CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

CỰC TRỊ HÀM BẬC BA, HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y=\frac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4(m+3)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-3<m<1$. **B.** $-\frac{7}{2}<m<-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>1\end{array}\right.$. **D.** $-\frac{7}{2}<m<-2$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}mx^2+\frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 3. Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y=x^3+3mx^2+3(m^2-1)x+m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a;b)$. Khi đó giá trị $a+2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Câu 6. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8$.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 7. Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 10. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2-2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 15. Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Câu 16. Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $0 < m < 3$. **D.** $m > 3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

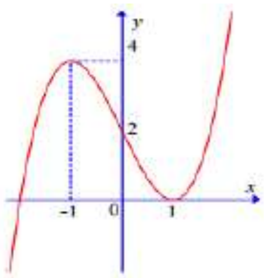
Câu 19. Xét các hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-x\right)\left(x^3-3x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f\left(1-2019x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in\left(-1;1\right]$. **B.** $m\in\left(-3;-1\right]$. **C.** $m\in\left(3;5\right]$. **D.** $m\in\left(1;3\right]$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-2018\right)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in\left(3;4\right)$. **B.** $m_0\in\left(1;2\right)$. **C.** $m_0\in\left(0;1\right)$. **D.** $m_0\in\left(2;3\right)$.

Câu 24. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left(-7;7\right)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3

Câu 25. Biết hai hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g\left(x\right)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|a\right|+\left|b\right|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 29. Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Câu 30. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 31. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k=-1;k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=1;k=\dfrac{1}{3}$.

C. $k=1;k=\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=\dfrac{1}{3};k=\dfrac{1}{2}$.

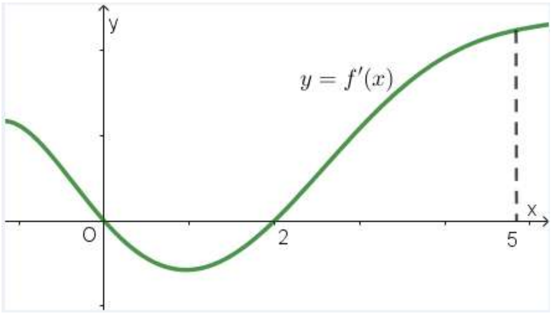
Câu 32. Cho hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^4+2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=\sqrt[3]{4}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 36. Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

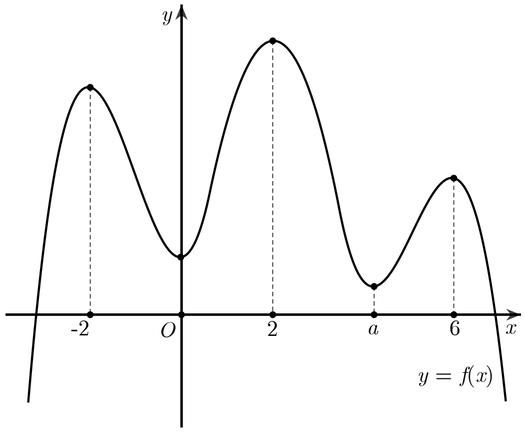
Câu 39. Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 40. Cho hàm số $y=\left|x^4-2\ m-1\ x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)\backslash\ 2$. **C.** $1;+\infty\ \backslash\ 2$. **D.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là -2; 0; 2; a; 6 với $4<a<6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^6 - 3x^2\right)$ là:

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

N.C.Đ

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y=\frac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4(m+3)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-3<m<1$. **B.** $-\frac{7}{2}<m<-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. **D.** $-\frac{7}{2}<m<-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2+2(m+3)x+4(m+3)$

Đặt $t=x+1 \Leftrightarrow x=t-1$. Khi đó $y'=t^2+2(m+2)t+2m+7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2(m+3)x+4(m+3)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+2m+7=0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta'=m^2+2m-3>0 \\ S=-2(m+2)>0 \\ P=2m+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m<-2 \\ m>-\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<m<-3.$$

