NGUYÊN HÀM

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Định lí:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$; $d\left(\int f(x)\mathrm{dx}\right) = f(x)\mathrm{dx}$
- Nếu F(x) có đạo hàm thì: $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- **Công thức đổi biến số:** Cho $y = f(u)$ và $u = g(x)$.

  Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí:

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

1. $\int 0dx = C$ 2. $\int dx = x + C$	
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1\right)$	16. $\int (ax+b)^\alpha \mathrm{dx} = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	17. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$
5. $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	18. $\int \frac{\mathrm{dx}}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	19. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
8. $\int \cos xdx = \sin x + C$	21. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	22. $\int \sin\left(ax+b\right)dx = -\frac{1}{a}\cos\left(ax+b\right)+C$
10. $\int \tan x.dx = -\ln\mid \cos x \mid + C$	23. $\int \tan\left(ax+b\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\left\|\cos\left(ax+b\right)\right\| + C$
11. $\int \cot x.dx = \ln\mid \sin x \mid + C$	24. $\int \cot\left(ax+b\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left\|\sin\left(ax+b\right)\right\| + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	25. $\int \frac{1}{\cos^2\left(ax+b\right)}dx = \frac{1}{a}\tan\left(ax+b\right)+C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	26. $\int \frac{1}{\sin^2\left(ax+b\right)}dx = -\frac{1}{a}\cot\left(ax+b\right)+C$
14. $\int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x + C$	27. $\int \left(1+\tan^2\left(ax+b\right)\right)dx = \frac{1}{a}\tan\left(ax+b\right)+C$
15. $\int \left(1+\cot^2 x\right)dx = -\cot x + C$	28. $\int \left(1+\cot^2\left(ax+b\right)\right)dx = -\frac{1}{a}\cot\left(ax+b\right)+C$

5. Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$	$\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$	$\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$	$\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\|a\|}+C$	$\int \mathrm{arc}\cot\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arc}\cot\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\|\frac{x}{a}\right\|+C$	
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\|+C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(ax+b\right)} = \frac{1}{a}\ln\left\|\tan\frac{ax+b}{2}\right\|+C$
$\int \ln\left(ax+b\right)\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln\left(ax+b\right)-$	$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)}{a^2+b^2}+C$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin$	$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị thực của a để $F\left(x\right)=\frac{ax+1}{\sqrt{2x+1}}$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{4x+3}{\sqrt{\left(2x+1\right)^3}}$.

A. $a=4$. **B.** $a=5$. **C.** $a=-4$. **D.** $a=-5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F'\left(x\right)=\frac{a\sqrt{2x+1}-\frac{ax+1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\frac{ax+a-1}{\sqrt{\left(2x+1\right)^3}}$

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow \frac{ax+a-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\frac{4x+3}{\sqrt{(2x+1)^3}}\Leftrightarrow ax+a-1=4x+3\Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\a-1=3\end{cases}\Leftrightarrow a=4.$$

Câu 2. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-6$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

Chọn D

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow (2ax+b)\sqrt{2x-1}+(ax^2+bx+c)\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2ax+b)(2x-1)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-1}}=\frac{10x^2-7x-2}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2+(3b-2a)x+c-b=10x^2-7x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5a=10\\3a-2b=-7\\c-b=-2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\Rightarrow S=-2.\\c=-3\end{cases}$$

Câu 3. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Tính $P=abc$.

A. $P=0$. **B.** $P=3$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F'(x)=(2ax+b)\sqrt{2x-3}+(ax^2+bx+c).\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}=\dfrac{5ax^2+(3b-6a)x+c-3b}{\sqrt{2x-3}}$

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 5ax^2+(3b-6a)x+c-3b=20x^2-30x+7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5a=20\\3b-6a=-30\\c-3b=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\b=-2\Rightarrow S=-8.\\c=1\end{cases}$$

Câu 4. Biết $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=a\ln|\sin x-\cos x|+C$. Với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Lời giải

Vì $\displaystyle\int a\left[\ln|\sin x-\cos x|+C\right]'=\frac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ nên

Nguyên hàm của: $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ là: $\ln|\sin x-\cos x|+C$.

Chọn A

Câu 5. Tìm một nguyên hàm của: $1+4.\dfrac{\tan^2\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x=\dfrac{\pi}{4}$.

A. $\frac{1}{\cos^2 x}+3$. **B.** $\frac{1}{\sin^2 x}+3$. **C.** $\tan x+2$. **D.** $\cot x+2$.

Lời giải

$$f(x)=1+4.\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}=1+\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)^2=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos_2 x}$$

Nguyên hàm của $F(x)=\tan x+C$

Ta có: $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\Rightarrow\tan\frac{\pi}{4}+C=3\Rightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\tan x+2$

Chọn C

Câu 6. Biết $\int\frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)}dx=-\frac{1}{a(5x-2)^5}+C$. Với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a=4$. **B.** $a=100$. **C.** $a=5$. **D.** $a=25$.

Lời giải

Chú ý nếu chúng ta biến đổi:

$$\int\frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3}dx=\int\left(25x^2-20x+4\right)^{-3}dx=\frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4}+C$$. **Là sai**

Điều sau đây mới đúng: $\int\left(25x^2-20x+4\right)^{-3}d\left(25x^2-20x+4\right)=\frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4}+C$

Trở lại bài, ta sẽ biến đổi biểu thức $\left(25x^2-20x+4\right)^3$ về dạng $(ax+b)^n$ như sau:

$$\int\frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3}dx=\int\frac{1}{(5x-2)^6}dx=\int(5x-2)^{-6}dx$$

$$=\frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{-5}}{-5}+C=-\frac{1}{25(5x-2)^5}+C$$

Chọn D

Câu 7. Biết $\int\frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx=\frac{a}{b}\ln|2x-7|+C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính $S=a+b$?

A. $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta quan sát mẫu cso thể phân tích được thành nhân tử, sử dụng MTCT bấm giải phương trình bậc 2:

$2x^2-5x-7=0$ thấy có hai nghiệm là: $x=-1,x=\frac{7}{2}$.

Áp dụng công thức $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1,x_2 là hai nghiệm ta có:

$2x^2-5x-7=(x+1)(2x-7)$

Do đó:

$$\int\frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)(2x-7)}dx=\int\frac{1}{2x+7}dx=\frac{1}{2}\ln|2x-7|+C$$

Chọn C

Câu 8. Biết $\int\frac{1}{1+\sin 2x}dx=\frac{a}{b}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính $S=a+b$?

A. $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx=\int \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}dx=\int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta thấy a=1,b=2 suy ra S=3

Chọn C

Câu 9. Cho $f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0)=8$ là:

A. $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9$.

B. $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9$.

C. $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$.

D. $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$.

Lời giải

Ta cần phải tính $\int f(x)dx=\int 8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)dx$. Đầu tiên sử dụng công thức hạ bậc để đổi $f(x)$ như sau:

$$f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=8\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$f(x)=4-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F(x)=4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C$$

$$f(0)=8\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=8\Leftrightarrow C=9$$

Chọn B

Câu 10. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int \frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx$ với $0<x<1$ và $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

A. 24. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Ta có:

$$F(x)=\int \frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx=\int \frac{9x^2-4\left(x^2-2x+1\right)}{x^2\left(1-x^2\right)}dx$$

$$=\int\left[\frac{9}{\left(1-x^2\right)}-\frac{4}{x^2}\right]dx=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}+C$$

Vì $F\left(\frac{1}{2}\right)=26$ nên $\frac{4}{\frac{1}{2}}+\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+C=26\Leftrightarrow C=0$

Lúc này $F(x)=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}$ với $0<x<1$. Sử dụng MTCT bấm Mode 7 chọn start 0 end 1 Step 0.1:

Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của F(x) là 25 xảy ra khi x =0,4

Chọn C

Câu 11. Cho $f(x)=1+|x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=1$ là:

A. x^2+x+1

B. $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -x^2+x+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\begin{cases} 1+x \text{ khi } x\ge 0 \\ 1-x \text{ khi } x<0 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}+C_1 \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Theo đề $F(1)=1\Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{2}$ do đó: $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} \text{ khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Chọn B

Câu 12. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x)+\ln(x^3+3)=2$ là:

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{dx}{e^x+3}=\dfrac{1}{3}\int\left(1-\dfrac{e^x}{e^x+3}\right)dx=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)+C$.

Do $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$ nên $C=0$. Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)$.

