CHỦ ĐỀ: ĐƠN ĐIỆU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Kiến thức bổ sung 1: Biện luận nghiệm bất phương trình chứa tham số .

❶ $m \ge f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

❷ $m \le f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❸ $m \ge f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❹ $m \le f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \le \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Kiến thức bổ sung 2: So sánh 2 nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với số thực α.

❶ $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$.

❷ $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 2\alpha \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$.

❸ $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 2\alpha \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$.

Bài toán 1: Tìm tham số *m* để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức Δ.

+ Để hàm số đồng biến trên R $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

+ Để hàm số nghịch biến trên R $\Leftrightarrow \begin{cases} a > a \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

Bài toán 2: Tìm tham số *m* để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 chứa tham số m.

+ Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' = f(x,m) \ge 0\ \forall x \in (a;b)$ (hoặc hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' = f(x,m) \le 0\ \forall x \in (a;b)$).

Cách 1: ($f(x,m)$ bậc nhất đối với m, hoặc $f(x,m)$ không có nghiệm "chẵn")

+ Biến đổi bpt $f(x,m) \ge 0\ \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow g(x) \ge h(m)\ \forall x \in (a;b)$ hoặc $g(x) \ge h(m)\ \forall x \in (a;b)$

.

+ Tìm GTLN, GTNN của $y = g(x)$ trên $[a;b]$.

(Sử dụng kiến thức bổ sung 1 để kết luận tập nghiệm bất phương trình).

Cách 2: (tham số m trong $f(x,m)$ có chứa bậc 1 và bậc 2, hoặc $f(x,m)$ có nghiệm "chẵn")

+ Tìm các nghiệm của tam thức bậc hai, lập bảng xét dấu.

+ Gọi S là tập hợp có dấu "thuận lợi". Yêu cầu bài toán xảy ra khi $(a;b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: *Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.*

Bài toán 3: Tìm tham số m để hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 4ax^3 + 2bx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$.

N.C.Đ

+ Lập bảng xét dấu y', giả sử có S là tập "thuận lợi".

+ Yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi $(a;b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: *Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.*

Bài toán 4: Tìm tham số m để hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad - bc \ne 0)$ đơn điệu trên $(m;n)$.

Phương pháp :

+ Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

+ Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

Bài toán 5: Tìm tham số m để hàm số $y = f\left[u(x)\right]$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

Đặt $t = u(x)$ hàm số trở thành $y = f(t)$. Trường hợp này cần chú ý 3 vấn đề sau:

1. Tìm miền xác định của $t = u(x)$ cho chính xác.

2. Nếu $t=u(x)$ đồng biến trên thì $f\left[u(x)\right]$ và $f(t)$ cùng tính chất đồng biến hoặc nghịch biến.

3. Nếu $t=u(x)$ nghịch biến trên thì $f\left[u(x)\right]$ và $f(t)$ ngược tính chất, nghĩa là $f\left[u(x)\right]$ đồng biến thì $f(t)$ nghịch biến và ngược lại.

BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left(m^2-2m\right)x^3+mx^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **D.** $1<m\leq 3$.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m\in[-1;1]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\frac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Với $m=-2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m=9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m=3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Với $m=6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=(m+1)\sin x+(m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\leq -1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m<-1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+x^2-mx+2m-1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m\leq -\frac{1}{6}$. **B.** $m\geq -\frac{1}{6}$. **C.** $m\leq 8$. **D.** $m\geq 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $m<-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 1$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\le m<1$. **D.** $m\le 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}-x^2+2x+1-m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\varnothing$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(m^2+2m)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 1998. **D.** 998.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;3]$.

N.C.Đ

A. $m>3$. **B.** $0<m<2$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $m\le 0$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[48;+\infty)$. **C.** $[36;+\infty)$. **D.** $[12;+\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ là $\left(-\infty;\dfrac{b}{a}\right]$ với $\dfrac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T=2a+b$ bằng

A. 19. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(x+m)^3-8(x+m)^2+16$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^3-3mx+1$ đơn điệu trên khoảng $(1;2)$?

A. 37. **B.** 16. **C.** 35. **D.** 21.

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x-6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. $m \ge 2$. **B.** $m \le \frac{11}{9}$. **C.** $m \ge \frac{11}{9}$. **D.** $m \le 2$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

A. $m \le 1$. **B.** $m \le 5$. **C.** $m < 5$. **D.** $m < 1$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 2021.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 22. Hàm số $y = \frac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi?

N.C.Đ

A. $m \le 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m < 2$.

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m > 1$. **B.** $m > \frac{1}{2}$. **C.** $m \ge \frac{1}{2}$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 26. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\frac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\frac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{8}{5};+\infty\right)$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\frac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 29. Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

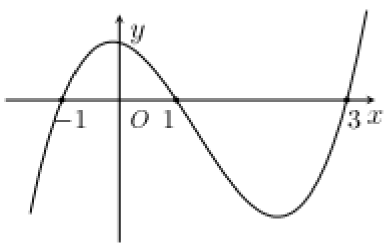
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 34. Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

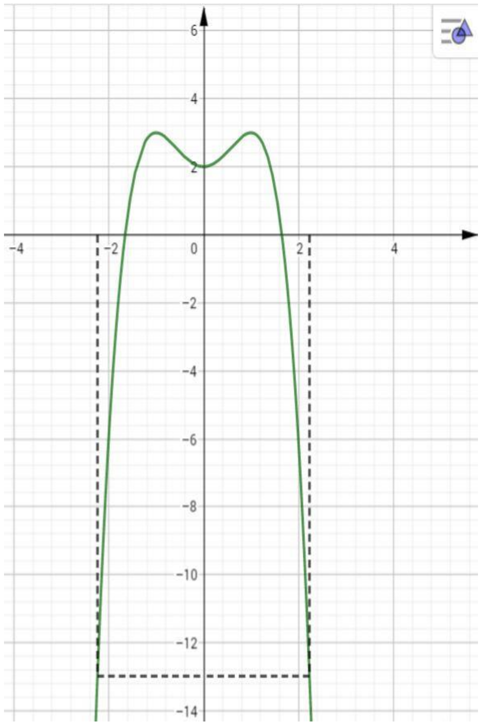
Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}+\frac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\le 2020$.

A. 4041 . **B.** 2027 . **C.** 2026 . **D.** 2015 .

Câu 37. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là

A. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **C.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f(0)$.