Cách 2

Ta có $y'=f(x)=x^2+2(m+3)x+4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2(m+3)x+4(m+3)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ a.f(-1)>0 \\ \frac{S}{2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ 1-2(m+3)+4(m+3)>0 \\ \frac{-2(m+3)}{2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m>-\frac{7}{2} \\ m<-3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{2}<m<3 .$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}mx^2+\frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-3mx$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \end{array}\right.$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Với điều kiện $m\neq 0$, giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;\frac{1}{2}m^3\right)$, $B(m;0)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(m;-\frac{1}{2}m^3\right)$ và $I\left(\frac{m}{2};\frac{m^3}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\\ I\in d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-\frac{1}{2}m^3=0\\ \frac{m}{2}=\frac{m^3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm\sqrt{2}\\ m=0\end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 3. Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y=x^3+3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a;b)$. Khi đó giá trị $a+2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6mx+3(m^2-1)$.

Xét $3x^2+6mx+3(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m-1\\ x=-m+1\end{array}\right.$.

N.C.Đ

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m.

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y=-2x+m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1)=3m+2$, $y(-m+1)=3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2)<0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$.

Vậy $a+2b=\frac{2}{3}$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;m-2)$, $B(-1;m+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+m$ hay $2x+y-m=0$

Theo giả thiết $d(O;AB)\le\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{5}}\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |-m|\le 5 \Leftrightarrow -5\le m\le 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\ (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$$y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m(m+2).$$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(x_1+x_2)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\ (2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta=9m^2-12m-24<0\Leftrightarrow\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>2\end{array}\right.\ (*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

N.C.Đ

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó

điều kiện : $\Delta=9m^2-12m-24<0\ \Leftrightarrow \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương:

$y'=x^2-2mx+m+2,\ y''=2x-2m$

$y''=0\Leftrightarrow 2x-2m=0\Leftrightarrow x=m$

Ta có: $y(m)>0\Rightarrow \dfrac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Câu 6. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8.$

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6(m+1)x+12m$;

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+12m=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+4m=0 \qquad (1)$.

Để hàm số có 2 cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Với điều kiện $m\neq 1$ ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=4m \end{cases}$.

Do đó $x_1+x_2+2x_1x_2=-8 \Leftrightarrow 2m+2+8m=-8 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 7. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10 \Rightarrow y'=x^2-mx-4$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

$\Delta=m^2+16>0, \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lí viet: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m \\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=-4 \end{cases}$.

$S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=(x_1x_2)^2-[(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2]+1=16-(m^2+8)+1=9-m^2\leq 9$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3(x^2-2mx+m^2-1)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3m+2$	$\searrow$	$-3m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M\left(m-1;-3m+2\right)$.

Nhận xét: $y_M = -3m+2 = -3(m-1)-1 = -3x_M - 1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x-1, \forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y=-3x-1$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k=-3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $y = (x-1)\left(x^2 - 2mx + 1 - m\right)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x-1)\left(x^2 - 2mx + 1 - m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Do $m \in N, m < 20$ nên $1 \le m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x-2m)$.

$$y' = 0 \Rightarrow 3x(x-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;3m^2\right), B\left(2m;3m^2-4m^3\right)$.

Phương trình đường thẳng OA: $x=0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA.d\left(B;OA\right)=\frac{1}{2}3m^2.|2m|=24\Rightarrow m^2|m|=8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-2(m+1)x+m^2-2$ có $\Delta'=-2m^2+2m+7$.

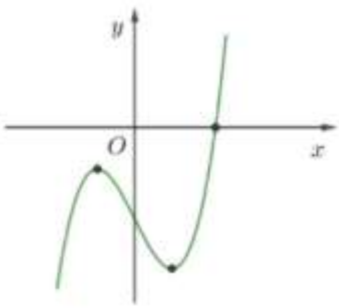
Để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$\Delta'>0\Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{15}}{2}$,

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên được $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1).f(x_2)>0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm (hình vẽ minh họa bên dưới), tức là, phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3=0$ (*) có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m=-1$ thì phương trình (*) là $x^3-x+2=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=-1$.

