ và $\Rightarrow \exists\alpha<0: g(\alpha)<0$.

Do đó: $\begin{cases} g(\alpha).g(0)<0 \\ g(0).g(1)<0 \\ g(1).g(\beta)<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\alpha;\beta)$.

Hay hàm số $y=g(x)$ có đồ thị dạng



Khi đó đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ có dạng



Vậy hàm số $y=|f(x)-2018|$ có 5 điểm cực trị.

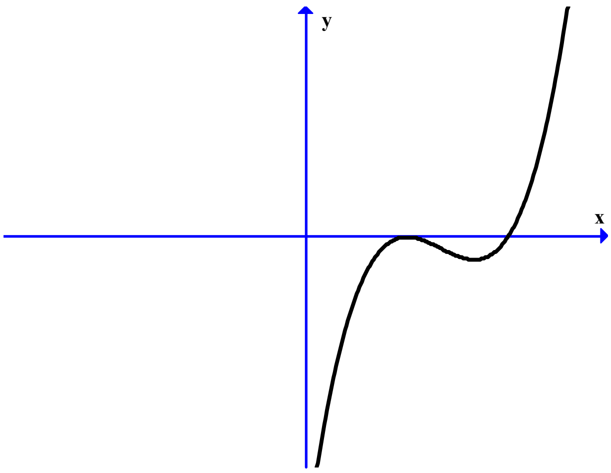
Câu 59. Biết rằng phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+bx^2+c|x|-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

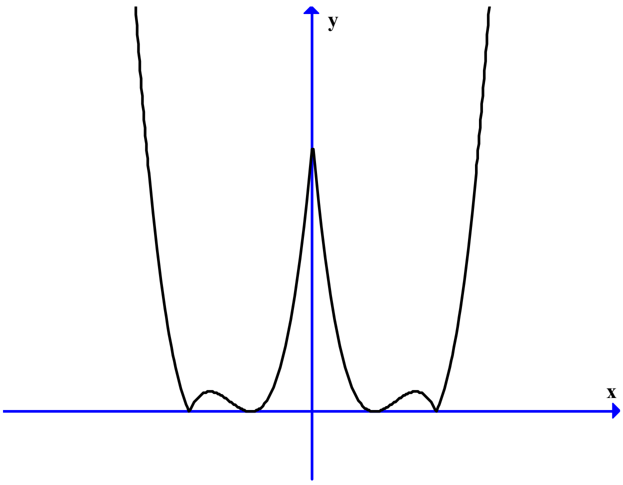
Lời giải

Chọn B

Vì phương trình $2x^3+bx^2=-cx+1$ có đúng hai nghiệm thực dương phân biệt nên đồ thị hàm số $y=2x^3+bx^2+cx-1(C)$ phải cắt Ox tại đúng hai điểm có hoành độ dương trong đó điểm cực đại của đồ thị hàm số là một trong hai điểm đó.Vậy đồ thị (C) có dạng:



Bằng phép suy đồ thị ta có đồ thị hàm số $y=\left|2|x|^3+b\text{x}^2+c|x|-1\right|$ có dạng



Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases}a+b>1\\3+2a+b<0\end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(|x|)|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=a+b-1>0$, $f(2)=4a+2b+6<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 61. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m,\, n\in\mathbb{R}$, biết $m+n>0$ và $7+2\left(2m+n\right)<0$. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(|x|\right)\right|$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

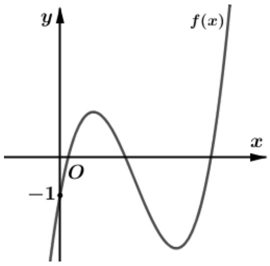
Chọn D

Cách 1: Ta có $\begin{cases} f\left(0\right)=-1 \\ f\left(1\right)=m+n>0 \\ f\left(2\right)=7+4m+2n<0 \end{cases}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f\left(p\right)>0$.

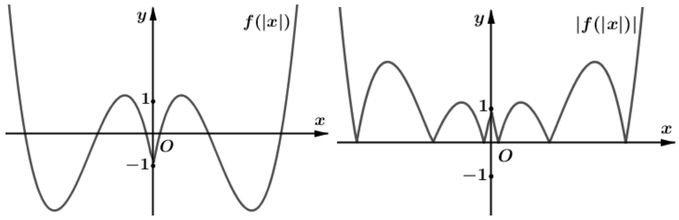
Suy ra $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in\left(0;1\right)$, $c_2\in\left(1;2\right)$ và $c_3\in\left(2;p\right)$. (1)

Suy ra đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x_1\in\left(c_1;c_2\right)$ và $x_2\in\left(c_2;c_3\right)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow$ hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị.



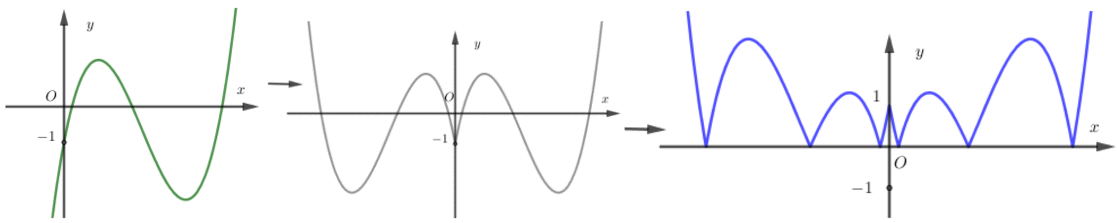
Cách 2: ta có $\begin{cases} m+n>0 \\ 7+2\left(2m+n\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(1\right)>0 \\ f\left(2\right)<0 \end{cases}$

Vì $f\left(1\right)>0>f\left(2\right)$ nên hàm số $f\left(x\right)$ không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

Ta có $f\left(0\right)=-1$, $f\left(1\right)=m+n>0$, $f\left(2\right)=7+4m+2n<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty \Rightarrow \exists p>2$ sao cho $f\left(p\right)>0$. Suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in\left(0;1\right)$, $c_2\in\left(1;2\right)$ và $c_3\in\left(2;p\right)$.