Câu 38. Có bbao nhiêu số thực m để hàm số $y=\left(m^3-3m\right)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3 . **B.** 1 . **C.** Vô số. **D.** 2 .

Câu 39. Có bao nhiêu gia trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019 . **B.** 2020 . **C.** 4038 . **D.** 1009.

GIÁO VIÊN TRƯỜNG THPT ĐẦM DƠI

NGUYỄN CÔNG ĐỊNH

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f\ \ x\ =x^3-3mx^2+3\ \ 2m-1\ \ x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'\ \ x\ -6x>0$ với mọi $x\geq 2$?

A. $m>\dfrac{1}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 43. Cho hàm số $f\ \ x\ =x^3-\ 2m-1\ x^2+\ 2-m\ x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'\ \ x\ >0$ với mọi $x\geq -1$?

A. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$

C. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\dfrac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(2m-2019)x-(2018-m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\leq 1$. **B.** $m\leq\dfrac{4037}{3}$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m\geq -1$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-6x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)\left(x^2+mx+5\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+x-2\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^3\left(x^2-4x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$?

A. 2020. **B.** 2014. **C.** 2019. **D.** 2016.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0	-4 ↗	0	4 ↘	0 ↗	$+\infty$

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 50. Giá trị $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^4(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

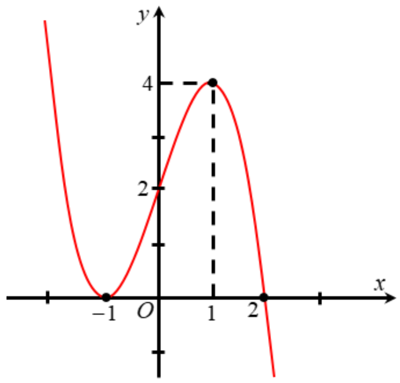
Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{9};+\infty\right)$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ để hàm số $f(x)=x+a.\sin x+b.\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

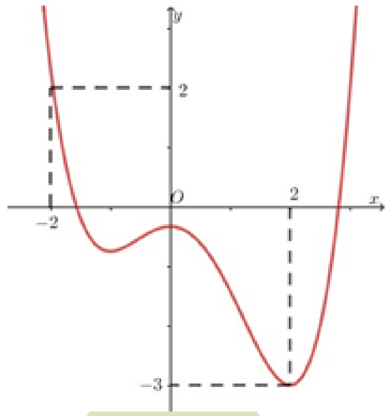
A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x+1)+\dfrac{20}{m}\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 55. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m\in\left(-20;20\right)$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x^3}{4}\right)-\dfrac{m\left(x^2+4\right)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left(m^2-2m\right)x^3+mx^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **D.** $1<m\leq 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\left(m^2-2m\right)x^2+2mx+3$.

TH1: $m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$, $y'=3\Rightarrow y'>0,\forall x$. Do đó, $m=0$ thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=2$, $y'=4x+3$. Do đó, $m=2$ không thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH2: $m^2-2m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 2 \end{cases}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-2m>0 \\ \Delta'=m^2-3\left(m^2-2m\right)\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-2m>0 \\ -2m^2+6m\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ có tập xác định là $D=\left(-\infty;\frac{m}{2}\right)\cup\left(\frac{m}{2};+\infty\right)$

Ta có: $y'=\frac{m^2-4}{(-2x+m)^2},\forall x\neq\frac{m}{2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-4<0 \\ \frac{m}{2}\leq\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<2 \\ m\leq 1 \end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq 1$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m\in[-1;1]$.

B. $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

D. $m\in(-1;1)$.

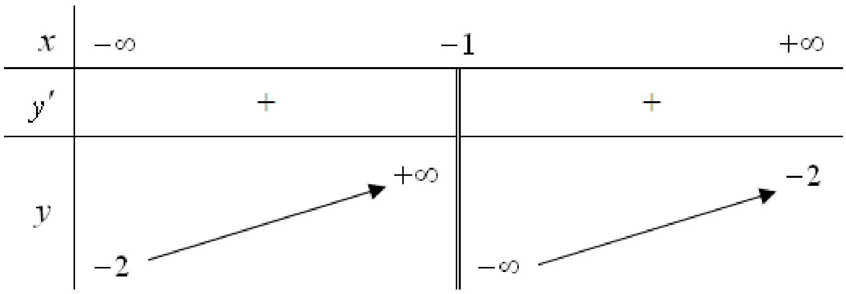
Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6mx+3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0\ \ \forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\(-3m)^2-9\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 9m^2-9\leq 0\Leftrightarrow m\in[-1;1]$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Với $m=-2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m=9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m=3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Với $m=6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{m+4}{(x+1)^2}>0\Leftrightarrow m>-4$. Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx-4}{x+1}=m$.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-2$. Do đó: $m=-2$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=(m+1)\text{sinx}+(m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\leq -1$.

B. $m=-1$.

C. $m<-1$.

D. Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn C

Khi $m=-1$: $f(x)=0$ nên không thỏa YCBT. Suy ra loại A, C.

Khi $m<-1$: $f'(x)=(m+1)(\text{cosx}+1)$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)<0\quad\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+x^2-mx+2m-1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m \le -\frac{1}{6}$. **B.** $m \ge -\frac{1}{6}$. **C.** $m \le 8$. **D.** $m \ge 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 + 2x - m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in [-1;1]$.

$\Leftrightarrow 6x^2 + 2x - m \le 0, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 6x^2 + 2x \le m, \forall x \in [-1;1]$.

Xét hàm $g(x) = 6x^2 + 2x$ trên đoạn $[-1;1]$.

$g'(x) = 12x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{1}{6}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$		$\nearrow$	8

Để $6x^2 + 2x \le m, \forall x \in [-1;1]$ thì đồ thị của hàm $g(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = m$

.

N.C.Đ

Từ bảng biến thiên ta có $m \ge 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $m < -\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2} < m \le 1$. **C.** $-\frac{1}{2} \le m < 1$. **D.** $m \le 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \ne m$.

Ta có $y' = \frac{-2m-1}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì

$$\begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-1 < 0 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 1.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

$D = \mathbb{R}$

$y' = mx^2 - 2x + 2.$

TH1: $m = 0$

Ta có: $y' = -2x + 2$.Hàm số nghịch biến khi $y' \le 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m \ne 0$

Hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' = mx^2 - 2x + 2 \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 1 - 2m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$

$y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	$f(m+2)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$ ta có $m \le 2 < 3 \le m + 2$ tức là : $1 \le m \le 2$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn. Chọn A.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 1998. **D.** 998.