Xét $m=0$ thì phương trình (*) là $x^3-x^2-2x+3=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=0$.

Xét $m=1$ thì phương trình (*) là $x^3-2x^2-x+2=0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt (dùng MTCT) nên không chọn $m=1$.

Xét $m=2$ thì phương trình (*) là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m=2$.

Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên miền $x > 0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là $2n+1$.

+ Ta có $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^3\left(x-2\right)^5\left(x+3\right)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$ (nghiệm bội lẻ)

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên miền $x > 0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(|x|\right)$ là $2.1+1=3$.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(-3;3\right)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

N.C.Đ

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $\left(-3;3\right)$ thì phương trình $y' = 0$ hay $3x^2 - 6x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-3;3\right)$.

Cách 1:

Khi đó, đặt $f\left(x\right) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f\left(3\right) > 0 \\ a.f\left(-3\right) > 0 \\ -3 < \dfrac{S}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3m > 0 \\ 45-m > 0 \\ 9-m > 0 \\ -3 < 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Khi đó, đặt $f\left(x\right) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3 < x_1 < x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3m > 0 \\ -3 < \dfrac{3-\sqrt{9+3m}}{3} < \dfrac{3+\sqrt{9+3m}}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ hay $3x^2-6x=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;3)$.

Đặt $f(x)=3x^2-6x,\ x\in(-3;3)$. Ta có:

$f'(x)=6x-6;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	$\searrow$	-3	$\nearrow$	9

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<9$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2-4mx+m-1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-m+1>0\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

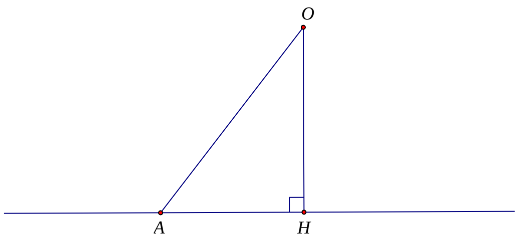
Mà $y(x)=y'(x).\left(\frac{1}{3}x-\frac{2m}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ:

$y=-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Khi đó ta có $d(O;\Delta)=OH\le OA$ (Hình vẽ)



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H\equiv A$ hay $\Delta\perp OA$.

Vậy khoảng cách lớn nhất là $OA=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 15. Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = ax^3 - x^2 + b \ (x \in \mathbb{R})$.

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = b \\ x = \dfrac{2}{3a} \Rightarrow y = b - \dfrac{4}{27a^2} \end{array}\right. .$$

Để phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thực khi và chỉ khi

$$y_{CD}.y_{CT} \le 0 \Leftrightarrow b\left(b - \frac{4}{27a^2}\right) \le 0 \Leftrightarrow b - \frac{4}{27a^2} \le 0 \Leftrightarrow a^2b - \frac{4}{27} \le 0 \Leftrightarrow a^2b \le \frac{4}{27}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng $\frac{4}{27}$.

Câu 16. Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $0 < m < 3$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn D

Xét hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$.

TXĐ : $D = \mathbb{R}$.

Ta có : $y' = x^2 - 2mx + (m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y' = x^2 - 2mx + (m+6) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra:

$$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 - m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	$-m-4$	$\nearrow$	$+\infty$

N.C.Đ

Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là $-m - 4 < 0 < -m \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19. Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^3 - 3x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

● Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(1-2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x) = 0$ và số cực trị (không phải là nghiệm phương trình $f(1-2019x) = 0$) của hàm số $y = f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x) = x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

$$[f(1-2019x)]' = -2019 f'(1-2019x).$$

Do đó

$$[f(1-2019x)]' = 0 \Leftrightarrow (1-2019x)^2(1-2019x-1)(1-2019x-\sqrt{3})(1-2019x+\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2019} \\ x=0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của $y=f\left(1-2019x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\frac{1}{2019}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↘		↗	

Do đó phương trình $f\left(1-2019x\right)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f\left(1-2019x\right)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-2019x\right)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$; $y'=0\Leftrightarrow x=0 \vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$; $B\left(2m;4m^3-3m-1\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2m;4m^3\right)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I\left(m;2m^3-3m-1\right)$.

