TÍCH PHÂN

1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

* *Nhận xét*: Tích phân của hàm số f từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt.$ Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.

6. Nếu f(x) $\geq 0, \forall x \in \left[a;b\right]$ thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in \left[a;b\right]$

7. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right] : f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right]$ Nếu $M \leq f(x) \leq N$ thì $M\left(b-a\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N\left(b-a\right)$.

3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến

1.1. Phương pháp đổi biến dạng 1

Định lí

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ sao cho $f(x)dx = g\left(u(x)\right)u'(x)dx = g(u)du$ thì: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

1.2. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$
- *Bước 2:* Đổi cận : $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u = u(b) \\ u = u(a) \end{vmatrix}$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo u

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

2.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

Định lí

Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[\alpha;\ \beta\right]$

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $\left[\alpha;\ \beta\right]$,

3) $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

2.2. Phương pháp chung

- *Bước 1*: Đặt $x = u\left(t\right)$
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

  Đổi cận: $\left|\begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{matrix}\right.$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lí

Nếu $u\left(x\right)$ và $v\left(x\right)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

2.1 Phương pháp chung

- *Bước 1:* Viết $f\left(x\right)dx$ dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f\left(x\right)$ làm $u\left(x\right)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- *Bước 2:* Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- *Bước 3:* Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

*** Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lốc-đa-mũ-lượng***	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	*P(x)*	*lnx*	*P(x)*	e^x
dv	$e^x dx$	*P(x)dx*	*cosxdx*	*cosxdx*

Chú ý: Nên chọn u là phần của $f\left(x\right)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của $f\left(x\right)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

3.1. Tích phân hàm hữu tỉ

3.1.1. Dạng 1

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|\Big|_\alpha^\beta. \quad (\text{với } a \neq 0)$$

Chú ý: Nếu $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.adx = \frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

3.1.2. Dạng 2

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}\quad (a\neq 0)\quad (ax^2+bx+c\neq 0 \text{ với mọi } x\in[\alpha;\beta])$$

Xét $\Delta=b^2-4ac$.

- Nếu $\Delta>0$ thì $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=\dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\dfrac{1}{x-x_1}-\dfrac{1}{x-x_2}\right)$ thì :

$$I=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1|-\ln|x-x_2|\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Bigg|_{\alpha}^{\beta}$$

- Nếu $\Delta=0$ thì $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=\dfrac{1}{a(x-x_0)^2}\quad\left(x_0=\dfrac{-b}{2a}\right)$

thì $I=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-x_0)^2}=-\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_{\alpha}^{\beta}$

- Nếu $\Delta<0$ thì $I=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\tan t\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

3.1.3. Dạng 3

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\quad (a\neq 0).$$

(trong đó $f(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

- Ta có I= $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

Tích phân $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx=A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Tích phân $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

3.1.4. Dạng 4

$$I=\int_{a}^{b}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \text{ với } P(x) \text{ và } Q(x) \text{ là đa thức của } x.$$

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì dùng phép chia đa thức.

- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì có thể xét các trường hợp:
- Khi $Q(x)$ chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thì đặt

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm đơn và vô nghiệm

$Q(x) = (x-\alpha)(x^2+px+q), \Delta = p^2 - 4q < 0$ thì đặt

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm bội

$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}.$

$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)} + \frac{C}{(x-\beta)^3} + \frac{D}{(x-\beta)^2} + \frac{E}{x-\beta}$

3.2. Tích phân hàm vô tỉ

$\int_a^b R(x, f(x))dx$ **Trong đó** $R(x, f(x))$ ***có dạng:***

- $R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x = a\cos 2t,\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ Đặt $x = |a|\sin t$ hoặc $x = |a|\cos t$
- $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R(x, f(x)) = \frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}}$ Với $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = k(ax+b)$

Đặt $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, hoặc Đặt $t = \frac{1}{ax+b}$

- $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ Đặt $x = |a|\tan t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$ Đặt $x = \frac{|a|}{\cos x}$, $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- $R\left(\sqrt[n_1]{x}; \sqrt[n_2]{x}; \dots; \sqrt[n_i]{x}\right)$ *Gọi* $k = BSCNN(n_1; n_2; \dots; n_i)$. *Đặt* $x = t^k$

3.2.1. Dạng 1

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$$

Từ : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{b}{2a}=u\\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases}\leftrightarrow du=dx$

Khi đó ta có :

- Nếu $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$ (1)
- Nếu : $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$ (2)
- Nếu : $\Delta>0$.
  - Với $a>0$: $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ (3)
  - Với $a<0$: $f(x)=-a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}.\sqrt{\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

Phương pháp :

** Trường hợp :* $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$

Khi đó đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}.x$

$$\Rightarrow\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}x\\ x=\alpha\rightarrow t=t_0, x=\beta\rightarrow t=t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};dx=\frac{2}{\left(b+2\sqrt{a}\right)}tdt\\ t-\sqrt{a}.x=t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}\end{cases}$$

** Trường hợp :* $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$

Khi đó : $I=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\frac{b}{2a}>0\\ -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_\alpha^\beta : x+\frac{b}{2a}<0\end{array}\right.$

** Trường hợp :* $\Delta>0, a>0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\left[\begin{array}{l}\left(x-x_1\right)t\\ \left(x-x_2\right)t\end{array}\right.$

** Trường hợp :* $\Delta>0, a<0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}=\left[\begin{array}{l}\left(x_1-x\right)t\\ \left(x_2-x\right)t\end{array}\right.$

3.2.2. Dạng 2

$$I=\int_\alpha^\beta\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad(a\neq0)$$

Phương pháp :

- *Bước 1:*

Phân tích $f(x)=\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A.d\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (1)

- *Bước 2:*

Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số A, B

- *Bước 3:*

Giải hệ tìm A, B thay vào (1)

- *Bước 4 :*

Tính $I = 2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} + B\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (2)

Trong đó $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(a \neq 0)$ đã biết cách tính ở trên

3.2.3. Dạng 3

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$$

Phương pháp :

- *Bước 1*:

Phân tích : $\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. (1)

- *Bước 2:*

Đặt : $\frac{1}{y} = x + \frac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x+t}\left(t = \frac{n}{m}\right) \rightarrow dy = -\frac{1}{x+t}dx \\ x = \frac{1}{y} - t \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(\frac{1}{y}-t\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}-t\right) + c \end{cases}$

- *Bước 3:*

Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : $I = \pm\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{dy}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$. Tích phân này chúng ta đã biết cách tính .

3.2.4. Dạng 4

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}R(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta}R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$$

(Trong đó : $R(x;y)$ là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ là các hằng số đã biết)

Phương pháp :

- *Bước 1:*

Đặt : $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ (1)

- *Bước 2:*

Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng $x = \varphi(t)$

- *Bước 3:*

Tính vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$ và đổi cận

- *Bước 4:*

Tính : $\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'}R(\varphi(t);t)\varphi'(t)dt$

3.3. Tích phân hàm lượng giác

3.3.1. Một số công thức lượng giác

3.3.1.1. Công thức cộng

$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

3.3.1.2. Công thức nhân đôi

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a} \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad ; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

3.3.1.3. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \; ; \; \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \; ; \; \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad ; \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

3.3.1.4. Công thức tính theo t

Với $t = \tan\frac{a}{2}$ Thì $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

3.3.1.5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

3.3.1.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Công thức thường dùng:

$$\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \frac{3+\cos 4\alpha}{4}$$

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{5+3\cos 4\alpha}{8}$$

Hệ quả:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

3.3.2. Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp $I = \int_a^b f(\sin x).\cos x dx$ ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cos x).\sin x dx$ ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t = \tan x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t = \cot x$.

3.3.2.1. Dạng 1

$$I_1 = \int (\sin x)^n dx \quad ; \quad I_2 \int (\cos x)^n dx$$

*** Phương pháp**

- Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc
- Nếu $n = 3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi
- Nếu $3n$ lẻ $(n = 2p+1)$ thì thực hiện biến đổi:

$$I_1 = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$= -\int \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k (\cos^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p (\cos^2 x)^p\right] d(\cos x)$$

$$= -\left[C_p^0 \cos x - \frac{1}{3}C_p^1 \cos^3 x + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k (\cos x)^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p (\cos x)^{2p+1}\right] + c$$

$$I_2 = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$= \int \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p\right] d(\sin x)$$

$$= \left[C_p^0 \sin x - \frac{1}{3}C_p^1 \sin^3 x + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k (\sin x)^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p (\sin x)^{2p+1}\right] + c$$

3.3.2.2. Dạng 2

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m, n \in N)$$

*** Phương pháp**

- ***Trường hợp 1:*** m, n ***là các số nguyên***

a. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.
b. Nếu m chẵn, n lẻ $(n = 2p+1)$ thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (\sin x)^m (1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$= \int (\sin x)^m \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p\right] d(\sin x) =$$

$$\left[C_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - C_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} + \ldots + (-1)^k C_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} + \ldots + (-1)^p C_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right] + c$$

c. Nếu m lẻ $(m = 2p+1)$, n chẳn thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^{2p+1} (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^n (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int (\cos x)^n (1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos x)^n \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k (\cos^2 x)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p (\cos^2 x)^p \right] d(\cos x) =$$

$$-\left[C_p^0 \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1} - C_p^1 \frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3} + \ldots + (-1)^k C_p^k \frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n} + \ldots + (-1)^p C_p^p \frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n} \right] + c$$

d. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

- ***Nếu m,n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt $u = sinx$***

$$B = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du \quad (*)$$

Tích phân (*) tính được ⇔ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$; $\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

3.3.2.3. Dạng 3

$$I_1 = \int (\tan x)^n dx \ ; \ I_2 = \int (\cot x)^n dx \ (n \in N).$$

- $\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + c$
- $\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int d(\cot x) = -\cot x + C$
- $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Câu 1. **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Biết $\int\limits_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x = 3\ln\frac{a}{b}-\frac{5}{6}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó a^2-b^2 bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Giả sử: $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+6x+9}=\frac{3x-1}{(x+3)^2}=\frac{A}{(x+3)^2}+\frac{B}{x+3}=\frac{Bx+A+3B}{(x+3)^2}$.

Sử dụng phương pháp đồng nhất thức, suy ra $B=3$ và $A=-10$.

Do đó $f(x)=\frac{-10}{(x+3)^2}+\frac{3}{x+3}$.

Vậy $\int\limits_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{-10}{(x+3)^2}+\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{-10}{(x+3)^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\frac{3}{x+3}\mathrm{d}x=A+B$.

$A=\int\limits_0^1\frac{-10}{(x+3)^2}\mathrm{d}x=\left.\frac{10}{x+3}\right|_0^1=-\frac{5}{6}$.

$B=\int\limits_0^1\frac{3}{x+3}\mathrm{d}x=3\ln|x+3|\Big|_0^1=3\ln\frac{4}{3}$.

Suy ra $a=4$, $b=3$.

Kết luận: $a^2-b^2=4^2-3^2=7$.

Câu 2. **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho tích phân $\int\limits_2^3\frac{1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-\frac{2}{3}$. **B.** $S=-\frac{7}{6}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$

$\Rightarrow\begin{cases}B=1\\A+B=0\\A+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\\C=1\end{cases}$.

Khi đó: $\int\limits_2^3\frac{1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}\right)\right|_2^3=-2\ln 3+3\ln 2+\frac{1}{6}\Rightarrow a=-2$, $b=3$, $c=\frac{1}{6}\Rightarrow S=-2+3+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$.

Câu 3. **(Sở Phú Thọ)** Cho $\int_3^4\frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx=a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx = \int_3^4 \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}dx = \int_3^4 \frac{3(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}dx = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx$$

$$= \left(3\ln|x-1|+2\ln|x-2|\right)\Big|_3^4 = 3\ln 3+2\ln 2-3\ln 2 = 3\ln 3-\ln 2.$$

Suy ra $a=3, b=-1, c=0 \Rightarrow 2^{a-3b+c}=2^6=64$.

Câu 4. **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho $\int\limits_3^5 \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx = a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_3^5 \frac{x^2-2}{x^2-3x+2}\,dx = \int\limits_3^5 \left(1+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \left(x+2\ln|x-2|+\ln|x-1|\right)\Big|_3^5 = 2+\ln 2+2\ln 3$.

Vậy $a=2, b=1, c=2 \Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 5. **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}dx = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T=a.c-b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}dx = \int\limits_0^1 \frac{(4x^2+10x+4)+(5x+7)}{2x^2+5x+2}dx = \int\limits_0^1 \left(2+\frac{5x+7}{2x^2+5x+2}\right)dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{2x+1}\right)dx = \left(2x+\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1 = 2-\ln 2+\frac{5}{2}\ln 3$$

Vậy $a=2$, $b=-1$, $c=\frac{5}{2}$ nên $T=6$.

Câu 6. Biết $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \ln\left|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p\right|+C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-5 \\ C=5 \end{cases}.$$

Suy ra $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - 5\int \frac{1}{x-2}dx + 5\int \frac{1}{x-3}dx$

$= \ln\left|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5\right| + C$.

Vậy $4(m+n+p)=4$.

Câu 7. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx = \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}-3.$$

Vậy $a=2;b=3;c=3$ nên $P=a+b+c=8$.

Câu 8. Biết $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0$, $\forall x\in[1;2]$ nên:

$$I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} = \int\limits_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases} a=32 \\ b=12 \\ c=2 \end{cases}$. Suy ra: $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Câu 9. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $G(x)=\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt$. Tính đạo hàm của hàm số $G(x)$.

A. $G'(x)=2x\sin|x|$ **B.** $G'(x)=2x\cos x$ **C.** $G'(x)=\cos x$ **D.** $G'(x)=2x\sin x$

Lời giải

Chọn A

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$. Theo định nghĩa: $G(x)=F(x^2)-F(0)$

$\Rightarrow G'(x)=F'(x^2).2x-F'(0)=2x.\sin\sqrt{x^2}=2x.\sin|x|$.

Câu 10. **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Biết rằng $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=a+2\ln\frac{b}{c}$ với $a>0;b,c\in\mathbb{N}^*;\frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P=a-b+c$.

A. $\pi-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét đồng nhất thức: $-4\sin x+7\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\cos x-3\sin x)$

$=(2A-3B)\sin x+(3A+2B)\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}2A-3B=-4\\3A+2B=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left(x+2\ln|2\sin x+3\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\frac{\pi}{2}+2\ln\frac{2}{3}$. $\Rightarrow a=\frac{\pi}{2},b=2,\ c=3$.

Vậy $P=a-b+c=\frac{\pi}{2}-2+3=\frac{\pi}{2}+1$.

Câu 48: **(THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2)** Cho tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\frac{2+\sqrt{a}}{2}\ln b-\frac{\pi}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $a^2+b^2+c^2$

A. 48. **B.** 18. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{2\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}\right)dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\frac{\tan\frac{7\pi}{12}\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x+\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-1+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\cot\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)dx$$

$$=\left(-x+\tan\frac{7\pi}{12}\left(\ln\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\ln\cos\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\ln 3$$

Do đó $a=3;b=3;c=4$. Vậy $a^2+b^2+c^2=34$.

Câu 4: Biết $I=\int\limits_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5$, với a,b là các số nguyên. Tính $S=a-b.$

A. $S=9.$ **B.** $S=11.$ **C.** $S=5.$ **D.** $S=-3.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I=\int\limits_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int\limits_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2 \frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5 \frac{2x-3}{x}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5$

$=8\ln 2-3\ln 5+4\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=11.$

Câu 11. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=-\frac{3}{16}.$ **B.** $T=\frac{21}{16}.$ **C.** $T=\frac{3}{2}.$ **D.** $T=0.$

Lời giải

Chọn A

$x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)\Rightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow\int\limits_1^2\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_1^2\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]\Bigg|_1^2=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2$

$\Rightarrow\frac{4}{3}f(2)-\frac{1}{2}f(1)=\ln 3-\ln 2+\frac{1}{2}\Rightarrow f(2)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ln 3\Rightarrow a=b=\frac{3}{4}\Rightarrow T=-\frac{3}{16}.$

Câu 12. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho biết $f(x)=\int\limits_e^{e^{2x}} t\ln^9 t\,dt$, tìm điểm cực trị của hàm số đã cho

A. $x=2$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=6$

Lời giải

Chọn B

Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=x\ln^9 x$. Theo định nghĩa: $f(x)=G\left(e^{2x}\right)-G(e)$

$\Rightarrow f'(x)=G'\left(e^{2x}\right).\mathrm{e}^{2x}.2-G'(e)=2.e^{4x}(2x)^9$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Suy ra chọn đáp án **B.**

Câu 13. **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Cho $\int\limits_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị $a+b+c$.

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2+2.\frac{1}{2\sqrt{x}.e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}$

$\Rightarrow \int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}.e^{2x}}}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right).dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1-e^{-4}+e^{-1}=a+e^b-e^c$

$\Rightarrow a=1;b=-1;c=-4.$

Vậy $a+b+c=1+(-1)+(-4)=-4.$

Câu 14. $\Leftrightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=6$.Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\right)\Big|_1^2=\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}$.

$\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{2k}-\mathrm{e}^k}{k}<\frac{2018.\mathrm{e}^k-2018}{k}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^k\left(\mathrm{e}^k-1\right)<2018\left(\mathrm{e}^k-1\right)$ (do k nguyên dương).

$\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^k-1\right)\left(\mathrm{e}^k-2018\right)<0\Leftrightarrow 1<\mathrm{e}^k<2018\Leftrightarrow 0<k<\ln 2018\approx 7.6$.

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k\in S$ (với $S=\{1;2;3;4;5;6;7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Câu 15. **(Thị Xã Quảng Trị)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $\int_{-1}^3 f(|x|)\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn nên $\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Ta có: $\int_{-1}^3 f(|x|)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4+4=8$.

Câu 16. **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2\left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2\left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$.

A. Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^2 \left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2 \left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$ $(*)$

Ta có: $x^2-2m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m\sqrt{2} \\ x=m\sqrt{2} \end{array}\right.$.

TH1. Nếu $m=0$ thì $(*)$ luôn đúng.

TH2. Nếu $m\neq 0$ thì $(*)$ đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2m^2>0\ (1) \\ x^2-2m^2<0\ (2) \end{array}\right.$ với mọi $x\in[0;2]$.

+) $m>0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\sqrt{2}<m\sqrt{2}\le 0 \\ 2\le -m\sqrt{2}<m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2}\le 0 \\ m\sqrt{2}\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ m\ge \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\ge\sqrt{2}$.

+) $m<0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\sqrt{2}<-m\sqrt{2}\le 0 \\ 2\le m\sqrt{2}<-m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2}\le 0 \\ -m\sqrt{2}\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ m\le -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\le -\sqrt{2}$.

Suy ra $m\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)\cup\{0\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 17. **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2\left[f(x)+x\right]\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^2\left[3f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^2\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=16$. **C.** $I=10$. **D.** $I=14$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2\left[f(x)+x\right]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

$\int_0^2\left[3f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x-\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=10 \Rightarrow \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 3f(x)\mathrm{d}x-10=2$.

$I=\int_0^2\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=2.4+3.2=14$.

Vậy $I=14$.

Câu 18. **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Biết $\int_0^2\left[f(x)+x\right]\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^2\left[3f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^2\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=16$. **C.** $I=10$. **D.** $I=14$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2 [f(x)+x]dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 6 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4$.

$\int_0^2 [3f(x)-g(x)]dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 3f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 3f(x)dx - 10 = 2$.

$I = \int_0^2 [2f(x)+3g(x)]dx = 2.4 + 3.2 = 14$.

Vậy $I = 14$.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx = ?$

A. $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** e **D.** $1-e$

Lời giải:

Ta có: $\frac{e^2-1}{4} = \int_0^1 (x+1).e^x.f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x.e^x) = -\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx = -\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx = \frac{e^2-1}{4} = \int_0^1 x^2.e^{2x}dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 x^2.e^{2x}dx + 2\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x)+x.e^x)^2 dx = 0$

$\Rightarrow f'(x) = -x.e^x \Rightarrow f(x) = e^x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2-e$.

Chọn B

Câu 19. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x) = x^2-2x+2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)dx$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2) = 2-f(0) = 2-3 = -1$

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(2-x)dx$

Từ hệ thức đề ra: $\int_0^2 (f(x)+f(2-x))dx = \int_0^2 (x^2-2x+2)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có:

$\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2.(-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)dx = -2$ và $\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2}$ (với a, b, $c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a+b+c$.

A. $P=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $P=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $P=\dfrac{4}{3}$. **D.** $P=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^d f(x)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^d=\dfrac{a}{3}d^3+\dfrac{b}{2}d^2+cd$.

Do đó: $\begin{cases}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{2}\\ \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2\\ \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=-\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\dfrac{9}{2}b+3c=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\dfrac{16}{3}\end{cases}$. Vậy $P=a+b+c=-\dfrac{4}{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^3+x^5}$, $f(1)=a$ và $f(-2)=b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

A. $f(-1)+f(2)=-a-b$. **B.** $f(-1)+f(2)=a-b$.

C. $f(-1)+f(2)=a+b$. **D.** $f(-1)+f(2)=b-a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(-x)=\dfrac{1}{(-x)^3+(-x)^5}=-\dfrac{1}{x^3+x^5}=-f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int\limits_{-2}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2)=-f(2)+f(1)\Rightarrow f(-1)+f(2)=f(-2)+f(1)=a+b$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x^4}$, $f(1)=a$, $f(-2)=b$. Giá trị của biểu thức $f(-1)-f(2)$ bằng

A. $b-a$. **B.** $a+b$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+(-x)^4}=\dfrac{1}{x^2+x^4}=f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm chẵn.

Do đó $\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(2)=f(-1)-f(-2)+f(-2)-f(1)+f(1)-f(2)$

$=\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\mathrm{d}x+b-a-\int\limits_{1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=b-a$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [1, 2] và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int\limits_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 10$ (gt)

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left[f(x)\right]\Big|_1^2 = \ln\left[f(2)\right] - \ln\left[f(1)\right] = \ln\frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2$ (gt)

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} f(2) - f(1) = 10 \\ \dfrac{f(2)}{f(1)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 20 \\ f(1) = 10 \end{cases}$

Chọn B

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R**, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào đúng?

A. $1 < f(5) < 2$. **B.** $4 < f(5) < 5$. **C.** $2 < f(5) < 3$. **D.** $3 < f(5) < 4$.

Hướng dẫn giải

Từ gt: $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx \Rightarrow \ln\left[f(x)\right] = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$

Vì $f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}.2+C} = 1 = e^0 \Rightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$

Chọn D

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi:

$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} -2dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_{-1}^{1} = -4$

$\ln\frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1).e^4 = e^4$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1}-\sqrt{f(0)+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1}=2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3})=3$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn $f(x)>0$ khi $x\in[1,2]$. Biết $\int\limits_1^2 f'(x)dx=10$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-10$. **B.** $f(2)=20$. **C.** $f(2)=10$. **D.** $f(2)=-20$.

Lời giải:

Ta có: $\int\limits_1^2 f'(x)dx=f(x)\big|_1^2=f(2)-f(1)=10$ (gt)

$\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln[f(x)]\big|_1^2=\ln[f(2)]-\ln[f(1)]=\ln\dfrac{f(2)}{f(1)}=\ln 2$ (gt)

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} f(2)-f(1)=10 \\ \dfrac{f(2)}{f(1)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=20 \\ f(1)=10 \end{cases}$

Chọn B

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x.f(x))^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là.

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=(x.f(x))^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{f(0)}=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow f(1)=6$.

$f'(1)=(1.f(1))^2=36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y=36x-30$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $g(x)=f^2(x)$. Tính $\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1011}{2}$. **B.** $\dfrac{1009}{2}$. **C.** $\dfrac{2019}{2}$. **D.** 505.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x = 2018\int_0^t \mathrm{d}x \Rightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}\right)\Big|_0^t = 2018x\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right) = 2018t \text{ (do } g(0)=1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t+1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t = \left(\frac{1009}{2}t^2+t\right)\Big|_0^1 = \frac{1011}{2}.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9 \Rightarrow 9\left(f''(x)-1\right)=-\left[f'(x)-x\right]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int \frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)\mathrm{d}x = \left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 9\ln 2+\frac{1}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f'(x).f(x)=x^4+x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x).f(x)dx=\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)df(x)=\frac{136}{15} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2=\frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2)-4}{2}=\frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2)=\frac{332}{15}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}$. Khi đó:

A. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+3}}-\frac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^2+3}}-\frac{1}{4}$.