Do đó: $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow x=2$

Chọn A

Câu 13. **(NGUYỄN ĐÌNH CHIỂU TIỀN GIANG)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3)=1$ và $F(1)=2$, giá trị của $F(0)+F(4)$ bằng

A. $2\ln 2+3$. **B.** $2\ln 2+2$. **C.** $2\ln 2+4$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int\dfrac{1}{x-2}dx=\begin{cases} \ln(x-2)+C_1 \text{ khi } x>2 \\ \ln(2-x)+C_2 \text{ khi } x<2 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} F(3)=1 \\ F(1)=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \end{cases}$. Khi đó $F(x)=\begin{cases} \ln(x-2)+1 \text{ khi } x>2 \\ \ln(2-x)+2 \text{ khi } x<2 \end{cases}$.

Vậy $F(0)+F(4)=(\ln 2+2)+(\ln 2+1)=2\ln 2+3$.

Câu 14. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết rằng xe^x là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{5-e}{2}$. **C.** $\frac{7-e}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(-x)=\left(xe^x\right)'=e^x+xe^x$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x)=e^{-(-x)}-(-x)e^{-(-x)}$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Suy ra $f(x)=e^{-x}(1-x)$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x)=\left[e^{-x}(1-x)\right]'=e^{-x}(x-2)\Rightarrow f'(x)e^x=e^{-x}(x-2).e^x=x-2$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-2)\,dx=\frac{1}{2}(x-2)^2+C$.

Từ đó $F(0)=\frac{1}{2}(0-2)^2+C=C+2$; $F(0)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-1\Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}(-1-2)^2-1=\frac{7}{2}$.

Câu 15. **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int f(x)dx=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}dx=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$=2\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$$F'(x)=f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$\max\limits_{(0;\pi)} F(x)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 16. **(Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)\Rightarrow F'(x)=f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$.

$$F'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}\left(x^3-4x\right)=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

$$F'\left(x^2+x\right)=(2x+1).F'\left(x^2+x\right)$$

$$(2x+1).F'\left(x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\\x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\\x^2+x=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.\\x^2+x=-2\ (ptvn)\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình $F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 17. **(Cụm 8 trường chuyên lần1)** Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f\left(F(0)\right)$ bằng:

A. $\dfrac{-1}{e}$. **B.** $3e$. **C.** $20e^2$. **D.** $9e$.

Lời giải

Chọn D

+ Tính $\left(F(x)\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right)'=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$.

Suy ra $\begin{cases}a=-2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-1\end{cases}$ nên $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)e^{-x}$.

+ Tính $F(0)=-1$ suy ra $f(F(0))=f(-1)=9\mathrm{e}$.

Câu 18. **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^x$, $f(x)=(x^2+3x+4)\mathrm{e}^x$. Biết a,b là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=12$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Bài này sẽ chặt chẽ hơn nếu thêm điều kiện $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2x+a)\mathrm{e}^x+(x^2+ax+b)\mathrm{e}^x=(x^2+3x+4)\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+(2+a)x+a+b=x^2+3x+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Đồng nhất hai vế ta có $\begin{cases}a+2=3\\a+b=4\end{cases}$.

Suy ra $S=a+b=4$.

Câu 19. **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $F(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+c$ mà $F(1)=\dfrac{1}{2}$ nên $c=1$. Hay $F(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+1$.

Ta có: $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$

$$S=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+1\right)+\ ...\ +\left(-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+1\right)$$

$$S=-1+\frac{1}{2020}+2019.1=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}.$$

Câu 20. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$ nên suy ra: $F'(x)=f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$.

Ta có: $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-\cos x}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\cos x=0\\x\in[-1;1]\setminus\{0\}\end{cases}$ (1).

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ trên $[-1;1]$, ta có: $g'(x)=1+\sin x\geq 0,\forall x\in[-1;1]$. Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Vậy phương trình $g(x)=x-\cos x=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $[-1;1]$ (2).
Mặt khác ta có: hàm số $g(x)=x-\cos x$ liên tục trên $(0;1)$ và $g(0)=0-\cos(0)=-1<0$, $g(1)=1-\cos(1)>0$ nên $g(0).g(1)<0$. Suy ra $\exists x_0\in(0;1)$ sao cho $g(x_0)=0$ (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra: phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\neq 0$. Đồng thời vì x_0 là nghiệm bội lẻ nên $F'(x)$ đổi qua $x=x_0$.
Vậy đồ thị hàm số $y=F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 21. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F^{/}(x)=f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$.
$f^{/}(x)=-\sin x+x$; $f^{//}(x)=-\cos x+1\geq 0\ \ \forall x\in R$.
Suy ra hàm số $f^{/}(x)$ đồng biến trên R, từ đó dẫn đến phương trình $f^{/}(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.
Mặt khác $f^{/}(0)=0$ suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f^{/}(x)=0$.
Do hàm số $f^{/}(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ và vô nghiệm trên mỗi khoảng này nên dấu của $f^{/}(x)$ không đổi trên mỗi khoảng trên.
Mà $f^{/}(-1)<0;\ f^{/}(1)>0$ suy ra $f^{/}(x)<0\ \forall x\in(-\infty;0)$ và $f^{/}(x)>0\ \forall x\in(0;+\infty)$.
Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hay phương trình $F^{/}(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.
Vậy đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có duy nhất một điểm cực trị.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊM HÀM ĐỔI BIẾN SỐ

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Đổi biến dạng 1

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C$.

1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn t=$\varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $dt = \varphi'(t)dt$.
- *Bước 3:* Biểu thị : $f(x)dx = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = g(t)dt$.
- *Bước 4:* Khi đó : $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dấu hiệu	**Cách chọn**
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2} \neq 0\right)$
Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với : $x + a > 0$ và $x + b > 0$. Đặt : $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$. Đặt : $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

2. Đổi biến dạng 2

Nếu : $\int f(x)dx = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì : $\int f(u)du = F(\varphi(t)) + C$

2.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Lấy vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$
- *Bước 3:* Biến đổi : $f(x)dx = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- *Bước 4:* Khi đó tính : $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dấu hiệu	**Cách chọn**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = \lvert a\rvert \sin t$; với $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x = \lvert a\rvert \cos t$; với $t \in \left[0;\pi\right]$.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t}$.; với $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t}$ với $t \in \left[0;\pi\right] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

$\sqrt{a^2+x^2}$	Đặt $x=\lvert a\rvert \tan t$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x=\lvert a\rvert\cot t$ với $t\in(0;\pi)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.	Đặt $x=a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	Đặt $x=a\tan t$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho F(x) là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}$, biết $F(0)=0$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

A. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Lời giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{\tan^2 x+1+a}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x+1+a}}d\sqrt{\tan^2 x+1+a}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{4}+1+a}-\sqrt{\tan^2 0+1+a}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow\sqrt{a+2}=\sqrt{a+1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+2=a+1+2\sqrt{a+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+5-2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{a+1}\Rightarrow a=1$$

Do đó $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3}+2}-\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{4}+2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Chọn A

Câu 2. **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho $\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx=\frac{1}{a}.\frac{(x-1)^b}{(x+1)^c}+C$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 4.2018. **B.** 2.2018. **C.** 3.2018. **D.** 5.2018.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx=\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(x+1)^2}dx.$$

Đặt $t=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\int t^{2017}\dfrac{\mathrm{d}t}{2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{2018}}{2018}+C=\dfrac{1}{2.2018}.\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C=\dfrac{1}{2.2018}.\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C$

$=\dfrac{1}{2.2018}.\dfrac{(x-1)^{2018}}{(x+1)^{2018}}+C$.

Suy ra $a=2.2018$, $b=2018$, $c=2018$ nên $a+b+c=4.2018$.

Câu 3. Giả sử $\int\dfrac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\dfrac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=\left[(x^2+3x)+1\right]^2$.

Đặt $t=x^2+3x$, khi đó $\mathrm{d}t=(2x+3)\mathrm{d}x$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int\dfrac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\dfrac{1}{t+1}+C$.

Trở lại biến x, ta có $\int\dfrac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\dfrac{1}{x^2+3x+1}+C$.

Vậy $g(x)=x^2+3x+1$.

$g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{16}$. **B.** $\sqrt[3]{18}$. **C.** $\sqrt[3]{16}$. **D.** $2\sqrt[3]{18}$.

Lời giải

thì ta tìm được $(f(x))^3=3\left(x^3+2x^2+2x+\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+\dfrac{1}{3}\right)}=\sqrt[3]{g(x)}$.

$g(-2).g(1)=-11.16<0\Rightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $(-2;1)\Rightarrow$ Hàm số $f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$ không có đạo hàm trên $[-2;1]$. Trái với giả thiết.

Do vậy mình đã sửa lại giả thiết của đề $f(0)=3$ để hợp lí hơn.