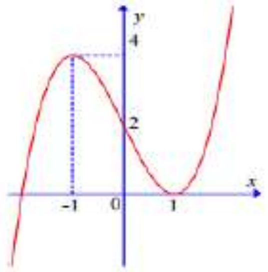
Đường thẳng $d: x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=(8;-1)$.

và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ AB\perp d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+8\left(2m^3-3m-1\right)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ 16m-4m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$). Suy ra $m\in(1;3]$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-2018\right)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$y=f\left(x-2018\right)-2019x+1\Rightarrow y'=f'\left(x-2018\right)-2019$.

Do đó $y'=0\Leftrightarrow f'\left(x-2018\right)=2019$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đường thẳng $y=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy (1) chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f\left(x-2018\right)-2019x+1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A\left(0;m\right)$ và $B\left(2;-4+m\right)$ Ta có $OA=OB\Leftrightarrow\sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+\left(4-m\right)^2}\Leftrightarrow m^2=4+\left(4-m\right)^2$

$\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in\left(3;4\right)$. **B.** $m_0\in\left(1;2\right)$. **C.** $m_0\in\left(0;1\right)$. **D.** $m_0\in\left(2;3\right)$.

Lời giải.

Chọn C

Xét hàm số $y=x^3-6mx+4$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6m; y'=0 \Leftrightarrow x^2=2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Ta có $y=\frac{1}{3}y'.x-4mx+4$.

Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases} y'(x_1)=y'(x_2)=0 \\ y_1=y(x_1)=\frac{1}{3}y'(x_1).x_1-4mx_1+4 \\ y_2=y(x_2)=\frac{1}{3}y'(x_2).x_2-4mx_2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-4mx_1+4 \\ y_2=-4mx_2+4 \end{cases}$.

Suy ra M,N thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-4mx+4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y=-4mx+4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0<d(I,d)<R \Leftrightarrow 0<d(I,d)<\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}<\sqrt{2} \end{cases}$ (*).

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK=\sqrt{17}>R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A,B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó: $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}IA.IB$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA\perp IB \Leftrightarrow d(I,d)=\frac{R}{\sqrt{2}}=1$ (thỏa mãn (*)).

$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}=1 \Leftrightarrow m=\frac{15}{32}$.

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK<\frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d)=t$ $(0<t\le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB}=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+y^2=2$ (C)

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\ y=-4mx+4\end{cases} \Rightarrow (16m^2+1)x^2-2(16m+1)x+15=0$ (1).

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a,b

$\Leftrightarrow (16m+1)^2-15(16m+1)>0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4), B(b;-4mb+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4)\\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4)\end{array}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0$

$\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0 \Leftrightarrow (16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0$

$\Leftrightarrow 15-\dfrac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0 \Leftrightarrow \dfrac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16 \Leftrightarrow m=\dfrac{15}{32}$.

Câu 24. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-7;7)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Xét $y=x^4-3mx^2-4$.

N.C.Đ

$y'=4x^3-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{3m}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\dfrac{3m}{2}>0 \Leftrightarrow m>0$.