C. $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\frac{\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}$. **D.** $\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}}{\mathrm{e}^x} \Rightarrow 3\mathrm{e}^{3x}f(x)+\mathrm{e}^{3x}f'(x)=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

$$\Leftrightarrow \left[e^{3x} f(x) \right]' = e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $\int_0^1 \left[e^{3x} f(x) \right]' dx = \int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\, dx$

$$\Leftrightarrow \left[e^{3x} f(x) \right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{e^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1 \Leftrightarrow e^3 f(1) - f(0) = \frac{\left(e^2+3\right)\sqrt{e^2+3}-8}{3}.$$

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2 = \int_0^x \left[\left(f(t)\right)^2 + \left(f'(t)\right)^2\right]dt + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(1) = 2018e$. **B.** $f(1) = \sqrt{2018}$. **C.** $f(1) = 2018$. **D.** $f(1) = \sqrt{2018}e$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$2f(x).f'(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f'(x) - f(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = x + C \Leftrightarrow f(x) = e^{x+C}$$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$$e^{2C}e^{2x} = \int_0^x 2e^{2C}e^{2t}dt + 2018 \Leftrightarrow e^{2C}e^{2x} = e^{2C}.e^{2t}\Big|_0^x + 2018 \Leftrightarrow e^{2C} = 2018 \Leftrightarrow e^C = \sqrt{2018}$$

Vậy $f(x) = e^{x+C} = e^x.e^C = \sqrt{2018}e^x$. Suy ra $f(1) = \sqrt{2018}e$.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $2\left[f(x)\right]^2 = \int_0^x \left[4\left(f(t)\right)^2 + \left(f'(t)\right)^2\right]dt + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(1) = 1009e^2$. **B.** $f(1) = \sqrt{1009}e$. **C.** $f(1) = 1009e$. **D.** $f(1) = \sqrt{1009}e^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Đạo hàm hai vế ta được: $4f(x).f'(x) = \left(2f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f'(x) - 2f(x)\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x + C \Leftrightarrow f(x) = k.e^{2x}\ k > 0$$

Thử vào đẳng thức đã cho suy ra

$$2k^2e^{4x} = \int_0^x 8k^2e^{4t}dt + 2018 \Leftrightarrow 2k^2e^{4x} = 2k^2.e^{4t}\Big|_0^x + 2018 \Leftrightarrow 2k^2 = 2018 \Leftrightarrow k = \sqrt{1009}$$

Vậy $f(x) = \sqrt{1009}e^{2x} \Rightarrow f(1) = \sqrt{1009}e^2$

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, $f\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(0\right)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}\mathrm{d}x$. Tính $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$.

A. $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2+1\right]\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right).\left[f\left(x\right)\right]^2-2\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}+1\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}-1\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\sqrt{f'\left(x\right).f\left(x\right)}-1=0\Rightarrow f^2\left(x\right).f'\left(x\right)=1\Rightarrow\frac{f^3\left(x\right)}{3}=x+C$. Mà $f\left(0\right)=2\Rightarrow C=\frac{8}{3}$.

Vậy $f^3\left(x\right)=3x+8$.

Vậy $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(3x+8\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3x^2}{2}+8x\right)\right|_0^1=\frac{19}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thỏa mãn $x^2f^2\left(x\right)+\left(2x-1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và $f\left(1\right)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$.

A. $-\frac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2f^2\left(x\right)+\left(2x-1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1\Leftrightarrow\left(xf\left(x\right)+1\right)^2=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)\left(*\right)$

Đặt $h\left(x\right)=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)$, khi đó $\left(*\right)$ có dạng

$h^2\left(x\right)=h'\left(x\right)\Rightarrow\frac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}=1\Rightarrow\int\frac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}dx=\int 1dx\Rightarrow\int\frac{dh\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}=x+C\Leftrightarrow-\frac{1}{h\left(x\right)}=x+C$

$\Rightarrow h\left(x\right)=-\frac{1}{x+C}\Rightarrow xf\left(x\right)+1=-\frac{1}{x+C}$

Vì $f\left(1\right)=-2$ nên $-2+1=-\frac{1}{1+C}\Rightarrow C=0$

Khi đó $xf\left(x\right)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Suy ra: $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=\int\limits_1^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\right|_1^2=-\frac{1}{2}-\ln 2$

Câu 33. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(0\right)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}\left(f(x)\right) = \cos\frac{\pi x}{2}.f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$

Mặt khác $\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Do đó $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}.f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

hay $\int_0^1 \left[f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = 0$ suy ra $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt = x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=123$. **B.** $f(4)=\frac{2}{3}$. **C.** $f(4)=\frac{3}{4}$. **D.** $f(4)=\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(t) = \int f(t)dt \Rightarrow F'(t) = f(t)$

Đặt $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0)$

$\Rightarrow G'(x) = \left[F(x^2)\right]' = 2x.f(x^2)$ (Tính chất đạo hàm hợp: $f'\left[u(x)\right] = f'(u).u'(x)$)

Mặt khác, từ gt: $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt = x.\cos\pi x$

$\Rightarrow G'(x) = (x.\cos\pi x)' = -x\pi\sin\pi x + \cos\pi x$

$\Rightarrow 2x.f(x^2) = -x\pi\sin\pi x + \cos\pi x$ (1)

Tính $f(4) \Rightarrow$ ứng với $x=2$

Thay $x=2$ vào (1) $\Rightarrow 4.f(4) = -2\pi\sin 2\pi + \cos 2\pi = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$

Chọn D

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int\limits_0^1 [f(x)+(ax+b)]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 [f(x).(ax+b)]\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x$

$=4+2a\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+2b\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3a}(ax+b)^3\Big|_0^1 = 4+2(a+b)+\frac{a^2}{3}+ab+b^2$.

Cần xác định $a,\ b$ để $\frac{a^2}{3}+(2+b)a+b^2+2b+4=0$

Ta có: $\Delta=b^2+4b+4-\frac{4}{3}(b^2+2b+4) = \frac{-(b-2)^2}{3}\le 0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=-6$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 [f(x)+(-6x+2)]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f(x)=6x-2$

Suy ra $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (6x-2)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1 =10$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\frac{1}{4}, f(8)=\frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

+) Xét $\int\limits_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int\limits_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)}=-\frac{1}{f(x)}\Big|_4^8=-\left(\frac{1}{f(8)}-\frac{1}{f(4)}\right)=-(2-4)=2$.

+) Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx=0$.

Ta có: $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx=\int\limits_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx+2k\int\limits_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx+k^2\int\limits_4^8 dx=1+4k+4k^2=(2k+1)^2$.

Suy ra: $k=-\frac{1}{2}$ thì $\int\limits_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{2}\right)^2 dx=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int\limits_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int\limits_4^6 dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)}=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6=1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)}-\frac{1}{f(6)}=1 \Leftrightarrow 4-\frac{1}{f(6)}=1 \Leftrightarrow f(6)=\frac{1}{3}$.

Chú ý: $\int\limits_a^b f(x)dx=0$ không được phép suy ra $f(x)=0$, nhưng $\int\limits_a^b f^{2k}(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Câu 36. Suy ra $4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;\,-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;\,-1\}$.

Suy ra $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = \int \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x = 2$ thì $\dfrac{2}{3}.f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với $\forall x\in(0;2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(0;1]$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

□ $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = 1 + \int\limits_0^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x \ge 1 - \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ (1).

□ $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = 1 - \int\limits_1^2 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x \ge 1 - \int\limits_1^2 (1-x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \ge \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $3\int\limits_0^1\left[f'(x)[f(x)]^2 + \dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x \le 2\int\limits_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)]^3\mathrm{d}x$:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra:

$$\int\limits_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2 - 2.3\sqrt{f'(x)}f(x) + 1\right]\mathrm{d}x \le 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x) - 1\right]^2\mathrm{d}x \le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)}f(x)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\dfrac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\dfrac{1}{3} \Rightarrow f^3(x)=\dfrac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\dfrac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{6}$.

Câu 39. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-x.f'(x); \quad f(x)=-x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right] \Leftrightarrow \dfrac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}=-\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}\mathrm{d}x=-\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln\left|f(x)+g(x)\right|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln\left|f(1)+g(1)\right| \Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x} \\ f(x)+g(x)=-\dfrac{4}{x} \end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2: Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right]$

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-x\left[f(x)+g(x)\right]+\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x\left[f(x)+g(x)\right]=C \Rightarrow f(x)+g(x)=-\dfrac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C \Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$. Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$
Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. Đặt $t=x-1$
Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. Đặt $t=\ln x+1$
Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$. Đặt $t=\sin x$
Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	$I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$ Đặt $t=2\cos x+1$
Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ Đặt $t=\tan x$
Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x$

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 1. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{100} x\left(x-1\right)...\left(x-100\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** một giá trị khác.

Lời giải

Chọn A

Tính $I=\int\limits_0^{100} x\left(x-1\right)...\left(x-100\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=100-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=100$; khi $x=100$ thì $t=0$.

Do $x\left(x-1\right)...\left(x-100\right)=\left(100-t\right)\left(99-t\right)...\left(1-t\right)\left(-t\right)=-t\left(t-1\right)...\left(t-99\right)\left(t-100\right)$ nên

$$I=\int\limits_0^{100} x\left(x-1\right)...\left(x-100\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{100} t\left(t-1\right)...\left(t-100\right)\mathrm{d}t=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0.$$

Câu 2. **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

Lời giải

Chọn A

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow dt=-2xdx\Rightarrow xdx=-\dfrac{1}{2}dt$

Đổi cận: $x=0\to t=1;x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n dt=\dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $d\left(1-x^2\right)=-2xdx\to -\dfrac{1}{2}d\left(1-x^2\right)=xdx$

$$I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n xdx=-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n d\left(1-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2n+2}$$

Câu 3. **(SỞ BÌNH THUẬN 2019)** Tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}dx=a\ln b+c$, trong đó a; b; c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int\limits_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}dx=\int\limits_0^1\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}dx=\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx=\int\limits_0^1 dx-\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2+1}d\left(x^2+1\right)$$

$$=1-\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

$a=-1$, $b=2$, $c=1$ nên $a+b+c=2$.

Câu 4. **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}dx=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên, khi đó a^3+b^3 bằng

A. -9. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2+4x+7\Rightarrow dt=\left(2x+4\right)dx\Rightarrow\left(x+2\right)dx=\dfrac{1}{2}dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=7$; $x=1\Rightarrow t=12$.

$$\int\limits_0^1\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}dx=\int\limits_7^{12}\dfrac{1}{2t}dt=\dfrac{1}{2}\ln|t|\Big|_7^{12}=\dfrac{1}{2}\ln 12-\dfrac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{12}-\ln\sqrt{7}\Rightarrow a=1;\ b=-1.$$

Vậy $a^3+b^3=0$.

Câu 5. **(THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho $\int\limits_0^2\dfrac{x}{x^2+2x+4}dx=a\ln 3+b\pi$ với a, b là các số thực. Giá trị của a^2+3b^2 bằng

A. $\dfrac{7}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{18}$. **D.** $\dfrac{35}{144}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{x+1}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$.

Tính $I_1 = \int\limits_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\ln 12 - \ln 4\right) = \frac{1}{2}\ln 3$.

Tính $I_2 = \int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \frac{1}{\left(x+1\right)^2+3}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=\frac{\pi}{6}$ và $x=2 \Rightarrow u=\frac{\pi}{3}$.

Suy ra $I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}.\frac{1}{3\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Vậy $\int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Suy ra $a^2+3b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5}{18}$.

Câu 6. Tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. **B.** $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. **C.** $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. **D.** $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Lời giải

$I = \int\limits_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t=\frac{1}{x^2}+1 \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3}dx$.

HÀM VÔ TỈ

Câu 7. **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int\limits_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a,b,c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -10. **B.** -5. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+3} \Rightarrow t^2 = x+3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=-2 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=2$.

Ta có: $\int\limits_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = \int\limits_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+3+5\sqrt{3x+1}+6} = 2\int\limits_1^2 \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+5t+6} = 2\int\limits_1^2\left(\frac{3}{t+3}-\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\left(3\ln\left|t+3\right|\Big|_1^2 - 2\ln\left|t+2\right|\Big|_1^2\right) = 2\left(-5\ln 4 + 2\ln 3 + 3\ln 5\right) == -20\ln 2 + 4\ln 3 + 6\ln 5$

Suy ra: $a=-20$, $b=4$, $c=6$. Vậy $a+b+c=-10$

Câu 8. **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho $I=\int\limits_3^8 \frac{1}{x+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

A. -6. **B.** 18. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi $x=3\Rightarrow t=2$; Khi $x=8\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3 \frac{1}{t^2-1+\left(t^2-1\right)t}.2t\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 \frac{2t}{\left(t^2-1\right)\left(t+1\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 \frac{2t}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\int\limits_2^3 \frac{(t+1)+(t-1)}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\left(\frac{(t+1)}{(t-1)(t+1)^2}+\frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{(t-1)(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{2}.\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_2^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)-\frac{1}{t+1}\right]\Bigg|_2^3$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t+1}\right]\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\Rightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=12.$$

Vậy $abc-d=3.2.1-12=-6$.

Câu 9. **(ĐH Vinh Lần 1)** Biết rằng $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=4\Rightarrow t=3$.

Ta có: $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4(x+1)+5\sqrt{2x+1}}=\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4x+2+5\sqrt{2x+1}+2}=\int\limits_1^3 \frac{t\mathrm{d}t}{2t^2+5t+2}=\frac{1}{3}\int\limits_1^3 \frac{2(2t+1)-(t+2)}{(2t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^3\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{2t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(2\ln|t+2|-\frac{1}{2}\ln|2t+1|\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{3}\left(2\ln 5-2\ln 3-\frac{1}{2}\ln 7+\frac{1}{2}\ln 3\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{2}{3}\ln 5-\frac{1}{6}\ln 7$$

Suy ra: $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{2}{3}, c=-\frac{1}{6}\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 10. Biết $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4} \Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 11. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\ge 0$ có giá trị là:

A. $I=\frac{a(a-2)}{4}$. **B.** $I=\frac{a(a-2)}{2}$. **C.** $I=\frac{a(a+2)}{4}$. **D.** $I=\frac{a(a+2)}{2}$.

Lời giải

Tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx$, với $a\ge 0$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I=\int\limits_0^1 \frac{a^2x^3+ax}{\sqrt{ax^2+1}}dx=\int\limits_0^1 \frac{ax\left(ax^2+1\right)}{\sqrt{ax^2+1}}dx=\int\limits_0^1\left(ax\sqrt{ax^2+1}\right)dx$.

Ta nhận thấy: $\left(ax^2+1\right)'=2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t=ax^2+1 \Rightarrow dt=2axdx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=a+1 \end{cases}$.

$I=\int\limits_1^{a+1}\frac{1}{2}tdt=\left(\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^{a+1}=\frac{1}{4}a(a+2)$.

Chọn C

Câu 12. Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}.$$

Khi $x=0$ thì $t=1+\sqrt{3}$; khi $x=1$ thì $t=2+\sqrt{2}$.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

Câu 13. Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a,b,c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b+c$

A. $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2} \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Vậy $S=67$.

Câu 14. Cho số thực dương $k>0$ thỏa $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k>\frac{3}{2}$. **B.** $0<k\le\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<k\le 1$. **D.** $1<k\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right) \Rightarrow dt=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}dx \Leftrightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

Ta có $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\int_0^2 dt=\mathrm{t}\big|_0^2 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\Big|_0^2=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2+\sqrt{4+k}\right)-\ln\sqrt{k}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \ln\frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4+k}}{\sqrt{k}}=2+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2+\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{k} \Leftrightarrow 4+4+k+4\sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2 k \Leftrightarrow \sqrt{4+k}=\left(2+\sqrt{5}\right)k-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ 4+k=\left(2+\sqrt{5}\right)^2k^2+4-4\left(2+\sqrt{5}\right)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left(2+\sqrt{5}\right)^2k^2-\left(9+4\sqrt{5}\right)k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>\frac{2}{2+\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Câu 15. Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\left(a\sqrt{a}-\frac{b}{b+c}\sqrt{b}\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$; $1\le a,b,c\le 9$. Tính giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a}.

A. 165. **B.** 715. **C.** 5456. **D.** 35.

Lời giải

Chọn D

$$I=\int_1^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x^3}\mathrm{d}x$$

Đặt $t^2=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x\Rightarrow -t\mathrm{d}t=\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

Ta được $I=-\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{5+3}\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=2$, $b=5$, $c=3$, suy ra $C_{2a+c}^{b-a}=C_7^3=35$.

Câu 16. **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

$\int_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=$

$t=4+2\sqrt{x+1}\Rightarrow(t-4)^2=4(x+1)$

$\Rightarrow 2(t-4)dt=4dx$

$x=0\Rightarrow t=6$

$x=3\Rightarrow t=8$

$$I=\int_6^8\frac{t^2-8t+16-4}{8t}.(t-4)dt=\int_6^8\frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t}dt=\int_6^8\frac{t^2}{8}-\frac{3t}{2}+\frac{11}{2}-\frac{6}{t}dt$$

$$=\left(\frac{t^3}{24}-\frac{3t^2}{4}+\frac{11}{2}t-6\ln|t|\right)\Big|_6^8=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$$

$\Rightarrow a+b+c=1$

Câu 17. **(ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019)** Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

Lời giải

Chọn B

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}}\mathrm{d}x$$

• Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\Rightarrow\ dx=\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\ t=2$; $x=1\Rightarrow\ t=1$

Khi đó: $I=\int_2^1\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\left(\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\int_1^2\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^3.\sqrt{1+t^3}}$

• Đặt $u=\sqrt{1+t^3}\Rightarrow\ u^2=1+t^3\Rightarrow\ t^3=u^2-1\Rightarrow\ 3t^2\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u\Rightarrow\ t^2\mathrm{d}t=\dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{3}$

Đổi cận: $t=1\Rightarrow\ u=\sqrt{2}$; $t=2\Rightarrow\ u=3$

Ta có: $I=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{\frac{2u\,\mathrm{d}u}{3}}{\left(u^2-1\right).u}=\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Suy ra $a=3,\ b=3,\ c=2,\ d=2$. Vậy $a+b+c+d=10$.

Câu 18. **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho tích phân $I=\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d$, trong đó $(a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S=a+b+c+d$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=2$. **D.** $S=11$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}.\mathrm{d}x$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=4\sin t\Rightarrow\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: Với $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$; với $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos t.\sqrt{16-(4\sin t)^2}\mathrm{d}t=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=(8x+4\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}-4$$

Mà $I=\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d\Rightarrow a=2,b=3,c=2,d=-4$.

Vậy $S=a+b+c+d=3$.

Câu 19. **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Biết $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$ với a, b, c nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $c<a$. Tính $S=a+b-c$.

A. $S=51$. **B.** $S=39$. **C.** 67. **D.** 75.

Lời giải

Chọn B

Xét $$I=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^9}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)}\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2.\frac{1}{x^3}\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\right)dx=\int_1^2\left[\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\right]dx.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2dt=\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)dx$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}$.

Vậy $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}t.3t^2dt=3\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}t^3dt=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{16}\sqrt[3]{\frac{7}{4}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Từ đó ta suy ra $a=21$; $b=32$; $c=14 \Rightarrow S=a+b-c=39$.

Câu 20. **(THTT số 3)** Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\pi-\frac{m}{n}$, với $a,b,n,m\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản. Tính a^b+m^n.

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=\cos 2t$. Ta có $\mathrm{d}x=-2\sin 2t\ \mathrm{d}t$, $0=\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$ và $1=\cos 0$.

Ta có $\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}=\frac{1-1+2\sin^2 t}{1+2\cos^2 t-1}=\tan^2 t$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\tan^2 t}\left(-2\sin 2t\right)\mathrm{d}t$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\tan t\right|\sin 2t\ \mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\ \mathrm{d}t$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\ \mathrm{d}t$

$=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{2},\frac{m}{n}=\frac{1}{1}$. Vì các phân số $\frac{a}{b},\frac{m}{n}$ tối giản nên ta suy ra $a=1,b=2,m=1,n=1$.

Do đó $a^b+m^n=1^2+1^1=2$.

Câu 21. **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có

$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2\sqrt{2}}$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{2}{3}t\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đặt $y=\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\Rightarrow \frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đổi cận $t=\frac{3}{2\sqrt{2}}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1}+\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{8}$;

$t=\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

$I=\frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{4}{3}\ln|y|\Big|_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\frac{4}{3}\ln\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{3}\ln\frac{(2\sqrt{2}+2)^2}{8}=\frac{1}{3}\ln(\frac{3}{2}+\sqrt{2})$

Do đó $a+b+c+d=10$

Cách 2: Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3\left(x^3+1\right)}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{8};x=1\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{8}}^{1}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Vậy $a+b+c+d=3+3+2+2=10.$

HÀM LƯỢNG GIÁC, MŨ LÔ GARIT

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-3\sin x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: + Với $x=0\Rightarrow t=2$

+ Với $x=a\Rightarrow t=\sqrt{1+3\cos a}=A.$

Khi đó $\int\limits_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\int\limits_A^2\frac{2}{3}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t\Big|_A^2=\frac{2}{3}\left(2-A\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow A=1\Rightarrow\sqrt{1+3\cos a}=1\Rightarrow\cos a=0$

$\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Do $a\in\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le k\le\frac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\end{array}\right.$.

Bình luận: Khi cho $a=\frac{\pi}{2}+\pi$ thì tích phân không xác định vì mẫu thức không xác định (trong căn bị âm). Vậy đáp án phải là B, nghĩa là chỉ chấp nhận $a=\frac{\pi}{2}$.

Câu 23. Nếu $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{64}$ thì n bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x\Rightarrow\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}t^n\mathrm{d}t=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{64}$.

Suy ra $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{n+1}{64}$ có nghiệm duy nhất $n=3$ (tính đơn điệu).

Câu 24. Cho các tích phân $I=\int\limits_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan x}dx$ và $J=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định **sai** là

A. $I=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$. **B.** $I-J=\ln\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

C. $I=\ln\left|1+\tan\alpha\right|$. **D.** $I+J=\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ nên A đúng.

$I-J=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\alpha}\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|\Big|_0^{\alpha}=\ln\left|\cos\alpha+\sin\alpha\right|$ B đúng

$I+J=\int_0^{\alpha}dx=x\Big|_0^{\alpha}=\alpha$ D đúng.

Câu 25. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=a\pi+b\ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$\Rightarrow I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$; $I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow I_1=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8};\ b=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

Cách giải khác:Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$

Câu 26. Tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx$ có gái trị là:

A. $I=\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$. **B.** $I=\frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$.

C. $I=-\frac{\sqrt{3}}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$. **D.** $I=-\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}$.

Lời giải

Tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx$ có gái trị là:

Ta có:

$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{4\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2}dxI=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{4\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]^2}dx$.

Đặt $u=x+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=u-\frac{\pi}{6}\Rightarrow dx=du$.

Đổi cận $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=-\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(u-\frac{\pi}{6}\right)}{4\sin^2 u}du=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u.\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos u}{4\sin^2 u}du=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}.\sin u-\cos u}{\sin^2 u}du$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u}du-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du\right)$$

Xét $I_1=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\sin u}{1-\cos^2 u}du$.

Đặt $t=\cos u, u\in[0;\pi]\Rightarrow dt=-\sin u du$.

Đổi cận $\begin{cases} u=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\frac{\sqrt{3}dt}{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(l\,n\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right).$$

Xét $I_2=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin^2 u}du$.

Đặt $t=\sin u, u\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dt=\cos u du$.

Đổi cận $\begin{cases} u=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ u=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$$I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}du=\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1}=-3.\Rightarrow I=\frac{1}{8}(I_1-I_2)=-\frac{\sqrt{3}}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2}\right)+\frac{3}{8}.$$

Chọn D

Câu 27. (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{-11}{3}\ln 2+b\ln 3+c\left(b,c\in Q\right)$. Tính $\frac{b}{c}$?

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\dfrac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\dfrac{m\left(2\sin x+3\cos x\right)+n\left(2\cos x-3\sin x\right)}{2\sin x+3\cos x}$

$=\dfrac{\left(2m-3n\right)\sin x+\left(3m+2n\right)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}2m-3n=3\\3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{13}\\n=-\dfrac{11}{13}\end{cases}.$

Nên: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{3}{13}\left(2\sin x+3\cos x\right)-\frac{11}{13}\left(2\cos x-3\sin x\right)}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{3}{13}-\dfrac{11}{13}.\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx=\dfrac{3}{13}\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

$=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\left(2\sin x+3\cos x\right)}{2\sin x+3\cos x}dx=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\ln\left|2\sin x+3\cos x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{3\pi}{26}-\dfrac{11}{13}\ln 2+\dfrac{11}{13}\ln 3$. Do đó: $\begin{cases}b=\dfrac{11}{13}\\c=\dfrac{3\pi}{26}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{b}{c}=\dfrac{11}{13}.\dfrac{26}{3\pi}=\dfrac{22}{3\pi}$.