Câu 5. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. $F\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **B.** $F\left(x\right)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

C. $F\left(x\right)=\sqrt{1+x^2}+C$. **D.** $F\left(x\right)=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

Lời giải

Ta có bài toán gốc sau:

Bài toán gốc: Chứng minh $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c\left(a\in\mathbb{R}\right)$

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+a}\Rightarrow dt=\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)dx\Leftrightarrow dt=\dfrac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx$ $\Leftrightarrow dt=\dfrac{tdx}{\sqrt{x^2+a}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Vậy khi đó $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$ (điều phải chứng minh).

Khi đó áp dụng công thức vừa chứng minh ta có

$F\left(x\right)=\int\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$.

Chọn A

Câu 6. **(HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(0\right)$$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2-1\right)dt=2\left(\frac{2t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+F\left(0\right)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+2=\frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 7. Biết $\int\left(\cos^2x-\sin^2x\right)^5.\sin 4xdx=-\dfrac{\cos^7 2x}{a}+C$. Với a là số nguyên. Tìm a?

A. $a=6$. **B.** $a=12$. **C.** $a=7$. **D.** $a=14$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=\int\left(\cos^2x-\sin^2x\right)^5.\sin 4xdx$, Ta có:

$f\left(x\right)=\int\left(\cos^2x-\sin^2x\right)^5.\sin 4xdx=\int\left(\cos 2x\right)^5.2\sin 2x.\cos 2x$

$=2\int\cos^6 2x.\sin 2xdx$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx$

Vậy $F\left(x\right)=-\int t^6dt=\dfrac{-t^7}{7}+C=-\dfrac{\cos^7 2x}{7}+C$

Chọn C

Câu 8. Tìm $R=\int\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}dx$?

A. $R=-\dfrac{\tan 2t}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

B. $R=-\dfrac{\tan 2t}{2}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

C. $R=\dfrac{\tan 2t}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

D. $R=\dfrac{\tan 2t}{2}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$ với $t=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $x=2\cos 2t$ với $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $\begin{cases}dx=-4\sin 2t.dt\\ \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}=\sqrt{\dfrac{2-2\sin 2t}{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\dfrac{4\sin^2 t}{4\cos^2 t}}=\dfrac{\sin t}{\cos t}\end{cases}$

$\Rightarrow R=-\int\dfrac{1}{4\cos^2 2t}.\dfrac{\sin t}{\cos t}.4\sin 2t.dt=-\int\dfrac{2\sin^2 t}{\cos^2 2t}dt=-\int\dfrac{1-\cos 2t}{\cos^2 2t}dt$

$\Leftrightarrow R=-\int\dfrac{1}{\cos^2 2t}dt+\int\dfrac{1}{\cos 2t}dt=-\dfrac{\tan 2t}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t}\right|+C$

Chọn A

Câu 9. $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ có dạng $\dfrac{a}{4}x^4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, trong đó a,b là hai số hữu tỉ. Giá trị b,a lần lượt bằng:

A. $2;1$. **B.** $1;1$. **C.** $a,b\in\varnothing$ **D.** $1;2$.

Lời giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có:

$\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx=\int\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ và $I_2=\int\sqrt{x+1}\,dx$ và tìm I_1,I_2.

*Tìm $I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$.

$I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$ ta được $t^2 = x+1,\ 2tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$ thì

$a = 1 \in \mathbb{Q},\ b = 2 \in \mathbb{Q}$.

Vậy đáp án chính xác là đáp án **D**

Cách 2:Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a, b ở các đáp án vào $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$. Sau đó, với mỗi a, b ở các đáp án A, B, D ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \frac{b}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không chú ý đến thứ tự b, a nên học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$ ta được $t^2 = x+1,\ tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C$ thì

$a = 1 \in \mathbb{Q},\ b = 1 \in \mathbb{Q}$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx$.

$I_2 = \int \sqrt{x+1}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + C_2$.

Suy ra $\int\left(x^3+\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)dx$ không thể có dạng $\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x+\frac{b}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$, với $a,\, b\in\mathbb{Q}$.

Nên không tồn tại a,b thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10. $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó $a,\, b$ là hai số hữu tỉ. Giá trị $a,\, b$ lần lượt bằng:

A. $3;\, 1$. **B.** $1;\, 3$. **C.** $3;\, 2$. **D.** $6;\, 1$.

Lời giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int\left((x+1)e^{2(x+1)}+\cos 2x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có:

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)+(7x-3)}+\cos 2x\right)dx.$$

$$=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx+\int\cos 2x\,dx$$

Để tìm $\int\left((x+1)e^{(x^2-5x+4)}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx$ và $I_2=\int\cos 2x\,dx$ và tìm I_1, I_2.

*Tìm $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx$.

Đặt $t=(x+1)^2;\, dt=2(x+1)(x+1)'\,dx=2(x+1)dx$.

$I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

*Tìm $I_2=\int\cos 2x\,dx$.

$I_2=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=3\in\mathbb{Q},\, b=1\in\mathbb{Q}$.

Chọn A

Cách 2:

Sử dụng phương pháp loại trừ bằng cách thay lần lượt các giá trị $a,\, b$ ở các đáp án vào $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ và lấy đạo hàm của chúng.

Sai lầm thường gặp

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ không để ý đến thứ tự sắp xếp $b,\, a$ nên khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_2=\int\cos 2x\,dx$.

$I_2=\int\cos 2x\,dx=\sin 2x+C_2$.

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\sin 2x+C_2=\frac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\sin 2x+C.$$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=3\in\mathbb{Q},\ b=2\in\mathbb{Q}.$

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx$.

Đặt $t=(x+1)^2;dt=(x+1)(x+1)'\,dx=(x+1)dx$.

$I_1=\int(x+1)e^{(x+1)^2}\,dx=\int e^t dt=e^t+C_1=e^{(x+1)^2}+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$ nên ta được:

$$\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx=I_1+I_2=e^{(x+1)^2}+C_1+\frac{1}{2}\sin 2x+C_2=e^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Suy ra để $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$ thì $a=6\in\mathbb{Q},\ b=1\in\mathbb{Q}.$

Câu 11. Tìm $I=\int\frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx$?

A. $I=x+\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$. **B.** $I=x-\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$.

C. $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$. **D.** $I=\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}-1\right)+C$.

Lời giải

$$I=\int\frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx=\int\frac{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx=\int dx+\int\frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)}dx$$

Đặt: $t=e^x.\sqrt{x-1}+1\Rightarrow dt=\left(\frac{e^x}{2\sqrt{x-1}}+e^x\sqrt{x-1}\right)dx=\frac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}}dx$

Vậy $\Rightarrow I=\int dx+\int\frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}\left(e^x\sqrt{x-1}+1\right)}dx=x+\int\frac{1}{t}dt=x+\ln|t|+C=x+\ln\left(e^x.\sqrt{x-1}+1\right)+C$

Chọn A

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}$?

A. $\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

B. $\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

C. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2016\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

D. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

Lời giải

Đặt $I=\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx$

+Ta có:

$$I=\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)^x+2017x}{\ln\left[\left(e.x^2+e\right)^{x^2+1}\right]}dx=\int \frac{x\ln\left(1+x^2\right)+2017x}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+\ln e\right]}dx=\int \frac{x\left[\ln\left(1+x^2\right)+2017\right]}{\left(x^2+1\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)+1\right]}dx$$

+ Đặt: $t=\ln\left(1+x^2\right)+1\Rightarrow dt=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$$\Rightarrow I=\int \frac{t+2016}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2016}{t}\right)dt=\frac{1}{2}t+1008\ln t+C$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+1008\ln\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]+C$$

Chọn D

Câu 13. **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx$.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(|4x-1|)dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=I+J.$

+) Xét $I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$

Đặt $t=1-4x\Rightarrow dt=-4dx;$

Với $x=-1\Rightarrow t=5; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx=\int_{5}^{0} f(t)(-\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_0^5 f(t)dt=\frac{1}{4}\int_0^5 f(x)dx=1.$$

+) Xét $J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx.$

Đặt $t=4x-1\Rightarrow dt=4dx;$

Với $x=1\Rightarrow t=3; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=\int_{0}^{3} f(t)(\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(x)dx=2.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=3.$

Câu 14. Tìm $G=\int \frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{(x^2+x\ln x)^2}dx$?

A. $G=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **B.** $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$.

C. $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **D.** $G=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C$.