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $x_1\in\left(c_1;c_2\right)$ và $x_2\in\left(c_2;c_3\right)$, dễ thấy x_1,x_2 là các số dương, hơn nữa hai giá trị cực trị này trái dấu $f\left(x_1\right)>0>f\left(x_2\right)$ (vì hệ số cao nhất là 1).

Đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 là các số dương nên đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ sẽ có 5 điểm cực trị.



Do $f\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị trái dấu và $f\left(0\right)=-1$ nên phương trình $f\left(|x|\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $\left|f\left(|x|\right)\right|$ có $5+6=11$ điểm cực trị.

Bình luận: Đây là dạng bài tập về đếm số điểm cực trị của hàm số dạng $\left|f\left(|x|\right)\right|$ trong đó số điểm cực trị

của hàm số $f\left(x\right)$ và những điều kiện liên quan bị ẩn đi.
Để giải quyết bài toán này bạn đọc cần dựa vào giả thiết bài toán để tìm:
□Số điểm cực trị n của hàm số $f\left(x\right)$
□Số điểm cực trị dương m (với $m<n$) của hàm số
□Số giao điểm p của đồ thị hàm số với trục hoành trong đó có q điểm có hoành độ dương
Bây giờ giả sử ta tìm được các dữ kiện trên khi đó ta suy ra
□Đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ có $2m+1$ điểm cực trị
□Đồ thị hàm số $\left|f\left(x\right)\right|$ có $n+p$ điểm cực trị
□Đồ thị hàm số $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có $2m+2q+1$ điểm cực trị.
Ngoài vấn đề tìm số điểm cực trị, bài toán còn có nhiều hướng để ra đề khác ví dụ như hỏi số giao điểm với trục hoành, tính đồng biến nghịch biến của hàm số.

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị nhận hai điểm $A\left(0;3\right)$ và $B\left(2;-1\right)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|ax^2\left|x\right|+bx^2+c\left|x\right|+d\right|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=\left|ax^2\left|x\right|+bx^2+c\left|x\right|+d\right|=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\longrightarrow$ hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0;3)\in Oy$ và điểm cực trị $B(2;-1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Vẽ phác họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f\left(\left|x\right|\right)$, tiếp tục suy ra đồ thị $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$.

Câu 63. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ bc<0 \end{cases}$. Đặt $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$. Số điểm cực trị của hàm số $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ lớn nhất có thể có là

A. 2. **B.** 9. **C.** 11 **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán ta có $f\left(1\right)<0$, $f\left(-2\right)>0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ ta suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\left(x_1<x_2\right)$ và hai giá cực trị trái dấu nhau.

Khi $\begin{cases} b<0 \\ c>0 \end{cases}$ thì ta có $x_1x_2=\dfrac{b}{3}<0$ nên $x_1<0<x_2$ và $f\left(0\right)=c>0$ nên $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm dương.

Do đó đồ thị hàm số $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Khi $\begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ thì ta có $x_1.x_2>0$ và $f\left(0\right)=c<0$ nên hàm số có hai điểm cực trị dương và ba giao điểm với trục hoành có hoành độ dương. Khi đó đồ thị hàm số $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có 11 điểm cực trị

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ thỏa mãn $\begin{cases} a+b>1 \\ 3+2a+b<0 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ bằng

A. 11 **B.** 9 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-2<0$, $f(1)=-a+b-1>0$, $f(2)=2a+b+3<0$.

và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\exists x_0>2; f(x_0)>0$.

Do đó, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn. Do đó, hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có 11 điểm cực trị.

Câu 65. Biết phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ bốn nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Vì phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ bốn nghiệm thực nên hàm số

$\begin{cases} \Delta=b^2-4ac>0 \\ S=\dfrac{-b}{a}>0 \\ P=\dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$ $\Rightarrow ab<0$ do đó hàm số $ax^4+bx^2+c=0$ có 3 điểm cực trị

Mặt khác $ax^4+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ nên phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ có 4nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=\left|ax^4+bx^2+c\right|$ có $4+3=7$ cực trị.

Câu 66. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$m-1=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow f(x)=x^4-1$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt. do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

$m-1<0\Rightarrow m=0\Rightarrow f(x)=x^4+2x^2-3$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt. do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

Ta có $m-1>0\Rightarrow m>1$ khi đó $f(x)$ có ba điểm cực trị. Vậy yêu cầu bài tóan lúc này tương đương với $f(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức

$$\Delta'=(m-1)^2-(2m-3)\le 0\Leftrightarrow (m-2)^2\le 0\Leftrightarrow m=2.$$ Vậy $m\in\{0,1,2\}$.

Chọn A

Câu 67. Cho hàm số $y=\left|x^4-2(m-1)x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\backslash\{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Xét $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow(x^2-1)(x^2-2m+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2m-3\end{array}\right.$

TH1: Nếu $2m-3\le0\Rightarrow$ Do vậy $f(x)$ có 2 điểm đổi dấu $x=-1;x=1$. Hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow-2(m-1)<0\Leftrightarrow m>1$

Vậy trường hợp này có $1<m\le\frac{3}{2}$

TH2: Nếu $0<2m-3\ne1\Leftrightarrow\frac{3}{2}<m\ne2$. Khi đó $f(x)$ có bốn điểm đổi dấu $x=\pm1;x=\pm\sqrt{2m-3}$ do đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng 3 và hàm số $y=|f(x)|$ có 7 cực trị(loại).

TH3: nếu $2m-3=1\Leftrightarrow m=2\Rightarrow f(x)=(x^2-1)^2$ khi đó $y=|f(x)|=(x^2-1)^2$ có 3 điểm cực trị (loại).

Chọn D

Câu 68. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Xét $x^4-(m+1)x^2+m\Leftrightarrow x^2=1;x^2=m(1)$ vậy để hàm số $y=\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m\ne1\end{cases}\Rightarrow m\in\{2,...,19\}$. có 18 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 69. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=(x^2+2)\left|x^2-m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 17. **C.** 2. **D.** 16.

