DẠNG 33. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1 KIẾN THỨC CẦN NHỚ

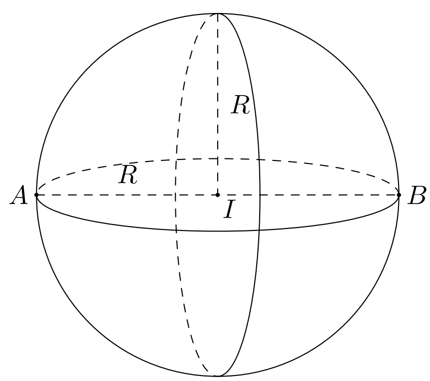
1. Phương trình mặt cầu (S) dạng 1: Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

   Khi đó: $(S):\begin{cases}\text{Tâm } I(a;b;c)\\ \text{Bán kính R}\end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

2. Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:

   $(S): \boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$.Với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu dạng 2.

   Tâm $I(a;b;c)$, bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}>0$.



2 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.
C $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN:Đây là dạng 1 viết phương trình của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

   B1: $(S):\begin{cases}\text{Tâm } I(a;b;c)\\ \text{Bán kính } R\end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

   B2: $R=IM=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0+3)^2}=5$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Theo bài ta có bán kính của mặt cầu (S) là $R = IM = \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0+3)^2} = 5$.
Từ đó ta có phương trình mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+3)^2 = 25$.
Chọn phương án A

3 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua giao điểm của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases}$ với mặt phẳng (Oxy).

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2 = 27$.
B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 27$.
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 3\sqrt{3}$.
D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2 = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.
Mặt phẳng $Oxyz$ là $z = 0$.
Gọi $A = d \cap (Oxyz) \Rightarrow t = -3 \Rightarrow A(-2;5;0)$.
Vì điểm A nằm trên mặt cầu nên bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{3}$.
Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$ là
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 27$.
Chọn phương án B

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(-1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 13$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = \sqrt{13}$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 13$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = \sqrt{13}$.

Lời giải.
Gọi A là hình chiếu của I lên trục $Ox \Rightarrow A(-1;0;0)$.
Vì điểm A nằm trên mặt cầu nên bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{0^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$.
Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$ là
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 13$.
Chọn phương án C

Câu 3. Mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+1 = 0$ có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = \dfrac{4}{9}$.
B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$.
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = \dfrac{2}{3}$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.
Bán kính mặt cầu là $R = \mathrm{d}\,(I,(P)) = \dfrac{|-1+2\cdot 2+2\cdot(-3)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{2}{3}$.
Phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = \dfrac{4}{9}$.
Chọn phương án B

Câu 4. Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;5)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+z^2=3$ có phương trình:

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=12\\(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=48\end{array}\right.$.

Ⓑ $\left[\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=2\sqrt{3}\\(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=4\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Ⓒ $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=12\\(x+2)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=48\end{array}\right.$.

Ⓓ $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=2\sqrt{3}\\(x+2)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=4\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Lời giải.

Từ $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+z^2=3 \Rightarrow$ Tâm $I_1(1;0;0)$ và bán kính $r_1=\sqrt{3}$.

Do $II_1=\sqrt{27}>\sqrt{3}=r_1$ vậy điểm $I(2;1;5)$ nằm ngoài mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+y^2+z^2=3$.

Ta có pt đường thẳng II_1 là $\begin{cases}x=1-t\\y=-t\\z=-5t.\end{cases}$

Gọi $A=II_1\cap(S_1)\Rightarrow A(1-t;-t;-5t)$. Do $A\in(S_1)$ nên.

$t^2+t^2+25t^2=3\Leftrightarrow t^2=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{1}{3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow AI=4\sqrt{3}\\A\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow AI=2\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Bán kính mặt cầu là $R=2\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=12$.

Bán kính mặt cầu là $R=4\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=48$.

Chọn phương án A

Câu 5. Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(S_1)\colon (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=27$ có phương trình:

Ⓐ $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=3$.

Ⓑ $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=\sqrt{3}$.

Ⓒ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$.

Ⓓ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Từ $(S_1)\colon (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=27$ Tâm $I_1(-1;0;2)$ và bán kính $R_1=3\sqrt{3}$.

Do $II_1=2\sqrt{3}<3\sqrt{3}=R_1$ vậy điểm $I(1;2;4)$ nằm trong mặt cầu (S_1).

(S) và (S_1) tiếp xúc $\Leftrightarrow |R-R_1|=II_1\Leftrightarrow \left|R-3\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=5\sqrt{3}\\R=\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$.