Lời giải

Ta có:

$$G=\int \frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{(x^2+x\ln x)^2}dx=\int \frac{\left[x^2+2x\ln x+\ln^2 x\right]+x+x^2}{x^2(x+\ln x)^2}dx=\int \frac{(x+\ln x)^2+x(x+1)}{x^2(x+\ln x)^2}dx$$

$$\Leftrightarrow G=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}\right)dx=-\frac{1}{x}+\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}dx=\frac{-1}{x}+J \qquad \left(J=\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}dx\right)$$

Xét nguyên hàm: $J=\int \frac{x+1}{x(x+\ln x)^2}dx$

\+ Đặt: $t=x+\ln x \Rightarrow dt=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

$$\Rightarrow J=\int \frac{1}{t^2}dt=\frac{-1}{t}+C=\frac{-1}{x+\ln x}+C$$

Do đó: $G=\frac{-1}{x}+J=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$

Chọn A

Câu 15. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.(x^n+\ln^n x)}$?

A. $\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$. **B.** $\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$.

C. $-\frac{1}{n}\ln|x|+\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|+2016$. **D.** $-\frac{1}{n}\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+\ln^n x|-2016$.

Lời giải

Ta có:

$$L=\int \frac{1-\ln x}{x^{1-n}.\ln x.(x^n+\ln^n x)}dx=\int \frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{x^{-n-1}.\ln x.(x^n+\ln^n x)}dx=\int \frac{1-\ln x}{x^2}.\frac{1}{\frac{\ln x}{x}\left(1+\frac{\ln^n x}{x^n}\right)}dx$$

Đặt: $t=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow dt=\frac{1-\ln x}{x^2}dx \Rightarrow L=\int \frac{dt}{t(t^n+1)}=\int \frac{t^{n-1}dt}{t^n(t^n+1)}$

\+ Đặt $u=t^n+1 \Rightarrow du=n.t^{n-1}dt$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{n}\int\frac{du}{u(u-1)}=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{n}.\left[\ln|u-1|-\ln|u|\right]+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C$$

$$\Leftrightarrow L=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{t^n}{t^n+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\frac{\ln^n x}{x^n}}{\frac{\ln^n x}{x^n}+1}\right|+C=\frac{1}{n}.\ln\left|\frac{\ln^n x}{\ln^n x+x^n}\right|+C$$

Chọn A

Câu 16. **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ và $F(0)=-\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2$ là:

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2;3\}$. **C.** $S=\{-2;3\}$. **D.** $S=\{-3;3\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f(x)dx=\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$. $I=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\ln t-\ln(t+1)+C=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C.$

Khi đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C,\ F(0)=-\ln 2e\Leftrightarrow -\ln 2+C=-\ln 2-1\Leftrightarrow C=-1$

Do đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)-1$.

$F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow \ln e^x-\ln(e^x+1)-1+\ln\left(e^x+1\right)=2\Leftrightarrow \ln e^x=3\Leftrightarrow x=3.$

Câu 17. Khi tính nguyên hàm $\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$ người ta đặt $t=g(x)$ (một hàm biểu diễn theo biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là:

A. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Đối với bài này HS cần pahir nắm được kĩ thuật biến đổi khi tính nguyên hàm. Hs cần phải dự đoán phép đặt ẩn phụ, đầu tiên ta thấy nguyên hàm có thể biến đổi thành:

$$\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}dx$$

Do đó ta đặt:

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Vì vậy suy ra $\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int 2dt$

Tuy nhiên đây là **Lời giải** sai, ta có thể thấy khi đặt

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+C\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Với C là hằng số, kết quả không thay đổi. Vì vậy chính xác ở đây là:

$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+C=g(x)$. Theo đề $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$ n33n suy ra C=0.

Cuối cùng ta được $g(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$ vì vậy $g(0)+g(1)=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

Chọn C

Chú ý: Bài toán này hoàn toàn có thể dùng MTCT để chọn kết quả, Ta có:

$$\int 2dt=\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx\Rightarrow t=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$$

Do đó $g(x)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$. Suy ra:

$$g(0)-g(4)=\int_4^0\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx\Rightarrow g(0)=\int_4^0\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

Và:

$$g(1)-g(4)=\int_4^1\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx\Rightarrow g(1)=\int_4^1\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

Sử dụng MTCT bấm:

$$\int_4^0\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)+\int_4^1\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx+g(4)$$

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

Ta có: $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int(f(x))^2.f'(x)dx=\int(3x^2+4x+2)dx\Leftrightarrow\int(f(x))^2d(f(x))=x^3+2x^2+2x+C$$

$$\Leftrightarrow\frac{(f(x))^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C\Leftrightarrow(f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+C)\ (1)$$

Theo đề bài $f(0)=3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3=3(0^3+2.0^2+2.0+C)\Leftrightarrow 27=3C\Leftrightarrow C=9$

$$\Rightarrow(f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+9)\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}.$$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3+2x^2+2x+9=x^2(x+2)+2(x+2)+5>0,\forall x\in[-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2;1]$

và $f'(x)=\frac{3(3x^2+4x+2)}{3\sqrt[3]{[3(x^3+2x^2+2x+9)]^2}}=\frac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{[3(x^3+2x^2+2x+9)]^2}}>0,\ \forall x\in[-2;1]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]\Rightarrow\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f\left(x\right)=f\left(1\right)=\sqrt[3]{42}$.

CÁCH 2:

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{3\left(x^3+2x^2+2x+9\right)}=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}.$$

Vì các hàm số $y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3$, $y=2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[-2;1\right]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f\left(x\right)=f\left(1\right)=\sqrt[3]{42}$.

Câu 19. **(CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Cho hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin x\right)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ nên hàm số $F\left(x\right)$ có công thức dạng $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in\left(0;\pi\right)$.

Xét hàm số $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $\left(0;\pi\right)$.

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$$

Xét $F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Trên khoảng $\left(0;\pi\right)$, phương trình $F'\left(x\right)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$$\max\limits_{(0;\pi)} F\left(x\right)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3} \Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$, $M=3$.

C. $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2=1+f^2(x) \Rightarrow t\mathrm{d}t=f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\displaystyle\int \mathrm{d}t=\sin x+C \Rightarrow t=\sin x+C \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3} \Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2 \Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le \sin x\le 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

A – KIẾN THỨC CHUNG

1. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv = uv - \int vdu$ (với $du = u'(x)dx,\ dv = v'(x)dx$)

1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$
- *Bước 2:* Đặt : $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'_1(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$
- *Bước 3:* Khi đó : $\int u.dv = u.v - \int v.du$

2. Các dạng thường gặp

2.1. Dạng 1

$I = \int P(x)\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'.du = P'(x)dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} \end{cases}$

Vậy: $I = P(x)\begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix}$ - $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix}.P'(x)dx$

2.2. Dạng 2

$I = \int P(x).\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$

Vậy $I = lnx.Q(x) = \int Q(x).\dfrac{1}{x}dx$

2.3. Dạng 3

$I = \int e^x\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$

Vậy $I =$ $I = e^x\begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix}$ - $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix}e^x dx$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix}e^x dx$ sau đó thay vào I

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: **(ĐH Vinh Lần 1)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\tan^2 x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ là

<u>**A.**</u> $F(x) = x\tan x + \ln(\cos x) - \dfrac{x^2}{2} + C.$ **B.** $F(x) = -x\tan x + \ln(\cos x) - \dfrac{x^2}{2} + C.$

C. $F(x)=x\tan x-\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$ **D.** $F(x)=x\tan x-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

Lời giải

Chọn A

Gọi

$F(x)=\int x\tan^2 x\mathrm{d}x=\int x(\tan^2 x+1-1)\mathrm{d}x=\int x(\tan^2 x+1)\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$

Khi đó: $F(x)=\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}x=x\tan x-\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}$

$=x\tan x+\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}-\frac{x^2}{2}=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

Vì $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên $\cos x>0$, suy ra $\ln|\cos x|=\ln(\cos x)$.

Vậy: $F(x)=x\tan x+\ln(\cos x)-\frac{x^2}{2}+C.$

Câu 2: Cho $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

A. $-\frac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\frac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

Ta lại có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\tan x)=x\tan x-\int \tan x\mathrm{d}x=x\tan x-\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=x\tan x+\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=x\tan x+\ln|\cos x|+C\Rightarrow F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|+C$

Lại có: $F(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a)=af(a)-a\tan a-\ln|\cos a|$

Khi đó $f(a)=\frac{a}{\cos^2 a}=a(1+\tan^2 a)=10a$ và $\frac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10\Leftrightarrow \cos^2 a=\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow|\cos a|=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\frac{1}{2}\ln 10$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\frac{15}{e}$. **B.** $4-\frac{10}{e}$. **C.** $\frac{15}{e}-4$. **D.** $\frac{10}{e}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt[3]{x}=t\Rightarrow x=t^3\Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$ khi đó $I=\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int e^t t^2\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t^2=u\\ e^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ e^t=v\end{cases}\Rightarrow I=3\left(e^t t^2-2\int e^t t\mathrm{d}t\right)=3e^t t^2-6\int e^t t\mathrm{d}t$.