Lời giải

Có $y=(x^2+2)\left|x^2-m\right|=\left|(x^2+2)(x^2-m)\right|=\left|x^4-(m-2)x^2-2m\right|$.

Nếu $m\le0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m\ge0,\forall x$ nên hàm số đã cho có tối đa ba điểm cực trị (loại).

Nếu $m>0\Rightarrow x^4-(m-2)x^2-2m=0\Leftrightarrow x^2=m\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$. Vậy điều kiện là hàm số $y=x^4-(m-2)x^2-2m$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow-(m-2)<0\Leftrightarrow m>2\Rightarrow m\in\{3,...,19\}$. Có 17 số nguyên thoả mãn.

Chọn B

Câu 70. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-mx^2+m$ có tối đa 3 điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm. Vì vậy hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\ S=m>0, P=m>0\Leftrightarrow m>4\\ ab=-m<0\end{cases}$

Chọn A

Câu 71. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x^4-4x^2+m|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 13.

Lời giải

Hàm số $f(x)=x^4-4x^2+m$ có 3 điểm cực trị. Vậy hàm số $|f(x)|$ có 7 cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, tức

$\begin{cases}\Delta'=4-m>0\\ S=4>0, P=m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 72. (Chuyên Lam Sơn Lần 2) Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=|f(x)|$ có đúng ba điểm cực trị thì: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 0\\ 4-2m^2<0\end{cases}\\ \begin{cases}m>0\\ 4-3m^2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{2}\\ 0<m\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn bài toán là $\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;1\}$.

Câu 73. (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho hàm số $y=|x^4-2(m-1)x^2+2m-3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $f(x)=x^4-2(m-1)x^2+2m-3$

$f'(x)=4x^3-4(m-1)x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m-1 \end{array}\right.$

Vì hàm số $f(x)$ có $a=1>0$ nên hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 5 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ phải có 3 cực trị thỏa $y_{cd}\le 0$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m-1>0 \\ f(0)\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>1 \\ 2m-3\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$

Câu 74. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S\cap\mathbb{Z}$ là

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Gọi $f(x)=x^4-10x^2+m$. Ta có $f'(x)=4x^3-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+m$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-25$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ (không trùng với các điểm cực trị của hàm số). Do đó để hàm số $y=\left|x^4-10x^2+m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị thì $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<25$. Vậy $S\cap\mathbb{Z}=\{1;2;...;24\}$.

Câu 75. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-7;7)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B. 2.** **C.** 1. **D. 3**

Lời giải

Chọn D

Xét $y=x^4-3mx^2-4$.

$y'=4x^3-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{3m}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\dfrac{3m}{2}>0 \Leftrightarrow m>0$.

Hàm số $y=x^4-3mx^2-4$ có 3 cực trị: $A(0;-4),B\left(\sqrt{\dfrac{3m}{2}};-\dfrac{9m^2}{4}-4\right),C\left(-\sqrt{\dfrac{3m}{2}};-\dfrac{9m^2}{4}-4\right)$

Suy ra $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $\frac{3m}{2} \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$ (1) suy ra hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 1 cực tiểu là: $A'(0;-4)$

Suy ra hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có 3 điểm cực trị là: $A(0;4), B(x_1;0), C(-x_1;0)$, trong đó x_1 là nghiệm của phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$. $(x_1 \ne 0)$ (do $ac = -4$ nên phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$ luôn có nghiệm) (2)

Diện tích tam giác ABC bằng: $S = \frac{1}{2}.d(A;BC).BC = \frac{1}{2}.4.2|x_1| = 4|x_1|$.

Do $S > 4 \Leftrightarrow |x_1| > 1$. Từ phương trình (2) suy ra $m = \frac{x_1^4 - 4}{3x_1^2} = \frac{x_1^2}{3} - \frac{4}{3x_1^2}$ với $|x_1| > 1$.

Do $|x_1| > 1 \Leftrightarrow x_1^2 > 1 \Leftrightarrow m = \frac{x_1^2}{3} - \frac{4}{3x_1^2} > -1$ kết hợp với (1) suy ra $-1 < m \le 0$ suy ra chỉ có $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$ và $a > 0$.

Biết $f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ f(-1) < 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x).f(1) < 0 \\ f(0).f(-1) < 0 \\ f(0).f(1) < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

Sao cho $f(x_1) = 0; f(x_2) = 0; f(x_3) = 0; f(x_4) = 0$. Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, do đó hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị. Vì vậy hàm số $y = |f(x)|$ có $4 + 3 = 7$ điểm cực trị.

Chọn A

Câu 77. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

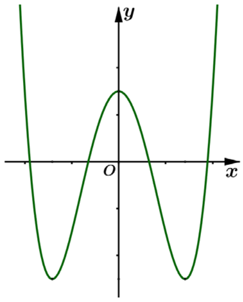
Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

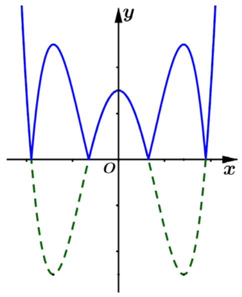
Ta có $\begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ là hàm trùng phương có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \le g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y=g\left(x\right)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 78. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2017$ và $a+b+c<2017$. Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2017\right|$ là:

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

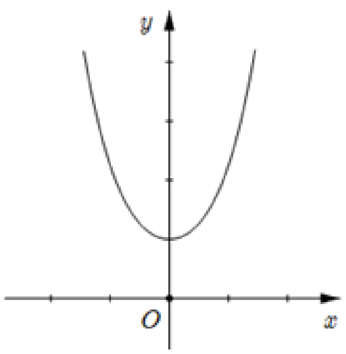
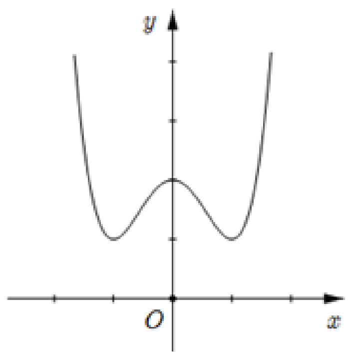
Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\left|f\left(x\right)-2017\right|=\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{2\left(f\left(x\right)-2017\right).f'\left(x\right)}{2\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}}$