Lời giải

Chọn B

$y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Hàm số có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)=0$.

$\Leftrightarrow x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $(2;+\infty)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$.

Mà m là số nguyên thuộc khoảng $(-1000;1000)\Rightarrow m\in\{-999\,;\,-998\,;\,...\,;1\}$.

Có tất cả 1001 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;3]$.

A. $m>3$. **B.** $0<m<2$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(0;3]\Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in(0;3]\Leftrightarrow \dfrac{-m+2}{(x-m)^2}>0,\ \forall x\in(0;3]$

Hay $\begin{cases}-m+2>0\\m\notin(0;3]\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<2\\\left[\begin{array}{l}m>3\\m\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[48;+\infty)$. **C.** $[36;+\infty)$. **D.** $[12;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-12x+m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y'=3x^2-12x+m\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Suy ra $m \ge -3x^2 + 12x,\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét $g(x) = -3x^2 + 12x$ trên $(0;+\infty)$.

$g'(x) = -6x + 12$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$	
$g(x)$		0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Do đó: $\max\limits_{(0;+\infty)} g(x) = 12 \Rightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} g(x) = 12$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ là $\left(-\infty; \dfrac{b}{a}\right]$ với $\dfrac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T = 2a + b$ bằng

A. 19. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$ và $y' = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m \le \frac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}, \forall x \in (0;+\infty).$$

Xét $g(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{12x^2 + 6x - 6}{(4x+1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x) \geq \frac{5}{4}, \forall x \in (0;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$ hay $m \in \left(-\infty;\frac{5}{4}\right]$.

Suy ra: $a=4$, $b=5$ nên $T=2a+b=13$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(x+m)^3-8(x+m)^2+16$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2+6mx+3m^2-16x-16m=3x^2+(6m-16)x+3m^2-16m.$

Có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m \\ x=\frac{16}{3}-m \end{array}\right.$ nên suy ra đồ thị hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(-m;\frac{16}{3}-m\right)$.

mà theo yêu cầu đề bài hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ nên

$\Leftrightarrow (-1;2) \subset \left(-m;\frac{16}{3}-m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{3}-m \geq 2 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{10}{3} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y=x^3-3mx+1$ đơn điệu trên khoảng $(1;2)$?

A. 37. **B.** 16. **C.** 35. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-3m$.

+ Nếu $3m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0 (1)$, khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1;2)$.Suy ra: $m \leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $m>0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{m})$ và $(\sqrt{m};+\infty)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{m};\sqrt{m})$.

* TH1: Hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1;2)$ khi $\sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0<m \leq 1 (2)$.

* TH2 :Hàm số đơn điệu giảm trên khoảng $(1;2)$ khi $2 \leq \sqrt{m} \Leftrightarrow m \geq 4 (3)$.

Kết hợp điều kiện $(1),(2),(3)$ suy ra: $m \leq 1$ hoặc $m \geq 4$.

Đối chiếu điều kiện: $m \in (-20;20)$ suy ra: $\left[\begin{array}{l} -20<m \leq 1 \\ 4 \leq m<20 \end{array}\right.$

Do m là số nguyên nên $m \in \{-19;-18;...;-1;0;1;4;...;19\}$ (37 giá trị nguyên)

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x-6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y'\geq 0,\ \ \forall x\in(0;+\infty)$.

Tức là: $y'=3x^2-6mx+3\geq 0$; $\forall x\in(0;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x}\geq m\ ;\ \forall x\in(0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m\leq \underset{(0;+\infty)}{Min}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$$

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1(N)\vee x=-1(L)$.

Lập BBT ta thấy $\underset{(0;+\infty)}{Min}\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)=f(1)=1$.

Vậy $m\leq 1$ hay $m\in(-\infty;1]$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. $m\geq 2$. **B.** $m\leq \dfrac{11}{9}$. **C.** $m\geq \dfrac{11}{9}$. **D.** $m\leq 2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình $y'=3x^2-4mx-(m+1)=0$.

$$\Delta'=(2m)^2+3(m+1)=4m^2+3m+3=\left(2m+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}>0,\forall m\in\mathbb{R}.$$

Vậy $y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{2m-\sqrt{4m^2+3m+3}}{3}$,

$$x_2=\frac{2m+\sqrt{4m^2+3m+3}}{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		0		2		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0			$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$			$\searrow$			$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ $(I):\begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-\sqrt{4m^2+3m+3}}{3} \le 0 \ (1) \\ \dfrac{2m+\sqrt{4m^2+3m+3}}{3} \ge 2 \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2+3m+3} \ge 2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ 4m^2+3m+3 \ge 4m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in R$.

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2+3m+3} \ge 6-2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-2m<0 \\ \begin{cases} 6-2m \ge 0 \\ 4m^2+3m+3 \ge 36-24m+4m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ \begin{cases} m \le 3 \\ m \ge \dfrac{11}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge \dfrac{11}{9}$

.

Vậy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ m \ge \dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{11}{9}$.

Cách 2:

$y' = 3x^2 - 4mx - (m+1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (0;2)$.

$y' \le 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 - 4mx - m - 1 \le 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{3x^2-1}{4x+1}, \forall x \in (0;2)$.

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{[0;2]} f(x)$, trong đó $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{4x+1}, x \in [0;2]$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{12x^2+6x+4}{(4x+1)^2} = \dfrac{12\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{13}{4}}{(4x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;2]$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $[0;2]$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{3.2^2-1}{4.2+1} = \dfrac{11}{9}$

Vậy $m \ge \dfrac{11}{9}$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

A. $m \le 1$. **B.** $m \le 5$. **C.** $m < 5$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0$ với $\forall x \in (2;5)$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 4(m-1)x \ge 0$ với $\forall x \in (2;5)$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2 - (m-1)\right) \ge 0$ với $\forall x \in (2;5)$

$\Leftrightarrow x^2 - (m-1) \ge 0$ với $\forall x \in (2;5)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 \ge m$ với $\forall x \in (2;5)$

Xét $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 > 0$ với $\forall x \in [2;5]$

$\Rightarrow \min\limits_{[2;5]} g(x) = g(2) = 5 \ge m$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = f\left(x^2 + 3x - m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên

N.C.Đ

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y' = (2x+3)\, f'\left(x^2 + 3x - m\right)$.