Hàm số $y=x^4-3mx^2-4$ có 3 cực trị: $A(0;-4), B\left(\sqrt{\dfrac{3m}{2}};-\dfrac{9m^2}{4}-4\right), C\left(-\sqrt{\dfrac{3m}{2}};-\dfrac{9m^2}{4}-4\right)$

Suy ra $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $\dfrac{3m}{2}\le 0 \Leftrightarrow m\le 0$ (1) suy ra hàm số $y=x^4-3mx^2-4$ có 1 cực tiểu là: $A'(0;-4)$

Suy ra hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có 3 điểm cực trị là: $A(0;4), B(x_1;0), C(-x_1;0)$, trong đó x_1 là nghiệm của phương trình $x^4-3mx^2-4=0$. $(x_1\ne 0)$ (do $ac=-4$ nên phương trình $x^4-3mx^2-4=0$ luôn có nghiệm) (2)

Diện tích tam giác ABC bằng: $S=\dfrac{1}{2}.d(A;BC).BC=\dfrac{1}{2}.4.2|x_1|=4|x_1|$.

Do $S>4 \Leftrightarrow |x_1|>1$. Từ phương trình (2) suy ra $m=\dfrac{x_1^4-4}{3x_1^2}=\dfrac{x_1^2}{3}-\dfrac{4}{3x_1^2}$ với $|x_1|>1$.

Do $|x_1|>1 \Leftrightarrow x_1^2>1 \Leftrightarrow m=\frac{x_1^2}{3}-\frac{4}{3x_1^2}>-1$ kết hợp với (1) suy ra $-1<m\le 0$ suy ra chỉ có $m=0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi:

$a^2-6>0 \Leftrightarrow a<-\sqrt{6} \vee a>\sqrt{6}$ (1).

$g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi $b^2-9>0 \Leftrightarrow b<-3 \vee b>3$ (2).

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2+2ax_0+2=0 \\ -3x_0^2+2bx_0-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{1}{2x_0} \\ b=\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{x_0}-\frac{3}{2}x_0 \\ b=\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right) \end{cases}$$

$$P=|a|+|b|=\left|\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right|+\left|\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\right|\ge\left|\frac{5}{2x_0}+3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2=\frac{25}{4x_0^2}+9x_0^2+15\ge 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2}.9x_0^2}+15=30 \Rightarrow P\ge\sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)>0 \\ \frac{25}{4x_0^2}=9x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)>0 \\ x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a,b thoả (1) và (2). Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^3-3mx+2 \Rightarrow y'=3x^2-3m$

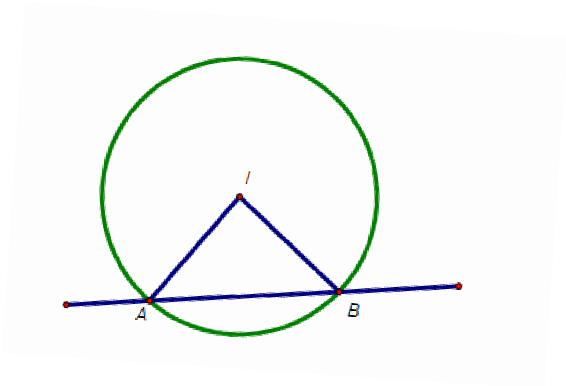
Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ (1)

Ta có $y=\frac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$y=-2mx+2 \Leftrightarrow 2mx+y-2=0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<1 \Leftrightarrow |2m-1|<\sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m<0$ luôn đúng do $m>0$

Ta có $S_{IAB}=\frac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin AIB=\frac{1}{2}.\sin AIB \le \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin AIB=1 \Leftrightarrow AIB=90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$d(I;\Delta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

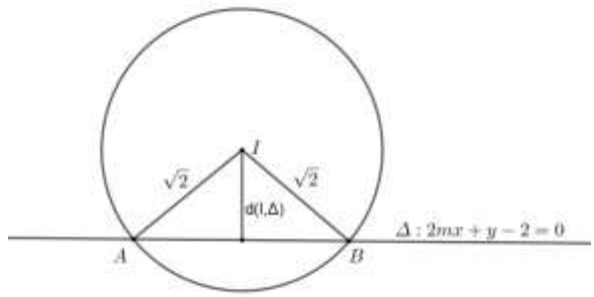
Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. Các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\frac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=\frac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y'=3x^2-3m=3\left(x^2-m\right)$, $y'=0\Rightarrow x^2=m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

Ta có $y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)-2mx+2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là $\Delta: y=-2mx+2$ hay $\Delta: 2mx+y-2=0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B khi

$$\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)=\frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+4<8m^2+2\Leftrightarrow 4m^2+8m-2>0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB$.