Xét $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c\left(a>0\right)$ ta có: $\begin{cases}f\left(1\right)=a+b+c<2017\\ f\left(0\right)=c>2017\end{cases}\Rightarrow f\left(1\right)<f\left(0\right)$

Dựa vào 2 dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương khi $a>0$

$a>0$		

Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị và PT: $f\left(x\right)-2017$ có 4 nghiệm phân biệt

Như vậy PT $y'=\dfrac{2\left(f\left(x\right)-2017\right).f'\left(x\right)}{2\sqrt{\left(f\left(x\right)-2017\right)^2}}=0$ có 7 nghiệm phân biệt do đó hàm số có 7 cực trị.

Câu 79. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m^4+1\right)x^4+\left(-2^{m+1}.m^{2.-4}\right)x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Số cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-1\right|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có: $y=\left|f(x)-1\right|=\sqrt{\left(f(x)-1\right)^2}$

Suy ra $y'=\dfrac{f'(x).\left[f(x)-1\right]}{\sqrt{\left(f(x)-1\right)^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)-1=0\end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-\left(m^4+1\right)\left(2^{m+1}.m^2+4\right)<0$ với mọi m.

$f(x)-1=0$ vô nghiệm do $\Delta'=\left(2^m.m^2+2\right)^2-\left(m^4+1\right).\left(4^m+15\right)$ $=4.2^m.m^2+4-15m^4-4^m-15$ $=-\left(2^m-m^2\right)^2-11m^4-11<0$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f(x)-1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x)-1=0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(x)-1\right|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m=0$, khi đó ta được hàm $f(x)-1=x^4-4x^2+16$.

Đặt $g(x)=f(x)-1=x^4-4x^2+16\Rightarrow g'(x)=4x^3-8x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	16	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Do đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y=\left|g(x)\right|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=\left|f(x)-1\right|$ là 3.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)=\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020.$ Hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số trùng phương có $ab=-\left(m^8+1\right)\left(2m^{2018}+2m^2+3\right)<0,\forall m$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số $f(x)-2019$ cũng có 3 điểm cực trị.

$f(x)-2019=0\Leftrightarrow\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+2020=2019$

$\Leftrightarrow\left(m^{2018}+1\right)x^4-(2m^{2018}+2m^2+3)x^2+m^{2018}+1=0$

Phương trình này luôn có 4 nghiệm thực phân biệt vì $\begin{cases} \Delta = (2m^{2018}+2m^2+3)^2 - 4\left(m^{2018}+1\right)^2 > 0 \\ S = \dfrac{2m^{2018}+2m^2+3}{m^{2018}+1} > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

Do đó $f(x)$ có 4 nghiệm đổi dấu. vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2019|$ bằng $3+4=7$

Chọn A

Câu 81. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 2x + 1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Lời giải

Nếu $x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x$ thì $y = x^2 - 2x + m + 2x + 1 = x^2 + m + 1$ có đúng một điểm cực trị $x = 0$ (loại).

Nếu $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

$$y' = \frac{(2x-2)\left(x^2-2x+m\right)}{|x^2-2x+m|} + 2; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2+2=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-2)+2=0 \\ x^2-2x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x^2-2x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

+) Với $0 < m < 1$ rõ ràng không có số nguyên nào

+) Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu của y' như hình vẽ dưới đây

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m \in \{-19, ..., 1\}$.

Chọn C

Câu 82. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019;2019)$ để hàm số $y = |x^2 - 4x + m| + 6x + 1$ có ba điểm cực trị.

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2013. **D.** 2015.

Lời giải

Nếu $x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \Rightarrow y = x^2 - 4x + m + 6x + 1 = x^2 + 2x + m + 1$ có đúng 1 điểm cực trị $x = -1$ (loại).

Nếu $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$

Khi đó $y' = \dfrac{(2x-4)\left(x^2-4x+m\right)}{|x^2-4x+m|} + 6; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-4+6=0 \\ x^2-4x+m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-4)+6=0 \\ x^2-4x+m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ m>-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ m<-5 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $-5 < m < 4$ ta có bảng xét dấu của y' như sau

Hàm số có đúng 1 cực trị $x = -1$ (loại).

Với $m<-5$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có 3 điểm cực trị $x=x_1;x=5;x=x_2$

Vậy $m\in\{-2018,...,-6\}$. Có 2013 số nguyên thỏa mãn.

Chọn C

Câu 83. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+1|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Lời giải

Ta có $y=\begin{cases}x^2-2m(x-m+1)(x-m+1\geq 0)\\x^2+2m(x-m+1)(x-m+1\leq 0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-2m(x-m+1>0)\\2x+2m(x-m+1<0)\end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=m-1$ và

$$y'=\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2m=0\\x-m+1>0\end{cases}\\\begin{cases}2x+2m=0\\x-m+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=m\\1<0\end{cases}\\\begin{cases}x=-m\\-2m+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-m\left(m>\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên phải có $m>\frac{1}{2}$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau

Điều này chứng tỏ với $m>\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm, các số nguyên là $m\in\{1,...,19\}$. Có tất cả 19 số nguyên thỏa mãn.

Câu 84. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+6|+1$ có ba điểm cực trị.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $y=\begin{cases}x^2-2m(x-m+6)(x-m+6\geq 0)\\x^2+2m(x-m+6)(x-m+6\leq 0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-2m(x-m+6>0)\\2x+2m(x-m+6<0)\end{cases}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=m-6$ và

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2m=0\\x-m+6>0\end{cases}\\\begin{cases}2x+2m=0\\x-m+6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\\begin{cases}x=-m\\-2m+6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-m(m>3)\end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên ta phải có $m>3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau: Điều này chứng tỏ với $m>3$ là giá trị cần tìm, các số nguyên là $m\in\{4,...,19\}$ có tất cả 16 số nguyên thỏa mãn.