Câu 28. **(Chuyên Vinh Lần 3)** Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2x+\sin x\cos x+1}{\cos^4x+\sin x\cos^3x}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2x+\sin x\cos x+1}{\cos^4x+\sin x\cos^3x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2x}+\frac{\tan x}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos^4x}}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\left(1+\tan^2x\right)+\tan x\left(1+\tan^2x\right)+\left(1+\tan^2x\right)^2}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1+\tan x+\left(1+\tan^2x\right)}{1+\tan x}\left(1+\tan^2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\dfrac{1+\tan^2x}{1+\tan x}\right)\left(1+\tan^2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1+\tan x$ ta được $dt=\left(1+\tan^2x\right)\mathrm{d}x$, đổi cận $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2,\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=1+\sqrt{3}$

Ta được

Vì $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-a}^{a}f\left(x\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$

$\int\limits_1^3 f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=3$

Xét tích phân $K=\int_{1}^{3} f(2x)\mathrm{d}x=3$

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{2}$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=2;\ \ x=3\Rightarrow u=6$.

$K=\frac{1}{2}\int_{2}^{6} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x=6$

Vậy $I=\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x=8+6=14.$

Câu 29. **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $F(x)=\int \frac{(1+\cos^2 x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4 x}dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0;4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi;9\pi)$. **B.** $(2\pi;4\pi)$. **C.** $(4\pi;6\pi)$. **D.** $(0;2\pi)$.

Lời giải

Chọn

Ta có: $F(x)=\int \frac{(1+\cos^2 x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4 x}dx=\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx+\int \frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx$

Gọi $A=\int \frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx$ và $B=\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx$

Ta có:

$$A=\int \frac{(1+\cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x}dx=\int \frac{(1+2\cot^2 x)\cot x}{\sin^2 x}dx=-\int (\cot x+2\cot^3 x).d(\cot x)$$

$$=-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C_1.$$

$$B=\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x}dx=\int \frac{(1+\cos^2 x)\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}dx$$

Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin x.dx$. Khi đó:

$$B=-\int \frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}dt=-\int \frac{1+t^2}{(t-1)^2.(t+1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)+C_2$$

Do đó:

$$F(x)=A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C$$

Suy ra:

$$F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C=C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}-\cot^2 x-\cot^4 x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=0$$

Với điều kiện $\sin x \neq 0$,

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2 + \cos x + \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\left(1-\cos^2 x\right) + \cos x\left(1-\cos^2 x\right) + \cos^3 x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ -2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x \in (0;4\pi)$ nên $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi; x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi$;

$x = \alpha; x = \alpha + 2\pi$;

$x = \beta; x = \beta + 2\pi$.

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π .

Câu 30. Tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\left(e^x \cos x + 1\right)\cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$. **B.** $I = \ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|$.

C. $I = \ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$. **D.** $I = \ln\left|\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}+2}\right|$.

Lời giải

Tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\left(e^x \cos x + 1\right)\cos x} dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x.\left(\cos x - \sin x\right)}{\left(e^x \cos x + 1\right)e^x \cos x} dx$.

Đặt $t = e^x \cos x \Rightarrow dt = e^x\left(\cos x - \sin x\right)dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$.

$$I = \int_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}} \frac{1}{t(t+1)}dt = \left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}} = \ln\left|\frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right| - \ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi}{3}}+2}\right| = \ln\left|\frac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}}+2\right)}{e^{\frac{2\pi}{3}}-2}\right|.$$

Chọn A

Câu 31. **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P=2a^2+3b^3$ là

A. $P=32$. **B.** $P=194$. **C.** $P=200$. **D.** $P=100$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $I=\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}\mathrm{d}x$. Đổi biến $t=\pi-x$, ta có

$$I=\int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}\mathrm{d}t=\pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t-\underbrace{\int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t}_{I}.$$

Suy ra

$$I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t \quad (1).$$

Đặt $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t$. Đổi biến $u=t+\frac{\pi}{2}$, ta có

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^{2018}v}{\sin^{2018}v+\cos^{2018}v}\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\frac{\sin^{2018}v}{\sin^{2018}v+\cos^{2018}v}\right)\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\mathrm{d}v-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2018}t}{\sin^{2018}t+\cos^{2018}t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2} \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$I=\frac{\pi^2}{4}.$$

Vậy $P=2a^2+3b^3=2.2^2+3.4^3=200$.

Câu 32. Xét tích phân $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2x-2\cos^2x-2}dx$. Bằng cách đặt $t=\tan x$, tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

A. $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2-4}dt$. **B.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+4}dt$. **C.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2-2}dt$. **D.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+2}dt$.

Lời giải:

Ta có: $3\sin^2x-2\cos^2x-2=\cos^2x\left(3\tan^2x-2-\frac{2}{\cos^2x}\right)$

$=\cos^2x\left[3\tan^2x-2-2\left(1+\tan^2x\right)\right]=\cos^2x\left(\tan^2x-4\right)$

Vậy: $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2x\left(\tan^2x-4\right)}dx$, lúc này đặt $t=\tan x$ và đổi cận ta đc:

$$A=\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2-4}dx.$$

Chọn A

Câu 33. Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ thì $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^6\frac{x}{2}}dx$ được biến đổi thành $2\int_0^1 f(t)dt$. Hãy xác định $f(t)$:

A. $f(t)=1-2t^2+t^4$. **B.** $f(t)=1+2t^2+t^4$. **C.** $f(t)=1+t^2$. **D.** $f(t)=1-t^2$.

Lời giải:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right).\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx\\ x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Vậy: $I=\int_0^1\left(1+t^2\right)^2.2dt=2\int_0^1\left(1+2t^2+t^4\right)dt\Rightarrow f(t)=1+2t^2+t^4$

Chọn B

Câu 34. Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

A. $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=I+J$

Xét $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x$ (C_m); Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Suy ra $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}-2x^2\cos x\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\left(-2x^2\sin x-4x\cos x+4\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\pi\sqrt{3}}{-3}.$$

Khi đó $a=2$; $b=-36$; $c=-3$.

Vậy $M=a-b+c=35$.

Câu 35. **(THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$ bằng

A. $\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$. **B.** $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx$. **C.** $2\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx$. **D.** $2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int\limits_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int\limits_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$.

Xét tích phân $\int\limits_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$.

Đặt $t=-x\Leftrightarrow x=-t$

$\Rightarrow dt=-dx\Leftrightarrow -dt=dx$

Đổi cận:

$x=-a\Rightarrow t=a$

$x=0\Rightarrow t=0$

Khi đó,

$$\int\limits_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int\limits_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{k(-t)}}(-dt)=\int\limits_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{-kt}}dt$$

$$=\int\limits_{0}^{a}\frac{e^{kt}.f(t)}{1+e^{kt}}dx=\int\limits_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx$$

Do đó, $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int\limits_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int\limits_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int\limits_{0}^{a}\frac{\left(e^{kx}+1\right)f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$

Câu 36. **(THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho $\int\limits_{1}^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=e\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$$I=\int\limits_{1}^{e}\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{2t+1}{(t+2)^2}dt=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)dt=\left.\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\right|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 37. **(THPT LÝ NHÂN TÔNG LẦN 1 NĂM 2018-2019)** Biết $\int\limits_{0}^{1}\frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}.\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

Lời giải

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3\left(\pi+e.2^x\right)+2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}.\ln\left|\pi + \mathrm{e}.2^x\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}.\ln\left|1 + \frac{\mathrm{e}}{\pi + \mathrm{e}}\right|.$$

Vậy $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$ nên $P = m + n + p = 7$.

Câu 38. $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2}\mathrm{d}x = \ln\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a + b + c + d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1$. Khi đó:

$$I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{2t + 1}{(t + 2)^2}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \left(\frac{-3}{(t + 2)^2} + \frac{2}{t + 2}\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{3}{t + 2} + 2\ln|t + 2|\right)\right|_0^1 = \ln\frac{9}{4} - \frac{1}{2}.$$

Vậy $a + b + c + d = 9 + 4 + 1 + 2 = 16$.

Câu 39. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(3x^3 - 1)\ln x + 3x^2 - 1}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}^3 + b + c.\ln(\mathrm{e} + 1)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln\mathrm{e} = 1$. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 9$. **B.** $P = 14$. **C.** $P = 10$. **D.** $P = 3$.

Lời giải

Ta có

$$I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(3x^3 - 1)\ln x + 3x^2 - 1}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{3x^2(1 + x\ln x) - (1 + \ln x)}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} 3x^2\mathrm{d}x - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(1 + \ln x)}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^3 - 1 - A$$

Tính $A = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{(1 + \ln x)}{1 + x\ln x}\mathrm{d}x$. Đặt $t = 1 + x\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1 + \ln x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = \mathrm{e} + 1 \end{cases}$. Khi đó $A = \int\limits_1^{1+\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t\Big|_1^{1+\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e} + 1)$.

Vậy $I = \mathrm{e}^3 - 1 - \ln(\mathrm{e} + 1) \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ c = -1 \end{cases}$.

Câu 40. Biết rằng: $\int\limits_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^a 2 + b\ln 2 + c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó a,b,c là những số nguyên. Khi đó $S = a + b - c$ bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\ln 2} x\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1}\mathrm{d}x.$$

Tính $\int\limits_0^{\ln 2} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$

Tính $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2e^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2e^x\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận: $x=\ln 2\Rightarrow t=5, x=0\Rightarrow t=3$.

$\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\int\limits_3^5\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2-\ln\dfrac{5}{3}$.

$\int\limits_0^{\ln 2}\left(x+\dfrac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2-\ln\dfrac{5}{3}\Rightarrow a=2,b=1,c=-1$

Vậy $a+b-c=4$.

Câu 41. Cho $\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}+b\ln\left(\mathrm{e}+c\right)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\mathrm{e}+1$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\dfrac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\mathrm{e}-\ln(\mathrm{e}+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

Câu 42. Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=a\mathrm{e}-b-\ln\dfrac{a\mathrm{e}+c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S=2a+b+c$.

A. $S=10$. **B.** $S=0$. **C.** $S=5$. **D.** $S=9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $I=\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+5x+6\right)\mathrm{e}^x}{x+2+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{(x+2)(x+3)\mathrm{e}^{2x}}{(x+2)\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=(x+2)\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=(x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=2$, $x=1\Rightarrow t=3\mathrm{e}$.

$I=\int\limits_2^{3\mathrm{e}}\dfrac{t\mathrm{d}t}{t+1}=\int\limits_2^{3\mathrm{e}}\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^{3\mathrm{e}}=3\mathrm{e}-2-\ln\dfrac{3\mathrm{e}+1}{3}$.

Vậy $a=3$, $b=2$, $c=1\Rightarrow S=9$.

Câu 43. $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}+\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x$. Đặt $\pi+\mathrm{e}.2^x=t\Rightarrow \mathrm{e}.2^x\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Leftrightarrow 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+\mathrm{e}$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2\mathrm{e}$.

$$J=\int_0^1 \frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\int_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right).$$

Khi đó $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 44. Biết $I=\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. 9. **B.** -6. **C.** -9. **D.** 6.

Lời giải

Biết $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(\ln^2 x+\frac{1}{3}x\right)}{x}dx=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x+3x}\left(3\ln^2 x+x\right)}{x}dx$$

Đặt $t=\ln^3 x+3x\Rightarrow dt=\frac{3}{x}\ln^2 x+1$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=e\Rightarrow t=1+3e\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_3^{1+3e}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\left(\sqrt{t^3}\right)\Big|_3^{1+3e}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+3e)^3}-3\sqrt{3}\right)=\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+9e+27e^2+27e^3}-3\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=9.$$

Chọn A

Câu 45. Cho tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx=\frac{ae^4+be^2}{2}+c+d\ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

A. $a=b=c=d$ **B.** $a=b^2=\sqrt{c}=\frac{1}{d}$ **C.** A và B đúng **D.** A và B sai

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$I=\int_e^{e^2}\frac{\left(x^2+1\right)\ln x+1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{x^2\ln x+1+\ln x}{x\ln x}dx$$

$$=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$$

Xét $M=\int_e^{e^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Big|_e^{e^2}=\frac{e^4-e^2}{2}+1$

Xét $N=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$, đặt $t=\ln x$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$.

Đối cận $x=e\Rightarrow t=1$ và $x=e^2\Rightarrow t=2$ ta được

$N=\int_1^2\frac{dt}{t}=\left(\ln|t|\right)\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

Vậy $I=\frac{e^4-e^2}{2}+1+\ln 2$.

Do đó $a=-b=c=d=1$. Ta chọn phương án **B.**

Câu 46. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}.\cos x}{1+2^x}dx = \frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a.b$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\operatorname{cosx}}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2}dx - \int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2}dx$ (1)

Đặt $x=-t$ ta có $x=0$ thì $t=0, x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{2}$ và $dx=-dt$

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t}\cos(-t)}{(1+2^{-t}).2}d(-t) = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2^t).2}dt = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2}dx$$

Thay vào (1) có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\operatorname{cosx}}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{(1+2^x).2}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2^x)\cos x}{(1+2^x).2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2}dx = \left.\frac{\sin x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\operatorname{cosx}}{1+2^x}dx = \frac{1}{2}$

Chọn C

Câu 47. Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^{2016}}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I=\frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I=\frac{2^{2018}}{2018}$.

Lời giải.

Chọn C

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận: Với $x=2 \Rightarrow t=-2; x=-2 \Rightarrow t=2$

Khi đó: $I = \int\limits_{2}^{-2} \frac{-t^{2016}}{e^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^{2016}e^x\mathrm{d}x}{1+e^x}$, suy ra $2I = \int\limits_{-2}^{2} x^{2016}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{2017}}{2017}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^{2018}}{2017} \Rightarrow I = \frac{2^{2017}}{2017}$.

Câu 48. Biết tích phân $\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \frac{a.\pi+b}{8}$ trong đó $a,b \in \mathbb{N}$. Tính tổng $a+b$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1

Lời giải

$$I = \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx + \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow I = \frac{\pi+2}{8}$.

Chọn C

ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó:

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

3. $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Câu 49. Biết rằng $\int\limits_4^{a+\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4<a+\sqrt{b}<5$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_4^{a+\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\int\limits_4^{a+\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3=2\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=a+\sqrt{b}\Rightarrow t=\arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=m$.

$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{m}\frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{m}\mathrm{d}t=t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{m}=m-\frac{\pi}{6}$.

Theo đề ta có $\mathrm{m}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\arcsin\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a+\sqrt{b}=\sqrt{3}+3$.

Do đó $a=3$, $b=3$, $a+b=6$.

Câu 50. Tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}+8$. **B.** $I=\frac{7\pi}{6}-4\sqrt{3}-8$.

C. $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8$. **D.** $I=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}+8$.

Lời giải

Tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ có giá trị là:

Ta có: $(3+3x-x^2)'=3-2x$ và $3+4x=9-2(3-2x)$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1 \frac{7-2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx-\int\limits_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Xét $I_1=\int\limits_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1 \frac{7}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$.

Đặt $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6} \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{14\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\frac{7\pi}{6}$.

Xét $I_2=\int\limits_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

Đặt $t=3+2x-x^2\Rightarrow dt=(2-2x)dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=3 \\ x=1\Rightarrow t=4 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\int\limits_3^4 \frac{2}{\sqrt{t}}dt=4\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_3^4=4(2-\sqrt{3})$.

$I=I_1-I_2=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8$.

Chọn C

Câu 51. Cho $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}dc=a\pi+b$ với $a,b\in R$. Giá trị $a+b$ gần nhất với

A. $\frac{1}{10}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án: C

Cũng như câu 25, câu 26 cũng là một câu tích phân đòi hỏi khả năng biến đổi của các thí sinh. Đối với câu này, chúng ta sử dụng phương pháp đưa về lượng giác.

Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. I được viết lại là

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-2\sin t\cos t}.\cos tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\cos t-\sin t)^2}.\cos tdt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t-\sin t)\cos tdt$$

$$\Leftrightarrow -\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t\cos tdt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 tdt=\frac{-1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2td(2t)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t+1)d(2t)$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sin 2t+2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{8}$$

Suy ra $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-1}{8}\approx 0{,}175$.

Nhận xét: *Hai bài toán trên chính là cách hướng có thể ra đề để tránh tình trạng sử dụng máy tính Casio. Thí sinh hiểu bản chất và cách làm thực sự sẽ không gặp khó khăn nhiều khi giải quyết các bài toán này.*

Câu 52. Tích phân $I=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Tích phân $I=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{-3-x^2+2x}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx.$$

Đặt $x-2=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn C

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi+2}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2 \Rightarrow \cos^4 x=\frac{1}{(1+t^2)^2}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}$

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=\tan u,\left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$; đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2+\pi}{8}$$

Câu 54. Tính tích phân $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}}\frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với a, b, c là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng

A. 20. **B.** 241. **C.** 196. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \left(-4+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} dx + \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = I+J$.

Tính $I = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} dx = -4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.

Tính $J = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx.$

Đặt $t = x-\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$. Khi $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u \Rightarrow dt = \sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)du$. Khi $\begin{cases} t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=\sqrt{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Suy ra $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4 \Rightarrow \begin{cases} a=b=-16 \\ c=1 \end{cases}$.

Vậy $a+b^2+c^4=241$.

Câu 55. **(CỤM TRẦN KIM HƯNG -HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+6f(2x)=\sqrt{4-x^2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f(x)dx$.

A. $I=\frac{\pi}{5}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4xf\left(x^2\right)+6f(2x)=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \int_0^2\left(4xf\left(x^2\right)+6f(2x)\right)dx = \int_0^2\sqrt{4-x^2}dx \Leftrightarrow 4I_1+6I_2=I$.

Trong đó

$I_1=\int_0^2\left(xf\left(x^2\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(x^2\right)d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx$

$I_2=\int_0^2\left(f(2x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx$

$I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2(t)}.\cos(t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos(2t)\right)dt = \left(2t+\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} I_1 = I_2 \\ 4I_1 + 6I_2 = \pi \end{cases} \Leftrightarrow I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{10} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{10}$ hay $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{5}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

Câu 1. Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $2=\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$..

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Tích phân $I=\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=16$. **B.** $I=2$. **C.** $I=8$. **D.** $I=4$

Lời giải

Chọn D

$I=\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$;

đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^2 2tf(t)\mathrm{d}t=8\Rightarrow \int_1^2 tf(t)\mathrm{d}t=4$. Vậy $I=\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x=4$.

Câu 3. **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{-3\sin x}{2\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $J=\int_2^1 -\frac{2}{3}f(t)\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{2}{3}f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.2=\frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\ \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$

.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn B

Có $I=\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow u=3 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\dfrac{-1}{2}\int\limits_{3}^{0} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=3$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow u=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(u\right)\mathrm{d}u=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$; $\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x$
;
.

A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\dfrac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{4}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\dfrac{1}{3}(-3)+\dfrac{1}{3}.1=\dfrac{4}{3}$.

Câu 6. Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x+1\right|\right)\mathrm{d}x$
.

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(\left|u\right|\right)\mathrm{d}u\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u\right)$.

Xét $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{-1} f\left(-u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u$.

Ta có $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u+\int_{0}^{3} f(u)\,\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u\Rightarrow \int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$.

Đặt $v=6x\Rightarrow \mathrm{d}v=6\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v\Rightarrow \int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v=84$.

+ Xét $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1=\int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-5\mathrm{d}x$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_1=\frac{-1}{5}\int_{12}^{2} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$.

□ Tính $I_1=\int_0^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$.

Vậy $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x=32$.

Câu 8. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=8$. Tính tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(\cos x)dx$.

A. $K=-8$. **B.** $K=4$. **C.** $K=8$. **D.** $K=16$.

Lời giải:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx$ Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ $\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right).f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right].(-dt) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t.f(\cos x).dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(\cos x).dt$ (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= K \Rightarrow K = I = 8$

Chọn C

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Giá trị của tích phân $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $I = 5$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $J = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, đặt $x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.

Với $x = 2 \Rightarrow t = 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Ta có $J = \int_0^1 f(2t)2\mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(2t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 3f(t)\mathrm{d}t = 6\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Mặt khác, ta có $J = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = J - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = -10$. **B.** $I = -5$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -18$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có: $t^2 = x$ và $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

$I = \int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 2tf'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u = 2t$; $\mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$; $v = f(t)$.

Khi đó: $I = \left(2tf(t)\right)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 4f(2) - 2.1 = 4.(-2) - 2 = -10$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 9$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

•Xét $I=\int_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$, đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=16\Rightarrow t=4$

$I=2\int_{1}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\ \Rightarrow\int_{1}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{6}{2}=3$.

• $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=3$, đặt $\sin x=u\Rightarrow\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$

$J=\int_{0}^{1}f\left(u\right)\mathrm{d}u=3$

Vậy $I=\int_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+3=6$.

Câu 12. Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_{1}^{9}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$ và $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{1}^{9}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$, đặt $t=\sqrt{x}\ \Rightarrow t^2=x\ \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

đổi cận $x=1\Rightarrow t=1$, $x=9\Rightarrow t=3$

Do đó ta có: $\int_{1}^{3}\frac{f\left(t\right)}{t}2t\,\mathrm{d}t=4\Leftrightarrow\int_{1}^{3}f\left(t\right)\mathrm{d}t=2$ (1)

Ta có: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x.\mathrm{d}x=4$, đặt $t=\sin x\Rightarrow\mathrm{d}t=\cos x.\mathrm{d}x$

đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Do đó ta có: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x.\mathrm{d}x=2\Leftrightarrow\int_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t=2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\int_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}f\left(t\right)\mathrm{d}t=4$..

Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_{3}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x\ =\int_{1}^{4}\left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K=\int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t$ $\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K=\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $M=\int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 \ln x\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\ln^2 2 \Rightarrow \int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

Câu 14. Cho $\int\limits_0^1 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=12$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Đặt $2x+1=t \Rightarrow 12=\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}\left(\frac{t-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=24$.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right).2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin x\right)$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\left(\sin^2 x\right)=\int\limits_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$

$\Rightarrow \int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+24=27$.

Câu 15. Cho hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^1 \frac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 \frac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \frac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \frac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\tan x=t$ suy ra $\mathrm{d}\left(\tan x\right)=\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \Leftrightarrow \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\tan^2 x\right)}=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\limits_0^1 \frac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=3$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=4$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$; $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$; Ta đặt $t = \tan x$ ta được $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = 4$

Từ $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 + 4 = 6$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t = 2018$.

Suy ra $I = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.2 = 1$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

+ Từ $f(x) = \ln x^{15} \Rightarrow f'(x) = \frac{15x^{14}}{x^{15}} = \frac{15}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-15}{x^2}$ do đó $f''\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{-243}{20}$.

+ Tính tích phân $I = \int_0^3 x(3-x)^m \mathrm{d}x$:

• Đặt $t = 3 - x \Rightarrow x = 3 - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$,

x	0	3
t	3	0

• Do đó $I = \int_3^0 (3-t)t^m(-\mathrm{d}t) = \int_0^3 \left(3t^m - t^{m+1}\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{3t^{m+1}}{m+1} - \frac{t^{m+2}}{m+2}\right|_0^3 = \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

+ Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{243}{20} \Leftrightarrow \frac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m = 3$.

Chú ý:

-Việc giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ không cần thiết nên chọn phương pháp thế đáp để làm trắc nghiệm trong bài này.

-Để giải phương trình $\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}=\dfrac{3^3}{4.5}$ ta xét hàm trên $f(m)=\dfrac{3^m}{(m+1)(m+2)}-\dfrac{3^3}{4.5}$ với $m>0$ thì chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất $m=3$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{9}{2}$. **D.** $I=\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x),\forall x[a;b]$. Khi đó $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x\in[a;b]$. Đổi cận: khi $x=a\Rightarrow t=b$; khi $x=b\Rightarrow t=b$

Ta có $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b xf(a+b-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a (a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t$

$=\int\limits_a^b (a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow \boxed{\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Áp dụng tính chất trên với $a=1$, $b=3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x)=f(x)$.

Khi đó $\int\limits_1^3 xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1+3}{4}\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t=4-x$, với $x\in[1;3]$.

Ta có $\int\limits_1^3 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(4-x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 (4-t)f(t)\,\mathrm{d}t=4\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_1^3 t.f(t)\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5=4\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t-5\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{5}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ và $\int\limits_1^3 xf(x)\,\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $x=4-t$, ta có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=1\Rightarrow t=3$, $x=3\Rightarrow t=1$.

Suy ra $I=\int\limits_1^3 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t$, hay $I=\int\limits_1^3 (4-x)f(x)dx$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $2I=\int\limits_1^3 4f(x)dx\Rightarrow\int\limits_1^3 f(x)dx=\frac{I}{2}=-1$.

Câu 21. **(Chuyên KHTN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=\int\limits_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=6$.

Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f(x^2)}{x}dx$

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

+) Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2dt=dx$

Đổi cận: x	1	8
t	1	2

Khi đó $\int\limits_1^8\frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=\int\limits_1^2\frac{f(t)}{t^3}3t^2dt=3\int\limits_1^2\frac{f(t)}{t}dt=6\Rightarrow\int\limits_1^2\frac{f(t)}{t}dt=2$

+) Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-2\cos x\sin xdx\Rightarrow dt=-2\cos^2 x\tan xdx\Rightarrow \tan xdx=-\frac{1}{2t}dt$

Đổi cận: x	0	$\frac{\pi}{3}$
t	1	$\frac{1}{4}$

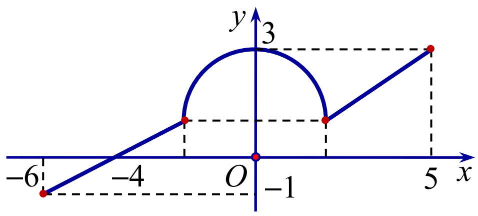
Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{4}}\frac{f(t)}{t}dt=6\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(t)}{t}dt=12$

+) Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow dt=2x^2\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dt}{t}$

Đổi cận: x	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
t	$\frac{1}{4}$	2

Khi đó $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{f(x^2)}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^2\frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(t)}{t}dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{f(t)}{t}dt=\frac{2+12}{2}=7$

Câu 22. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^5[f(x)+2]\mathrm{d}x$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2 & \text{khi } -6\le x\le -2\\ 1+\sqrt{4-x^2} & \text{khi } -2\le x\le 2\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & \text{khi } 2\le x\le 5\end{cases}$.

$I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_{-6}^{5}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x+22$

$=\left(\frac{1}{4}x^2+2x\right)\Big|_{-6}^{-2}+J+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{x}{3}\right)\Big|_{2}^{5}+22=J+28$.

Tính $J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=2$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$; khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

$J=\int\limits_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x=4+4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=4+2\pi$. Vậy $I=32+2\pi$.

Câu 23. **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{e^6}\frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_{1}^{3}\left(f\left(x\right)+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\frac{1}{2}\ln x\Rightarrow 2\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	1	e^6
t	0	3

Khi đó $\int\limits_{1}^{e^6}\frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{e^6}\frac{f\left(\frac{1}{2}\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}2f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int\limits_{0}^{3}f\left(t\right)\mathrm{d}t=3\Rightarrow\int\limits_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

Đặt $u=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\cos x.\sin x\mathrm{d}x=-\sin 2x\mathrm{d}x$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x = -\int_1^0 f\left(u\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u = 2 \Rightarrow \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$.

Do đó $\int_1^3 \left(f\left(x\right)+2\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 2\mathrm{d}x = \int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 2\mathrm{d}x = 3-2+2x\big|_1^3 = 5$.

Câu 24. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

* $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}.\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

Khi đó $I_1 = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* $I_2 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{\ln^2 x}.\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* Tính $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $2x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int\limits_{1}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=4+4=8$.

Câu 25. **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-2}^{2}f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{1}^{5}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x^2+5}-x$ suy ra

$t+x=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow(t+x)^2=x^2+5\Rightarrow t^2+2tx=5\Rightarrow x=\frac{5}{2t}-\frac{t}{2}\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(-\frac{5}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=5;\ x=2\Rightarrow t=1$.

Ta có: $\int\limits_{-2}^{2}f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{5}^{1}f(t)\left(-\frac{5}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{5}f(t)\left(\frac{5}{t^2}+1\right)\mathrm{d}t=1$.

Suy ra $\int\limits_{1}^{5}f(t)\left(\frac{5}{t^2}+1\right)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow 5\int\limits_{1}^{5}\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t+\int\limits_{1}^{5}f(t)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{5}f(t)\mathrm{d}t=2-5\int\limits_{1}^{5}\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x=2-5\int\limits_{1}^{5}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=2-5.3=-13$.

Câu 26. **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int\limits_{0}^{3}f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=2019$, $\int\limits_{4}^{8}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_{4}^{8}f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2019. **B.** 4022. **C.** 2020. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int\limits_{0}^{3}f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=2019$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+16}+x$. Ta có $t-x=\sqrt{x^2+16}\Rightarrow t^2-2tx+x^2=x^2+16\Rightarrow x=\frac{t}{2}-\frac{8}{t}$.

Suy ra $\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ thì $t=4$, khi $x=3$ thì $t=8$.

Suy ra

$2019=\int\limits_{0}^{3}f\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{4}^{8}f(t).\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{4}^{8}f(x).\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\limits_{4}^{8}f(x)\mathrm{d}x+8\int\limits_{4}^{8}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{4}^{8}f(x)\mathrm{d}x+8$.

Vậy $\int\limits_{4}^{8}f(x)\mathrm{d}x=4022$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x)+B.u'.f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$

+) Với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ thì $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int\limits_{a}^{b}g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \dfrac{1}{A-B+C}\int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C.

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

Biến đổi $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2.3x^2.f(x^3) = -\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1$, $B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+(-2)}\int_0^1 -\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = 4$.

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 3x^2 f(x^3)\mathrm{d}x = -6\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

Đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2\mathrm{d}x$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x^3)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$, ta được:

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -6\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 6\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = 4$.

Câu 28. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I = \dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{16}$

Lời giải

Chọn C

Từ $4x.f(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x + 3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (*)$

+) Đặt $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (1)$

+) Đặt $t = 1-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$; Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được:

$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{20}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x)+f(2-x)=2x$ ta có $A=1$; $B=1$, suy ra: $I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_0^2 2x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=2$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+f(2-x)=2x \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 2xdx=4$ (*)

Đặt $u=2-x \Rightarrow du=-dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=2$ và $x=2 \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(u)du=\int_0^2 f(x)dx$.

Thay vào (*), ta được $2\int_0^2 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=2$.

Câu 30. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\left.\sqrt{(1-x)^3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

Câu 31. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{25}$. **B.** $I=-\frac{4}{15}$. **C.** $I=-\frac{1}{15}$. **D.** $I=\frac{4}{75}$.

Lời giải

Chọn B

Do $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x} \Rightarrow \int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x-\underbrace{\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x}_{I_1}=\underbrace{\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x}_{I_2}$ (1).

+ Xét $I_1=3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$:

Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_1=3\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3I$.

+ Xét $I_2=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{1-x} \Rightarrow x=1-t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$.

Khi $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_2=\int_1^0 (1-t^2)t(-2t)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right)\right|_1^0=\frac{4}{15}$.

Thấy vào $(1): 2I-3I=\frac{4}{15} \Leftrightarrow I=-\frac{4}{15}$.

Câu 32. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x)+(2x)f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Ta có:

$A=1; B=1; C=3$ và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1)=-1 \\ u(2)=2 \end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức có:

$I=\int_{-1}^{2} f(x)=\frac{1}{1+1+3}\int_{-1}^{2} 4x^3\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{5}\right|_{-1}^{2}=3$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2} 2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int_{-1}^{2} f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} 4x^3\mathrm{d}x$ $(*)$

+) Đặt $u=x^2-2 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; với $x=-1 \Rightarrow u=-1$ và $x=2 \Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} 2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ (1)

+) Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Với $x=-1 \Rightarrow t=2$ và $x=2 \Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ (2)

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $5\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=15 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 33. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị của $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)\Rightarrow f(x)+\frac{1}{2}.(-2x).f(3-x^2)=\sqrt{x+2}$

$A=1;B=\frac{1}{2};C=0$ và $u=3-x^2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(-1)=2\\u(2)=-1\end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức ta có: $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}+0}\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\frac{28}{3}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến).

Từ $f(x)-xf(3-x^2)=\sqrt{x+2}\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{2} xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\frac{14}{3}$ (*)

Đặt $u=3-x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$ với $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=2\\x=2\Rightarrow u=-1\end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^{2} xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ thay vào (*) ta được

$\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}\Leftrightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{28}{3}$.

Câu 34. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

Với: $f(x)-\frac{1}{2}.(-2x)f(1-x^2)+3f(1-x)=2x$. Ta có:

$A=1$; $B=\frac{-1}{2}$; và $u=x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases}u(0)=1\\u(1)=0\end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức ta có:

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)+3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\frac{2}{9}\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{2}{9}\ln 2$.

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf(1-x^2)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2$. (*)

+) Đặt $u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ (1).

+) Đặt $u=1-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t$ (2).

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow \frac{9}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và thỏa mãn $f\left(x\right)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c};\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

Biến đổi $f\left(x\right)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow f\left(x\right)-2.\left(4x^3\right)f\left(x^4\right)=-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với $A=1;B=-2$

Áp dụng công thức ta có: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{1+\left(-2\right)}\int\limits_0^1\left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=\left.\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f\left(x\right)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx-2\int\limits_0^1 4x^3f\left(x^4\right)dx+\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0$ (*)

Đặt $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int\limits_0^1 4x^3f\left(x^4\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ thay vào (*), ta được:

$\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx-2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.xdx=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=\left.\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 36. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-\ln 2;\ln 2\right]$ và thõa mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng công thức

Với $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ ta có $A=1;B=1$, suy ra $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+1}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Cách 2: Dùng phương pháp dồn biến nếu không nhớ công thức

Từ $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}(*)$

Đặt $u=-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ thay vào $(*)$ ta được:

$2\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}\Leftrightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x\mathrm{d}x$

Với $x=-\ln 2\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}, x=\ln 2\Rightarrow t=2$

$\Rightarrow \int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\dfrac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\ln\left|\dfrac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Khi đó: $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln 2=a\ln 2+b\ln 3\xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}} a=\dfrac{1}{2}, b=0$

$\Rightarrow P=a+b=\dfrac{1}{2}$.

Câu 37. Biết hàm số $y=f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x+\cos x$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Lời giải:

Đặt $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận: $\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right).(-dt)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)dx$

(Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ $\Bigg($ Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\Bigg)$

Vậy $2I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=(\cos x-\sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1-1=-2$

$\Rightarrow I=-1\Rightarrow$ **Chọn D**

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, ta có $A=1;B=1$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x.dx=\frac{1}{4}$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos xdx=\frac{1}{2}$ (*)

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow du=-dx$

Với $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, thay vào (*) ta được

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{4}$ (1)

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (*)

Từ điều kiện $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ suy ra

$\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=0\\f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ (2).

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=-\frac{1}{4}$.

Chọn D

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\frac{x^2}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$. tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2-\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t=1+2x\Rightarrow 1-2x=2-t$ và $x=\frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành

$f(t)+f(2-t)=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+5}\Rightarrow f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$ (*)

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$ ta có $A=1;B=1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}$

Chọn A

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến – nếu nhớ công thức)

Từ (*), ta có $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}\Rightarrow\int_{-1}^{3} f(x)dx+\int_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx$ (2*)

Đặt $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$. Với $x = -1 \Rightarrow u = 3; x = 3 \Rightarrow u = -1$.

Suy ra $\int_{-1}^{3} f\left(2-x\right)dx = \int_{-1}^{3} f\left(u\right)du = \int_{-1}^{3} f\left(x\right)dx$, thay vào (*), ta được:

$$2\int_{-1}^{3} f\left(x\right)dx = \int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx \Rightarrow \int_{-1}^{3} f\left(x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 3

Cách giải: Lần lượt đặt $t=u(x)$ và $t=v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x)=x$ thì chỉ cần đặt một lần $t=v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ với $A^2\neq B^2$) khi đó $f(x)=\dfrac{A.g\left(\dfrac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\dfrac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$ (*)

+)Hệ quả 1 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$

+)Hệ quả 2 của (*): $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt, $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f(t)=\dfrac{3}{t}\Rightarrow 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$.

Hay $4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$. Suy ra :

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3\text{x}\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2}-1\Rightarrow\ I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left.\left(\frac{-2}{x}-x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Chọn B

Câu 41. **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f(x)}{x^2+x}\text{d}x$ bằng

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{16}{9}$.

Lờigiải

Chọn A

+ Đặt $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow \text{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\text{d}t$.

+ Đổi cận: $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=3; x=3\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

+ Ta có $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f(x)}{x^2+x}\text{d}x=-\int_{3}^{\frac{1}{3}}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}}.\dfrac{1}{t^2}\text{d}t=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{t+1}\text{d}t$.

Suy ra:

$$2I=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}\text{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\text{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x+1)}\text{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)}\text{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}(x-1)\text{d}x=\frac{16}{9}.$$

Vậy $I=\dfrac{8}{9}$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f\left(3x\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2}$, $\int\limits_3^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=k$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ theo k.

A. $I=-\dfrac{45+k}{9}$. **B.** $I=\dfrac{45-k}{9}$. **C.** $I=\dfrac{45+k}{9}$. **D.** $I=\dfrac{45-2k}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow t=3 \end{array}\right.$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(\dfrac{2}{t}\right)\mathrm{d}x$.

Mà $2f\left(3x\right)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2}$ $\Leftrightarrow$ $f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2}{3}f\left(3x\right)$

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3\left[-\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2}{3}f\left(3x\right)\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{4}\int\limits_1^3 x\,\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=-5-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$ (*)

Đặt $u=3x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=1\Rightarrow u=3 \\ x=3\Rightarrow t=9 \end{array}\right.$.

Khi đó $I=-5-\dfrac{1}{9}\int\limits_3^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t=-5-\dfrac{k}{9}=-\dfrac{45+k}{9}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{2019}$. **B.** $I=\dfrac{2}{1009}$. **C.** $I=\dfrac{4}{2019}$. **D.** $I=\dfrac{1}{1009}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$ ta có $A=1;B=2018$

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\mathrm{d}x\overset{Casio}{=}\dfrac{4}{2019}\Rightarrow$ **Đáp án C**

Cách 2:

Áp dụng Hệ quả 2: $A.f\left(x\right)+Bf\left(-x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{A+B}$ với $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2x\sin x}{2019}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \overset{Casio}{=} \frac{4}{2019} \Rightarrow$$ **Đáp án C**

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx$

A. $I=\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\frac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng công thức).

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1; B=2018$.

Suy ra $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{1+2018}\int_{-1}^{1} e^x dx=\frac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\frac{e^2-1}{2019e}$.

Cách 2: (Dùng công thức)

Áp dụng Hệ quả 1: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2-B^2}$.

Ta có:

$$f(-x)+2018f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\frac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1}\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{2019.2017}\int_{-1}^{1}(2018e^x-e^{-x})dx$$

$\approx 1{,}164.10^{-3}\approx\frac{e^2-1}{2019e}$ (Casio).

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng kết quả

"Cho $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)=g(x)$ (với $A^2\neq B^2$) khi đó $f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{a}\right)}{A^2-B^2}$".

Ta có

$$2f(2x)+f(1-x)=12x^2=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}$$

$$=\frac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1.$$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

Câu 46. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng Hệ quả

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x) \Rightarrow g(x)=\frac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x) \Rightarrow g(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=2018$.

Chú ý: Nếu $f(x)$ *là hàm số chẵn, liên tục trên* $[-a;a] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Câu 47. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=a$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2a^2$. **B.** a. **C.** a^2. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=-t \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=a^2$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x)+f(-x)=2\sin x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{2} \to t=\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2} \to t=-\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\mathrm{d}x=0\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$

Câu 49. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=6$. **D.** $I=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{0}f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết ta có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}\Leftrightarrow\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên **R** và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$. Tính $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=2$.

Lời giải

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ (1) Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f(-t).(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

$(1)+(2) \Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + f(-x) \right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}\, dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\cos 2x)}\, dx =$

$\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\, dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[1-(-1)\right] = 4$

$\Rightarrow I = 2$

Chọn D

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **C.** $1 + \frac{\pi}{4}$. **D.** $2 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(-x) - 2f(x) \right] \mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, đổi cận $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$.

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(-x) - 2f(x) \right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(t) - 2f(-t) \right] \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x) - 2f(-x) \right] \mathrm{d}x$

Suy ra, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x) - 2f(x) \right] \mathrm{d}x \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi}{2}$

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Chọn $f(x) = f(-x) = \tan^2 x$ (Thỏa mãn giả thiết).

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi}{2}$

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-\ln 2; \ln 2 \right]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 \; (a;b \in \mathbb{Q})$. Tính $P = a+b$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = -2$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$; Với $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$.

Ta được $I = -\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\,\mathrm{d}x == \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left[f(x) + f(-x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = 2$.

Ta được $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}\mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u$

$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left(\ln|u| - \ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2$

Vậy ta có $a = \frac{1}{2}$, $b = 0 \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}$.

Câu 53. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$. **B.** $I = \frac{1}{15}$. **C.** $I = \frac{4}{75}$. **D.** $I = \frac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$ ta có $A = 2; B = 3$.

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \overset{Casio}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}$.

Áp dụng kết quả

"Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}"."$$

Ta có: $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2}$

$= \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}$.

Suy ra: $I = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}\,dx \overset{Casio}{=} 0{,}05(3) = \dfrac{4}{75}$.

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx + 3\int\limits_0^1 f(1-x)\,dx = \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx \overset{Casio}{=} 0{,}2(6) = \dfrac{4}{15}(*)$

Đặt $u = 1-x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f(1-x)\,dx = \int\limits_0^1 f(u)\,du = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$5\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \dfrac{4}{15} \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \dfrac{4}{75}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

Câu 54. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[-1,1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 5$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = 7$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx = 10$.   **B.** $\int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx = 14$.

C. $\int\limits_{-1}^1 \left[f(x) + g(x)\right]dx = 10$.   **D.** $\int\limits_{-1}^1 \left[f(x) - g(x)\right]dx = 10$.

Lời giải

Nhớ 2 tích chất sau để làm trắc nghiệm nhanh:

Câu 55. Nếu hàm $f(x)$ CHẴN thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$ **2**. Nếu hàm $f(x)$ LẺ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Nếu chứng minh thì như sau:

Đặt $A = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int\limits_0^1 f(x)\,dx}_{A_2}$

$A_1 = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$\Rightarrow A_1 = \int\limits_1^0 f(-t).(-dt) = \int\limits_0^1 f(-t)\,dt = \int\limits_0^1 f(-x)\,dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $= \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow f(-x) = f(x)$)

Vậy $A = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 10$ (1)

Đặt $B = \int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_{-1}^0 g(x)\,dx}_{B_1} + \underbrace{\int\limits_0^1 g(x)\,dx}_{B_2}$

$B_1 = \int\limits_{-1}^0 g(x)\,dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận:

x	-1	0
t	1	0

$\Rightarrow B_1=\int\limits_1^0 g(-t).(-dt)=\int\limits_0^1 g(-t)\,dt=\int\limits_0^1 g(-x)\,dx$ (Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân) $=-\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ (Do $f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow g(-x)=-g(x)$)

Vậy $B=\int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx=-\int\limits_0^1 g(x)\,dx+\int\limits_0^1 g(x)\,dx=0$ (2)

Từ (1) và (2)

Chọn B

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Sử dụng công thức: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax)\,\mathrm{d}x$ và tính chất $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$.

Áp dụng, ta có:

$\bullet\, 4=\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x=8$.

$\bullet\, 2=\int\limits_{-2}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x=-\int_2^0 f(x)=\int_0^2 f(x)\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)=2$

Suy ra: $0=\int_{-4}^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 0=8+\left(\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)+I\Leftrightarrow 0=8+(0-2)+I\Leftrightarrow I=-6$.

Cách 2: Xét tích phân $\int\limits_{-2}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x=2$.

Đặt $-x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$ do đó $\int\limits_{-2}^0 f(-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2\Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=-4$.

Xét $\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t)\mathrm{d}t = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = -8$.

Do $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 2 - 8 = -6$.

Câu 57. **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1} \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x = 8$. Giá trị của $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 8. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $8 = \int_{-1}^{1} \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x$. (1)

Xét $I = \int_{-1}^{0} \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x$:

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0$. Khi đó

$I = \int_1^0 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}}(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 \frac{f(-2t)}{1+5^{-t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{5^t f(-2t)}{5^t+1}\mathrm{d}t$.

Vì $y = f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $f(-2t) = f(2t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $I = \int_0^1 \frac{5^t f(2t)}{5^t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x$. Thay vào (1) thu được

$8 = \int_0^1 \frac{5^x f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f(2x)}{1+5^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(5^x+1)f(2x)}{5^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = 8 \Rightarrow \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 16$.

Câu 58. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;\ 1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Kết quả $I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 1$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Xét $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x$

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$I_1 = \int_1^0 \frac{f(x)}{1+e^{-t}}(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 \frac{e^t.f(x)}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

Lại có $\int_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^x.f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^t.f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1+e^t).f(t)}{1+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Câu 59. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tính chất của hàm số chẵn

Ta có: $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{b^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$, với $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\left[-a;a\right]$.

Áp dụng ta có:

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1+2=3$$

Cách 2: Do $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

Mặt khác $\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ và $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f\left(-x\right)=f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $I=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

Suy ra $I=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0\frac{f\left(-t\right)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^2\frac{f\left(-t\right)}{\frac{1}{3^t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^2\frac{3^t f\left(t\right)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^2\frac{3^x f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_{-2}^{2}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\frac{3^x f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\frac{f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\frac{\left(3^x+1\right)f\left(x\right)}{3^x+1}\mathrm{d}x=$
$\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 4

" Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $g\left[f\left(x\right)\right]=x$ và $g\left(t\right)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ .Hãy tính tích phân $I=\int_a^b f\left(x\right)dx$ "

Cách giải: Đặt $y=f\left(x\right)\Rightarrow x=g\left(y\right)\Rightarrow dx=g'\left(y\right)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=a\to g\left(y\right)=a\Leftrightarrow y=\alpha\\ x=b\to g\left(y\right)=b\Leftrightarrow y=\beta\end{cases}$

Suy ra $I=\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_\alpha^\beta yg\left(y\right)dy$

Câu 60. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f\left(x\right)dx$

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=\left(3y^2+1\right)dy$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\to y^3+y=0\Leftrightarrow y=0\\ x=2\to y^3+y=2\Leftrightarrow y=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y\left(3y^2+1\right)dy=\int_0^1\left(3y^3+y\right)dy=\frac{5}{4}\Rightarrow$ đáp án **D**

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow \mathrm{d}x=6\left(y^2-y+1\right)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=0\Leftrightarrow y=0$ và $x=5\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=5\Leftrightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 y.6\left(y^2-y+1\right)\mathrm{d}y=6\int\limits_0^1\left(y^3-y^2+y\right)\mathrm{d}y=\frac{5}{2}$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: Với $x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Leftrightarrow y=1$; $x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Leftrightarrow y=0$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^0 y\left(-3y^2-2\right)\mathrm{d}y=\frac{7}{4}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 5

Bài toán: " Cho $f(x).f(a+b-x)=k^2$, khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow\begin{cases}dt=-dx\\ f(x)=\frac{k^2}{f(t)}\end{cases}$ và $x=a\Rightarrow t-b$; $x=b\Rightarrow t=a$.

Khi đó $I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+\frac{k^2}{f(t)}}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}$.

$2I=\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}x}{k+f(x)}+\frac{1}{k}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x}{k+f(x)}=\frac{1}{k}\int\limits_a^b\mathrm{d}x=\frac{1}{k}(b-a)\Rightarrow I=\frac{b-a}{2k}$.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$.　　**B.** $\frac{1}{2}$.　　**C.** 1.　　**D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $1+f(x)=f(x)f(1-x)+f(x)\Rightarrow \frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{1}{f(1-x)+1}$

Xét $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$.

Đặt $t=1-x\Leftrightarrow x=1-t\ \Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)}=\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(t)}dx=\int\limits_0^1 dx=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(0).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $I=2018$.　　**B.** $I=0$　　**C.** $I=1009$　　**D.** 4016

Lời giải

Chọn C

ta có $I=\int\limits_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)}dx=\frac{2018-0}{2.1}=1009$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)>0$ khi $x\in[0;5]$. Biết $f(x).f(5-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{5}{4}$.　　**B.** $I=\frac{5}{3}$.　　**C.** $I=\frac{5}{2}$.　　**D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=5-t\Rightarrow dx=-dt$

$x=0\Rightarrow t=5$; $x=5\Rightarrow t=0$

$I=-\int_5^0 \frac{dt}{1+f(5-t)}=\int_0^5 \frac{f(t)dt}{1+f(t)}$ (do $f(5-t)=\frac{1}{f(t)}$)

$\Rightarrow 2I=\int_0^5 dt=5\ \Rightarrow I=\frac{5}{2}$.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 xf(x)dx=5$. Tính tích phân $\int\limits_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$.　　**B.** $\frac{7}{2}$.　　**C.** $\frac{9}{2}$.　　**D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=4-x\Rightarrow dt=-dx$ và $x=1\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $5=\int\limits_1^3 xf(x)dx=\int\limits_1^3 (4-t)f(4-t)dt=\int\limits_1^3 (4-x)f(4-x)dx=\int\limits_1^3 (4-x)f(x)dx$.