Vì $2x + 3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, để hàm số $y = f\left(x^2 + 3x - m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

thì $f'\left(x^2 + 3x - m\right) \ge 0, \forall x \in (0;2)$ (*).

Đặt $t = x^2 + 3x - m$. Vì $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t) \ge 0, \forall t \in (-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} 10 - m \le -3 \\ 1 \le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 13 \\ m \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 13 \le m \le 20 \\ -10 \le m \le -1 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow m \in \{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{\left[2(m+1)x-2m\right](x-1)-\left[(m+1)x^2-2mx+6m\right]}{(x-1)^2}=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}\ge 0,\ \forall x\ge 4$.

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m+1)x-4m\ge 0,\ \forall x\ge 4 \Leftrightarrow (x^2-2x-4)m+x^2-2x\ge 0,\ \forall x\ge 4$.

$\Leftrightarrow m\ge \dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4},\ \forall x\ge 4$ (Do $x^2-2x+4>0$ với mọi $x\ge 4$) $(*)$

Đặt $g(x)=\dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4}$ có $g'(x)=\dfrac{8x-8}{(x^2-2x-4)^2}>0,\ \forall x\ge 4$.

Bảng biến thiên:

x	4		$+\infty$
y'		$+$	
y	-2	$\nearrow$	-1

Từ bảng biến thiên suy ra $(*)\Leftrightarrow m\ge -1$. N.C.Đ

Mà $m\in\mathbb{Z};\ m\in[-2019;2019]\Rightarrow m\in\{-1;0;...;2019\}$

$\Rightarrow$Có 2021 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$y'=1+m\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+2}+mx}{\sqrt{x^2+2}}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}+mx\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\ge 0 & ,x=0\\ m\ge \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x},\forall x>0\\ m\le \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x},\forall x<0\end{cases}\quad (*)$$

Xét $g(x)=\dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}$ có $g'(x)=\dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}}>0,\forall x\ne 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

Do đó, từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$.

Có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $-1;0;1$.

Câu 22. Hàm số $y = \dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m \le 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' \ge 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-mx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow 2 - mx \ge 0, \forall x > 0$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2}{x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 0.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m > 1$. **B.** $m > \dfrac{1}{2}$. **C.** $m \ge \dfrac{1}{2}$. **D.** $m \ge 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x = t$. Ta có $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$. Vì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(t) = \dfrac{2t-1}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{-2m+1}{(t-m)^2} < 0$, $\forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 < 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1 \Leftrightarrow y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$.

$y'=\left(3\sin^2 x+6\sin x-m\right)\cos x$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x-m\ge 0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x\ge m\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\ (1)$.

Đặt $t=\sin x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=3t^2+6t$ trên $(0;1)$ ta có bảng biến thiên sau

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $m\le 0$.

Suy ra có 2019 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=4mx^3+3x^2-2(m+1)x+9$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0$ tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

TH1: $m=0$, $y'=3x^2-2x+9>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, Suy ra $m=0$ thỏa mãn.

TH2: $m>0$, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y'=-\infty$. Suy ra hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH3: $m<0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y'=-\infty$. Suy ra hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $S=\{0\}$, số phần tử của S là 1.

Câu 26. Cho hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=2m-1+(3m+2)\sin x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m-1+(3m+2)\sin x\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Nếu $m=-\dfrac{2}{3}$ thì (*) không thỏa.

Nếu $m>-\dfrac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x\le \dfrac{1-2m}{3m+2},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{3m+2}\ge 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<m\le -\dfrac{1}{5}$.

Nếu $m<-\dfrac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x\ge \dfrac{1-2m}{3m+2},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{3m+2}\le -1 \Leftrightarrow -3\le m<-\dfrac{2}{3}$.

Ta có $X=\{-3;-2;-1\}$.

Vậy $-3-1=-4$.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\dfrac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx-m-1}{(x-m)^2}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;-3) \Leftrightarrow m\notin(-\infty;-3) \Leftrightarrow m\ge -3$

Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $y'\ge 0\ \ \forall x\in(-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow x^2-2mx-m-1\ge 0\ \ \forall x\in(-\infty;-3) \Leftrightarrow x^2-1\ge m(2x+1)$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2x+1}\le m$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$ ta có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2}>0$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

BBT

x	$-\infty$		-3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{8}{5}$

Vậy $m\ge -\dfrac{8}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện $m\ge -3$).

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=\tan x$, khi x trong $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì t tăng trong $(0;1)$.

Do đó hàm số ban đầu đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ có:

$y'=\dfrac{2m-3}{(t-m)^2}$

Hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi $\begin{cases}2m-3>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$

Trong khoảng $(-19;19)$ có 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán!

Câu 29. Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

$y'=\left[-6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\right]\cos x$

Ta có $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right):\cos x<0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\ge 0\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (1)

Đặt $t=\sin x,\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(-1;1)$

Điều kiện (1) trở thành tìm m thỏa mãn

$-6t^2+6t+6(2m-1)\ge 0\quad \forall t\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 2m-1\ge t^2-t\quad \forall t\in(-1;1)$

Xét hàm số nghịch biến trên khoảng $f(t)=t^2-t, t\in(-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Ycbt $\Leftrightarrow 2m-1\ge 2 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{3}{2}$ mà m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ nên có 2017 giá trị thỏa mãn.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3 \Rightarrow y'=-3x^2+6x+m-1$.

Nếu $\Delta_{y'}\le 0$ thì hàm số luôn nghịch biến.

Nếu $\Delta_{y'}>0$ thì hàm số đồng biến trên $[x_1;x_2]$ với $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $|x_1-x_2|>1$.

+) $\Delta_{y'}>0 \Leftrightarrow 9+3(m-1)>0 \Leftrightarrow m>-2$ (1)

+) Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m-1}{-3} \end{cases}$

+) $|x_1-x_2|>1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2>1 \Leftrightarrow 4+\dfrac{4(m-1)}{3}>1 \Leftrightarrow m>-\dfrac{5}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m>-\dfrac{5}{4}$ mà m nguyên âm do đó $m=-1$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1 \Rightarrow y'=4m^2x^3-4(4m-1)x$.

+ TH1: Nếu $m=0$ thì $y'=4x$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận $m=0$.

+ TH2: Nếu $m\neq 0$ thì $y'=0 \Leftrightarrow \left[m^2x^2-(4m-1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{4m-1}{m^2}\ (1) \end{array}\right.$.