Câu 85. (Nguyễn Du số 1 lần3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=12x(x^2-x-2)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta thấy hàm $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 3 nghiệm của nó nên hàm số $f(x)$ có ba cực trị.

Để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$3x^4-4x^3-12x^2+m=0\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$.

Xét hàm số $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=12x(x^2-x-2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Ta có BBT:

x	-∞		-1		0		2		+∞
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	+∞	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗	+∞

Từ BBT ta thấy phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác $0;-1;2$ khi $-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 86. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $y=\left|x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+m$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+3x^2-x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$m-2$	↗	m	↘	$m-\frac{27}{256}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 5 cực trị thì đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m-2<0<m-\dfrac{27}{256} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \dfrac{27}{256}<m<2 \end{array}\right..$$

Vì m nguyên và $m\in[-5;5]\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;1\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x; f'(x)=0\Leftrightarrow 12x(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

do đó hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0;x=-1;x=2$

hàm số $f(|x|+m)$ luôn có 1 điểm cực trị $x=0$

phá trị tuyệt đối có $y=f(|x|+m)=\begin{cases} f(x+m)(x\ge 0) \\ f(-x+m)(x\le 0) \end{cases}.$

Hàm số $f(x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$x+m=-1;x+m=0;x+m=2\Leftrightarrow x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Hàm số $f(-x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$-x+m=-1;-x+m=0;-x+m=2\Leftrightarrow x=m+1;x=m;x=m-2.$

Do đó hàm số $f(|x|+m)$ có tối đa 7 điểm cực trị là

$x=0;x=m+1;x=m;x=m-2;x=-m-1;x=-m;x=2-m.$

Điều kiện bài toán tương đương với $\begin{cases} -m-1>0 \\ -m>0 \\ -m+2>0 \\ m+1<0 \\ m<0 \\ m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1\Rightarrow m\in\{-9,-8,...,-2\}$

Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn.

Chọn D

Câu 88. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|3x^5-25x^3+60x+m|$ có 7 điểm cực trị.

A. 42. **B.** 21. **C.** 44. **D.** 22.

Lời giải

Hàm số $f(x)=3x^5-25x^3+60x+m$ có 4 điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$f'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4-75x^2+60=0\Leftrightarrow x=\pm 2;x=\pm 1.$

Do đó hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3. Khảo sát hàm số dễ có $\left[\begin{matrix}-38<-\mathrm{m}<-16\\16<-m<38\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}16<m<38\\-38<\mathrm{m}<-16\end{matrix}\right.$

do đó có $21+21=42$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 89. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị $x=1;x=2;x=3$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 8. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 19.

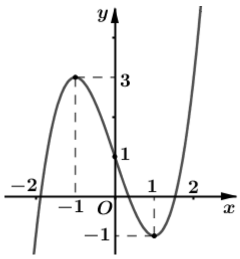
Lời giải

Hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow f\left(x+m\right)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $-m$

Các điểm cực trị của hàm số $\Leftrightarrow y=f\left(x+m\right)$ là $\left[\begin{matrix}x+m=1\\x+m=2\\x+m=3\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x=1-m\\x=2-m\\x=3-m\end{matrix}\right.$

Vậy ta có điều kiện là $\left[\begin{matrix}1-m>-m\\2-m>-m\\3-m>-m\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\forall m\Rightarrow m\in\left\{-9,...,9\right\}$.

Câu 90. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



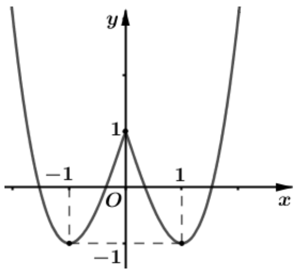
Với $m<-1$ thì hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

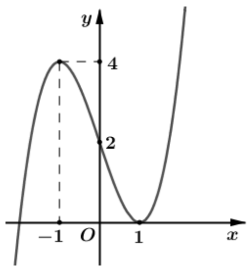
Chọn C

Đồ thị hàm số $f\left(\left|x+m\right|\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f\left(\left|x+m\right|\right)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Câu 91. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy $\longrightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}.f'\left(|x|+m\right)$ với $x=0$.

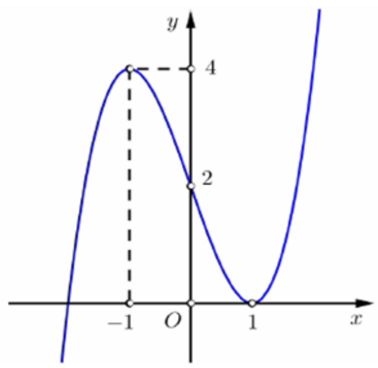
$\longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(|x|+m\right)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l}|x|+m=1\\|x|+m=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=1-m\\|x|=-1-m\end{array}\right.$. $(*)$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}1-m>0\\-1-m>0\\1-m\neq-1-m\end{cases} \Leftrightarrow m<-1$.

Cách 2. Đồ thị hàm số $f\left(|x|+m\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1$.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

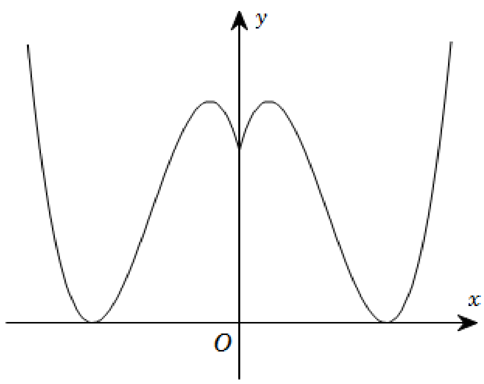


A. $m>1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta có nhận xét rằng: đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách nào?