Suy ra: $10=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^3(4-x)f(x)\mathrm{d}x=4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **R** và $f(x)>0$ khi $x\in[0;a]$ ($a>0$). Biết $f(x).f(a-x)=1$, tính tích phân $I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{a}{2}$. **B.** $I=2a$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=\frac{a}{4}$.

Lời giải:

$I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ (1) Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$ Đổi cận:

$\Rightarrow I=\int_a^0-\frac{dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-t)}dt=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-x)}dx$ (2) (Tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số tích phân)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I=\int_0^a\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+f(a-x)}\right]dx$

$=\frac{1+f(a-x)+1+f(x)}{1+f(x).f(a-x)+f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^2\frac{2+f(a-x)+f(x)}{2+f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^a dx=a\ \Rightarrow I=\frac{a}{2}$

Chọn A

Câu 68. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases}f(x).f(a-x)=1\\f(x)>0,\forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;x=a\Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_0^a 1\mathrm{d}x=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Cách 2. Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 6

Câu 69. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$, đồng biến trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2, \forall x\in\left[1;4\right]$. Biết rằng $f\left(1\right)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x+2x.f\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2 \Rightarrow \sqrt{x}.\sqrt{1+2f\left(x\right)}=f'\left(x\right)\Rightarrow \frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{1+2f\left(x\right)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in\left[1;4\right]$.

Suy ra $\int\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{1+2f\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}f\left(x\right)}{\sqrt{1+2f\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f\left(x\right)}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Mà $f\left(1\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}$. Vậy $f\left(x\right)=\frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1186}{45}$.

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'\left(x\right).\mathrm{e}^{f^3\left(x\right)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2\left(x\right)}=0$ và $f\left(0\right)=1$. Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'\left(x\right).\mathrm{e}^{f^3\left(x\right)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2\left(x\right)}=0\Leftrightarrow 3f^2\left(x\right).f'\left(x\right).\mathrm{e}^{f^3\left(x\right)}=2x.\mathrm{e}^{x^2+1}$

Suy ra $\mathrm{e}^{f^3\left(x\right)}=\mathrm{e}^{x^2+1}+C$. Mặt khác, vì $f\left(0\right)=1$ nên $C=0$.

Do đó $\mathrm{e}^{f^3\left(x\right)}=\mathrm{e}^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3\left(x\right)=x^2+1\Leftrightarrow f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left[\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{7}}=\frac{45}{8}$.

Câu 71. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+4x^3-3x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f^2\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=f\left(x\right)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=f\left(0\right)=1$, $x=1\Rightarrow t=f\left(1\right)=2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^2 t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$ và $x+xf'(x)=2f(x)-4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I=\frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I=\frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I=\frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I=\frac{3a-b}{4ab}$.

Lời giải

Chọn D

$\forall x\in(0;1)$ ta có:

$x+xf'(x)=2f(x)-4\Leftrightarrow x+4=2f(x)-xf'(x)\Rightarrow x^2+4x=2xf(x)-x^2f'(x)$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{x^2+4x}{f^2(x)}=\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'$.

Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$, đổi cận $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2+4t}{f^2(t)}\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{f(t)}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4b}-\frac{1}{4a}=\frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 73. Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\sqrt{f(x)+1}\right|_0^{\sqrt{3}}=\left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left.\sqrt{f(x)+1}\right|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{f(\sqrt{3})+1}-\sqrt{f(0)+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{f(\sqrt{3})+1}=2\Leftrightarrow f(\sqrt{3})=3$.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=4$, $f(5)=3$, $f(2)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 x^3f'(x^2+1)\mathrm{d}x$

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.

$x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó $I = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 (t-1) f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u = t - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$; $\mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t$, chọn $v = f(t)$.

$I = \frac{1}{2}(t-1) f(t)\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(4f(5) - f(2)\right) - 2 = 3$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 3 + 2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln^2 2$. **C.** $I = \ln^2 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $K = \int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x} - 1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K = \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $M = \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \ln x\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^4 = 2\ln^2 2$.

Do đó $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 2\ln^2 2$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$, $I_2 == \int\limits_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x.\cos x\mathrm{d}x = 2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x = 2t.\cot x\mathrm{d}x$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(t\right).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2I_1=2$

□Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2=\int_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Câu 77. Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và $4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1\left[4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ \left(1\right).$$

Mà $\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)\xrightarrow{t=x^2}2\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2I$

và $\int_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(1-x\right)\xrightarrow{u=1-x}3\int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=3I$

Đồng thời $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xrightarrow{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Do đó, $\left(1\right)\Leftrightarrow 2I+3I=\frac{\pi}{4}$ hay $I=\frac{\pi}{20}$.

Câu 78. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{5}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{3}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1$

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int\limits_0^1 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}\Rightarrow \int\limits_0^1 x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$

Ta tính được $\int\limits_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{9}{5}$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(f'\left(x\right)-3x^2\right)^2\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)-3x^2=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=3x^2 \Leftrightarrow f\left(x\right)=x^3+C$.

Vì $f\left(1\right)=1$ nên $f\left(x\right)=x^3$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Với P(x) là đa thức của x, ta thường gặp các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).l\,n\, xdx$
u	P(x)	P(x)	P(x)	lnx
dv	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	P(x)

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 1:

Câu 1. **(Hậu Lộc Thanh Hóa)** Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a}\pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$I = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan xdx = \frac{\pi}{3}.\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{\cos x} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 \Rightarrow a = 3;\, b = 2.$$ Vậy $a^2 + b = 11$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx = a\pi + b\ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a - 8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{1+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\tan x \end{cases}$. Ta có

$$I = \frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan xdx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

Câu 3. Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

A. $a+b+c+d = 28$. **B.** $a+b+c+d = 16$. **C.** $a+b+c+d = 14$. **D.** $a+b+c+d = 22$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x}{1+x^6-x^6} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin xdx.$$

Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin(-t)(-dt)=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin t dt=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}+x^3\right)\sin x dx$$

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-2x^3\sin x\right)dx \Leftrightarrow I=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3\sin x dx$.

x^3 (+)	$+\sin x$
$3x^2$ (−)	$-\cos x$
$6x$ (+)	$-\sin x$
6 (−)	$+\cos x$
0	$+\sin x$

$$I=\left(x^3\cos x-3x^2\sin x-6x\cos x+6\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{27}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{3}-2\pi+6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

Câu 4. **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ (a,\,b\in\mathbb{Z})$, Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-3$. **B.** $a^2-b=-4$. **C.** $\dfrac{a}{b}\in(-1;0)$. **D.** $a-b=6$.

Lời giải.

Chọn C

Đặt $\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

x	$0 \quad \pi^2$
t	$0 \quad \pi$

Ta có: $I=\displaystyle\int_0^{\pi}2t^2\sin t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u=2t^2 \\ \mathrm{d}v=\sin t\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=4t\mathrm{d}t \\ v=-\cos t \end{cases}$.

Suy ra $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+\displaystyle\int_0^{\pi}4t\cos t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u_1=4t \\ \mathrm{d}v_1=\cos t\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_1=4\mathrm{d}t \\ v_1=\sin t \end{cases}$.

Vậy $I=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+4t\sin t\Big|_0^{\pi}-\displaystyle\int_0^{\pi}4\sin t\mathrm{d}t=-2\left(-\pi^2\right)+4\cos t\Big|_0^{\pi}=2\pi^2-8$.

Do đó $a=2;\, b=-8 \Rightarrow \dfrac{a}{b}\in(-1;0)$.

Câu 5. Cho biết $\int_0^1 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = \frac{a}{b}.e+c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+2 \Rightarrow dt = dx$, đổi cận $x=0 \Rightarrow t=2$, $x=1 \Rightarrow t=3$.

Ta có $I=\int_0^1 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = \int_2^3 \frac{(t-2)^2e^{t-2}}{t^2}dt = \int_2^3\left(1-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt = \int_2^3 e^{t-2}dt + \int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$

+ Tính $I_1=\int_2^3 e^{t-2}dt = e^{t-2}\Big|_2^3 = e-1$.

+ Tính $I_2=\int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt$.

Đặt $u=\frac{4}{t} \Rightarrow du = -\frac{4}{t^2}dt$, $dv = e^{t-2}dt \Rightarrow v=e^{t-2}$

Ta có $\int_2^3 \frac{4}{t}e^{t-2}dt = \frac{4}{t}.e^{t-2}\Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{4}{t^2}e^{t-2}dt \Rightarrow I_2 = \int_2^3\left(-\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)e^{t-2}dt = -\frac{4}{3}e+2$.

Suy ra $I=\frac{-1}{3}e+1 \Rightarrow a=-1$, $b=3$, $c=1$. Vậy $a-b+c=3$.

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình Lần 3)** Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12}\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int_{\frac{1}{12}}^{12} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Đặt: $\begin{cases} u=x \\ dv=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^{x+\frac{1}{x}} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{\frac{1}{12}}^{12} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx = x.e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=12e^{12+\frac{1}{12}} - \frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}} = \frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}$.

Vậy: $a=143; b=12; c=145; d=12$. Do đó: $bc-ad=12.145-143.12=24$.

Câu 7. **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 (x^2+2x+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 (x^2+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

Xét $I_1=\int_1^2 (x^2+1)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2 x^2 d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$

$=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}}d(x^2)=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

$\Rightarrow I_1+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \quad \Rightarrow I=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2=4e^{\frac{3}{2}}-1$

Do $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó $m,n,p,q\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản $\Rightarrow \begin{cases} m=4\\ n=1\\ p=3\\ q=2\end{cases}$

Khi đó, $T=m+n+p+q=4+1+3+2=10$.

Câu 8. **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3x dx=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+c$, trong đó a, b, c là các hằng số, khi đó tổng $a+b$ có giá trị là

A. $-\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{1}{13}$. **C.** $\frac{5}{13}$. **D.** $-\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=e^{2x}\\ dv=\cos 3x dx\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=2e^{2x}dx\\ v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{cases}$.

Ta có $\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x$.

Đặt $\begin{cases} u=e^{2x}\\ dv=\sin 3x dx\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=2e^{2x}dx\\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{cases}$

Ta có $\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx$

$\Leftrightarrow \frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x+C_1$

$\Leftrightarrow \int e^{2x}\cos 3x dx=e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos 3x+\frac{3}{13}\sin 3x\right)+C$.

Suy ra $a=\frac{2}{13}$ và $b=\frac{3}{13}$.

Vậy $a+b=\frac{5}{13}$.

Cách khác:

Ta có $\left[\int e^{2x}\cos 3x dx\right]'=\left[e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+c\right]'$

$\Leftrightarrow e^{2x}\cos 3x=2e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+e^{2x}(-3a\sin 3x+3b\cos 3x)$

$\Leftrightarrow e^{2x}\cos 3x=e^{2x}\left[(2a+3b)\cos 3x+(-3a+2b)\sin 3x\right]$

Đồng nhất biểu thức ta có $\begin{cases}2a+3b=1\\-3a+2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{13}\\b=\dfrac{3}{13}\end{cases}$.

Vậy $a+b=\dfrac{5}{13}$.

Câu 9. **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Cho tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{a} + \dfrac{1}{b}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + c\ln 2$ (với a,b,c là các số nguyên). Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$= -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) - I = 2\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} - I = -2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} - I = \ln 2 - I$.

Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt: $u = x$ và $\mathrm{d}v = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và $v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Khi đó: $I = \dfrac{x}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\sin^2 x - 1}\mathrm{d}(\sin x)$

$= \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}\right| = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \ln 2 - I = -\dfrac{\pi}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \ln 2$.

Suy ra: $\begin{cases}a=-4\\b=2\\c=1\end{cases} \Rightarrow a+b+c=-1$.

Câu 10. **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Cho $I = \int\limits_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+15}\right)dx = a + b\ln 3 + c\ln 5$ với $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x+\sqrt{x^2+15} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx \\ v = x \end{cases}$.

Ta có: $I = x\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx$

$= 5-\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}-\dfrac{15}{\sqrt{x^2+15}}\right)dx$

$= 5-\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)dx+\int\limits_0^1\dfrac{15}{\sqrt{x^2+15}}dx = 5-I+J$.

Suy ra: $I = \dfrac{5}{2}+\dfrac{J}{2}$.

Tính $J = \int\limits_0^1 \dfrac{15}{\sqrt{x^2+15}}dx = 15\ln\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\Big|_0^1$

$= 15\ln 5 - 15\ln\sqrt{15} = 15\ln 5 - \dfrac{15}{2}\ln 3 - \dfrac{15}{2}\ln 5 = -\dfrac{15}{2}\ln 3 + \dfrac{15}{2}\ln 5$.

Vậy $I = \dfrac{5}{2}-\dfrac{15}{4}\ln 3+\dfrac{15}{4}\ln 5$.

Do đó $a = \dfrac{5}{2}; b = -\dfrac{15}{4}; c = \dfrac{15}{4}$.

Vậy $a+b+c = \dfrac{5}{2}$.

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN DẠNG 2:

Câu 11. Cho biết tích phân $I = \int\limits_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx = \dfrac{a.e^4+b.e^2+c}{4}$ với a,b,c là các ước nguyên của 4. Tổng $a+b+c=?$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

$I = \int\limits_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx = 2\int\limits_1^e x^3dx + \int\limits_1^e x\ln x dx$.

$2\int\limits_1^e x^3dx = \dfrac{1}{2}x^4\Big|_1^e = \dfrac{1}{2}\left(e^4-1\right)$

Ta có $\int\limits_1^e x\ln x dx = \dfrac{1}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x^2\dfrac{1}{x}dx\right] = \dfrac{1}{2}\left[e^2-\dfrac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right] = \dfrac{e^2+1}{4}$

$I = \int\limits_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx = \dfrac{1}{2}\left(e^4-1\right)+\dfrac{e^2+1}{4} = \dfrac{2e^4+e^2-1}{4}$

Chọn A

Câu 12. **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Biết $\int\limits_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = a\ln 5+b\ln 2+\dfrac{c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$

A. $T=-2$. **B.** $T=16$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-16$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2+16 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=16$; $x=3\Rightarrow t=25$.

$I=\int\limits_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=t\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}\int\limits_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t\ln t\right)\Big|_{16}^{25}-\frac{1}{2}\int\limits_{16}^{25}\mathrm{d}t=25\ln 5-32\ln 2-\frac{9}{2}$.

Vậy $T=a+b+c=25-32-9=-16$.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+16\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}+8=\frac{x^2+16}{2}\end{cases}$.

$I=\int\limits_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2+16}{2}.\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 x\,\mathrm{d}x=25\ln 5-32\ln 2-\frac{9}{2}$

Vậy $T=a+b+c=25-32-9=-16$.

Câu 13. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho $I=\int\limits_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ với a , b , c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1 . **C.** 0. **D.** 2 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2+x^2\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Khi đó, $I=\int\limits_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}.\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x$

$=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x\quad(1)$.

Xét $I_1=\int\limits_0^1\frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x-\frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^2+2\right)}{x^2+2}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\ln\left(x^2+2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 2$.

Thay vào (1), suy ra $I=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-1\\ c=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 14. Tính tích phân $I=\int_1^2\left(2019\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx$.

A. $I=2^{2017}$. **B.** $I=2^{2019}$. **C.** $I=2^{2018}$. **D.** $I=2^{2020}$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int_1^2\left(2019\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}dx=2019\int_1^2 x^{2018}\log_2 x dx+\frac{1}{\ln 2}\int_1^2 x^{2018}dx=2019I_1+\frac{1}{\ln 2}I_2$.

Trong đó $I_2=\int_1^2 x^{2018}dx=\left.\frac{x^{2019}}{2019}\right|_1^2=\frac{2^{2019}-1}{2019}$.

và $I_1=\int_1^2 x^{2018}\log_2 x dx$. Đặt $\begin{cases}u=\log_2 x\\ dv=x^{2018}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x.\ln 2}dx\\ v=\frac{x^{2019}}{2019}\end{cases}$.

Khi đó $I_1=\left.\left(\frac{x^{2019}}{2019}.\log_2 x\right)\right|_1^2-\frac{1}{2019.\ln 2}I_2=\frac{2^{2019}}{2019}-\frac{1}{2019.\ln 2}.\frac{2^{2019}-1}{2019}=\frac{2^{2019}}{2019}-\frac{2^{2019}-1}{2019^2.\ln 2}$.

Vậy $I=2^{2019}$.

Câu 15. **(PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Biết $\int_1^e\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\frac{a}{e+1}+b\ln\frac{2}{e+1}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{1}{(1+x)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{-1}{1+x}\end{cases}$.

$\int_1^e\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x(1+x)}dx=-\frac{1}{e+1}+\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

$=-\frac{1}{e+1}+\left.\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\right|_1^e=-\frac{1}{e+1}+1-\ln(e+1)-\ln 1+\ln 2$.

$=-\frac{1}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}+1=\frac{a}{e+1}+b\ln\frac{2}{e+1}+c\Rightarrow a=-1;\ b=1;\ c=1\Rightarrow a+b+c=1$.

Câu 16. **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Nghiệm dương a của phương trình $\int_1^a(2x-1)\ln x dx=(a^2-a)\ln a-9$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\ln x$ và $dv=(2x-1)dx$, ta có $du=\frac{1}{x}dx$ và $v=x^2-x$.

Khi đó, đặt $I=\int_1^a(2x-1)\ln x dx=(x^2-x)\ln x\Big|_1^a-\int_1^a(x^2-x)\frac{1}{x}dx$.

$=\left(a^2-a\right)\ln a-\int\limits_1^a (x-1)\mathrm{d}x=\left(a^2-a\right)\ln a-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^a$

$=\left(a^2-a\right)\ln a-\left(\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}-a+1\right)=\left(a^2-a\right)\ln a-\left(\dfrac{a^2}{2}-a+\dfrac{1}{2}\right)$.

Theo giả thiết: $I=\left(a^2-a\right)\ln a-9\Rightarrow \dfrac{a^2}{2}-a+\dfrac{1}{2}=9\Leftrightarrow a^2-2a-17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1-3\sqrt{2} \\ a=1+3\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Do $a>0$ nên $a=1+3\sqrt{2}$.

Câu 17. **(Sở Phú Thọ)** Cho tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(sinx+2\cos x)}{cos^2x}dx=a\ln 3+b\ln 2+c.\pi$ (với a,b,c là các số hữu tỉ). Giá trị biểu thức abc bằng.

A. $\dfrac{15}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{17}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln(\sin x+2cosx) \\ dv=\dfrac{dx}{cos^2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{cosx-2\sin x}{\sin x+2cosx}dx \\ v=\tan x\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin x+2cosx)}{cos^2x}dx=\tan x.\ln(\sin x+2cosx)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\dfrac{cosx-2\sin x}{\sin x+2cosx}dx$

$=\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\dfrac{1-2\tan x}{\tan x+2}dx=\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\tan x-5+\dfrac{10}{\tan x+2}\right)dx$

$=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 2-\left(2\ln cosx+5x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+10\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{cosx}{\sin x+2cosx}dx=\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5\pi}{4}+10\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{cosx}{\sin x+2cosx}dx$

Xét tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{cosx}{sinx+2cosx}dx=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\left(cosx-2sinx\right)+2\left(sinx+2cosx\right)}{\left(sinx+2cosx\right)}dx$

$=\dfrac{1}{5}\left(\ln\left(sinx+2cosx\right)+2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{5}\left(\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\ln 2\right)=\dfrac{1}{5}\left(\ln 3-\dfrac{3}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin x+2cosx)}{cos^2x}dx=\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5\pi}{4}+2(\ln 3-\dfrac{3}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{2})=3\ln 3-\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$

Vậy $a=3,b=-\dfrac{5}{2},c=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow abc=\dfrac{15}{8}$.

Câu 18. **(HSG Bắc Ninh)** Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\left(\sin x+\cos x\right)}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\ln 2+\dfrac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó, $\dfrac{bc}{a}$ bằng

A. -6. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x.\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$.

Đặt $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - \tan^2 x}{\tan x + 1}dx$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Với $x = 0 \to t = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{4} \to t = 1$

Ta có : $J = \int\limits_0^1 \dfrac{t - t^2}{(t+1).(t^2+1)}dt = \int\limits_0^1 \dfrac{(t+1) - (1+t^2)}{(1+t).(1+t^2)}dt = \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} - \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{t+1} = \dfrac{\pi}{4} - \ln 2$.

Vậy $I = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4} + \ln 2 = \dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{bc}{a} = -\dfrac{8}{3}$.

Câu 19. **(THPT LÊ VĂN HƯU NĂM 2018-2019)** Cho tích phân $I = \int\limits_1^e \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x dx = a.e^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $4a + 3b$ là

A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $-\dfrac{13}{4}$. **D.** $-\dfrac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int\limits_1^e \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x dx = \int\limits_1^e x\ln x dx + \int\limits_1^e \dfrac{1}{x}\ln x dx$.

Đặt $u = \ln x$ và $dv = x dx$, suy ra $du = \dfrac{1}{x}dx$ và $v = \dfrac{1}{2}x^2$. Khi đó

$\int\limits_1^e x\ln x dx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int\limits_1^e x dx = \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4}$.

Ta có $\int\limits_1^e \dfrac{1}{x}\ln x dx = \int\limits_1^e \ln x d(\ln x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $I = \int\limits_1^e x\ln x dx + \int\limits_1^e \dfrac{1}{x}\ln x dx = \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{3}{4}$.

Suy ra $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{3}{4}$. Suy ra $4a + 3b = \dfrac{13}{4}$.

Câu 20. **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int\limits_1^e x^3\ln x dx = \dfrac{3e^a + 1}{b}$?

A. $a.b = 64$. **B.** $a.b = 46$. **C.** $a - b = 12$. **D.** $a - b = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$$\int_1^e x^3\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^e=\frac{3e^4+1}{16}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=16\end{cases}\Rightarrow a.b=64.$$

Câu 21. Giả sử tích phân $\int_0^1 x.\ln(2x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x=a+\frac{b}{c}\ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c=6057$. **B.** $b+c=6059$. **C.** $b+c=6058$. **D.** $b+c=6056$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_0^1 x.\ln(2x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x=2017\int_0^1 x.\ln(2x+1)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1 x.\ln(2x+1)\mathrm{d}x=\left(\ln(2x+1)\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{3}{8}\ln 3-\left(\frac{x^2-x}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{8}\ln 3$

$\Rightarrow I=\int_0^1 x.\ln(2x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x=2017\left(\frac{3}{8}\ln 3\right)=\frac{6051}{8}\ln 3.$

Khi đó $b+c=6059$.

Câu 22. **(ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. -6. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}u=\ln(\sin x+\cos x)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x.\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Đặt $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan^2 x}{\tan x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow dt=(1+\tan^2 x)dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Với $x=0\to t=0$ và $x=\frac{\pi}{4}\to t=1$

Ta có : $J=\int_0^1\frac{t-t^2}{(t+1).(t^2+1)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{(t+1)-(1+t^2)}{(1+t).(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=\frac{\pi}{4}-\ln 2$.

Vậy $I=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{bc}{a}=-\frac{8}{3}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Câu 1: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $A=\int_0^2 \left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=9$ và $f\left(2\right)+f\left(0\right)=3$. Tính $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=x-1 \\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f\left(x\right) \end{cases}$.

Ta có: $A=\int_0^2 \left(x-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x-1\right)f\left(x\right)\Big|_0^2-\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(2\right)+f\left(0\right)-\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Với $A=9$ và $f\left(2\right)+f\left(0\right)=3$ nên $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-6$.

Câu 2: **(THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0$, $\int_0^1 x^2 f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'\left(x\right)dx$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -3

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx \\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$I=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)dx=\frac{1^3}{3}f(1)-0.f(0)-\int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)dx\alpha$$

$$\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx\Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx=-1$$

Câu 3: **(THPT NGUYỄN KHUYẾN TP.HCM NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\left(x\right)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$ và $f\left(0\right)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. -13 **B.** 13 **C.** 7 **D.** -7

Lời giải.

Từ công thức tính vi phân của hàm số, ta có $f'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\mathrm{d}(f(\mathrm{x}))$, và $\mathrm{d}(cos^2x)=(cos^2x)'\mathrm{d}x=-\sin 2x\mathrm{d}x$

Do đó, áp dụng công thức tích phân từng phần, với $u=cos^2x$ và $v=f(\mathrm{x})$, ta thu được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\left(x\right)\cos^2 x\mathrm{d}x=f\left(x\right).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$$

Theo giả thiết, ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\left(x\right)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$. Từ đó $f\left(x\right).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=10$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x = 10 - \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos^2\frac{\pi}{2} - f(0).\cos^2 0 \right) = 13$$

Câu 4: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{x}{x + f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $2g(2) - g(1) = 2$. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{x^2}{x + f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{x}{x + f^2(x)}$ nên $g'(x) = \dfrac{x}{x + f^2(x)}$.