* Nếu $4m-1\leq 0 \Leftrightarrow m\leq \dfrac{1}{4}$ thì phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$.

Ta có $a=m^2>0, \forall m\neq 0$ khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận các giá trị $m\leq \dfrac{1}{4}$.

Mà ta có $m\in(-10;10)$, $m\in\mathbb{Z}$ khi đó $\begin{cases} -10<m\leq \dfrac{1}{4} \\ m\neq 0,\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

* Nếu $4m-1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$ thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=\pm\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}$		0		$\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y\left(-\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$y\left(\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\dfrac{\sqrt{4m-1}}{m}\leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 2-\sqrt{3} \\ m\geq 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m\in(-10;10)$, $m\in\mathbb{Z}$, ta có: $\left[\begin{array}{l} -10<m\leq 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3}\leq m<10 \end{array}\right. \Rightarrow$ do m nguyên nên có 16 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có 16 giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bổ sung cách 2 như sau:

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow y'=4m^2x^3-4(4m-1)x\geq 0,\forall x>1$ và $y'=0$ có nghiệm hữu hạn trên $(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m^2x^2-(4m-1)\geq 0,\forall x>1$ (*)

+ Với $m=0$: (*) $\Leftrightarrow -(-1)\geq 0,\forall x>1$ luôn đúng nên ta nhận $m=0$.

+ Với $m\neq 0$: (*) $\Leftrightarrow x^2\geq \dfrac{4m-1}{m^2},\forall x>1\Leftrightarrow 1\geq \dfrac{4m-1}{m^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 2-\sqrt{3} \\ m\geq 2+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Tổng hợp các điều kiện và trường hợp ta có: $m\in\{-9,-8,...,0,4,5,...,9\}$. Vậy có 16 giá trị m.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

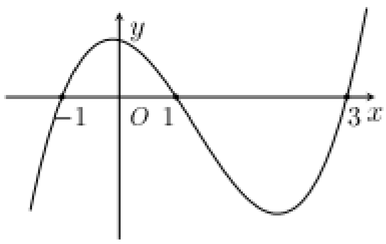
Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ 2+m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)=f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x+m)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m<-1 \\ 1<x+m<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1-m \\ 1-m<x<3-m \end{array}\right..$$

Hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le -1-m \\ \begin{cases} 3-m\ge 2 \\ 1-m\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ 0\le m\le 1 \end{array}\right..$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S=\{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{6-x}$, $(t\ge 0)$ khi đó ta có hàm số $y=f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$.

N.C.Đ

Ta có $f'(t)=\dfrac{-m^2+4m-3}{(t+m)^2}$.

Hàm số $y=\sqrt{6-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;6)$ nên với $-8<x<5$ thì $1<t<\sqrt{14}$.

Hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$ $\Leftrightarrow f'(t)<0, \forall t\in(1;\sqrt{14})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3<0 \\ -m\notin(1;\sqrt{14}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -\sqrt{14} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ -1\le m<1. \\ m\le -\sqrt{14} \end{array}\right.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 14 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\begin{cases} f(0)=c \\ f(1)=a+b+c+\dfrac{1}{6} \\ f(2)=4a+2b+c+\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Theo giả thiết $f(0)=f(1)=f(2)\Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{-1}{6} \\ 4a+2b=\dfrac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Suy ra : $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+c$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi $g'(x)=2xf'(x^2+2)f'\left[f(x^2+2)\right]\le 0,\forall x\in(0;1)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{3}\Rightarrow f'(x)\le 0\Leftrightarrow 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le x\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta thấy $\forall x\in(0;1)$ thì $\begin{cases} 2x>0 \\ f'(x^2+2)>0 \end{cases}$.

Suy ra $\forall x\in(0;1),g'(x)\le 0\Leftrightarrow f'\left[f(x^2+2)\right]\le 0$

Xét $0<x<1\Rightarrow 2<x^2+2<3$, vì $f'(x)>0,\forall x\in(2;3)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó : $f(2)<f(x^2+2)<f(3)$.

Suy ra $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le f(2)<f(3)\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\ge 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ f(3)\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le c\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min c+\max c=1$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{mx^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\le 2020$.

A. 4041 . **B.** 2027 . **C.** 2026 . **D.** 2015 .

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(6;+\infty)$.

$y'=x^3-mx^2+x-m=x^3-m(x^2+1)+x\ge 0,\forall x\in(6;+\infty)$.

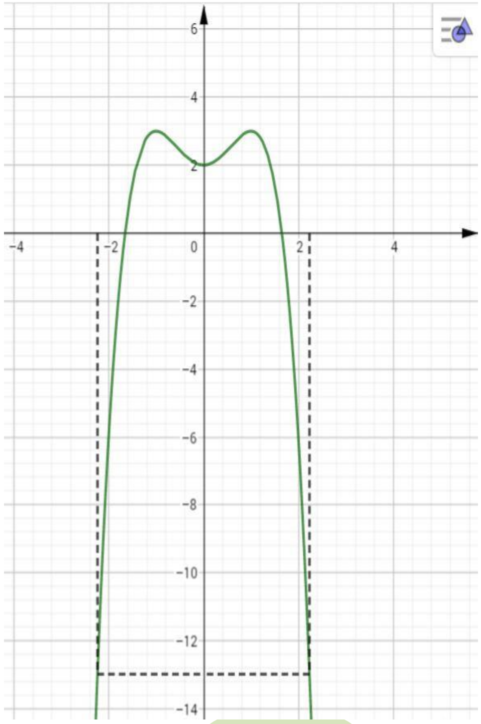
$\Leftrightarrow m\le\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=x,\forall x\in(6;+\infty)$.

Đặt $f(x)=x$ thì $m\le f(x),\forall x\in(6;+\infty)\Leftrightarrow m\le\min f(x),\forall x\in(6;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m \le 6$.

Mà $|m| \le 2020$ nên $m \in \{-2020;-2019;...,6\}$, có 2027 phần tử. Ta chọn B.