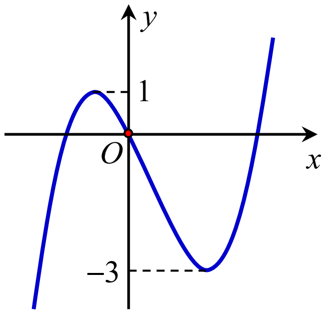
● Bước 1. Tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ sang phải (nếu $m<0$), sang trái (nếu $m>0$) $|m|$ đơn vị.

● Bước 2. Giữ nguyên phần đồ thị vừa nhận được phía bên phải trục tung, xóa bỏ phần đồ thị vừa nhận được phía bên trái trục tung.

● Bước 3. Lấy đối xứng phần đồ thị giữ ở bước 2 qua trục tung ta được đồ thị hoàn chỉnh của hàm số $y = f\left(|x| + m\right)$.

Do đó bằng tư duy + hình vẽ thì yêu cầu bài toán cần tịnh tiến đồ thị sao cho điểm cực đại sang phải và nằm trong góc phần tư thứ nhất. Suy ra $m < -1$.
Khi đó ta được đồ thị của hàm số $y = f\left(|x| + m\right)$ như hình bên.

Câu 93. Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left|f\left(x\right) + m\right|$ có ba điểm cực trị là

A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.
B. $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
D. $1 \le m \le 3$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x\right) + m\right|$ gồm hai phần:

□ Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) + m$ nằm phía trên trục hoành;

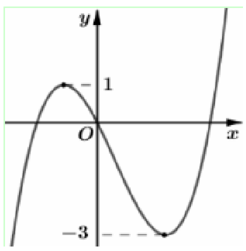
□ Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) + m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right) + m$.

Khi đó hàm số $y = \left|f\left(x\right) + m\right|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) + m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + m \le 0 \\ -3 + m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 94. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x\right) + m\right|$ có 5 điểm cực trị là



A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.
B. $-1 < m < 3$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
D. $1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f\left(x\right)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f\left(x\right) + m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đò thị $f\left(x\right) + m$ với trục hoành là 3 giao điểm.

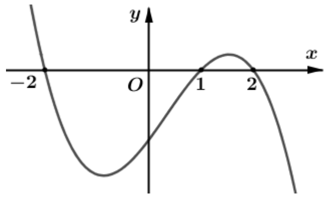
Để số giao điểm của đồ thị $f\left(x\right) + m$ với trục hoành là 3, ta cần đồng thời

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 1 đơn vị => $m > -1$.

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị => $m < 3$.

Vậy $-1 < m < 3$

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

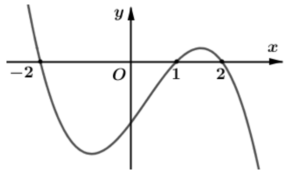
$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x) = f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	0	−	
f		↗		↘		↗		↘	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

- Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m < 1$.
- Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m \geq -2$.

Suy ra $-2 \le m < 1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2;-1;0\}$.

Câu 97. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

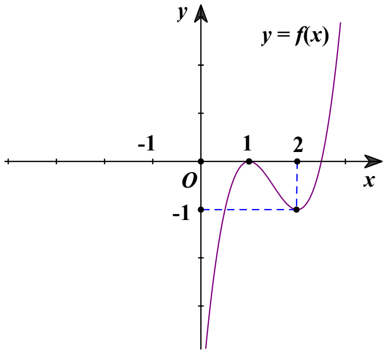
Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m \in \mathbb{Z}; |m| \le 2019$) để đồ thị hàm số $y = |m + f(|x|)|$ có đúng 7 điểm cực trị?

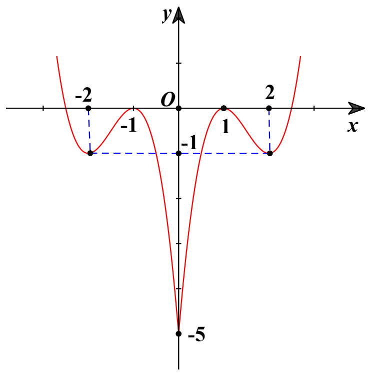
A. 2024. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f(|x|)$ như hình vẽ sau:





Đồ thị $y = f(x)$ Đồ thị $y = f(|x|)$

+ Từ đồ thị ta có $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

(Chú ý: Hàm số $y = f(x)$ có $a = 2$ điểm cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị là $2a + 1 = 5 \rightarrow$ Nên không cần vẽ đồ thị)

+ Vì hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị nên hàm số $y = m + f(|x|)$ cũng có 5 điểm cực trị (Vì đồ thị hàm số $y = m + f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị $y = f(|x|)$ bằng cách tịnh tiến theo phương trục Oy)

+ Số điểm cực trị của hàm số $y = |m + f(|x|)|$ bằng số cực trị của hàm số $y = m + f(|x|)$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $f(|x|) + m = 0$.

Vậy để $y = |m + f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(|x|) + m = 0$ có hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

+ Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} -5 < -m \le -1 \\ 0 \le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 5 \\ m \le 0 \end{array}\right.$ (1)

+ Từ giả thiết $|m| \le 2019 \Leftrightarrow -2019 \le m \le 2019$ (2)

Vậy từ (1), (2) và kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ ta có 2024 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$. **C.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $m=3$.

Lời giải

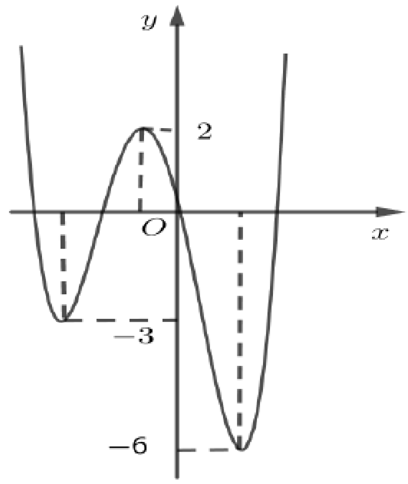
Chọn C

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)-2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị $\longrightarrow \begin{cases}-2m<-4\\-2m>-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\m<\frac{11}{2}\end{cases}$.