Đặt $I = \int_1^2 \dfrac{x^2}{x + f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \mathrm{d}x \\ v = g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I = xg(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2g(2) - g(1) - 1 = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x.f'(x)dx$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** -1761.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x)\Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)dx$.

Từ $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 \ (x = 1) \\ f(1) = 2 \ \ (x = 0) \end{cases}$, suy ra $I = 23 - \int_1^5 f(x)dx.$

Đặt $t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3)dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$

Đổi cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $I = 23 - \int_1^5 f(x)dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3)dx \overset{Casio}{=} \dfrac{33}{4}$

Chọn C

Câu 6: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x) + f(1 - x) = x^3(1 - x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $I = \int_0^2 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** $-\dfrac{1}{20}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x)+f(1-x)=x^3(1-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(1)=0$.

Ta có: $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 x^3(1-x)dx=\frac{1}{20} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{40}$.

$I=\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$, đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'\left(\frac{x}{2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

Nên

$I=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=4f(1)-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=-2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=-4\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{10}$.

Câu 7: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [x.f'(1-x)-f(x)]dx=\frac{1}{2}$. Tính $f(0)$.

A. $f(0)=-1$. **B.** $f(0)=\frac{1}{2}$. **C.** $f(0)=-\frac{1}{2}$. **D.** $f(0)=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A=\int_0^1 [x.f'(1-x)-f(x)]dx=\int_0^1 x.f'(1-x)dx-\int_0^1 f(x)dx$.

Đặt $I=\int_0^1 x.f'(1-x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(1-x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-f(1-x) \end{cases}$

Khi đó $I=-f(1-x).x\big|_0^1+\int_0^1 f(1-x)dx=-f(0)+\int_0^1 f(x)dx$

Do đó $A=-f(0)+\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(0)=-\frac{1}{2}$.

Câu 8: **(THPT Nghèn Lần1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{5}$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2dx=\frac{9}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{3}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{5}$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $A=\int_0^1 xf(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow A=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2f'(x)dx=\frac{3}{5}$.

Xét $\int_0^1 [f'(x)]^2dx-2k\int_0^1 x^2f'(x)dx+k^2\int_0^1 x^4dx=0$ (1) $\Leftrightarrow \frac{9}{5}-2k.\frac{3}{5}+\frac{1}{5}k^2=0 \Leftrightarrow k=3$.

(1) trở thành $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx - 6\int_0^1 x^2 f'(x) dx + 9\int_0^1 x^4 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - 3x^2\right)^2 dx = 0$.

$\left(f'(x) - 3x^2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - 3x^2\right)^2 dx \geq 0$.

Do đó $\int_0^1 \left(f'(x) - 3x^2\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$

$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = x^3$.

□ $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Câu 9: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right) f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, thay $x = 2$ ta được $f(2) = 1$.

Ta có $I = \int_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right) f'(x)}{f(x)} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(3x^2 - 6x\right) dx \\ v = \ln\left|f(x)\right| \end{cases}$.

Khi đó: $I = \left(x^3 - 3x^2\right) \ln\left|f(x)\right| \Big|_0^2 - \int_0^2 \left(3x^2 - 6x\right) \ln\left|f(x)\right| dx$

$= -3\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(x)\right| dx = -3J$ (do $f(2) = 1$), với $J = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(x)\right| dx$.

Đặt $x = 2 - t$ thì

$J = \int_2^0 \left[(2-t)^2 - 2(2-t)\right] \ln\left|f(2-t)\right| d(2-t)$

$= \int_2^0 \left[(2-x)^2 - 2(2-x)\right] \ln\left|f(2-x)\right| d(2-x) = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(2-x)\right| dx$.

Suy ra $2J = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(x)\right| dx + \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(2-x)\right| dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln\left|f(x) f(2-x)\right| dx$

$= \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln e^{2x^2-4x} dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)\left(2x^2 - 4x\right) dx = \frac{32}{15} \Rightarrow J = \frac{16}{15}$.

Vậy $I = -3J = -\frac{16}{5}$.

Câu 10: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x \cdot f'(2x-4) dx = 8$; $f(2) = 2$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(2x) dx$.

A. $I=-5$. **B.** $I=-10$. **C.** $I=5$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $J=\int_0^3 x\cdot f'(2x-4)\mathrm{d}x=8$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=f'(2x-4)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}f(2x-4)\right)$, ta được $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\frac{1}{2}f(2x-4)$.

$\Rightarrow J=\frac{1}{2}x.f(2x-4)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=3-\frac{1}{2}\int_0^2 f(2x-4)\mathrm{d}x$.

Vì $J=8\Rightarrow 3-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=8\Rightarrow\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=-10$.

Đặt $2t=2x-4\Rightarrow 2\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận:

x	0	3
t	-2	1

$I_1=\int_{-2}^1 f(2t)\mathrm{d}t=\int_{-2}^1 f(2x)\mathrm{d}x=-10$.

Vậy $I=-10$.

Câu 11: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}$ và $\int_1^2(x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{36}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{1}{12}$. **D.** $I=-\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $E=\int_1^2(x-1)f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x-1)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{(x-1)^2}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow E=\frac{(x-1)^2}{2}.f(x)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow-\int_1^2\frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}\Rightarrow\int_1^2(x-1)^2f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}$. Ta có: $\int_1^2(x-1)^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$ và $\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}$.

Ta tìm số k để $\int_1^2\left(f'(x)-k(x-1)^2\right)^2\mathrm{d}x=0$.

$\int_1^2\left(f'(x)-k(x-1)^2\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2k\int_1^2 f'(x).(x-1)^2\mathrm{d}x+k^2\int_1^2(x-1)^4\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{45}-2k.\frac{1}{15}+k^2.\frac{1}{5}=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$.

Khi đó: $\int_1^2 \left(f'(x)-\frac{1}{3}(x-1)^2\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{3}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{9}(x-1)^3+C$.

Mà $f(2)=0 \Rightarrow C=\frac{-1}{9} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(x-1)^3-\frac{1}{9} \Rightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{1}{9}(x-1)^3-\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}$.

Câu 12: **(NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;2]$, thỏa các điều kiện $f(2)=1$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$. Giá trị của $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = x.f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x = 2-\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow -\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$.

Ta lại có: $\int_0^2 \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$.

Do đó: $\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - \int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 \left[f'(x)-\frac{1}{2}x\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow f'(x)-\frac{1}{2}x=0$ (vì $\int_0^2 \left[f'(x)-\frac{1}{2}x\right]^2 \mathrm{d}x \geq 0$, $\forall x \in [0;2]$)

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2+C \Rightarrow f(2)=1+C \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x\Big|_1^2 = \frac{1}{4}$.

□Tổng quát:

Khi đề bài cho biết giá trị $f(a)$, $f(b)$, $\int_a^b u(x).f'(x)\mathrm{d}x = h$, $\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = k$ (với $u(x)$ là một biểu thức chứa x đã tường minh), để tìm $f(x)$ trước tiên ta đi tìm 2 số α,β sao cho $\int_a^b \left[f'(x)+\alpha.u(x)+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = 0$, rồi suy ra $f'(x)=-\alpha.u(x)-\beta$, sau đó nguyên hàm hai vế để tìm $f(x)$.

Bài tập tương tự

Vd 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn các điều kiện $f(0)=0$, $f(1)=2$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Tính $J=\int_0^1 \left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x$.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 2-0=2$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$, xét tích phân: $I = \int\limits_0^1 \left[f'(x)+\alpha\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\alpha\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \alpha^2 \mathrm{d}x = 4 + 2\alpha.2 + \alpha^2 = (\alpha+2)^2$.

Ta có: $I = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + C$.

Mà $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$.

Vậy $J = \int\limits_0^1 \left[(2x)^3 + 2018x\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{4}x^4 + \frac{2018}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = 1011.$

Vd 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 4$. Tính giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x$.

Giải:

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $\left[f(x)\right]^2, xf(x), f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2$. Với mỗi số thực α, β ta có:

$$\int\limits_0^1 \left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 (\alpha x+\beta) f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (\alpha x+\beta)^2 \mathrm{d}x$$

$$= 4 + 2(\alpha+\beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2.$$

Cần tìm α, β sao cho $\int\limits_0^2 \left[f(x)+\alpha x+\beta\right]^2 \mathrm{d}x = 0$ hay $4 + 2(\alpha+\beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta+6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 2 = 0$. Để tồn tại α thì:

$\Delta = (3\beta+6)^2 - 4(3\beta^2+6\beta+2) \geq 0 \Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \geq 0$

$\Leftrightarrow -3(\beta-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -6.$

Vậy $\int\limits_0^1 \left[f(x)-6x+2\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 6x-2,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^3 = 10$

Câu 13: **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2 + 4(6x^2-1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$\left(f'(x)\right)^2 + 4(6x^2-1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx + \int\limits_0^1 4(6x^2-1).f(x)dx = \int\limits_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4)dx.\ (1)$

Xét $I = \int\limits_0^1 4(6x^2-1).f(x)dx = \int\limits_0^1 (24x^2-4)f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x).f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x).f'(x)dx = 4 - 2\int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x)dx.$

Do đó:

$(1) \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2\int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x)dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx = \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8)dx.$

$\Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - (4x^3 - 2x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Do đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1)dx = \dfrac{13}{15}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$. Tính biểu thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$. **B.** $Q = 6$. **C.** $Q = 4$. **D.** $Q = 2$.

Lời giải

$A = \int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

$A_1 = \int_0^1 e^x f(x)dx$

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = e^x dx$ chọn $v = e^x \Rightarrow A_1 = e^x.f(x)\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x)dx}_{A_2}$

Vậy $A = e^x f(x)\Big|_0^1 - A_2 + A_2 = e^x f(x)\Big|_0^1 = e.f(1) - f(0) = e - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a^{2018} + b^{2018} = 1 + 1 = 2$

Chọn D

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018.e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018.e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017.e^{2018}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}} = 2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 2018.x^{2017}dx \quad (1)$

Xets $I = \int_0^1 \dfrac{f'(x) - 2018.f(x)}{e^{2018x}}dx = \int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx - \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int\limits_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=2018.e^{-2018x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=-e^{-2018x} \end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).(-e^{-2018x})\Big|_0^1+\int\limits_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx \Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1 \Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$ Tính $Q=a^{2017}+b^{2017}$.

A. $Q=2^{2017}+1$. **B.** $Q=2$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2^{2017}-1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=e^x \end{cases}$.

$\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=e^x f(x)\Big|_1^2-\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx+\int\limits_0^1 e^x f'(x)dx=ef(1)-f(0)=e-1$.

Do đó $a=1$, $b=-1$.

Suy ra $Q=a^{2017}+b^{2017}=1^{2017}+(-1)^{2017}=0$.

Vậy $Q=0$.

Câu 17: Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1$, $F(2)=4$, $G(1)=\frac{3}{2}$, $G(2)=2$ và $\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx=\frac{67}{12}$. Tính $\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx$

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $-\frac{145}{12}$. **C.** $-\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{145}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=F(x) \\ dv=g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f(x)dx \\ v=G(x) \end{cases}$

$\int\limits_1^2 F(x)g(x)dx=\left(F(x)G(x)\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx=F(2)G(2)-F(1)G(1)-\int\limits_1^2 f(x)G(x)dx$

$=4.2-1.\frac{3}{2}-\frac{67}{12}=\frac{11}{12}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)dx=a$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$ theo a và $b=f(2)$.

A. $b-a$. **B.** $a-b$. **C.** $a+b$. **D.** $-a-b$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=x-1 \Rightarrow du=dx$; $dv=f'(x)dx$ chọn $v=f(x)$.

$\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)dx=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)dx=f(2)-\int\limits_a^b f(x)dx=b-\int\limits_1^2 f(x)$.

Ta có $\int\limits_1^2 (x-1)f'(x)dx=a \Leftrightarrow b-\int\limits_1^2 f(x)dx=a \Leftrightarrow \int\limits_1^2 f(x)dx=b-a$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=8-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=8-\frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8-1=7$.

Câu 20: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t=3$, tính $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}2\sin x.f'(\sin x).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Đăt: $\begin{cases} u=2t \\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}t \\ v=f(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow I=2t.f(t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t=f\left(-\frac{1}{2}\right)-2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2};4\right)\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=4$.

□ Hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=3$.

Vậy $I=4-2.3=-2$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=f\left(x\right)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(-\cos x.f\left(x\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x+\cos x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{2018}$. **C.** $\frac{2}{1009}$. **D.** $\frac{4}{2019}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+2018f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-x\right)\mathrm{d}x+2018\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2019\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x \quad (1)$

+ Xét $P=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=2x \\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x \\ v=-\cos x \end{cases}$

$P=2x.\left(-\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$

Từ (1) suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{2019}$.

Câu 23: Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(0\right).f'\left(2\right)\neq 0$ và $g\left(x\right)f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x$?

A. -4. **B.** $\mathrm{e}-2$. **C.** 4. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)\mathrm{e}^x \Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

$I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}g(x)=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=4$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1$.

$2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x$.

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x=1-I_1$.

$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$.

Khi đó

$I=\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4-2\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2I_1$ với $I_1=\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\frac{x}{2}\Rightarrow\mathrm{d}x=2\mathrm{d}u$, khi đó $I_1=\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f(u)\mathrm{d}u=2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$.

Vậy $I=128-2I_1=128-16=112$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(1)=f(0)=1$, $f'(0)=2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-2018$. **B.** $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x=-1$.

C. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = 2018$.

D. $\int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int\limits_0^1 f''(x)(1-x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{d}\left(f'(x)\right)$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(f'(x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ v = f'(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow I = (1-x)f'(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \left[(1-1)f'(1) - f'(0)\right] + f(x)\Big|_0^1 = -f'(0) + \left[f(1) - f(0)\right]$

$= -2018 + (1-1) = -2018$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x f(x)\mathrm{d}x = \left[\sin x f(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + \sin x\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x) = -\sin x$. Do đó $f(x) = \cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2018\pi) = \cos(2018\pi) = 1$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{16}{3}$.

B. $I = -\frac{16}{5}$.

C. $I = -\frac{14}{3}$.

D. $I = -\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right] = \ln \mathrm{e}^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$.

Mặt khác, với $x = 0$, ta có $f(0).f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

Xét $I=\int_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I=\int_0^2 \left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x \\ v=\ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I=\left[\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x \quad (1)$.

Đến đây, đổi biến $x=2-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Ta có $I=-\int_2^0\left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)(-\mathrm{d}t)=-\int_0^2\left(3t^2-6t\right).\ln f(2-t)\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f(2-x)\mathrm{d}x \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\left[\ln f(x)+\ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I=-\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-2x}$, khi đó:

$$I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right).\mathrm{e}^{x^2-2x}.(2x-2)}{\mathrm{e}^{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right).(2x-2)\mathrm{d}x=\frac{-16}{5}.$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $A=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x\mathrm{e}^x \end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Ta có $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+x\mathrm{e}^x=0 \quad \forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\ge 0 \quad \forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$. **B.** $I = -\frac{7}{5}$. **C.** $I = -\frac{7}{20}$. **D.** $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = \frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx = -14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3 - f'(x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C$.

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}$.

Vậy $I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}\right]dx = -\frac{7}{5}$.

Câu 31: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$. **B.** $I = -\frac{7}{5}$. **C.** $I = -\frac{7}{20}$. **D.** $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases}$ ta được $\begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{cases}$

Khi đó $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = \frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx$.

$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx$.

$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx = 1$.

Xét $\int_1^2 \left[f'(x) - k(x-1)^3\right]^2 dx = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$.

$\Leftrightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 2k\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x + k^2\int_1^2 (x-1)^6 \mathrm{d}x = 0$.

$\Leftrightarrow 7 - 2k + \dfrac{k^2}{7} = 0 \Leftrightarrow k = 7 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{7(x-1)^4}{4} + C$.

Do $f(2) = 0$ nên $C = -\dfrac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{7(x-1)^4}{4} - \dfrac{7}{4}$

Vậy $I = \dfrac{7}{4}\int_1^2 \left[(x-1)^4 - 1\right]\mathrm{d}x = \dfrac{7}{4}\left[\dfrac{(x-1)^5}{5} - x\right]\Bigg|_1^2 = -\dfrac{7}{5}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I = 1$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x = u \\ f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ f(x) = v\end{cases}$, khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = \sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$= \sin\dfrac{\pi}{2}.f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin 0.f(0) - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x) - \cos 2x\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x) - 2f(x).\cos 2x + \cos^2 2x\right]\mathrm{d}x = \left(\dfrac{\pi}{8} - 2\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8}\right) = 0$ nên $f(x) = \cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 33: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$ Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{6}{\pi}$.   **B.** $\dfrac{2}{\pi}$.   **C.** $\dfrac{4}{\pi}$.   **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx = -\frac{2}{\pi}f(x).\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi}{2}xdx = \frac{3}{2}$

$\int\limits_0^1 (f(x)-3\sin\frac{\pi}{2}x)^2dx = \int\limits_0^1 f^2(x)dx - 6\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi}{2}xdx + 9\int\limits_0^1 \sin^2\frac{\pi}{2}xdx = 0$

Từ đây ta suy ra $f(x) = 3\sin\frac{\pi}{2}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 3\sin\frac{\pi}{2}xdx = \frac{6}{\pi}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π.   **B.** $\dfrac{1}{\pi}$.   **C.** $\dfrac{2}{\pi}$.   **D.** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1 + \pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$= -\left(f(1)+f(0)\right) + \pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Cách 1: Ta có

Tìm k sao cho $\int\limits_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x = 0$

Ta có: $\int\limits_0^1 \left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$ (do $\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2 \geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k.g(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k.\sin(\pi x)$, $k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int\limits_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 35: **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn: $\int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^\pi \cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Khi đó tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}-1$.

Lời giải

Chọn B

*) Xét tích phân $I=\int\limits_0^\pi \cos x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v=\sin x \end{cases}$

$I=\sin x.f(x)\Big|_0^\pi -\int\limits_0^\pi \sin x.f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^\pi \sin x.f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $I=\frac{\pi}{2}$, suy ra $\int\limits_0^\pi \sin x.f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$.

*) Tìm số thực k thỏa mãn $f'(x)+k.\sin x=0$. Khi đó $\int\limits_0^\pi [f'(x)+k.\sin x]^2\,\mathrm{d}x=0$.

$\Leftrightarrow \int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^\pi 2k\sin x.f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^\pi k^2\sin^2 x\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k.\left(-\frac{\pi}{2}\right)+k^2.\frac{\pi}{2}=0 \Leftrightarrow k^2-2k+1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Từ đó, $f'(x)+\sin x=0 \Rightarrow f'(x)=-\sin x \Rightarrow f(x)=\cos x+C$.

Do $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ nên $C=1$. Vậy $f(x)=\cos x+1$.

*) Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+1)\,\mathrm{d}x=(\sin x+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi}{2}$.

Trắc nghiệm:

Từ giả thiết $\int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ và $\int\limits_0^\pi \sin x.f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$ ta suy ra được $f'(x)=-\sin x$.

Từ đó giải tiếp như phần trên.

Câu 36: **(Sở Đà Nẵng 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8$ với mọi x thuộc $[-1;1]$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đặt $I=\int_{-1}^{1}2f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dùng tích phân từng phần, ta có: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=2x+2\end{cases}$.

$I=(2x+2)f(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\mathrm{d}x=4f(1)-\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8\Rightarrow\int_{-1}^{1}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(8x^2+16x-8\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(2x+2)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(8x^2+16x-8\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(2x+2)^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\left[f'(x)-(2x+2)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+2\Rightarrow f(x)=x^2+2x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0\Rightarrow C=-3\Rightarrow f(x)=x^2+2x-3\Rightarrow\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}$.

Cách 2.

Chọn $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'(x)=2ax+b$.

Ta có:

$\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+16x-8\Rightarrow(2ax+b)^2+4\left(ax^2+bx+c\right)=8x^2+16x-8$

$\Leftrightarrow\left(4a^2+4a\right)x^2+(4ab+4b)x+b^2+4c=8x^2+16x-8$

$\Rightarrow\begin{cases}4a^2+4a=8\\ 4ab+4b=16\\ b^2+4c=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-2\\ b=-4\\ c=-6\end{cases}$.

Do $f(1)=0\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow a=1,\ b=2$ và $c=-3$.

Vậy $f(x)=x^2+2x-3\Rightarrow\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_{0}^{1}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Câu 38: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J = 1 + \ln 4$. **B.** $J = 4 - \ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Cách 2: $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{f(x)}{x} + 2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x)=ax+b$. Vì $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$, suy ra $f(x)=3x-2$.

Vậy $J=\int\limits_1^2\left(\frac{5}{x}-\frac{3x-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 4+\frac{1}{2}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

- Tính: $I=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=J+K$.

Tính $K=\int\limits_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\mathrm{e}^x f(x) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\left[\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$

$\Rightarrow K=\left(x\mathrm{e}^x f(x)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left[x\mathrm{e}^x f(x)+x\mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x\ \left(\text{do } f(1)=0\right)$

$\Rightarrow K=-J-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I=J+K=-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x$.

- Kết hợp giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \\ -\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} & (1) \\ 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2} & (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được: $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$\int\limits_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+2x\mathrm{e}^x f'(x)+x^2\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_o^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \pi\int\limits_o^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+x\mathrm{e}^x$, trục Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+x\mathrm{e}^x=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow f(x)=-\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(1-x)\mathrm{e}^x+\mathrm{C}$.

- Lại do $f(1)=0 \Rightarrow \mathrm{C}=0 \Rightarrow f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left((1-x)\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^1+\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-1+\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \left.\frac{x^3 f(x)}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx$

$= \frac{1.f(1) - 0.f(0)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx$.

Mà $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -1$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7}.49 = 7$ (2).

$\int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3 . f'(x) dx = -14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3 . f'(x) dx = 7 + 7 - 14 = 0$.

$\Rightarrow \int_0^1 \left\{[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right\} dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$.

Do $[f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0$. Mà $\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$. Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \left.\left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right)\right|_0^1 = \frac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3 . f'(x) dx = -1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$7 = 7\left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx\right)^2 \leq 7\left(\int_0^1 (x^3)^2 dx\right) \cdot \left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx\right) = 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\left.\frac{ax^7}{7}\right|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$

Do đó $f(x)=\frac{7}{4}(1-x^4)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\frac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Khi đó, ta có $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b h(x)\mathrm{d}x\ge 0$

Xét tam thức bậc hai $[\lambda f(x)+g(x)]^2=\lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a;b]$ ta được

$\lambda^2\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$ $(*)$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow\left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$ (đpcm)

Câu 41: **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019}+b^{2019}$ bằng

A. $2^{2018}+1$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $2^{2018}-1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1[\mathrm{e}^x f(x)]'\mathrm{d}x=\left.[\mathrm{e}^x f(x)]\right|_0^1=\mathrm{e}.f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, a, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

Cách 2:

Ta có $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=\int_0^1 e^x f(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx$.

Đặt $u=f(x)$, $dv=e^x dx$; ta có $du=f'(x)dx$, $v=e^x$.

Khi đó, $\int_0^1 e^x f(x)dx=\left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 e^x f'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^x f(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx=\left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1$

$\Rightarrow \int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=\left[e^x f(x)\right]\Big|_0^1=e.f(1)-f(0)=e-1$.

Theo đề bài $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx=ae+b$, a, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

Câu 42: **(Đoàn Thượng)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$ **D.** $\frac{1}{\pi}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $I_1=\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$.

Đặt $u=\cos(\pi x)\Rightarrow du=-\pi\sin(\pi x)$, $dv=f'(x)dx$ chọn $v=f(x)$.

$\Rightarrow I_1=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\int_0^1 \pi f(x)\sin(\pi x)dx=-f(1)-f(0)+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{1}{2}$.

Ta có $I_2=\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=I_2\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\int_0^1 f^2(x)dx$.

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)\right]dx=0\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]=0$.

$\Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $f(x)-\sin(\pi x)=0$. Vì $I_1\neq 0$ và $I_2\neq 0$ nên $f(x)=0$ loại.

$\Leftrightarrow f(x)-\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sin(\pi x)dx=-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$.

Câu 43: **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

□*Nhận xét*

- Ý tưởng sáng tác bài toán giống câu 50 trong đề minh họa của BGD năm 2018. Vì thầy Nguyễn Việt Hải phân tích quá hay nên tôi trích dẫn lại nguyên văn nhận xét và ý tưởng đó

Từ giả thiết: $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Tính: $I = \int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 3x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x^3 \end{cases}$.

Ta có:

$I = \int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = 1.f(1) - 0.f(0) - \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà: $\int_0^1 3x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 1 = -\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Leftrightarrow 7\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -7 \Leftrightarrow \int_0^1 7x^3.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7$).

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(7x^3.f'(x) + \left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[7x^3 + f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Với $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4}.1^4 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Khi đó: $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = -\frac{7}{4}\left(\frac{x^5}{5} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$.