Câu 37. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \le 0,\ \forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là

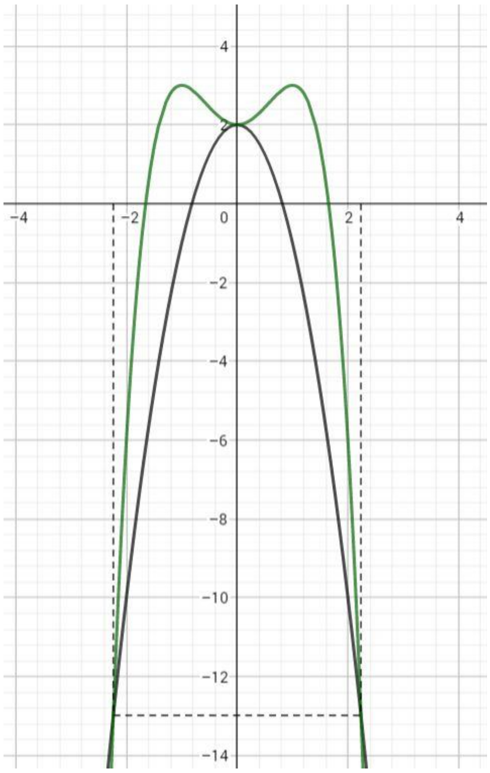
A. $m \le \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$. **C.** $m \ge \frac{2}{3} f\left(-\sqrt{5}\right)$. **D.** $m \ge \frac{2}{3} f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 = h(x)$.



Dựa vào đồ thị rõ ràng $f'(x) \ge h(x)$, $\forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. Suy ra $g'(x) \ge 0$, $\forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Do đó, $g(x)$ đồng biến với mọi $x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. Khi đó,

$g(x) \le 0$, $\forall x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow \underset{x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}{\text{Max}} g(x) \le 0 \Leftrightarrow \underset{x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}{\text{Max}} g(x) = g(5) = 2f\left(\sqrt{5}\right) - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 38. Có bbao nhiêu số thực m để hàm số $y = \left(m^3 - 3m\right)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2 .

Lời giải

Chọn A

• TH1: $m^3 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

+) Với $m = 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = x + 1$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $m = 0$ thỏa mãn.

+) Với $m = \sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y = 3x^3 - \sqrt{3}x^2 + x + 1$ có $y' = 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = \sqrt{3}$ thỏa mãn.

+) Với $m = -\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y = 3x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + 1$ có $y' = 9x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = -\sqrt{3}$ thỏa mãn.

• TH2: $m^3 - 3m \ne 0$. Ta có: $y' = 4\left(m^3 - 3m\right)x^3 + 3m^2x^2 - 2mx + 1$.

Nhận thấy, với $m^3 - 3m \neq 0$ thì y' là hàm số bậc ba nên phương trình $y' = 0$ có ít nhất 1 nghiệm và y' đổi dấu khi qua nghiệm đó.

Suy ra hàm số đã cho không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn là 0; $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Câu 39. Có bao nhiêu gia trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y = \ln\left(x^2 + 2\right) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 2} - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2 + 2} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x}{x^2 + 2} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \dfrac{4 - 2x^2}{\left(x^2 + 2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Do $m \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. Vì $m \in [-2019;2019]$ nên các giá trị m thỏa mãn là $m \in \{-2019;-2018,...,-2;-1\}$. Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^6}$ với $x\in(0;+\infty)$. Ta có

$3x^2+\dfrac{1}{x^6}=x^2+x^2+x^2+\dfrac{1}{x^6}\ge 4\sqrt[4]{x^2.x^2.x^2.\dfrac{1}{x^6}}=4$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$ nên

$\underset{(0;+\infty)}{Min}\,g(x)=4$.

Mặt khác, ta có $-m\le 3x^2+\dfrac{1}{x^6},\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\le \underset{(0;+\infty)}{Min}\,g(x)\Leftrightarrow -m\le 4\Leftrightarrow m\ge -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m là $-1;\,-2;\,-3;\,-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=m^2x^4-mx^2+20x-\left(m^2-m-20\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)=m^2x^4-mx^2+20x-\left(m^2-m-20\right)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*).

Ta có $f'(-1)=0$ nên $f'(x)=(x+1)\left[m^2x^3-m^2x^2+\left(m^2-m\right)x-m^2+m+20\right]=(x+1)g(x)$.

Nếu $x=-1$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua -1, suy ra $f(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện cần để $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là $g(-1)=0$

$g(-1)=0\Leftrightarrow -4m^2+2m+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\\ m=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Với $m=-2\Rightarrow f'(x)=(x+1)\left(4x^3-4x^2+6x+14\right)=(x+1)^2\left(4x^2-8x+14\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m=-2$ thoả mãn.

Với $m=\dfrac{5}{2}\Rightarrow f'(x)=(x+1)\left(\dfrac{25x^3}{4}-\dfrac{25x^2}{4}+\dfrac{15x}{4}+\dfrac{65}{4}\right)$

$=\dfrac{(x+1)^2\left(25x^2-50x+65\right)}{4}\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m=\dfrac{5}{2}$ thoả mãn.

Từ đó $S=\left\{-2;\dfrac{5}{2}\right\}$, suy ra tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f\ \ x\ =x^3-3mx^2+3\ \ 2m-1\ \ x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'\ \ x\ -6x>0$ với mọi $x\ge 2$?

A. $m>\dfrac{1}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1),\forall x\in\mathbb{R}$

Cách 1:

$f'(x)-6x>0,\forall x\ge 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\ge 2$

$\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(2m+1)>0,\forall x\ge 2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta\ge 0\\ (x_1-2)(x_2-2)>0\\ x_1+x_2<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+2<0\\ \begin{cases}m^2+2\ge 0\\ -2m-1>0\\ 2(m+1)<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}.$$

Với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+(2m+1)=0$

Lưu ý:

Đặt $g(x)=x^2-2(m+1)x+(2m+1)$. Ta có $g(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta<0$ thì $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>0,\forall x\ge 2$

Nếu $\Delta\ge 0$ và $g(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $x_1\le x_2<2$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $g(x)>0,\forall x\ge 2$.

Cách 2.

$f'(x)-6x>0,\forall x\ge 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\ge 2$

$\Leftrightarrow x^2-2m(x-1)-2x-1>0,\forall x\ge 2$

$$\Leftrightarrow m<\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)},\forall x\ge 2\ \Leftrightarrow m<\min_{[2;+\infty)}g(x)\ \text{ với } g(x)=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)}$$

$$\text{Vì } g'(x)=\frac{x^2-2x+3}{2(x-1)^2}>0,\forall x\ge 2 \text{ nên } \min_{[2;+\infty)}g(x)=g(2)=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $m<-\dfrac{1}{2}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x)>0$ với mọi $x\ge -1$?

A. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$

C. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\dfrac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m,\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta<0$ thì $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\ge -1$.

Nếu $\Delta \geq 0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $x_1<x_2<-1$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $f'(x)>0, \forall x \geq -1$.

$$f'(x)>0,\forall x\geq -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'\geq 0\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ x_1+x_2<-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4m^2-m-5<0\\ \begin{cases}4m^2-m-5\geq 0\\ 3m+7>0\\ 2m-1<-3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m<\dfrac{5}{4}\\ \begin{cases}m\leq -1 \vee m\geq \dfrac{5}{4}\\ m>-\dfrac{7}{3}\\ m<-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m<\dfrac{5}{4}\\ -\dfrac{7}{3}<m<-1\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left(-\dfrac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Sai lầm của học sinh dùng cách hàm số:

$f'(x)>0,\forall x\geq -1 \Leftrightarrow 3x^2+2x+2-m(4x+1)>0,\forall x\geq -1$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1},\forall x\geq -1$

$\Leftrightarrow m<\min\limits_{[-1;+\infty)} g(x)$ với $g(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1}$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(2m-2019)x-(2018-m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\leq 1$. **B.** $m\leq\dfrac{4037}{3}$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2m-2019+(2018-m)\sin 2x$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=2m-2019+(2018-m)\sin 2x\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (2018-m)\sin 2x\leq 2019-2m,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)\leq 2019-2m \quad (1)$, Với $g(x)=(2018-m)\sin 2x$.

Trường hợp 1: $2018-m=0\Leftrightarrow m=2018$ thì $y'=2017>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $m=2018$ không là giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: $2018-m>0\Leftrightarrow m<2018$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=2018-m$.

$(1)\Leftrightarrow 2018-m\leq 2019-2m\Leftrightarrow m\leq 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $2018-m<0\Leftrightarrow m>2018$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = m - 2018$.

$(1) \Leftrightarrow m - 2018 \le 2019 - 2m \Leftrightarrow m \le \dfrac{4037}{3}$ (loại).

Kết luận: $m \le 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có: $f'(x) = 6x^2 - 2m$; $\Delta' = 12m$

Đồ thị hàm số $y = \left|f(x)\right| = \left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)\,(C)$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

+ Trường hợp 1: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$. Suy ra $f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ 5 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Ta có 10 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (1)

+ Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{2m}{6} + 1 \ge 0 \\ 5 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le \dfrac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{1;2\}$. Ta có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (2).

Từ (1) và (2) suy ra: có tất cả có 12 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right]$

$= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x < -1 \ (*)$, (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \ge 0, \forall x < -1$

$\Leftrightarrow m \ge -x^2 - 4x + 5, \ \forall x < -1$.

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty;-1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \ge 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9;10;11;...;2019\}$.

Vậy có 2011 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x+1).f'(x^2+x-2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left((x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5\right) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \ge 0 \quad (1) \ \forall x \in (1;+\infty)$.

Đặt $t = x^2+x-2$, $x \in (1;+\infty) \Rightarrow t > 0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2 + mt + 5 \ge 0 \ \forall t \in (0;+\infty) \Leftrightarrow t + \dfrac{5}{t} \ge -m \quad (2) \ \forall t \in (0;+\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (0;+\infty)$.

Ta có $h(t)=t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t\in(0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{5}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

Suy ra $\underset{t\in(0;+\infty)}{Min}\left(h(t)\right)=2\sqrt{5}$.

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\leq 2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\geq -2\sqrt{5}$.

KL: Số giá trị nguyên âm của m là 4 .

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^3(x^2-4x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$?

A. 2020. **B.** 2014. **C.** 2019. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn D

• Ta có: $g(x)=f(1-x)$

$\Rightarrow g'(x)=(1-x)'.f'(1-x)=(-1).(1-x)\left[(1-x)-1\right]^3\left[(1-x)^2-4(1-x)+m\right]$

$\Rightarrow g'(x)=-x^3(x-1)(x^2+2x+m-3)$

• Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x^2+2x+m-3=0\quad(1)\end{array}\right.$ N.C.Đ

Phương trình (1) có $\Delta'=4-m$

Trường hợp 1: Nếu $4-m<0\Leftrightarrow m>4$ thì phương trình (1) vô nghiệm; $x^2+2x+m-3>0,\ \forall x$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên $m>4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 2: Nếu $m=4$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x=-1$.

Khi đó $g'(x)=-x^3(x-1)(x+1)^2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên $m=4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 3: Nếu $m<4$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$

Mà $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2$ nên tồn tại ít nhất 1 nghiệm x_1 thuộc khoảng $(-\infty;0)$

Khi đó $g'(x)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm x_1 nên hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Suy ra $m<4$ không thỏa mãn ycbt.

• Kết hợp 3 trường hợp ta được: $m\geq 4$.

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ nên $m\in\{4;5;6;\ ...\ ;2019\}$

Vậy có 2016 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	-4 ↗	0 ↗	4 ↘	0 ↗	$+\infty$

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(-2;1)$

$\Leftrightarrow 3f'(3x-1)+3x^2-3m\ge 0,\ \forall x\in(-2;1)$

$\Leftrightarrow m\le f'(3x-1)+x^2,\ \forall x\in(-2;1)$ (*)

Đặt $k(x)=f'(3x-1)$, $h(x)=x^2$ và $g(x)=f'(3x-1)+x^2=k(x)+h(x)$

Ta có $\min\limits_{(-2;1)} h(x)=h(0)=0$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(-2;1)} f'(x)=f'(-1)=-4$.

Do đó ta có: $\min\limits_{(-2;1)} f'(3x-1)=f'(-1)=-4$ khi $3x-1=-1\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow \min\limits_{(-2;1)} k(x)=k(0)=-4$

Do đó $\min\limits_{(-2;1)} g(x)=g(0)=k(0)+h(0)=0-4=-4$

Từ (*) ta có $m\le f'(3x-1)+x^2,\ \forall x\in(-2;1)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-2;1)} g(x)\Leftrightarrow m\le -4$

Mà $m\in(-10;10)\Rightarrow m\in\{-9,...,-4\}$

Vậy có tất cả 6 số nguyên thoả mãn.

Câu 50. Giá trị $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^4(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=(3-x)'f'(3-x)=-f'(3-x)$.

Hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)$ hay $f'(3-x)\le 0,\forall x\in(3;+\infty)$.(Dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(3;+\infty)$)

$f'(3-x)=(3-x)(2-x)^4\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow(3-x)(2-x)^4\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow(3-x)^2+m(3-x)+9\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le\dfrac{9+(x-3)^2}{x-3},\forall x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{(3;+\infty)}h(x)$ với $h(x)=\dfrac{9+(x-3)^2}{x-3}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-9}{(x-3)^2}+1=\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(3;+\infty)\\x=6\in(3;+\infty)\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

x	3		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

N.C.Đ

$\Rightarrow\min\limits_{(3;+\infty)}h(x)=h(6)=6$. Ta có $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}^+\\m\le 6\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x^2+4x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x^2+4x+m)$.

Ta có: $y'=(2x+4)f'\left(x^2+4x+m\right)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow y'=(2x+4)f'\left(x^2+4x+m\right)\le 0,\forall x\in(-1;1)$

(chú ý rằng $2x+4>0,\forall x\in(-1;1)$)

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+4x+m\right)\le 0, \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow -2\le x^2+4x+m\le 8, \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge g(x)=-x^2-4x-2 \\ m\le h(x)=-x^2-4x+8 \end{cases}, \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \max\limits_{[-1;1]} g(x)=g(-1)=1 \\ m\le \min\limits_{[-1;1]} h(x)=h(1)=3 \end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

(do hàm số $y=-x^2-4x+c$ có $y'=-2x-4<0, \forall x\in(-1;1)$).

Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{9};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}\ge 0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

N.C.Đ

$\Leftrightarrow m\ge \dfrac{3x^2}{1-3x}, \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left(\dfrac{3x^2}{1-3x}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x}, \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{3x(2-3x)}{(1-3x)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \\ x=\dfrac{2}{3}\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$; $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow \max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)} f(x)=-\dfrac{4}{3}$. Vậy $m>-\dfrac{4}{3}$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ để hàm số $f(x)=x+a.\sin x+b.\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số đồng biến trên R thì điều kiện là $f'(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$f'(x)=1+a\cos x-b\sin x$

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 1+a\cos x-b\sin x\ge 0$

$\Rightarrow a\cos x-b\sin x\ge -1$

$TH1: a=0,\ b=0.(TM)$

$TH2:\left[\begin{array}{l} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{array}\right.$

$1+a\cos x-b\sin x\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\geq \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow \exists\alpha:\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha;\ \ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin(\alpha-x)\geq \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

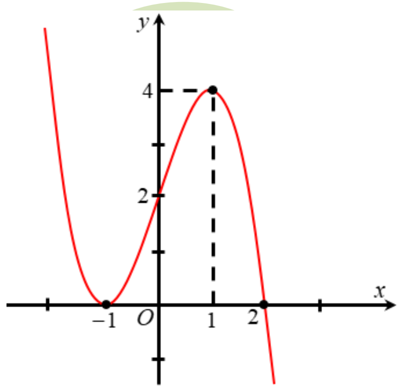
$f'(x)\geq 0,\ \forall x\in R\Rightarrow \sin(\alpha-x)\geq \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \forall x\in R\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq -1$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\leq 1\Rightarrow a^2+b^2\leq 1$

Do a, b nguyên nên $(a;b)\in\{(\pm 1;0),(0;\pm 1)\}$

Vậy theo cả hai trường hợp ta có tất cả 5 bộ giá trị $(a;b)$

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x+1)+\dfrac{20}{m}\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'(x+1)+\dfrac{20}{m}.\dfrac{-4}{4-x^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi $y'\leq 0,\forall x\in(-1;1)$

$\Rightarrow f'(x+1)-\dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{4-x^2}\leq 0,\forall x\in(-1;1)\ \ (*)$.

Đặt $t=x+1$ khi đó $x\in(-1;1)$ suy ra $t\in(0;2)$.

Từ $(*)$ ta có $f'(t)-\dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{(3-t)(t+1)}\leq 0,\forall t\in(0;2)\Rightarrow \dfrac{80}{m}\geq f'(t).(3-t)(t+1),\forall t\in(0;2)\ \ (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ thì ta có $f'(x)=-(x+1)^2(x-2)$.

Suy ra ta có $f'(t)=-(t+1)^2(t-2)$.

Xét hàm số $g(t) = -(t+1)^2(t-2)(3-t)(t+1),\ \ \forall t \in (0;2)$.

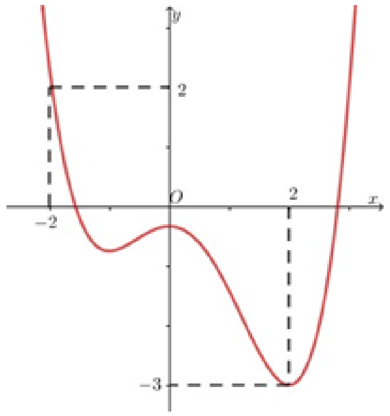
$$g'(t) = -(t+1)^2\left(-5t^2+18t-13\right);\ g'(t)=0 \Leftrightarrow -(t+1)^2\left(-5t^2+18t-13\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{13}{5} \\ t=1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng xét dấu và từ (1) ta có $\dfrac{80}{m} \ge \max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) \Leftrightarrow \dfrac{80}{m} \ge 16 \Leftrightarrow m \le 5$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20;20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^3}{4}\right) - \dfrac{m\left(x^2+4\right)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = \dfrac{3x^2}{4}\cdot f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right) - \dfrac{mx\left(x^2+4\right)}{5}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$ ($g'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm). Điều này tương đương với

$$\frac{3x}{4}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \ge \frac{m\left(x^2+4\right)}{5} \Leftrightarrow m \le \frac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right),\ \ \forall x \in (0;+\infty).$$

Với $x>0$ thì $\dfrac{x^3}{4} > 0 \Rightarrow f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right) \ge -3$. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^3}{4} = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $0 < \dfrac{x}{x^2+4} \le \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4},\ \forall x>0$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Suy ra $\dfrac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right)\geq \dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(-3)=-\dfrac{45}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Như thế, $m\leq -\dfrac{45}{16}$. Kết hợp với m nguyên âm và $m\in(-20;20)$ thì $m\in\{-19;-18;\cdots;-3\}$.

Vậy có 17 số nguyên âm của $m\in(-20;20)$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.