Câu 99. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị của hàm số $y=|f(x+1)+m|$ được suy ra từ đồ thị (C) ban đầu như sau:

-Tịnh tiến (C) sang phải một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) m đơn vị. Ta được đồ thị $(C'):y=f(x+1)+m$.

-Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y=|f(x+1)+m|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y=|f(x+1)+m|$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3+m$	$\nearrow$	$2+m$	$\searrow$	$-6+m$	$\nearrow$	$+\infty$

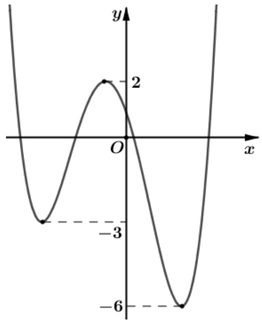
Để hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị của hàm số $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ phải cắt trục Ox tại 2 hoặc 3 giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ -3+m\ge 0 \\ -6+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<6$.

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases} m<0 \\ 2+m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le -2$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương.

Câu 100. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-4;4\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f\left(x\right)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f\left(x-1\right)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

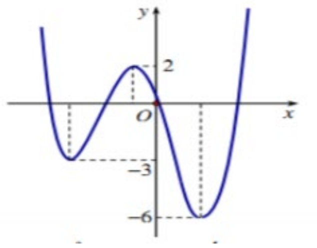
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f\left(x-1\right)+m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f\left(x-1\right)+m$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f\left(x\right)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m\le -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f\left(x\right)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị $\longrightarrow 3\le m<6$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ 3\le m<6 \end{array}\right. \xrightarrow[m\in[-4;4]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\left\{-4;-3;-2;3;4\right\}$.

Câu 101. (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

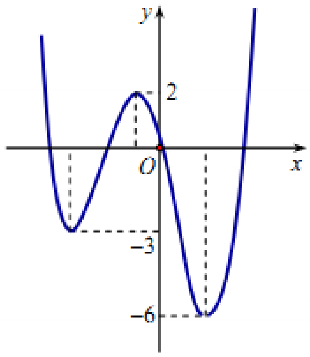
Xét hàm số $g(x)=f(x+1)+m$. Ta có $g'(x)=f'(x+1)$.

Vì hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $g(x)=f(x+1)+m$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x+1)=-m$ phải có có 4 nghiệm đơn phân biệt hay $-3<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2\}$

Câu 102. Cho đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng

A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

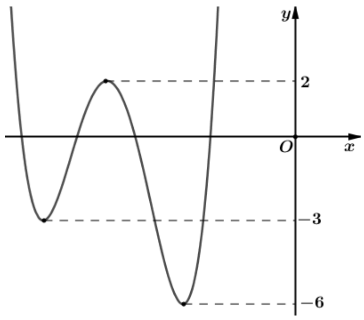
Lời giải

Đáp án A

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ với Ox abnwgf số gaio điểm của $\left(C'\right): y=f\left(x-2017\right)$ với Ox

Vì $m>0$ nên $\left(C''\right): y=f\left(x-2017\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y=f\left(x-2017\right)$ lên trên m đơn vị

Câu 103. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là 4.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m$ với trục hoành là $4,$ ta cần đồng thời

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m>-2$
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m<3$.

Vậy $-2<m<3 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;\ 2\}$.

Câu 104. (Chuyên Vinh Lần 3) Hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}-m\right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

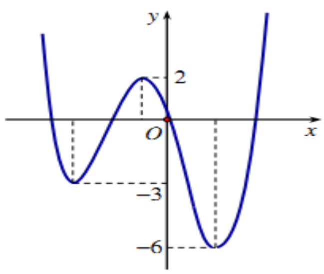
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x)=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}-m=0 \Leftrightarrow mx^2-x+m=0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 105. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



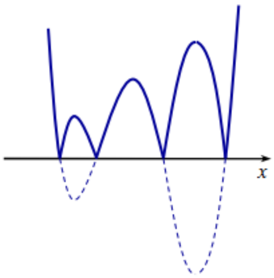
A. 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

Lời giải

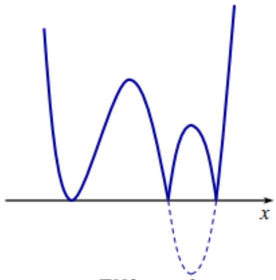
Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox

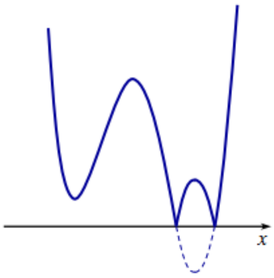
Vì $m > 0$ nên $(C"): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



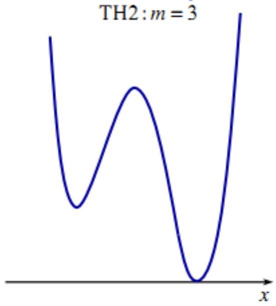
$\text{TH1}: 0 < m < 3$



$\text{TH2}: m = 3$



$\text{TH3}: 3 < m < 6$

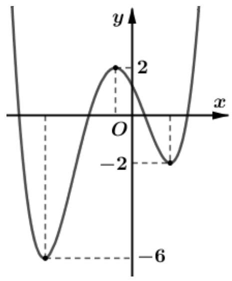


$\text{TH4}: m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.
TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.
Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \left|f(x+2018) + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \leq -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$$\longrightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{array}\right. \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2;2\}.$$

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. $(*)$

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x+1=0\\x^2+2mx+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x^2+2mx+5=0\ (1)\end{array}\right.$. Do đó $(*)\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\S=-2m>0\\P=5>0\end{cases}\Leftrightarrow m<-\sqrt{5}$. $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m>-10} m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có **đúng** 1 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x+1=0\\x^2+2mx+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x^2+2mx+5=0\ (1)\end{array}\right.$. Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\S=-2m<0\\P=5>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\sqrt{5}.$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow\Delta'=m^2-5\le 0$

$\Leftrightarrow-\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-2;-1\}$.