Chọn phương án C

Câu 6. Mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình:

Ⓐ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$.

Ⓑ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$.

Ⓒ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$.

Ⓓ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$.

Lời giải.

PT mp $(Oyz)\colon x=0$.

Bán kính mặt cầu là $R = \mathrm{d}\left(I, (Oyz)\right) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2}} = 1$.

Phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Chọn phương án C

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2), B(3;5;0)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$.
B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$.
C. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 12$.
D. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Lời giải.

Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(2;4;1)$, $AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình của mặt cầu là $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Chọn phương án A

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, Viết phương trình mặt cầu (S) biết (S) có bán kính R=3 và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm M(2;1;0)

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$.
B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z + 5 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 11 = 0$.
D. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z + 11 = 0$.

Lời giải.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$,

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm M(2;1;0) nên M là hình chiếu của $I(a;b;c)$ lên mp (Oxy) suy ra $I(2;1;c)$.

Ta có mp(Oxy) có pt là $z = 0$.

Ta có $\mathrm{d}(I, (Oxy)) = \dfrac{|c|}{1} \Leftrightarrow c = \pm 3$.

*Với $c = 3$.

Mặt cầu $I(2;1;3)$, bán kính $R = 3$ có phương trình là

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$.

*Với $c = -3$.

Mặt cầu $I(2;1;-3)$, bán kính $R = 3$ có phương trình là

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$.

Chọn phương án A

Câu 9. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1;2;3), B(4;-6;2)$ và có tâm I thuộc trục Ox là

A. $(S)\colon (x-7)^2 + y^2 + z^2 = 6$.
B. $(S)\colon (x+7)^2 + y^2 + z^2 = 36$.
C. $(S)\colon (x+7)^2 + y^2 + z^2 = 6$.
D. $(S)\colon (x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.

Lời giải.

Vì $I \in Ox$ nên gọi $I(x;0;0)$.

Do (S) đi qua $A;B$ nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + 4 + 9} = \sqrt{(4-x)^2 + 36 + 4} \Leftrightarrow x = 7$.

Suy ra $I(7;0;0) \Rightarrow R = IA = 7$.

Do đó $(S)\colon (x-7)^2 + y^2 + z^2 = 49$.

Chọn phương án D

Câu 10. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(2;0;-2), B(-1;1;2)$ và có tâm I thuộc trục Oy là

A $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2y-8=0$. **B** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2y-8=0$.

C $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2y+8=0$. **D** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2y+8=0$.

Lời giải.

Vì $I\in Oy$ nên gọi $I(0;y;0)$.

Do (S) đi qua $A;B$ nên $IA=IB\Leftrightarrow \sqrt{4+(-y)^2+4}=\sqrt{1+(1-y)^2+4}\Leftrightarrow y=-1$.

Suy ra $I(0;-1;0)\Rightarrow R=IA=3$.

Do đó $(S)\colon x^2+(y+1)^2+z^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2y-8=0$.

Chọn phương án A

Câu 11. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và tâm $I\in(Oxy)$ là

A $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$. **B** $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

C $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=26$. **D** $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Lời giải.

Vì $I\in(Oxy)$ nên gọi $I(x;y;0)$. Ta có: $\begin{cases} IA=IB\\ IA=IC\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2}\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10y=10\\ 2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}\Rightarrow I(-2;1;0)\Rightarrow R=IA=\sqrt{26}$$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$.

Chọn phương án A

Câu 12. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm M(2;1;1)

A $\left[\begin{array}{l}(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1\\ (x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9\end{array}\right.$.

C $\left[\begin{array}{l}(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3\\ (x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=1\end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3\\ (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1\end{array}\right.$.

Lời giải.

Gỉa sử $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S) tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm $M(2;1;1)$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với cả ba mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm $M(2;1;1)$ có các thành phần tọa độ đều dương nên $a=b=c=r$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$.

Vì mặt cầu (S) đi qua điểm M(2;1;1) nên.

$(2-a)^2+(1-a)^2+(1-a)^2=a^2\Leftrightarrow 2a^2-8a+6=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ a=3\Rightarrow (S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9\end{array}\right..$$

Chọn phương án B

Câu 13. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-4)$ và thể tích bằng 36π. Phương trình của (S) là

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$. **B** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$.
C $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$. **D** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=3$.

Lời giải.

Ta có: $V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=36\pi \Leftrightarrow R=3$.

Khi đó

$\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$.

Chọn phương án A

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và diện tích bằng 32π. Phương trình của (S) là

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$. **B** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$.
C $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$. **D** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=8$.