PHÂN TÍCH

$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\frac{x^3}{3} = f(x)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\mathrm{d}f(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

Từ đây, chúng ta quan sát giả thiết bài toán: Ta thấy xuất hiện $[f'(x)]^2$ và $x^3.f'(x)$

Nghĩ ngay đến hằng đẳng thức $\left[f'(x) + ax^3\right]^2$, như vậy số $a = ?$ tương ứng với bài toán?

+ $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$

+ $\int_0^1 2ax^3.f'(x)dx = -2a$

+ $\int_0^1 \left(ax^3\right)^2 dx = \frac{a^2}{7}$

Do đó số a chọn tương ứng là $\int_0^1 \left[f'(x) + ax^3\right]^2 dx = 7 - 2a + \frac{a^2}{7} = 0 \Leftrightarrow a = 7$.

. Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy đáp chọn: A

NHẬN XÉT:

□*Vì đây là trắc nghiệm chỉ cần ĐS đúng do đó ta sử dụng kỹ thuật đồng nhất suy ra đáp số dễ dàng.*

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 (-7x^3) f'(x) dx = 7$. Vì trắc nghiệm nên đồng nhất hai biểu thức dưới dấu tích phân. Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{4} + \frac{7}{4} \Rightarrow A$.

□Hướng tiếp cận khác theo con đường BĐT.

+ Quan sát giả thiết bài toán: $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

+ Ta nghĩ đến đánh giá bằng BĐT: Thật vậy sử dụng kiến thức dấu tam thức bậc hai. Chúng ta có kết quả BĐT Cauchy – Schawz

$$t^2 \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx = \int_a^b [t.f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra: BĐT Cauchy – Schawz

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx . \int_a^b g(x)^2 dx$$

Do đó ta có hướng giải bài toán trên:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) d\frac{x^3}{3} = f(x)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} df(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 . f'(x) dx.$$

Ta suy ra: $\frac{1}{9} = \left(\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x) dx\right)^2 \leq \frac{1}{9}\int_0^1 (x^3)^2 dx \int (f'(x))^2 dx = \frac{1}{9}$.

Tương đương $f'(x) = k.x^3$

□***Ý TƯỞNG SÁNG TẠO ĐỀ***

Tạo hằng tích phân có dạng đẳng thức: $\int_0^a [A+B]^2 dx = 0$ Hoặc $\int_0^a [A+B+C]^2 dx = 0 \ldots$

Chọn A, *A, B thích hợp tương ứng ta có bài toán.* $0 = \int_0^a [A+B]^2 dx = \int_0^a A^2 dx + \int_0^a 2A.B dx + \int_0^a B^2 dx$

□***MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ***

Câu 44: **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 36$ và $\int_0^1 x.f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $\int_0^1 x.f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x.f(x) \mathrm{d}x = 1$.

Tính: $I = \int_0^1 5x.f(x) \mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 5x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{5}{2}x^2 \end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2.f\left(x\right)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}.f\left(1\right)-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(1\right)=4$)

Mà: $I=\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=36\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=36$)

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[10x^2.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f'(x)\left[10x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 10x^2-f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=10x^2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{10x^3}{3}+C$

Với $f\left(1\right)=4\Rightarrow 4=\frac{10.1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{2}{3}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{5x^4}{6}+\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

Câu 45: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_0^2 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{115}$. **B.** $\frac{297}{115}$. **C.** $\frac{562}{115}$. **D.** $\frac{266}{115}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết: $\int\limits_0^2 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^2 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^2 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=x^3\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^2 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^3.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=24-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(2\right)=3$)

Mà: $I=\int\limits_0^2 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=24-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=23\Leftrightarrow\frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=4$

$\Leftrightarrow\frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$)

$\Leftrightarrow\int\limits_0^2\left[\frac{4}{23}x^3.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f'(x)\left[\frac{4}{23}x^3-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \frac{4}{23}x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{23}x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23}x^4 + C$

Với $f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{16}{23} + C \Rightarrow C = \frac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{23}x^4 + \frac{53}{23}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{1}{23}x^4 + \frac{53}{23}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{115}x^5 + \frac{53}{23}x\right)\Big|_0^2 = \frac{562}{115}$.

Câu 46: **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{15}{19}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{17}{18}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Tính: $I = \int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I = \frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1) = 4$).

Mà: $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = 5$, (theo giả thiết: $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 5$) $\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^2 f'(x) - [f'(x)]^2\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x).\left[x^2 - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Với $f(1) = 4 \Rightarrow C = \frac{11}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{4}$.

Câu 47: **(Chuyên Vinh Lần 3).** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2) = 6$ $\int_0^2 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Tính: $I = \int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I=\frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x\ =12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{17}{2}\ \Rightarrow\frac{17}{2}=12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=7$

$\Leftrightarrow\ \int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\ \int_0^2\left(x^2 f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\ \int_0^2 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\ x^2-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(2)=6\ \Rightarrow\ C=\frac{10}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{10}{3}x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 48: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$ $\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{53}{5}$.   **B.** $\frac{117}{20}$.   **C.** $\frac{153}{5}$.   **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Tính $I=\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{3}x^3.f(x)\Big|_0^3-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\ =54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(3)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}\Rightarrow\frac{154}{3}=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=4\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^3\left(x^3 f'(x)-4\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^3 f'(x)\left[x^3-4f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow x^3-4f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{16}+C$.

Với $f(3)=6\Rightarrow C=\frac{15}{16}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{15}{16}$.

Vậy $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{1}{80}x^5+\dfrac{15}{16}x\right)\right|_0^3=\dfrac{117}{20}$.

Câu 49: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{2}{285}$. **B.** $\dfrac{194}{95}$. **C.** $\dfrac{116}{57}$. **D.** $\dfrac{584}{285}$.

Lời giải

Chọn C

Tính: $I=\int\limits_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{4}x^4\end{cases}$.

Ta có: $I=\left.\dfrac{1}{4}x^4.f\left(x\right)\right|_0^1-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(1\right)=2$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^1 x^3.f\left(x\right)\mathrm{d}x=10\Rightarrow\int\limits_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-38$

$\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-38.8\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-38.\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(8x^4f'\left(x\right)+38\left[f'\left(x\right)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f'\left(x\right).\left[8x^4+38f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 8x^4+38f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-\dfrac{4}{19}x^4\Rightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{4}{95}x^5+C$.

Với $f\left(1\right)=2\Rightarrow C=\dfrac{194}{95}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\dfrac{2}{285}x^6+\dfrac{194}{95}x\right)\right|_0^1=\dfrac{116}{57}$.

Câu 50: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=9$ và $\int\limits_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=9\ \left(1\right)$

- Tính $\int\limits_0^1 x^3f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \ \ (2)$$

- Lại có: $\displaystyle\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \ \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x)\right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Lại do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{9}{5}x^5 + \dfrac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{1}{11}$ và $\displaystyle\int_0^1 x^4 f(x)dx = -\frac{1}{55}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{-1}{7}$ **B.** $\dfrac{1}{7}$ **C.** $\dfrac{-1}{55}$ **D.** $\dfrac{1}{11}$

Lời giải:

$\displaystyle\int_0^1 x^4 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5}f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5}f'(x)dx$. Suy ra $\displaystyle\int_0^1 x^5 f'(x)dx = \frac{1}{11}$. Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\displaystyle\int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = \frac{1}{11}$. Do đó $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx - 2\int_0^1 x^5 f'(x)dx + \int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - x^5\right]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = x^5$, do đó $f(x) = \dfrac{1}{6}x^6 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = -\dfrac{1}{6}$. Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^6 - 1}{6}dx = \frac{-1}{7}$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1) = \dfrac{3}{2}$; $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6}$ và $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\sqrt{1 + \frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}dx = -\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = ?$

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải:

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{6} = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx = \frac{2}{3}$.

Mặt khác: $2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2} \le (1-x)^2 + 1 + \frac{x}{x-2}(f'(x))^2$.

Tích phân hai vế ta $\Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{x}{x-2}(f'(x))^2 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2 dx \le \frac{2}{3}$.

Áp dụng Holder: $\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\int_0^1 \sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x(2-x)dx \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2 dx$.

Do vậy $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2-x}(f'(x))^2 dx \ge \frac{2}{3}$ nên dấu bằng $\Leftrightarrow f'(x) = 2-x \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = \frac{53}{60}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Câu 1: **(Lý Nhân Tông)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục không âm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}\Rightarrow\frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\cos x$ $(*)$.

Suy ra $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Ta có $f(0)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Dẫn đến $f(x)=\sqrt{(\sin x+2)^2-1}$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 2: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a$ và $f(1)=b$, $f(2)=c$. Tích phân $\int\limits_1^2\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2c-b-a$. **B.** $2a-b-c$. **C.** $2c-b+a$. **D.** $2a-b+c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=f'(x)$ suy ra $\int\limits_1^2\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x.\mathrm{d}\left[f(x)\right]$

$=xf(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-f(1)-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2c-b-a$.

Câu 3: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Cho $\int\limits_0^1(3x+1)f'(x)\mathrm{d}x=2019,\ 4f(1)-f(0)=2020$. Tính $\int\limits_0^{\frac{1}{3}}f(3x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn A

Ta có:

$\int\limits_0^1(3x+1)f'(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow\int\limits_0^1(3x+1)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=2019\Leftrightarrow(3x+1)f(x)\Big|_0^1-3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019$

$\Leftrightarrow 4f(1)-f(0)-3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow 2020-3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ (1)

Xét: $I=\int\limits_0^{\frac{1}{3}}f(3x)\mathrm{d}x$:

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$; Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=1$.

Vậy: $I=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

Câu 4: **(HSG Bắc Ninh)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right).\left(3-x\right)\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{109}{12}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\dfrac{7}{9}$. **B.** $\ln\dfrac{2}{9}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{9}$. **D.** $\ln\dfrac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right).\left(3-x\right)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(f\left(x\right)-\left(3-x\right)\right)^2-\left(3-x\right)^2\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f\left(x\right)-\left(3-x\right)\right)^2\mathrm{d}x-\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.$$

Mà $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(9-6x+x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(9x-3x^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{109}{12}$

Suy ra $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f\left(x\right)-\left(3-x\right)\right)^2\mathrm{d}x=0$.

Vì $\left[f\left(x\right)-\left(3-x\right)\right]^2\geq 0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ nên $f\left(x\right)=3-x$, $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{3-x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1-x+2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{2}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\right)\mathrm{d}x$

$=\left.\left(-\ln\left|x+1\right|+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)\right|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{2}{9}$.

Câu 5: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Cho hàm $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(f\left(x\right)\right)^2-2f\left(x\right)\left(\sin x-\cos x\right)\right]\mathrm{d}x=1-\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=-1$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=1$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=2$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,dx=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(f(x))^2-2f(x)(\sin x-\cos x)+(\sin x-\cos x)^2\right]dx$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(f(x))^2-2f(x)(\sin x-\cos x)\right]dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2\,dx=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-1=0$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx=0$.

$\Rightarrow f(x)=\sin x-\cos x$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx=(-\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$.

Câu 6: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=-x.f^2(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$, biết $f(1)=\frac{2}{a+3}$ và $f(2)>\frac{1}{4}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của a thỏa mãn là

A. -14. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(x)=-x.f^2(x)\Leftrightarrow-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=x$.

$\Rightarrow\int\left(\frac{1}{f(x)}\right)'dx=\int x\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$.

Có $f(1)=\frac{2}{a+3}\Rightarrow\frac{a+3}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=\frac{a+2}{2}$.

$\frac{1}{f(2)}=2+\frac{a+2}{2}\Rightarrow f(2)=\frac{2}{a+6}$; $f(2)>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2}{a+6}>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{2-a}{4(a+6)}>0\Leftrightarrow-6<a<2$.

Ta có $\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+\frac{a+2}{2}$. Do đó $f(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow a\geq-2$.

Với $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;1\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của a cần tìm là -2.

Câu 7: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3)=21$, $\int_0^3 f(x)\,dx=9$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(3x)\,dx$.

A. $I=15$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'(3x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{3}f(3x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\frac{1}{3}x.f(3x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}f(3x)dx=\frac{1}{3}f(3)-\frac{1}{9}\int_0^3 f(x)dx=6$.

Vậy $I=6$.

Câu 8: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\dfrac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$.

$\Rightarrow I=\int\limits_2^0 f(2-t)(-dt)=\int\limits_0^2 f(2-t)(dt)=\int\limits_0^2 f(2-x)dx$.

$\Rightarrow 2I=\int\limits_0^2\left[f(x)+f(2-x)\right]dx=\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\dfrac{e^4-1}{2}$.

Vậy $I=\dfrac{e^4-1}{4}$.

Câu 9: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $x^2f'(x)+f(x)=0$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Tính $f(2)$ biết $f(1)=\mathrm{e}$.

A. $f(2)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(2)=\sqrt[3]{\mathrm{e}}$. **C.** $f(2)=2\mathrm{e}^2$. **D.** $f(2)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(1;2)$ $\Rightarrow$ $f(1).f(2)>0$, $\forall x\in(1;2)$.

Mà $f(1)=\mathrm{e}>0$ nên $f(2)>0$.

Do đó $x^2f'(x)+f(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Suy ra $\int\limits_1^2\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$ $\Leftrightarrow$ $-\dfrac{1}{x}\Big|_1^2=-\ln|f(x)|\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow$ $-\left(\dfrac{1}{2}-1\right)=-\left(\ln|f(2)|-\ln|f(1)|\right)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}=-\left[\ln f(2)-\ln\mathrm{e}\right]$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}=-\ln f(2)+1$ $\Leftrightarrow$ $\ln f(2)=\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $f(2)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

Câu 10: **(Lý Nhân Tông)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln n}.\ln\left(p+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{x^3\left(\pi+\mathrm{e}.2^x\right)+2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^1+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}.\ln\left|\pi+\mathrm{e}.2^x\right|\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}.\ln\left|1+\dfrac{\mathrm{e}}{\pi+\mathrm{e}}\right|$.

Vậy $m=4$, $n=2$, $p=1$ nên $P=m+n+p=7$.

Câu 11: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $I=\ln\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{cases}$.

Khi đó

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left[f(x)\frac{x-1}{x+1}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}f'(x)dx \right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[f(2)\frac{1}{3} - \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}f'(x)dx \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}-2\ln\frac{3}{2} = \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}f'(x)dx \quad (1).$$

Xét $\int_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^2 dx$

$$=\int_1^2 \left(1-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx = \left(x-4\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}\right)\Big|_1^2 = 1-4\ln 3+4\ln 2-\frac{4}{3}+2 = \frac{5}{3}-4\ln\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 dx = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2} \quad (2).$$

Theo đề $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f'(x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+C$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}\left[2-2\ln 3\right]+C=0 \Rightarrow C=\ln 3-1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+\ln 3-1$$

$$I=\int_1^2 \left(\frac{1}{2}\left[x-2\ln(x+1)\right]+\ln 3-1\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}+(\ln 3-1)x\right]\Bigg|_1^2-\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}+\ln 3-\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{4}+\ln 3-\left[(x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2-\int_1^2 x\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\frac{1}{4}+\ln 3-[3\ln 3-2\ln 2-1]=\frac{3}{2}-2\ln\frac{2}{3}.$$

Câu 12: **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x)-2f(x))\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x\in(1;+\infty)$ nên ta có

$\left(x^2f'(x)-2xf(x)\right)\ln x=x^4-xf(x)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}\right)\ln x=1-\frac{f(x)}{x^3}$

$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'\ln x=1-\frac{f(x)}{x^3}$

$\Leftrightarrow\int\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'\ln x\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{f(x)}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)\ln x}{x^2}-\int\frac{f(x)}{x^3}\mathrm{d}x=x-\int\frac{f(x)}{x^3}\mathrm{d}x+C$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)\ln x}{x^2}=x+C\ \Leftrightarrow\frac{f(x)\ln x}{x^2}=x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2(x+C)}{\ln x}.$

Theo bài ra $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{\ln x}$.

Do đó $f(2)=\frac{8}{\ln 2}\in\left(\frac{23}{2};12\right)$.

Câu 13: **(Nguyễn Khuyến)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thoả mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. -13 **B.** 13 **C.** 7 **D.** -7

Lời giải.

Chọn B

Từ công thức tính vi phân của hàm số, ta có $f'(\mathrm{x})\mathrm{d}x=\mathrm{d}(f(\mathrm{x}))$, và $\mathrm{d}(cos^2x)=(cos^2x)'\mathrm{d}x=-\sin 2x\mathrm{d}x$

Do đó, áp dụng công thức tích phân từng phần, với $u=cos^2x$ và $v=f(\mathrm{x})$, ta thu được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x = f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$$

Theo giả thiết, ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\mathrm{d}x = 10$. Từ đó $f(x).\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x = 10$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x = 10 - \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos^2\frac{\pi}{2} - f(0).\cos^2 0\right) = 13$$

Câu 14: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1$

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx.$

A. $I = \frac{4}{3}$ **B.** $I = \frac{2}{3}$ **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x + 1)dx$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^1$

$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x)dx = \frac{2}{3}$ (1)

Xét $\int_0^1 f(1-x)dx$, đặt: $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận

x	0	1
t	1	0

Ta có: $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)(-dt) = \int_0^1 f(t)dt = I$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 16$.

Chú ý:

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x}\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ với mọi a, $b > 0$.

Câu 15: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[0;3\right]$, thỏa mãn $\begin{cases} f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)\neq 1 \end{cases}$, $\forall x\in\left[0;3\right]$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{x.f'\left(x\right)}{\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $\begin{cases} f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1 \\ f\left(0\right)=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow f\left(3\right)=2$.

Do $f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1\Rightarrow\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)=\left[1+f\left(x\right)\right]^2$.

Khi đó ta được:

$$I=\int\limits_0^3\frac{x.f'\left(x\right)}{\left[1+f\left(x\right)\right]^2}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f\left(x\right)}\right)=-\frac{x}{1+f\left(x\right)}\Bigg|_0^3+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x\overset{t=3-x}{=}-\int\limits_3^0\frac{1}{1+f\left(3-t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-x\right)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(3-x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3\frac{f\left(x\right)}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\mathrm{d}x=3$.

Do đó $J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Câu 16: **(-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)+2x.f\left(x\right)=\mathrm{e}^x f\left(x\right)$ với $f\left(x\right)\neq 0,\forall x$ và $f\left(0\right)=1$. Khi đó $\left|f\left(1\right)\right|$ bằng

A. $\mathrm{e}+1$. **B.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $f'\left(x\right)+2x.f\left(x\right)=\mathrm{e}^x f\left(x\right)$, ta có

$f'\left(x\right)=f\left(x\right)\left(\mathrm{e}^x-2x\right)$

$\Rightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\mathrm{e}^x-2x$ (vì $f\left(x\right)\neq 0,\forall x$)

$\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\ln\left|f\left(x\right)\right|=\mathrm{e}^x-x^2+C$.

Mà $f\left(0\right)=1$ nên $C=-1$.

Khi đó, ta được: $\ln\left|f\left(x\right)\right|=\mathrm{e}^x-x^2-1$.

Thế $x=1$, ta có: $\ln\left|f\left(1\right)\right|=\mathrm{e}-2\Rightarrow\left|f\left(1\right)\right|=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}$.

Câu 17: **(CổLoa Hà Nội)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $xf'(x).\ln x + f(x) = 2x^2$, $\forall x \in (1;+\infty)$ và $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2$. Tính tích phân $I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{3}{2}$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{5}{3}$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 \Leftrightarrow f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} = 2x$, $\forall x \in (1;+\infty)$.

$\Rightarrow \int f'(x)\ln x\mathrm{d}x + \int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = x^2 + C$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x = x^2 + C$, $\forall x \in (1;+\infty)$.

Do $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 \Rightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x)\ln x = x^2, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{\ln x} > 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow \frac{x}{f(x)} = \frac{\ln x}{x}, \forall x \in (1;+\infty)$.

Vậy $I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{3}{2}$.

Câu 18: **(THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + x.f'(x) \geq x^{2018}$ $\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $g(x) = x^3.f(x) - \frac{x^{2021}}{2021}$ trên $[0;1]$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - x^{2020} = x^2.\left[3f(x) + x.f'(x) - x^{2018}\right] \geq 0 \, \forall x \in [0;1]$.

Do đó $g(x)$ là hàm số không giảm trên $[0;1]$, suy ra $g(x) \geq g(0) \, \forall x \in [0;1]$

Hay $x^3.f(x) - \frac{x^{2021}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021} \geq 0, \forall x \in [0;1]$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021}\mathrm{d}x = \frac{1}{2019.2021}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}$.

Câu 19: **(Quỳnh Lưu Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 2$, $f(x) \neq 0, \forall x > 0$ và $(x^2+1)^2 f'(x) = \left[f(x)\right]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$.　　**B.** $-\dfrac{2}{5}$.　　**C.** $-\dfrac{5}{2}$.　　**D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(x^2+1\right)^2 f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\forall x\in[1;2]$ (*)

Lấy tích phân 2 vế (*) trên $[1;2]$ ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2=\int_1^2\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2)=\frac{5}{2}.$$

Câu 20: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đa thức bậc bốn $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2.$ Tích phân $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$.　　**B.** $\dfrac{1}{4}$.　　**C.** $\dfrac{3}{4}$.　　**D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=f(x)$ là đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là đa thức bậc ba. (1)

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f'(x)}{2x}\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $f'(x)$ có dạng $f'(x)=x(ax^2+bx+2)$.

Ta lại có $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$ nên $f'(1)=0$, $f'(2)=0$. Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b+2=0\\8a+4b+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$.

Vậy $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(x^2-3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

Câu 21: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho $f(x)+4xf\left(x^2\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$.　　**B.** $I=-\dfrac{1}{2}$.　　**C.** $I=2$.　　**D.** $I=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)+4xf\left(x^2\right)=3x \Rightarrow \int_0^1 f(x)+4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$.

Xét $A=\int\limits_0^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$.

Vậy $A=\int\limits_0^1 2f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 2f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow 3\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Câu 22: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Cho $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'\left(x\right).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2\left(x\right)}=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{45}{8}$. **C.** $I=\frac{11}{2}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f'\left(x\right).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2\left(x\right)}=0\Leftrightarrow 3f'\left(x\right).\frac{e^{f^3(x)}}{e^{x^2+1}}=\frac{2x}{f^2\left(x\right)}\Leftrightarrow 3f^2\left(x\right).f'\left(x\right).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

$\Leftrightarrow\left(e^{f^3(x)}\right)'=\left(e^{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}+C\left(*\right)$.

Thế $x=0$ vào $\left(*\right)$ ta được $e=e+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3\left(x\right)=x^2+1\Leftrightarrow f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}.\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^{\sqrt{7}}=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{7}}$

$=\frac{3}{8}.\left(16-1\right)=\frac{45}{8}$.

Câu 23: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp n trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Thay $x=0$ vào $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ ta được $f\left(1\right)=0$

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Rightarrow -f'\left(1-x\right)+2xf''(x)+x^2f'''(x)=2$. Khi đó $f'(1)=-2$.

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f(1-x)+x^2f''(x)\right]\mathrm{dx}=\int\limits_0^1 2x\mathrm{dx}$

$\Leftrightarrow -\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}\left(1\text{-x}\right)+f'\left(1\right)-2\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{dx}=1\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{dx}-2\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{dx}=3$.

Đặt $J=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{dx}$, ta có: $I=\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{dx}=xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{dx}=f\left(1\right)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{dx}=-J$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} J-2I=3 \\ I=-J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I=-1 \\ J=1 \end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx=-1$.

Câu 24: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow \int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]\mathrm{d}x=\int\left[(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'\mathrm{d}x=\int\left[(3x^2+x)f(x)\right]'\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)(1), \forall x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)\Leftrightarrow\left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=2x \\ f(x)=6x^2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}\Rightarrow a-b=1$.

Câu 25: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$.

Biết rằng $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b, a,b\in\mathbb{Z}$, tính tổng $S=a+b^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{f^4(x)}=(x-1)^2$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int\frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{f^4(x)}\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\,dx \Leftrightarrow \int\frac{\left(1+2f(x)+f^2(x)\right)f'(x)}{f^4(x)}\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{f^4(x)}+2\frac{1}{f^3(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)}=\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}=\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

Mà $f(1)=-1$ nên $-\dfrac{1-3+3}{-3}=C\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra: $-\dfrac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}=\dfrac{(x-1)^3}{3}+\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{(x-1)^3}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+f(x)\right)^3}{f^3(x)}=-(x-1)^3 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^3=(1-x)^3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x}.$$

Vậy: $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\dfrac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_1^3=-\ln 3$. Suy ra $a=-1;b=0$ hay $a+b=-1$.