Mà $\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB\le\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}R^2=1$.

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin AIB=1\Leftrightarrow AIB=90^{\circ}$.

Từ đó $\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.R\sqrt{2}=1\Leftrightarrow\frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}=1\Leftrightarrow 4m^2-8m+4=4m^2+1\Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{3}{8}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3(m-1)x^2-10x+(m+3)$.

* Trường hợp 1: $m=1$.

Lúc đó $f'(x)=-10x+4$. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị dương. Suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m\ne 1$.

Lúc này hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $x_1<0<x_2$ hoặc $x_1=0<x_2$.

□ Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $(m-1).(m+3)<0\Leftrightarrow$ $-3<m<1$.

□ Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x_1=0<x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3=0 \\ \dfrac{10}{3(m-1)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m>1 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3<m\le 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 29. Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 10094. **C.** 4048. **D.** 5047.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$ có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox

Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3mx^2+4m^3-12m-8$

Có: $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4m^3-12m-8 \\ x=2m \Rightarrow y=-12m-8 \end{array}\right.$

Hai cực trị của hàm số $y=f(x)$ là: $A\left(0;4m^3-12m-8\right), B(2m;-12m-8)$

N.C.Đ

Để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi

$$\left(4m^3-12m-8\right)(-12m-8)<0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$$

Mà: $m\in[0;100] \Rightarrow m\in\{3;4;5;6;...;100\}$

Vậy tổng các giá trị của m là: $\dfrac{(3+100)98}{2}=5047$.

Câu 30. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0; x=\pm\sqrt{m}$ với $m>0$

Gọi $A(0;1), B\left(\sqrt{m};-m^2+1\right), C\left(-\sqrt{m};-m^2+1\right)$ là 3 điểm cực trị của hàm số (1); khi đó tam giác

ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A,B,C nên $I\in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA=R=1 \Leftrightarrow 1-b=1 \Leftrightarrow b=0$

$IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2+m-1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1

Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = -1; k = \dfrac{1}{2}$.

B. $k = 1; k = \dfrac{1}{3}$.

C. $k = 1; k = \dfrac{1}{2}$.

D. $k = \dfrac{1}{3}; k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = k \ \ (1) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0;k)$, $B(-\sqrt{k}; k - k^2)$, $C(\sqrt{k}; k - k^2)$.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$

$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m \ge 1$.

B. $m \le 1$.

C. $m = 1$.

D. $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2-m^2+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác không

$\Leftrightarrow m^2-m+1>0 \Leftrightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$x_1=-\sqrt{m^2-m+1}, x_2=\sqrt{m^2-m+1}, x_3=0.$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$ và $C\left(\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC=2\sqrt{m^2-m+1}=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\sqrt{3}.$

Dấu "=" xảy ra khi $m=\frac{1}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^4+2m.$ Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m=2\sqrt{2}.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=\sqrt[3]{3}.$ **D.** $m=\sqrt[3]{4}.$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m.\end{array}\right.$

Hàm số trùng phương có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m>0$ (1).

Gọi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A,\ B,\ C$ với A là điểm thuộc trục tung.