Tính $\int e^t t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}t=u\\ e^t\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\\ e^t=v\end{cases}\Rightarrow\int e^t t\mathrm{d}t=te^t-\int e^t\mathrm{d}t=te^t-e^t$.

Vậy $\Rightarrow I=3e^t t^2-6\left(e^t t-e^t\right)+C\Rightarrow F(x)=3e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-e^{\sqrt[3]{x}}\right)+C$.

Theo giả thiết ta có $F(0)=2\Rightarrow C=-4$ $\Rightarrow F(x)=3e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\left(e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}-e^{\sqrt[3]{x}}\right)-4$

$\Rightarrow F(-1)=\frac{15}{e}-4$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-1)+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\ln x.\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=2\int t^2\ln t^2.\mathrm{d}t=4\int t^2\ln t.\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=t^2\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=\frac{t^3}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\left(\frac{1}{3}t^3\ln t-\frac{1}{3}\int t^2\mathrm{d}t\right)=2\left(\frac{1}{3}t^3\ln t-\frac{1}{9}t^3+C\right)=\frac{2}{9}t^3(3\ln t-1)+C$

$=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln\sqrt{x}-1\right)+C$

$=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Câu 5: Tìm $H=\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$?

A. $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$.

B. $H=\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

C. $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$.

D. $H=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}-\tan x+C$.

Lời giải

Ta có: $H=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}.\frac{x}{\cos x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{x}{\cos x}\\ dv=\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\frac{d(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}dx\\ v=-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\end{cases}$

$\Rightarrow H=-\frac{x}{\cos x}.\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$

Chọn C

Câu 6: $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a.

Ta có:

$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx+\int x\ln x\,dx$.

Để tìm $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ ta đặt $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ và $I_2=\int x\ln x\,dx$ và tìm I_1, I_2.

* $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1},\ t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1,\ xdx=tdt$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C_1=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

* $I_2=\int x\ln x\,dx$.

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$, ta được:

$$I_2=\int x\ln x\,dx=\int udv=uv-\int vdu$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2.$$

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$$
$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=2\in\mathbb{Q},\ b=3\in\mathbb{Q}.$

Chọn B

Câu 7: Biết $F(x)=a\ln x+\left(b+\frac{c}{x}\right)\ln(2x+3)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{x^2}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=\frac{7}{3}$. **D.** $S=-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{x^2}$ là:

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(2x+3)}{x^2}dx=-\frac{1}{x}.\ln(2x+3)-\int\frac{-1}{x}\frac{2}{2x+3}dx=-\frac{1}{x}.\ln(2x+3)-\int\frac{-1}{x}\frac{2}{2x+3}dx$$

$$=-\frac{\ln(2x+3)}{x}+\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+3}\right)dx=-\frac{\ln(2x+3)}{x}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{2}{3}\ln(2x+3)+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln x+\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{x}\right)\ln(2x+3)+C$$

$\Rightarrow F(x)=a\ln x+\left(b+\frac{c}{x}\right)\ln(2x+3)=-\frac{\ln(2x+3)}{x}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{2}{3}\ln(2x+3)+C$, với $C=0$,

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)=-1$$

Câu 8: **(Trần Đại Nghĩa)** Cho $I=\int\limits_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\frac{a}{b}\ln 2-\frac{1}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\frac{a+b}{c}$.

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\int\limits_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx+\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Xét $I_1=\int\limits_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx$.

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$.

$I_1=\int\limits_2^3 \frac{t-1}{t^2}dt=\int\limits_2^3 \frac{1}{t}dt-\int\limits_2^3 \frac{1}{t^2}dt=\ln|t|\Big|_2^3+\frac{1}{t}\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$.

Xét $I_2=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}\ln x\Big|_1^2+\int\limits_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{3}\ln 2+\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

$I_2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}$.

Do đó $I=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}$.

$\Rightarrow S=\frac{a+b}{c}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$.

Câu 9: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Họ nguyên hàm của hàm số $y=\frac{(2x^2+x)\ln x+1}{x}$ là

A. $(x^2+x+1)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $(x^2+x-1)\ln x+\frac{x^2}{2}-x+C$.

C. $(x^2+x+1)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C$. **D.** $(x^2+x-1)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\frac{(2x^2+x)\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$I_1=\int(2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=(2x+1)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x^2+x\end{cases}$.

$$I_1=\left(x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^2+x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\ln x-\int\left(x+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x^2+x\right)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C_2\,.$$

$$\int\frac{\left(2x^2+x\right)\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

$$=\left(x^2+x\right)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C_1+\ln x+C_2=\left(x^2+x+1\right)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C.$$

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)$?

A. $x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$. **B.** $\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2$.

C. $x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$. **D.** $\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)+2x^2$.

Lời giải

Đặt: $\begin{cases}u=\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)\\ dv=x^3dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{16x}{x^4-16}\\ v=\frac{x^4}{4}-4=\frac{x^4-16}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int x^4\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx=\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-\int 4xdx=\left(\frac{x^4-16}{4}\right)\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)-2x^2+C$$

Chọn B

Cách 2:Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

Không khuyến khích cách này vì việc tìm đạo hàm của hàm hợp phức tạp và có 4 đáp án nên việc tìm đạo hàm trở nên khó khăn.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kĩ đề nên chỉ tìm giá trị của b. Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$, $t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1$, $tdt=2xdx$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=1, b=3$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

* $I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$, $t\ge 1$ ta được $t^2=x^2+1$, $tdt=2xdx$.

Suy ra:

$I_1=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Học sinh tìm đúng $I_2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx=I_1+I_2=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C_1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Suy ra để $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}+x\ln x\right)dx$ có dạng $\frac{a}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+\frac{b}{6}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ thì $a=1\in\mathbb{Q}, b=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Q}$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm do tính sai giá trị của b.

Câu 11: **(LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$

B. $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$

C. $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$

D. $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

Lời giải

Cách 1 :

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x\cos(2x-5)+C$

$\Rightarrow \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(3x\cos(2x-5)+C\right)'$

$\Rightarrow f(x) = 3\cos(2x-5) - 6x\sin(2x-5)$

$\Rightarrow f(3x) = 3\cos(6x-5) - 18x\sin(6x-5)$

Xét $\int f(3x)\mathrm{d}x = \int\left(3\cos(6x-5) - 18x\sin(6x-5)\right)\mathrm{d}x$

$= \int 3\cos(6x-5)\mathrm{d}x - \int 18x\sin(6x-5)\mathrm{d}x \;\; (1)$.

Xét $I = \int 18x\sin(6x-5)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} 3x = u \\ 6\sin(6x-5)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ -\cos(6x-5) = v \end{cases}$.

$I = -3x\cos(6x-5) + 3\int\cos(6x-5)\mathrm{d}x$, thay vào (1) ta được $\int f(3x)\mathrm{d}x = 3x\cos(6x-5)+C.$

Cách 2:

Đặt $x = 3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t$.

Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x\cos(2x-5)+C \Leftrightarrow 3\int f(3t)\mathrm{d}t = 3.(3t)\cos(2.3t-5)+C$

$\Leftrightarrow \int f(3t)\mathrm{d}t = 3t\cos(6t-5)+C \Leftrightarrow \int f(3x)\mathrm{d}x = 3x\cos(6x-5)+C$.

Câu 12: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-x^2+2x+C$. **B.** $-x^2+x+C$. **C.** $2x^2-2x+C$. **D.** $-2x^2+2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Do $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$ nên $f(x).e^{2x} = F'(x) = 2x$.

Xét $\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$ ta có:

$\int f'(x).e^{2x}\mathrm{d}x = f(x).e^{2x} - 2\int f(x).e^{2x}\mathrm{d}x = -2x^2+2x+C$.

Câu 13: **(Chuyên Quốc Học Huế Lần1)** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^{ax}\,(a \neq 0)$, sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0)+1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0 < a \le 1$. **B.** $a < -2$. **C.** $a \ge 3$. **D.** $1 < a < 2$.

Lời giải

Chọn A

$F\left(x\right)=\int x^2e^{ax}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=e^{ax}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow F\left(x\right)=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}.A\ \left(1\right)$

Xét $A=\int xe^{ax}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{ax}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow A=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $F\left(x\right)=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^2}\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^3}e^{ax}+C$.

Mà $F\left(\frac{1}{a}\right)=F\left(0\right)+1\Rightarrow\ \frac{1}{a^3}e-\frac{2}{a^3}e+\frac{2}{a^3}e+C=\frac{2}{a^3}+1+C$

$\Rightarrow a^3=e-2\Rightarrow a=\sqrt[3]{e-2}\Rightarrow 0<a\le 1$.