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m>-10$ để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Yêu cầu bài tóan tương đương với $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, tức $x^2+2mx+5=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức $\begin{cases}\Delta'=m^2-5>0\\S=-2m>0,P=5>0\end{cases}\Leftrightarrow m<-\sqrt{5}\Rightarrow m\in\{-9,-8,...,-3\}$ có tất cả 7 số nguyên thỏa mãn.

Chọn A

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x+m^2-3m-4)^3(x+3)^5,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4 **D.** 5.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương $f(x)$ có một điểm cực trị dương, tức $x^2+m^2-3m-4=0$ có nghiệm dương, tức $-m^2+3m+4>0 \Leftrightarrow -1<m<4 \Rightarrow m\in\{0,1,2,3\}$. Chọn đáp án

C.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Có $f'(x)=x^3(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Do đó hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có tối đa $4+5=9$ điểm cực trị.

Mặt khác số điểm cực trị của hàm số $y=|f(1-2018x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$. Do đó hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có tối đa 9 điểm cực trị.

Chọn A

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \\ x^2+m^2-3m-4=0\ (1) \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-3m-4<0 \Leftrightarrow -1<m<4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ (\text{nghiem boi }4) \\ x=m\ (\text{nghiem boi }5) \\ x=-3\ (\text{nghiem boi }3) \end{array}\right.$.

- Nếu $m=-1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x=-3$; $x=-1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-1$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Nếu $m=-3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-3$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Khi $\begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m$ và $x=-3<0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m>0 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 114. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{|x^3-3x^2+m|}$ có 5 điểm cực trị.

A. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;4)$.

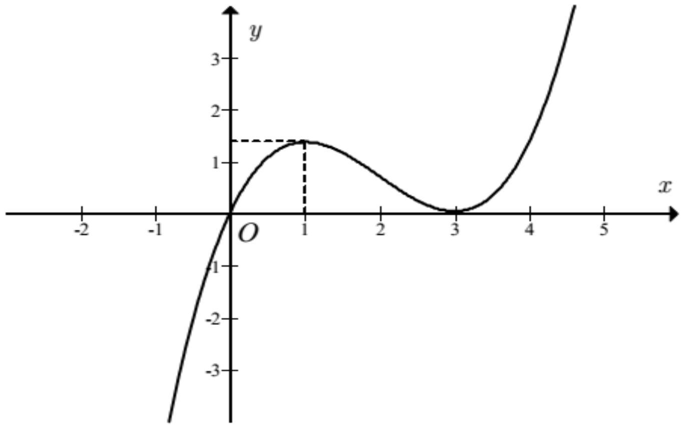
Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số $e^{|f(x)|}$ bằng số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+m=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m(m-4)<0 \Leftrightarrow 0<m<4$.

Chọn D

Câu 115. (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x+2)+4f(x+2)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5050. **D.** 5043.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f^2(x+2)+4f(x+2)+3m \Rightarrow g'(x)=2f(x+2).f'(x+2)+4f'(x+2)$

$$g'(x)=2f'(x+2).[f(x+2)+2]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+2)=0 \\ f(x+2)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=3 \\ x+2=a\in(-1;0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=a-2\in(-3;-2) \end{array}\right.$$ là 3 nghiệm đơn của $g'(x)=0$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt $t=f(x+2)\Rightarrow t\in R$ và mỗi giá trị $t\in R$ thì phương trình $t=f(x+2)$ luôn có nghiệm.

$g(x)=f^2(x+2)+4f(x+2)+3m \Rightarrow h(t)=t^2+4t+3m$

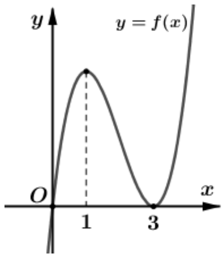
Vì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị nên để hàm số $y=|g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì.

$t^2+4t+3m\ge 0, \forall t\in R \Leftrightarrow 4-3m\le 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{4}{3}$.(Vì hàm $y=h(t)$ là hàm bậc hai có hệ số $a>0$)

Do $m\in[-100;100]; m\in Z \Rightarrow m\in\{2,3,4,...,100\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $2+3+4+...+100=5049$.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m \longrightarrow g'(x)=f'(x)[2f(x)+1]$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2f(x)=-1 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=a\ (a<0) \end{array}\right.$. Ta tính được $\begin{cases} g(1)=f^2(1)+f(1)+m>m \\ g(3)=m \\ g(a)=m-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

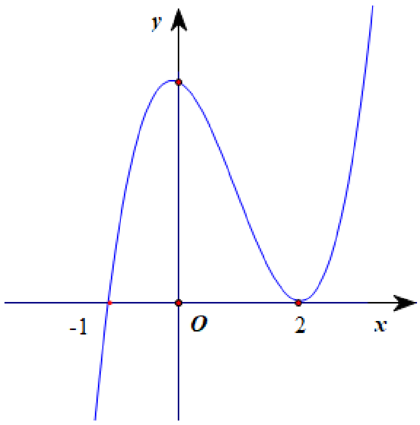
x	$-\infty$		a		1		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘	$g(a)$	↗	$g(1)$	↘	m	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+m-\frac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m\geq\frac{1}{4}$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. $m\geq 1$. **B.** $m>1$ **C.** $m\leq -1$ **D.** $m<-1$

Lời giải

Chọn B

Ta có nhận xét sau: "Số điểm cực trị của hàm số $y=|h(x)|$ là tổng số điểm cực của hàm số $y=h(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $h(x)=0$".

Xét hàm số $y=h(x)=f^2(x)+2f(x)+m$

Ta có $h'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x) \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=-1 & (2) \end{array}\right.$

Từ hàm số đã có ta có (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có một nghiệm đơn.

Do đó $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=|h(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=0$ phải vô nghiệm, hay phương trình $f^2(x)+2f(x)+m=0$ vô nghiệm (tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$)

Điều này tương đương với điều kiện $\Delta'=1-m<0 \Leftrightarrow m>1$.