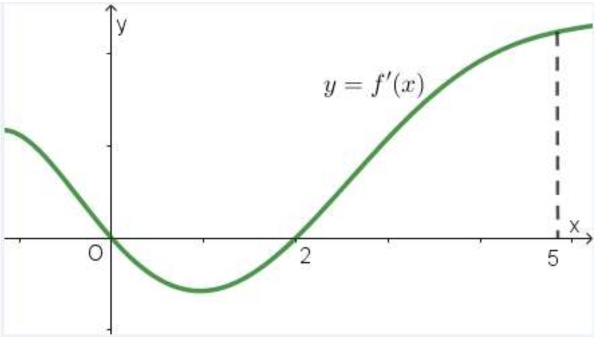
Khi đó, $A(0;m^4+2m),\ B(\sqrt{m};m^4-m^2+2m),\ C(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$.

Vì đồ thị hàm số trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng. Ở bài này, hai điểm cực tiểu đối xứng nhau qua trục tung và điểm cực đại nằm trên trục tung nên ΔABC cân tại A. Do đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ có $AB=BC\Leftrightarrow\sqrt{m+m^4}=\sqrt{4m}\Leftrightarrow m+m^4=4m\Leftrightarrow m^4-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\sqrt[3]{3}\end{array}\right..$

Từ điều kiện (1) kết luận $m=\sqrt[3]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x^2)\Rightarrow g'(x)=2xf'(x^2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y=f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2\Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Khi $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0;3m-2)$, $B(\sqrt{m};-m^2+3m-2)$ và $C(-\sqrt{m};-m^2+3m-2)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36. Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (0;3)$. **B.** $m_0 \in [-5;-3)$. **C.** $m_0 \in (-3;0]$. **D.** $m_0 \in (3;7)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A. Nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m\left(1+m^3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. Kết hợp $m < 0$ ta có $m = -1$.

Cách 2. (Dùng công thức tính nhanh).

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3 = -8a \Rightarrow (2m)^3 = -8 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2+m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$. **C.** $m = \sqrt{3}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(m^2+m+1\right)x = 4x\left[x^2 - \left(m^2+m+1\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{m^2+m+1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{m^2+m+1} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d = |x_3 - x_1| = 2\sqrt{m^2+m+1} = 2\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m},(m>0)\end{array}\right.$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0;m-1),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC, ta có $\begin{cases}AH=m^2\\BC=2\sqrt{m}\end{cases}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=m^2\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{4}.$

Câu 39. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-2mx^2+4-2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có đúng ba điểm cực trị thì: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 0\\4-2m^2<0\end{cases}\\\begin{cases}m>0\\4-3m^2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{2}\\0<m\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn bài toán là $\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;1\}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\left|x^4-2\ m-1\ x^2+2m-3\right|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)\setminus\ 2\ $. **C.** $\ 1;+\infty\ \setminus\ 2\ $. **D.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $f(x)=x^4-2\ m-1\ x^2+2m-3$

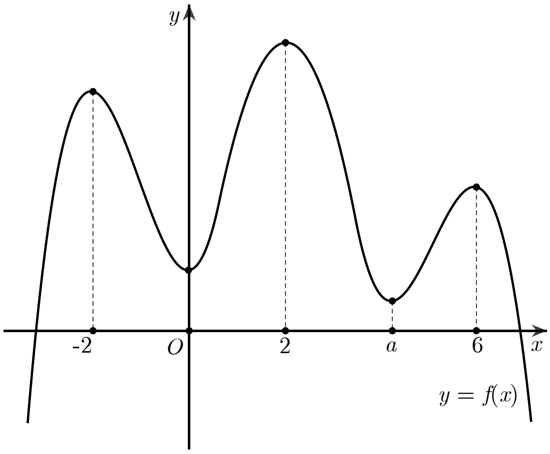
$f'\ x\ =4x^3-4\ m-1\ x$

$f'\ x\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m-1\end{array}\right.$

Vì hàm số $f(x)$ có $a=1>0$ nên hàm số $y=\left|f\ \ x\right|$ có đúng 5 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ phải có 3 cực trị thỏa $y_{cd}\le 0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\f\ \ 0\ \le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$

Vậy **chọn D**

Câu 41. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $-2;\ 0;\ 2;\ a;\ 6$ với $4<a<6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^6-3x^2\right)$ là:

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$g(x)=f\left(x^6-3x^2\right)$.