Câu 14: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f'\left(x\right)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f\left(x\right)e^{2x}$ là

A. $\left(x-2\right)e^x+e^x+C$. **B.** $\left(x+2\right)e^{2x}+e^x+C$.

C. $\left(x-1\right)e^x+C$. **D.** $\left(x+1\right)e^x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)+f'\left(x\right)=e^{-x}\Leftrightarrow f\left(x\right)e^x+f'\left(x\right)e^x=1\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)e^x\right)'=1\Leftrightarrow f\left(x\right)e^x=x+C$.

Vì $f\left(0\right)=2\Leftrightarrow 2.e^0=C\Leftrightarrow C=2\Rightarrow f\left(x\right)e^{2x}=\left(x+2\right)e^x$.

Vậy $\int f\left(x\right)e^{2x}dx=\int\left(x+2\right)e^xdx=\int\left(x+2\right)d\left(e^x\right)=\left(x+2\right)e^x-\int e^xd\left(x+2\right)$

$=\left(x+2\right)e^x-\int e^xdx=\left(x+2\right)e^x-e^x+C=\left(x+1\right)e^x+C$.

Phân tích: Bài toán cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ đưa ta tới công thức đạo hàm của tích $\left(u.v\right)'=u'.v+u.v'$ với $u=f\left(x\right)$. Từ đó ta cần chọn hàm v cho phù hợp

Tổng quát: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên K, thỏa mãn $f'\left(x\right)+g\left(x\right)f\left(x\right)=k\left(x\right)$ (Chọn $v=e^{G(x)}$).

Ta có $f'\left(x\right)+g\left(x\right)f\left(x\right)=k\left(x\right)\Leftrightarrow e^{G(x)}f'\left(x\right)+g\left(x\right)e^{G(x)}f\left(x\right)=k\left(x\right)e^{G(x)}$.

$\Leftrightarrow\left(e^{G(x)}f\left(x\right)\right)'=k\left(x\right)e^{G(x)}\Rightarrow e^{G(x)}f\left(x\right)=\int k\left(x\right)e^{G(x)}dx\Leftrightarrow f\left(x\right)=e^{-G(x)}\int k\left(x\right)e^{G(x)}dx$.

Với $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$.

Admin tổ 4 – Strong team : Bản chất của bài toán là cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ liên quan tới công thức đạo hàm của tích $(u.v)'=u'.v+u.v'$ với $u=f(x)$. Khi đó ta cần chọn hàm v thích hợp. Cụ thể, với bài toán tổng quát :

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$ liên tục trên K, $g(x)\neq 0$ với $\forall x\in K$ và thỏa mãn $g(x).f'(x)+h(x).f(x)=k(x)$

Ta sẽ đi tìm v như sau : $\frac{v'}{v}=\frac{h(x)}{g(x)}\Rightarrow \int\frac{v'}{v}dx=\int\frac{h(x)}{g(x)}dx$

Khi đó : $\ln|v|=\int\frac{h(x)}{g(x)}dx\Leftrightarrow |v|=e^{\int\frac{h(x)}{g(x)}dx}$

Câu 15: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

A. $(x^2+1)^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **C.** $(x^2+1)^2e^{-x^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2}(x^2+1)^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}\Leftrightarrow e^{x^2}\left(f'(x)+2xf(x)\right)=e^{x^2}.2xe^{-x^2}\Leftrightarrow\left(e^{x^2}f(x)\right)'=2x$

$\Rightarrow e^{x^2}f(x)=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Vì $f(0)=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f(x)=(x^2+1)e^{-x^2}$.

Vậy $\int xf(x)e^{x^2}\mathrm{d}x=\int x(x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+1)\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)^2+C$.

Câu 16: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)+f'(x)=x$ (1).

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $\mathrm{e}^x.f(x)+\mathrm{e}^x.f'(x)=x.\mathrm{e}^x$.

Hay $\left[\mathrm{e}^x.f(x)\right]'=x.\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{e}^x.f(x)=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Xét $I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Suy ra $\mathrm{e}^xf(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ nên $C=2$ $\Rightarrow f(x)=\dfrac{x.e^x-e^x+2}{e^x}\Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{e}$.

Câu 17: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Biết rằng xe^x là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)e^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5-e}{2}$. **C.** $\dfrac{7-e}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì xe^x là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Rightarrow f(-x)=(xe^x)'=e^x+xe^x$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f(-x)=e^{-(-x)}-(-x)e^{-(-x)}$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow f(x)=e^{-x}(1-x)$, $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Nên $f'(x)=\left[e^{-x}(1-x)\right]'=e^{-x}(x-2)\Rightarrow f'(x)e^x=e^{-x}(x-2).e^x=x-2$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-2)\,dx=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+C$.

Từ đó $F(0)=\dfrac{1}{2}(0-2)^2+C=C+2$; $F(0)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-1\Rightarrow F(-1)=\dfrac{1}{2}(-1-2)^2-1=\dfrac{7}{2}$.

Câu 18: **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$.

Biết hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int \pi^x\cos x dx$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x)=-\pi^x\ln\pi$. **B.** $f(x)=\dfrac{\pi^x}{\ln\pi}$. **C.** $f(x)=\pi^x\ln\pi$. **D.** $f(x)=-\dfrac{\pi^x}{\ln\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int\pi^x\cos x dx$ (1).

Xét $\int f(x)\sin x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)\\ dv=\sin x dx\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$. Ta được $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int f'(x)\cos x dx$.

Theo hệ thức (1), suy ra $f'(x)=\pi^x$.

Dựa vào đáp án, ta nhận thấy có một hàm số thỏa mãn là $f(x)=\dfrac{\pi^x}{\ln\pi}$.

Câu 19: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}\cos x$, $\forall x\in(0;+\infty)$; $f(4\pi)=0$. Giá trị biểu thức $f(9\pi)$ là:

A. 0. **B.** $-3\sqrt{\pi}$. **C.** $-\sqrt{\pi}$. **D.** $-2\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Với mọi $x\in(0;+\infty)$, ta có

$2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}f'(x)-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)}{x}=\frac{x\cos x}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{x\cos x}{2}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{x\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+C$$

Mà $f(4\pi)=0$ suy ra $C=\frac{-1}{2}$. Vậy $f(x)=\left(\frac{x\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}$.

Suy ra $f(9\pi)=-3\sqrt{\pi}$.

Câu 20: **(Nguyễn Khuyến)**Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x^2}$ thỏa mãn $F(-2)+F(1)=0$ và $F(-1)+F(2)=a\ln 2+b\ln 5$, với a, b là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+6b$ bằng

A. -4. **B.** 5. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $u=\ln(x+3)$ và $\mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x$ và chọn $v=-\frac{1}{x}$. Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\int\frac{1}{x(x+3)}\mathrm{d}x$ = $-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln(x+3)+C=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln|x|+C.$$

+) Xét trên $(-3;0)$ ta được $F(x)=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln(-x)+C_1$

Tính $F(-2)=\frac{1}{6}\ln 1+\frac{1}{3}\ln 2+C_1=\frac{1}{3}\ln 2+C_1$; $F(-1)=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 1+C_1=\frac{2}{3}\ln 2+C_1$

+) Xét trên $(0;+\infty)$ ta được $F(x)=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln x+C_2$.

Tính $F(1)=-\frac{4}{3}\ln 4+\frac{1}{3}\ln 1+C_2=-\frac{8}{3}\ln 2+C_2$; $F(2)=-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2$.

Ta có $F(-2)+F(1)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\ln 2+C_1-\frac{8}{3}\ln 2+C_2=0\Leftrightarrow C_1+C_2=\frac{7}{3}\ln 2$.

Từ đó $F\left(-1\right)+F\left(2\right)=\frac{2}{3}\ln 2+C_1-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2=\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5+C_1+C_2$.

$=\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{7}{3}\ln 2=\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5=a\ln 2+b\ln 5$ ta được $a=\frac{10}{3}$; $b=-\frac{5}{6}$ $\Rightarrow 3a+6b=5$.

Câu 21: **(SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f\left(x\right)+\tan x.f'\left(x\right)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn D

$f\left(x\right)+\tan x.f'\left(x\right)=\frac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x.f\left(x\right)+\sin x.f'\left(x\right)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow \left[\sin x.f\left(x\right)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f\left(x\right)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x.f\left(x\right)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Tính $I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x+\int\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln\left|\cos x\right|$.

Suy ra $f\left(x\right)=\frac{x.\tan x+\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}=\frac{x}{\cos x}+\frac{\ln\left|\cos x\right|}{\sin x}$.