Lời giải.

Ta có: $S=4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2=32\pi \Leftrightarrow R=\sqrt{8}$.

Khi đó

$\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$.

Chọn phương án C

Câu 15. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$. Một mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Biết diện tích lớn nhất của (C) bằng 3π. Phương trình của (S) là

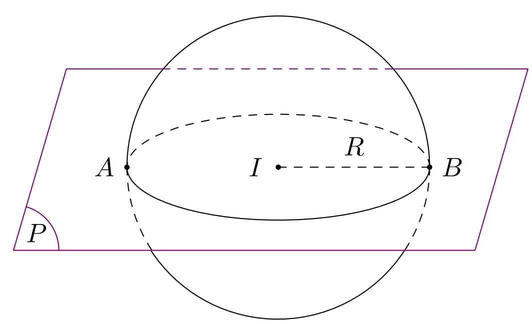
A $x^2+(y-2)^2+z^2=3$. **B** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$.
C $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$.

Lời giải.

Nhận xét: Mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) và diện tích của (C) lớn nhất khi (P) qua tâm I của (S).

Ta có: $S=\pi R^2=3\pi \Leftrightarrow R=\sqrt{3}$.

Khi đó: $\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$.



Chọn phương án B

Câu 16. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$. Một mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Biết chu vi lớn nhất của (C) bằng $2\pi\sqrt{2}$. Phương trình của (S) là

A $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.
C $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải.

Đường tròn (C) đạt chu vi lớn nhất khi (C) đi qua tâm I của mặt cầu (S).

Ta có: $C=2\pi R=2\pi\sqrt{2} \Leftrightarrow R=\sqrt{2}$.

Khi đó

$\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Chọn phương án D

Câu 17. Cho $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

(A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.
(B) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.
(C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
(D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I (1; -2;3) trên trục Ox

$\Rightarrow$ M (1;0;0) và M là trung điểm của AB.

Ta có: $IM = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}, AM = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

ΔIMA vuông tại $M \Rightarrow IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{13+3} = 4 \Rightarrow R = 4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Chọn phương án (A)

Câu 18. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(2;3;-3), B(2;-2;2), C$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

(A) $(x-6)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 29$.
(B) $(x+6)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 29$.
(C) $(x-6)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{29}$.
(D) $(x+6)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{29}$.

Lời giải.

Giả sử $I(a;b;0) \in (Oxy)$ và r là tâm và bán kính của mặt cầu (S) và đi qua $A(2;3;-3), B(2;-2;2), C(3;3;4)$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2$.

Vì mặt cầu ñi qua $A(2;3;-3), B(2;-2;2), C(3;3;4)$ nên.

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (3-b)^2 + (-3)^2 = r^2 \\ (2-a)^2 + (-2-b)^2 + 2^2 = r^2 \\ (3-a)^2 + (3-b)^2 + 4^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b + 10 = 0 \\ 2a - 12 = 0 \\ (3-a)^2 + (3-b)^2 + 4^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 6 \\ r^2 = 29. \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-6)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 29$.

Chọn phương án (A)

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho 4 điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3), D(1;0;4)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

(A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.
(B) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 26$.
(C) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{26}$.
(D) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{26}$.

Lời giải.

Giả sử (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \left(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\right)$ là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Thay lần lượt tọa độ của A, B, C, D vào phương trình ta được.

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 + 4^2 - 2a - 4b + 8c + d = 0 \\ 1^2 + 3^2 + 1^2 - 2a + 6b - 2c + d = 0 \\ 2^2 + 2^2 + 3^2 - 4a - 4b - 6c + d = 0 \\ 1^2 + 0^2 + 4^2 - 2a + 0 - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -21. \end{cases}$$

Do đó: $I(-2;1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{26}$.

Vậy (S): $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Chọn phương án (A)

Câu 20. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và cắt $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I

A $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

B $(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{40}{9}$.

C $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

D $(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ và P$(1;-1;1)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IP}=(0;-1;-2)\Rightarrow \left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]=(0;-4;2)$. Suy ra: $\mathrm{d}(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

ΔIAB vuông tại I $\Leftrightarrow$ ΔIAB vuông cân tại I $\Rightarrow IA=\sqrt{2}\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\sqrt{40}}{3}$.

Vậy (S): $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

Chọn phương án A

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. A	5. C	6. C	7. A	8. A	9. D	10. A
11. A	12. B	13. A	14. C	15. B	16. D	17. A	18. A	19. A	20. A