$g'\left(x\right)=\left(f\left(x^6-3x^2\right)\right)'=\left(x^6-3x^2\right)'.f'\left(x^6-3x^2\right)=\left(6x^5-6x\right)f'\left(x^6-3x^2\right)$.

N.C.Đ

$$y'=0\Leftrightarrow\left(6x^5-6x\right)f'\left(x^6-3x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^5-6x=0\\ f'\left(x^6-3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \\ x=\pm1 & \\ x^6-3x^2=-2 & (1)\\ x^6-3x^2=0 & (2)\\ x^6-3x^2=2 & (3)\\ x^6-3x^2=a & (4)\\ x^6-3x^2=6 & (5)\end{array}\right..$$

$x^6-3x^2=-2\left(1\right)\Leftrightarrow x^6-3x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1.$

$$x^6-3x^2=0\left(2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\left(*\right)\\ x^4=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt[4]{3}\end{array}\right..$$

$x^6-3x^2=2\left(3\right)\Leftrightarrow x^6-3x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Ta xét bảng biến thiên của hàm số:

$y=h\left(x\right)=x^6-3x^2$

$$y'=h'\left(x\right)=6x^5-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow h\left(0\right)=0\\ x=-1\Rightarrow h\left(-1\right)=-2\\ x=1\Rightarrow h\left(1\right)=2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $x^6-3x^2=a$ (4) có một nghiệm biệt khác $\{0;-1;1\}$ và khác nghiệm của phương trình $(2);(3)$

Phương trình $x^6-3x^2=6$ (5) có hai nghiệm phân biệt khác $\{0;-1;1\}$ và khác nghiệm của phương trình $(2);(3);(4)$. Ta có thể lấy nghiệm gần đúng như sau:

$$x^6-3x^2=6(5)\Leftrightarrow x^6-3x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=m, m\approx 5,547, m\in(5;6)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{m} \\ x=-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 2,355 \\ x\approx -2,355\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x^6-3x^2=a(4) \\ 4<a<6\end{cases}\Leftrightarrow 4<x^6-3x^2<6\Leftrightarrow \begin{cases} n<x^2<\sqrt{m} \\ n\approx 2,195 \\ m\approx 2,355\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt[4]{m}<x<-\sqrt{n} \\ \sqrt{n}<x<\sqrt[4]{m}\end{array}\right.$$

Vậy $y'=g'(x)=0$ có:

+) 2 nghiệm bằng $x=1\Rightarrow x=1$ không là điểm cực trị.

+) 2 nghiệm bằng $x=-1\Rightarrow x=-1$ không là điểm cực trị.

+) 3 nghiệm bằng $x=0\Rightarrow x=0$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=-\sqrt[4]{3}\Rightarrow x=-\sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=\sqrt[4]{3}\Rightarrow x=\sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=\sqrt{m}\Rightarrow x=\sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=-\sqrt{m}\Rightarrow x=-\sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm bằng $x=-\sqrt{2}\Rightarrow x=-\sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm x_1 và $x_1\in\left(-\sqrt{m};-\sqrt{n}\right)\Rightarrow x_1$ là 1 điểm cực trị.

+) 1 nghiệm x_2 và $x_2\in\left(\sqrt{n};\sqrt{m}\right)\Rightarrow x_2$ là 1 điểm cực trị.

Vậy có tất cả 9 điểm cực trị .

Câu 42. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

Hàm số có 3 cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right. \left(m > 0\right)$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A\left(0;m\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $H\left(0;-m^2+m\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{AB.AC.BC}{4R}$ (do ΔABC cân tại A)

$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH.R$ trong đó $\begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m+m^4} \end{cases}$

Suy ra $m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m\left(m^3 - 2m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow m\left(m-1\right)\left(m^2 + m - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $S = \left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

N.C.Đ

Do đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.