Câu 26: **(Sở Nam Định)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30°$, $45°$, $60°$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\dfrac{1}{3}$. **D.** $I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1$.

Lời giải

Chọn A

Vì các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoàng độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30°$, $45°$, $60°$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến lần lượt là: $f'(-1)=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $f'(0)=\tan 45°=1$, $f'(1)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=f'(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f''(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x=-1 & \Rightarrow t=f'(-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=0 & \Rightarrow t=f'(0)=1 \\ x=1 & \Rightarrow t=f'(1)=\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} t\,\mathrm{d}t+4\int_{1}^{\sqrt{3}} t^3\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\left.t^4\right|_{1}^{\sqrt{3}}=\frac{25}{3}.$$

Câu 27: **(THTT số 3)** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$f(x^3+x-1)+f(-x^3-x-1)$

$=-6x^6-12x^4-6x^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1} f(x)dx$.

A. 32. **B.** 4. **C.** -36. **D.** -20.

Lời giải

Chọn D

Đặt $a=x^3+x-1$, khi đó ta có $f(a)+f(-a-2)=-6(a+1)^2-2\ (1)$. Hàm số $f(a)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Lúc đó ycbt trở thành tính giá trị của tích phân $\int_{-3}^{1} f(a)da$. Lấy tích phân hai vế của (1), ta được $\int_{-3}^{1} f(a)da+\int_{-3}^{1} f(-a-2)da=\int_{-3}^{1}\left(-6(a+1)^2-2\right)da=-40\ (2)$. Từ tích phân $\int_{-3}^{1} f(-a-2)da$ ta đặt $t=-a-2\Rightarrow dt=-da$. Khi $a=-3\Rightarrow t=1; a=1\Rightarrow t=-3$. Tích phân trên chuyển thành $\int_{-3}^{1} f(t)dt$, kết hợp với (2) ta suy ra: $2\int_{-3}^{1} f(a)da=-40\Leftrightarrow\int_{-3}^{1} f(a)da=-20$. Đây chính là đáp số cần tìm.

Câu 28: **(Chuyên Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x)-f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=\mathrm{e}$. Giá trị của $f(5)$ bằng

A. $3\mathrm{e}^{12}-1$. **B.** $5\mathrm{e}^{17}$. **C.** $5\mathrm{e}^{17}-1$. **D.** $3\mathrm{e}^{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)-f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}\Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}$

$\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'=(x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}$.

$\Rightarrow\int_1^5\left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_1^5(x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\mathrm{e}^{-x}f(x)\right|_1^5=\int_1^5 x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^5\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-5}f(5)-1=I_1+I_2\ (*)$

Xét: $I_2=\int_1^5\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$.

$I_2 = x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\Big|_1^5 - \int\limits_1^5 x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x = 5\mathrm{e}^{12} - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 + I_2 = 5\mathrm{e}^{12} - 1$

$(*) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5} f(5) - 1 = 5\mathrm{e}^{12} - 1 \Leftrightarrow f(5) = 5\mathrm{e}^{17}$.

Câu 29: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Cho $\int\limits_0^6 f^2(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 x.f(x)\mathrm{d}x = 72$. Giá trị của $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $\int\limits_0^6 f^2(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 xf(x)\mathrm{d}x = 72$; $\int\limits_0^6 x^2\mathrm{d}x = 72$.

$\int\limits_0^6 \left[f^2(x) - 2xf(x) + x^2\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 \left[f(x) - x\right]^2 \mathrm{d}x = 72 - 2.72 + 72 = 0 \Rightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 x\mathrm{d}x = 4$.

Cách 2: Ta có: $72^2 = \left[\int\limits_0^6 xf(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int\limits_0^6 x^2\mathrm{d}x.\int\limits_0^6 f^2(x)\mathrm{d}x = 72.72 = 72^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kx\,(k \ne 0) \Rightarrow \int\limits_0^6 xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 kx^2\mathrm{d}x = 72 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = x$.

$\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 x\mathrm{d}x = 4$.

Câu 30: **(Ba Đình Lần2)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$f^2(1-x) = (x^2+3) f(x+1)$. Biết rằng $f(x) \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $I = \int\limits_0^2 (2x-1) f''(x)dx$.

A. 8. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} f^2(1-x) = (x^2+3), f(x+1) \Rightarrow f^4(1-x) = (x^2+3)^2.f^2(x+1)\ (1) \\ f^2(1+x) = (x^2+3).f(1-x)\ (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(1-x) = x^2 + 3 = (1-x-1)^2 + 3$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 3$

$\Rightarrow f''(x) = 2$

$\Rightarrow I = \int\limits_0^2 (4x-2)\mathrm{d}x = (2x^2 - 2x)\Big|_0^2 = 4$.

Câu 31: **(Sở Lạng Sơn 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 4x^3 + 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{16}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=\left[f(x).f'(x)\right]'$. Từ giả thiết ta có: $\left[f(x).f'(x)\right]'=4x^3+2x$

Suy ra: $f(x).f'(x)=\int(4x^3+2x)dx=x^4+x^2+C$. Với $f(0)=0\Rightarrow C=0$

Nên ta có: $f(x).f'(x)=x^4+x^2$

Suy ra: $\int\limits_0^1 f(x).f'(x)dx=\int\limits_0^1(x^4+x^2)dx\Leftrightarrow \left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\dfrac{8}{15}\Rightarrow f^2(1)=\dfrac{16}{15}$.

Câu 32: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, biết $x.f(x)\neq -1,\forall x\neq 0$; $f(1)=-2$ và $\left(x.f(x)+1\right)^2-x.f'(x)-f(x)=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int\limits_1^e f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{e}-2$. **B.** $2-\dfrac{1}{e}$. **C.** $-\dfrac{1}{e}$. **D.** $\dfrac{1}{e}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left[x.f(x)+1\right]^2-x.f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[x.f(x)+1\right]^2=x.f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow\dfrac{x.f'(x)+f(x)}{\left[x.f(x)+1\right]^2}=1$ (do $x.f(x)\neq -1,\forall x\neq 0$).

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{-1}{x.f(x)+1}\right)'=1\Leftrightarrow\dfrac{-1}{x.f(x)+1}=x+C$

Do $f(1)=-2$ nên $\dfrac{-1}{f(1)+1}=C+1\Leftrightarrow 1=C+1\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $\dfrac{-1}{x.f(x)+1}=x\Leftrightarrow x^2.f(x)+x=-1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-1-x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Suy ra $\int\limits_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^e\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{1}{x}-\ln|x|\right)\right|_1^e=\dfrac{1}{e}-2.$

Câu 33: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-4}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{-10}{3}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\left.xf(x)\right|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó $I=-\int\limits_2^0 f(2-t)dt=\int\limits_0^2 f(2-t)dt\Rightarrow I=\int\limits_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int\limits_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Cách 2

Từ $\begin{cases} f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2 \quad (1) \\ f(0)=3 \end{cases}$

Thay $x=0;x=1$ vào (1) ta được $f(2)=-1;f(1)=\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ từ giả thiết trên ta có $\begin{cases} c=3 \\ a+b+c=\frac{1}{2} \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=3 \\ a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \end{cases}$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3\Rightarrow f'(x)=x-3$ suy ra $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\left(x-3\right)\mathrm{d}x=-\frac{10}{3}$.

Phân tích, bình luận và phát triển bài toán.

- Đây là bài toán về tích phân hàm ẩn một dạng toán mà trong đề thi hiện nay hay gặp.

- Trong bài toán trên để tính tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ sử dụng tích phân từng phần đưa về tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. Mặt khác từ biểu thức về hàm số đã cho chứa $f(x)$ và $f(2-x)$, nên ta biến đổi tạo ra hai biểu thức này bằng cách đặt $x=2-t$.

- Để làm được bài toán trên học sinh cần nắm vững cả hai phương pháp tính tích phân là đổi biến và từng phần.

- Đề xuất một số bài toán tương tự:

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)=4xf(x^2)+2x+1$ với $\forall x\in R$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx$

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Từ $f(x)=4xf(x^2)+2x+1,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=1$ vào (1) ta được $f(1)=4f(1)+3\Rightarrow f(1)=-1$

Xét $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^1 f(t^2).2tdt\Rightarrow I=2\int_0^1 xf(x^2)dx$. Ta có $I-2I=\int_0^1 f(x)dx-4\int_0^1 xf(x^2)dx$

$=\int_0^1\left[f(x)-4xf(x^2)\right]dx=\int_0^1(2x+1)\,dx=\left(x^2+x\right)\Big|_0^1=2\Leftrightarrow -I=2\Leftrightarrow I=-2$

Vậy $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1.(-1)+2=1$.

Câu 35: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f\left(x\right)-7f\left(1-x\right)=3\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=8a-3b$.

A. $T=1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=16$. **D.** $T=-16$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5f\left(x\right)-7f\left(1-x\right)=3\left(x^2-2x\right)$

Lần lượt chọn $x=0,x=1$, ta có hệ sau:

$\begin{cases} 5f\left(0\right)-7f\left(1\right)=0 \\ 5f\left(1\right)-7f\left(0\right)=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f\left(1\right)=\dfrac{5}{8} \\ f\left(0\right)=\dfrac{7}{8} \end{cases}$

Tính $I=\int_0^1 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

Đặt: $\begin{cases} u=x \\ dv=f'\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases}$ Chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f\left(x\right) \end{cases}$

$I=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{8}-J$

Đặt $x=1-t$ $\Rightarrow J=-\int_1^0 f\left(1-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=K$. Suy ra $5J-7K=3\int_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=-2$

Ta có: $\begin{cases} J=K \\ 5J-7K=-2 \end{cases}\Leftrightarrow J=K=1$

Vậy $I=\dfrac{5}{8}-1=\dfrac{-3}{8}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}\Rightarrow T=8a-3b=0$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\dfrac{2}{3x})=5x$ với $\forall x\in\left[\dfrac{2}{3};1\right]$.

Tính tích phân $\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x.f'(x)dx$

A. $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln x.f'(x)dx=\left(\ln x.f(x)\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Từ $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x,\ \forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$ (1)

Thay $x=1$ và $x=\frac{2}{3}$ vào (1) ta được hệ $\begin{cases}2f(1)+3f(\frac{2}{3})=5\\ 2f(\frac{2}{3})+3f(1)=\frac{10}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=0\\ f(\frac{2}{3})=\frac{5}{3}\end{cases}$.

Xét $I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $x=\frac{2}{3t}\Rightarrow dx=-\frac{2}{3t^2}dt$, đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Khi đó $I=-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{\frac{2}{3}}\frac{f(\frac{2}{3t}).\frac{1}{t^2}}{\frac{2}{3t}}dt=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3t})}{t}dt=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3x})}{x}.dx$.

Ta có $2I+3I=2\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+3\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(\frac{2}{3x})}{x}.dx$

$\Leftrightarrow 5I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{2f(x)+3f(\frac{2}{3x})}{x}.dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{5x}{x}dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}5dx=\frac{5}{3}\Leftrightarrow I=\frac{1}{3}$.

Vậy $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\ln x.f'(x)dx=\left(\ln x.f(x)\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}-\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\ln 1.f(1)-\ln\frac{2}{3}f(\frac{2}{3})-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

Câu 37: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=55$. **B.** $I=\frac{1}{11}$. **C.** $I=11$. **D.** $I=\frac{1}{55}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó ta thay $x=-x$ ta được $3f(x)+2f(-x)=x^{10},\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3f(-x)+2f(x)=x^{10} \\ 3f(x)+2f(-x)=x^{10} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta tìm được $f(x)=\frac{1}{5}x^{10}$. Khi đó $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^{10}}{5}\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{11}}{55}\right|_0^1=\frac{1}{55}$.

Câu 38: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(-1;+\infty)$. Biết đẳng thức $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thỏa mãn $\forall x\in(-1;+\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

A. $3-\sqrt{3}$.

B. $2-\sqrt{3}$.

C. $-\sqrt{3}$.

D. Chưa đủ dữ kiện tính $f(0)$.

Lời giải

Chọn B

$\forall x\in(-1;+\infty)$, ta nhân cả hai vế đẳng thức trên cho $\frac{1}{(x+1)^2}$ thì ta được:

$$2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}} \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x \Rightarrow \left.\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)\right|_0^1=\left.\left(\sqrt{x^2+3}\right)\right|_0^1$$

$\Rightarrow f(0)=2-\sqrt{3}$.

Câu 39: **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$, với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. $-\frac{4}{75}$.

B. $-\frac{4}{25}$.

C. $-\frac{16}{75}$.

D. $-\frac{16}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $1-x=a\Rightarrow x=1-a$. Khi đó ta có hệ.

$$\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x} \\ 3f(x)+2f(1-x)=(1-x)\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left[3(1-x)\sqrt{x}-2x\sqrt{1-x}\right].$$

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx; x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=1$. Khi đó tích phân cần tính:

$$I=\int_0^1 2t.f'(t)2dt=4\int_0^1 t.f'(t)dt=4\int_0^1 td(f(t))=4\left(\left.tf(t)\right|_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right)$$

$$=4\left(f(1)-\int_0^1 f(\mathrm{x})dx\right)=4\left(0-\int_0^1\frac{1}{5}\left[3(1-x)\sqrt{x}-2x\sqrt{1-x}\right]dx\right)$$

$$=4.\left(\frac{-4}{75}\right)=\frac{-16}{75}.$$

Câu 40: **(Sở Quảng NamT)** Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right], \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right] \Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x.f(x)+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left[\left(x^2-1\right).f(x)+x^2\right]' \Rightarrow f^2(x)=\left(x^2-1\right)f(x)+x^2+C$.

Với $x=1$ thì $f^2(1)=1+C \Leftrightarrow 1=1+C \Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f^2(x)=\left(x^2-1\right)f(x)+x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-\left(x^2-1\right)f(x)-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1(l) \\ f(x)=x^2 \end{array}\right.$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

Câu 41: **(SGD-Nam-Định-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30°$, $45°$, $60°$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{25}{3}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$.

Lời giải

Chọn A

Vì các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoàng độ $x=-1$, $x=0$, $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30°$, $45°$, $60°$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến lần lượt là: $f'(-1)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f'(0)=\tan 45°=1$, $f'(1)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^0 f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^3.f''(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=f'(x) \Rightarrow \mathrm{d}t=f''(x)\mathrm{d}x$. Đổi cận $\left\{\begin{array}{ll} x=-1 & \Rightarrow t=f'(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=0 & \Rightarrow t=f'(0)=1 \\ x=1 & \Rightarrow t=f'(1)=\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 t\mathrm{d}t+4\int\limits_1^{\sqrt{3}} t^3\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1+\left.t^4\right|_1^{\sqrt{3}}=\frac{25}{3}$.

Câu 42: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0)=0$; $f(0)=1$ và $f''(x).f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$.Tính $T=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

A. $T=\frac{3}{4}$. **B.** $T=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f''(x).f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{\cos^2 x}$

$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x+C$. Vì $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên $C=0$.

Do đó $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(f(x))}{f(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\tan x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos x)}{\cos x}\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\ln f(0)=\ln\frac{1}{2}-\ln 1\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

Câu 43: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,\pi]$. Biết $f(0)=2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x},\forall x\in[0,\pi]$. Tính $I=\int_0^{\pi}f(x).dx$ (làm tròn đến phần trăm).

A. $I\approx 6,55$. **B.** $I\approx 17,30$. **C.** $I\approx 10,31$. **D.** $I\approx 16,91$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x}$. Chia hai vế đẳng thức cho $e^{\cos x}$ ta được

$f'(x).e^{-\cos x}+e^{-\cos x}.\sin x.f(x)=\cos x$ (vế trái có dạng $u'v+uv'$)

$\Leftrightarrow \left(f(x).e^{-\cos x}\right)'=\cos x\Leftrightarrow \int\left(f(x).e^{-\cos x}\right)'\mathrm{d}x=\int\cos x.\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x).e^{-\cos x}=\sin x+C$.

Do $f(0)=2e$ nên $2e.e^{-1}=C\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\frac{\sin x+2}{e^{-\cos x}}=e^{\cos x}(\sin x+2)$.

$I=\int_0^{\pi}f(x).dx=\int_0^{\pi}e^{\cos x}(\sin x+2)dx$.

Sử dụng MTCT (để đơn vị rad). KQ: 10,31

Câu 44: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

C. $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right];\ x>0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\dfrac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=1-\dfrac{1}{x^2}$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.dx=\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).dx\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\dfrac{1}{x}+c_1$.

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$.

Nên $\int f(x).f'(x).dx=\int\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right).dx\Leftrightarrow\int f(x).d\left(f(x)\right)=\int\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right).dx$

$\Rightarrow\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+c_2$. Vì $f(1)=1\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-1+c_2\Leftrightarrow c_2=1$.

Vậy $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$.

Câu 45: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)>0$, $\forall x\in[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $f(2)=\dfrac{22}{15}$ và $\displaystyle\int_1^2\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}dx=\dfrac{7}{375}$. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=\dfrac{22}{15}-1=\dfrac{7}{15}$.

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}+\dfrac{1}{125}x^2+\dfrac{1}{125}x^2\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}.\dfrac{1}{125}x^2.\dfrac{1}{125}x^2}=\dfrac{3}{25}f'(x)\ \ \forall x\in[1;2]$.

Do đó

$\displaystyle\int_1^2\left(\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}+\dfrac{2}{125}x^2\right)dx\geq\dfrac{3}{25}\int_1^2 f'(x)dx\Leftrightarrow\int_1^2\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}dx\geq\dfrac{3}{25}\int_1^2 f'(x)dx-\dfrac{2}{125}\int_1^2 x^2dx=\dfrac{7}{375}$.

Vì vậy dấu bằng xảy ra, tức

$\dfrac{\left(f'(x)\right)^3}{x^4}=\dfrac{1}{125}x^2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2}{5}$.

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{x^2}{5}dx=\dfrac{x^3}{15}+C\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{15}+C$ với C là một hằng số thực.

Vì $f(1)=1\Rightarrow\dfrac{1}{15}+C=1\Leftrightarrow C=\dfrac{14}{15}\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{14}{15}$.

Vậy $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{14}{15}\right)dx=\dfrac{7}{5}$.

Câu 46: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$. Biết rằng $I=\int\limits_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-3b$

A. $T=6123$. **B.** $T=12279$. **C.** $T=6125$. **D.** $T=12273$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1=f(0)$.

$\Leftrightarrow (f^3(x))'e^{f^3(x)}-e^{f^3(x)}=(4x+1).e^{2x^2+x+1}-e^{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow \left[f^3(x)-x\right]'e^{f^3(x)-x}=\left(2x^2+1\right)'.e^{2x^2+1}\Rightarrow e^{f^3(x)-x}=e^{2x^2+1}+C$

Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0 \Rightarrow f^3(x)-x=2x^2+1$

$\Rightarrow f^3(x)=2x^2+x+1\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2x^2+x+1}$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}}(4x+1)f(x)\mathrm{d}x=\frac{12285}{4}$.

Câu 47: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{1-\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\left.\frac{x.f(x)}{x+1}\right|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{2}-\int\limits_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Mặt khác:

$$\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\left.\left(x-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)\right|_0^1=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

Khi đó:

$$\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\frac{x.f'(x)}{x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2-2\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)+\frac{3}{2}-2\ln 2=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left\{\left[f'(x)\right]^2-2.\frac{x}{x+1}.f'(x)+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right\}\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-\frac{x}{x+1}\right]^2\mathrm{d}x=0\ (*)$$

Vì $\left[f'(x)-\frac{x}{x+1}\right]^2\geq 0,\forall x\in[0;1]$ nên $\int\limits_0^1\left[f'(x)-\frac{x}{x+1}\right]^2\mathrm{d}x\geq 0,\forall x\in[0;1]$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'(x)-\frac{x}{x+1}=0, \forall x\in[0;1] \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x}{x+1}, \forall x\in[0;1]$.

Khi đó: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= -\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\ln 2 = \frac{1-2\ln 2}{2}$

Câu 48: **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1 (2f(x)+3x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a=f(x)$, ta có:

$M=\int_0^1 (2f(x)+3x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2a+3x)a\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (4a+x)\sqrt{xa}\,\mathrm{d}x$

$= \int_0^1\left(2a^2-4a\sqrt{xa}+3xa-x\sqrt{xa}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{8}\left(2\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^4-\frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x \ge \int_0^1\left(-\frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}$.

Dấu "=" xảy ra khi $2\sqrt{a}=\sqrt{x} \Leftrightarrow 4a=x \Leftrightarrow a=\frac{x}{4} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng $-\frac{1}{24}$.

Lời bình

Trong bài giải trên có sử dụng biến đổi:

$2a^2-4a\sqrt{xa}+3xa-x\sqrt{xa}=\frac{1}{8}\left(2\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^4-\frac{x^2}{8}\ge -\frac{x^2}{8}$.

Tuy nhiên, nếu như các hệ số của biểu thức $2a^2-4a\sqrt{xa}+3xa-x\sqrt{xa}$ bị thay đổi (thành các hệ số khác) thì ta khó mà đưa về dạng mũ 4 như trên được.

Câu hỏi đặt ra là trong những trường hợp đó thì phải làm thế nào để đưa ra được đánh giá.

Để ý rằng biểu thức $2a^2-4a\sqrt{ax}+3ax-x\sqrt{ax}$ là đẳng cấp bậc hai. Chúng tôi xin đề xuất một hướng giải quyết trong trường hợp biểu thức cần đánh giá là đẳng cấp. Chẳng hạn trong bài toán trên, ta cần đánh giá biểu thức $g(a,x)=2a^2-4a\sqrt{ax}+3ax-x\sqrt{ax}$, với $x\in[0;1]$ và $a=f(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;1]$. Ta sẽ thực hiện như sau:

+) Với $x\ne 0$ thì biểu diễn được $g(a,x)=x^2\left(\frac{2a^2}{x^2}-\frac{4a\sqrt{a}}{x\sqrt{x}}+\frac{3a}{x}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{a}{x}}\ge 0$. Khi đó $g(a,x)=x^2\left(2t^4-4t^3+3t^2-t\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(t)=2t^4-4t^3+3t^2-t$ trên $[0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{[0;+\infty)} h(t)=-\frac{1}{8}$

.

Do đó ta có $g(a,x)\ge -\frac{x^2}{8},\ \forall x\in(0;1]$.

+) Kiểm tra được đánh giá trên cũng đúng khi $x=0$.

Như vậy $g(a,x)\ge -\frac{x^2}{8}$, $\forall x\in[0;1]$. Từ đó lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ thì bài toán được giải quyết.

Chú ý: Nếu $g(a,x)$ là đẳng cấp bậc *n* thì ta đưa x^n ra ngoài dấu ngoặc.

Câu 49: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $x.f'(x)=xf^2(x)-3f(x)+\frac{1}{x}$, $\forall x\in[1;\mathrm{e}]$. Giá trị của $f(\mathrm{e})$ bằng

A. $\frac{3}{2\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{4}{3\mathrm{e}}$. **C.** $\frac{3}{4\mathrm{e}}$. **D.** $\frac{2}{3\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, với $\forall x\in[1;\mathrm{e}]$ ta có

$$xf'(x)=xf^2(x)-3f(x)+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2f^2(x)-3xf(x)+1=x^2f'(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2f^2(x)-2xf(x)+1=x^2f'(x)+xf(x)$$

$$\Leftrightarrow (xf(x)-1)^2=x(xf'(x)+f(x))=x(xf(x)-1)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{(xf(x)-1)'}{(xf(x)-1)^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow \int\frac{(xf(x)-1)'}{(xf(x)-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{1}{xf(x)-1}=\ln|x|+C$$

$$\Leftrightarrow xf(x)-1=-\frac{1}{\ln|x|+C}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x(\ln|x|+C)}.$$

Thay $x=1$ vào ta có $f(1)=1-\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x(\ln|x|+2)}\Rightarrow f(\mathrm{e})=\frac{2}{3\mathrm{e}}$.

Câu 50: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện $[f(x)]^2+3x^2+2x-1\le 4x.f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=12$. Giá trị $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$$f^2(x)+3x^2+2x-1\le 4x.f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)-(x+1)][f(x)-(3x-1)]\le 0\quad (1).$$

$*$ Nếu $x\ge 1$ thì $(1)\Leftrightarrow x+1\le f(x)\le 3x-1$

$$\Rightarrow \int_1^3(x+1)\mathrm{d}x\le\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\le\int_1^3(3x-1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 6\le\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\le 10\quad (2).$$

$*$ Nếu $x\le 1$ thì $(1)\Leftrightarrow 3x-1\le f(x)\le x+1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1(3x-1)\mathrm{d}x\le\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\le\int_{-1}^1(x+1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -2\le\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\le 2\quad (3).$$

Từ (2) và $(3)\Rightarrow 4\le\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x\le 12$.

Do $\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=12\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ x+1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 5$.