$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: • Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2\ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1\ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases}f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{3} & (1)\\ f(3)-f(1)=\int\limits_{1}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\frac{2dx}{2x-1}=\ln|2x-1|\,\Big|_{1}^{3}=\ln 5 & (2)\end{cases}$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3)-f(1)-f(0)+f(-1)=\ln 15\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}, f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x)=\frac{3}{3x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1\ \text{khi x}\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+C_1\ \text{khi x}\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\ f\left(\frac{2}{3}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+1\ \text{khi x}\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+2\ \text{khi x}\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases}f(0)-f(-1)=f(x)\Big|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{-1}^{0}=\ln\frac{1}{4} & (1)\\ f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)=f(x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}f'(x)\mathrm{dx}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\frac{3}{3x-1}\mathrm{dx}=\ln|3x-1|\Big|_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 & (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\ln 32 \Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 3: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\dfrac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln|x+2|+C$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

+ Xét trên khoảng $(-2;+\infty)$ ta có: $f(0)=1 \Leftrightarrow -7\ln 2+C=1 \Rightarrow C=1+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in(-2;+\infty)$.

Suy ra $f(2)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2$.

+ Xét trên khoảng $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-4)=2 \Leftrightarrow -12-7\ln 2+C=2 \Rightarrow C=14+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln|x+2|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in(-\infty;-2)$.

Suy ra $f(-3)=5+7\ln 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$; $f(-3)=0$; $f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\dfrac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4} \Rightarrow f(x)=\int\dfrac{4dx}{x^2-4}=\int\dfrac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_1 \; khi\; x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_2 \; khi\; x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C_3 \; khi\; x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}f(-3)=0\\ f(0)=1\\ f(2)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln 5+C_1=0\\ 0+C_2=1\\ \ln\dfrac{1}{5}+C_3=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_1=-\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=2+\ln 5\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\text{-ln5} & khi\; x\in(-\infty;-2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+1 & khi\; x\in(-2;2)\\ \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+2+\ln 5 & khi\; x\in(2;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=\ln 3-\ln 5+\ln 3+1+\ln\dfrac{1}{3}+2+\ln 5=3+\ln 3$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$. **B.** $1+\ln 80$. **C.** $1+\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}$. **D.** $1+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

Do đó $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln 4+C_1-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}-C_3\Rightarrow C_3=C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10$.

Và $f(0)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1 & khi\quad x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2 & khi\quad x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10 & khi\quad x\in(1;+\infty)\end{cases}.$$

Khi đó:

$f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+C_1\right)+\left(\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Giá trị $T=f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng:

A. $T=2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{9}$. **B.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **C.** $T=3+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Do $f(-3)+f(3)=0$ nên $C_1=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ nên $C_2=1$.

Nên $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} & \text{khi } x<-1, x>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+1 & \text{khi } -1<x<1\end{cases}$. $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Vậy $f(2)+f(-3)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12$.

Câu 7: **(THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\dfrac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\dfrac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\dfrac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\dfrac{323}{15}$.

Lời giải

Ta có $\int f'(x).f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^4+x^2)\,\mathrm{d}x+C\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2)=2\left(\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}+2\right)=\dfrac{332}{15}$.

Câu 8: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{96}$. **B.** $\dfrac{1}{64}$. **C.** $\dfrac{1}{48}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=x^3\Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\dfrac{x^4}{4}+C$.

$f(1)=-1\Rightarrow C=-\dfrac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x^4-5}{4x}\Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{96}$.

Câu 9: **(ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2\Leftrightarrow\dfrac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\dfrac{-2x^3-3x^2}{x^2}\Leftrightarrow\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\dfrac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Ta có $\left(f\left(x\right).f'\left(x\right)\right)'=\left(f'\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+\mathrm{C},\forall x\in\mathbb{R}$.

Lại có $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$ nên $C=1$ do đó $f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\left(\left(f\left(x\right)\right)^2\right)'=2f\left(x\right).f'\left(x\right)=6x^5+12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=x^6+4x^3+2x+C_1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f\left(0\right)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $\left(f\left(1\right)\right)^2=1^6+4.1^3+2.1+1=8$.

Câu 11: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $\left[-1;0\right]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện
$f'\left(x\right)=\left(3x^2+2x\right)e^{-f(x)}$, $\forall x\in\left[-1;0\right]$. Tính $A=f\left(0\right)-f\left(-1\right)$.

A. $A=-1$. **B.** $A=\frac{1}{e}$. **C.** $A=1$. **D.** $A=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)=\left(3x^2+2x\right)e^{-f(x)}$, $\forall x\in\left[-1;0\right]$ $\Leftrightarrow f'\left(x\right)e^{f(x)}=3x^2+2x$, $\forall x\in\left[-1;0\right]$ $(*)$

Lấy nguyên hàm hai vế của $(*)$ ta được $\int e^{f(x)}\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=x^3+x^2+C$

$\Rightarrow e^{f(x)}=x^3+x+C_1$ $\Rightarrow f\left(x\right)=\ln\left|x^3+x+C_1\right|$

Do đó $\begin{cases}f\left(0\right)=\ln\left|C_1\right|\\ f\left(-1\right)=\ln\left|C_1\right|\end{cases}\Rightarrow f\left(0\right)-f\left(-1\right)=0$. Vậy $A=0$.

Câu 12: **(THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – HÀ NỘI)** Giả sử hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1, f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $4<f\left(5\right)<5$. **B.** $1<f\left(5\right)<2$. **C.** $3<f\left(5\right)<4$. **D.** $2<f\left(5\right)<3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

$\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$.

Vì $f\left(1\right)=1\Rightarrow C+\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow\ln f\left(x\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}\Leftrightarrow f\left(x\right)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f\left(5\right)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,8$.

Vậy $3<f\left(5\right)<4$.

Câu 13: **(Sở Quảng Ninh Lần1)** Biết luôn có hai số a và b để $F\left(x\right)=\frac{ax+b}{x+4}\left(4a-b\neq 0\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ và thỏa mãn $2f^2\left(x\right)=\left(F\left(x\right)-1\right)f'\left(x\right)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1,\ b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Lời giải

Chọn D

Do $4a-b\neq 0$ nên $F(x)\neq C\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{2f(x)}{F(x)-1}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân dx ta được: $\displaystyle\int\frac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với C là hằng số.

$$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow |f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\\ f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^C.((a-1)x+b-4)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ \left[\begin{array}{l}b=4\\ b=\dfrac{4e^C-1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C-1}{e^C}\right)$.

Trường hợp 2. $f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$-e^C.((a-1)x+b-4)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ -e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ \left[\begin{array}{l}b=4\\ b=\dfrac{4e^C+1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C+1}{e^C}\right)$.

Tổng hợp cả hai trường hợp ta chọn đáp án **D.**

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\frac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$ và $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên ta có $-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\frac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Mặt khác $f(2)=\frac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}=\frac{7}{30}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ $f^6(x).f'(x)=12x+13 \Rightarrow \int f^6(x).f'(x)dx=\int(12x+13)dx$

$\Leftrightarrow \int f^6(x)df(x)=6x^2+13x+C \Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7}=6x^2+13x+C \xrightarrow{f(0)=2} C=\frac{2}{7}$.

Suy ra: $f^7(x)=42x^2+91x+2$.

Từ $f(x)=3 \Leftrightarrow f^7(x)=2187 \Rightarrow 42x^2+91x+2=2187 \Leftrightarrow 42x^2+91x-2185=0\,(*)$.

Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu do $ac<0$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng

A. $S=\frac{31}{2}$. **B.** $S=\frac{9}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{2}$. **D.** $f(0).f(2)=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\frac{|e^x-1|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x\ge 0 \\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có $f(0)=5$ nên $2e^0+2e^0+C_1=5 \Leftrightarrow C_1=1$.

$\Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$

Tương tự $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=5$.

$\Rightarrow f\left(-\ln 16\right)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\dfrac{7}{2}$.

Vậy $S=f\left(-\ln 16\right)+f\left(\ln 4\right)=\dfrac{5}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=2-2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>e$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0<m<e$. **D.** $1<m<e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=2-2x\Rightarrow\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\left(2-2x\right)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \ln f\left(x\right)=2x-x^2+C\Leftrightarrow f\left(x\right)=A.e^{2x-x^2}$. Mà $f\left(0\right)=1$ suy ra $f\left(x\right)=e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x-x^2=1-\left(x^2-2x+1\right)=1-\left(x-1\right)^2\le 1$. Suy ra $0<e^{2x-x^2}\le e$ và ứng với một giá trị thực $t<1$ thì phương trình $2x-x^2=t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f\left(x\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0<m<e^1=e$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)$ và $f\left(1\right)=-0,5$. Biết rằng tổng $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2017\right)=\dfrac{a}{b}$; $\left(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $a\in\left(-2017;2017\right)$. **C.** $\dfrac{a}{b}<-1$. **D.** $b-a=4035$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=\left(2x+1\right)\Rightarrow\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f\left(x\right)}=x^2+x+C$

Mà $f\left(1\right)=-\dfrac{1}{2}$ nên $C=0\Rightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

Mặt khác $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2017\right)=\left(\dfrac{1}{2}-1\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2017}\right)$

$\Leftrightarrow f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2017\right)=-1+\dfrac{1}{2018}=\dfrac{-2017}{2018}\Rightarrow a=-2017;\ b=2018$.

Khi đó $b-a=4035$.

Câu 19: **(SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f\left(x\right)\ne 0$ với mọi x và thỏa mãn $f\left(1\right)=-\dfrac{1}{2}$, $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)$ .Biết $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2019\right)=\dfrac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},\left(a,b\right)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\le 2020$.

Lời giải

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{d(f(x))}{f^2(x)}=\int(2x+1)dx$$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+x+C\ \ (1)$ (Với C là hằng số thực).

Thay $x=1$ vào (1) được $2+C=-\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow C=0$ .Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

$$T=f(1)+f(2)+...+f(2019)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=-1+\frac{1}{2020}.$$

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\b=2020\end{cases}\Rightarrow a-b=-2019$

Câu 20: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $\forall x>0$ và $f(2)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

A. $\dfrac{2021}{2020}$. **B.** $\dfrac{2020}{2019}$. **C.** $\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $f(x)=0\Rightarrow f'(x)=0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x)\neq0\Rightarrow f'(x)=-(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1)$.

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{-1}{f(x)}=-(x^2+x+C).$$

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{6}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$$\Rightarrow P=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)\neq0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.	**B.** $\frac{a}{b} > 1$.
C. $a + b = 1010$.	**D.** $b - a = 3029$.

Lời giải

Chọn D

Biến đổi $f'(x) = (2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int (2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0) = \frac{-1}{2}$ nên $= 2$.

Do đó $f(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó $\frac{a}{b} = f(1) + f(2) + ... + f(2017) + f(2018)$

$= -\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right)$

$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2020}\right) = \frac{-1009}{2020}$.

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases} a = -1009 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3029$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$, $\forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x).f(x) - 2\left[f'(x)\right]^2 + xf^3(x) = 0 \\ f'(0) = 0;\ f(0) = 1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{3}$.	**B.** $\frac{3}{2}$.	**C.** $\frac{6}{7}$.	**D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f''(x).f(x) - 2\left[f'(x)\right]^2 + xf^3(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x).f(x) - 2\left[f'(x)\right]^2}{f^3(x)} = -x$

$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]' = -x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{f'(0)}{f^2(0)} = -\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0$.

Do đó $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_0^1 = \left(-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow -\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(1) = \frac{6}{7}$.

Câu 23: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$.	**B.** $(7;9)$.	**C.** $(0;1)$.	**D.** $(9;12)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$.

Vậy $\ln\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$, mà $f(0)=1\Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Nên $f\left(2\sqrt{2}\right)=3;\ 2f(1)=2\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1)$.

Câu 24: **(THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

Lời giải

Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1$ nên $C=-2\Rightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2>6$

Câu 25: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(5)<3$.

C. $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}\left(f'(x)\right)}{f(x)}=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x+1)\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Khi đó $f(1)=1\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx3,79\in(3;4)$.

Vậy $3<f(5)<4$.

Chú ý: Các bạn có thể tính $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{3x+1}$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int_1^5\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^5\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_1^5\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f(x)}=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow f(5)=f(1).\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx3,79\in(3;4)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\left[f'(x).f(x)\right]'=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó: $f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2$.

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Do đó $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ra ta có:

$$\int\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C\Leftrightarrow 2\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+4}+C.$$

Hay $2\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C\Rightarrow\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{t+3}{t^2+4}+C'$.

Suy ra $\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C_1\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+C$

Câu 28: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Chọn C

Ta có

$x(4-f'(x))=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=4x+1\Leftrightarrow(xf(x))'=4x+1$

$\Rightarrow xf(x)=\int(xf(x))'\mathrm{d}x=\int(4x+1)\mathrm{d}x=2x^2+x+C$.

Với $x=1$ thì $1f(1)=3+C\Leftrightarrow 3=3+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $xf(x)=2x^2+x$. Vậy $2f(2)=2.2^2+2$ hay $f(2)=5$.

Câu 29: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

A. e^{-4}. **B.** e^3. **C.** e^4. **D.** e^{-2}.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)>0$, nên ta có:

$$f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x.$$

$\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:\ln\left|f(x)\right|=2x+C\Rightarrow\ln f(x)=2x+C$.

Cho $x=1\ \Rightarrow\ln f(1)=2+C\ \Leftrightarrow\ln 1=2+C\ \Leftrightarrow C=-2$

Do đó: $\ln f(x)=2x-2\Leftrightarrow f(x)=e^{2x-2}\ \Rightarrow f(-1)=e^{-4}$.

$S=a+b+c=-\frac{9}{2}$.

Câu 30: **(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1,\ b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Lời giải

Do $4a-b\neq 0$ nên $F(x)\neq C\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{2f(x)}{F(x)-1}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân dx ta được: $\displaystyle\int\frac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với C là hằng số.

$$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow |f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\frac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\\ f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^C.((a-1)x+b-4)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ \left[\begin{array}{l}b=4\\ b=\dfrac{4e^C-1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C-1}{e^C}\right)$.

Trường hợp 2. $f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có: $-e^C.\left((a-1)x+b-4\right)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-e^C.(b-4)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C+1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $(a;b)=\left(1;\dfrac{4e^C+1}{e^C}\right)$.

Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1$ $(do\ f(x)\neq 0)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x+C}$

Mà $f(1)=-0,5\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$

Nên

$$f(2017)+f(2016)+...+f(1)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2018}-1=-\frac{2017}{2018}$$

Suy ra $a=-2017;b=2018$ nên $b-a=4035$.

Câu 32: **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Với $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x$ $(*)$.

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Ta có $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 33: **(Sở Bắc Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=(2x+1)$.

Suy ra $\int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\dfrac{\mathrm{d}\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C \Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3 \Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f(1)=\sqrt{24}$.

Câu 34: **(THPT YÊN PHONG 1 NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ và $f(x)>-1$, $f(0)=0$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Cách 1.

Với điều kiện bài toán

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}+C$.

Với $f(0)=0$ ta có $1=1+C \Leftrightarrow C=0$.

Khi đó $\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=x^2$

Vậy $f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

Cách 2.

Từ giả thiết ta suy ra được $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(*)$.

Ta có $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\sqrt{f(x)+1}\right|_0^{\sqrt{3}} = \left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1} - \sqrt{f(0)+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1} = 2 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right) = 3$.

Câu 35: **(KHTN Hà Nội Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x) + \frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}} = [f'(x)]^2$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;4]$. Biết rằng $f'(0) = f(0) = 1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** e^3. **D.** e^2+1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f''(x)f(x) + \frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}} = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 = -\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C_1$.

Thay $x=0$ ta được: $C_1 = 0$.

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \ln[f(x)] = \sqrt{2x+1} + C_2$

Thay $x=0$ ta được $C_2 = -1$.

$\Rightarrow \ln[f(x)] = \sqrt{2x+1} - 1$

Thay $x=4$ ta được $\ln[f(4)] = 2 \Rightarrow f(4) = e^2$.

Câu 36: **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$. **B.** $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. **D.** $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Lời giải

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)];\ x > 0$

$\Leftrightarrow x^2.[f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int \left[f(x).f'(x) \right]' .\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) .\mathrm{d}x \Rightarrow f(x).f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$

Vì $f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$

Nên $\int f(x).f'(x).\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) .\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int f(x).\mathrm{d}(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) .\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2$. Vì $f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$

Vậy $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

Câu 37: **(Chuyên Thái Nguyên)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $(f(1))^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(f(x).f'(x))' = (f'(x))^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + \mathrm{C}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Lại có $f(0) = f'(0) = 1$ nên $C = 1$ do đó $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\left((f(x))^2 \right)' = 2f(x).f'(x) = 6x^5 + 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f(x))^2 = x^6 + 4x^3 + 2x + C_1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Mà $f(0) = 1$ nên $C_1 = 1$. Vậy $(f(1))^2 = 1^6 + 4.1^3 + 2.1 + 1 = 8.$