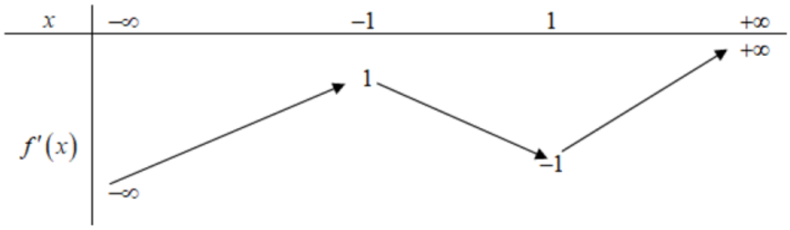
CHỦ ĐỀ: ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ y = f′(x)

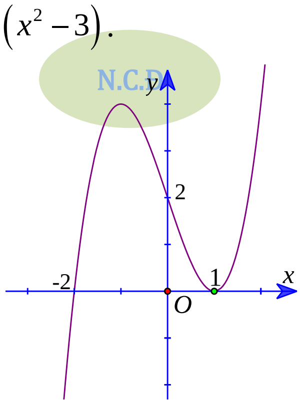
Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$ có bao nhiều điểm cực trị?

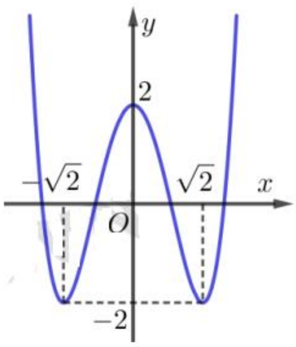
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

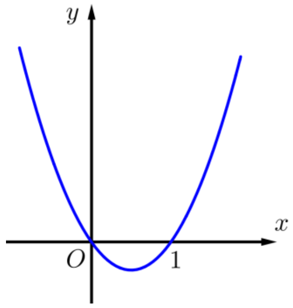
Câu 3. Cho hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}+2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(-x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

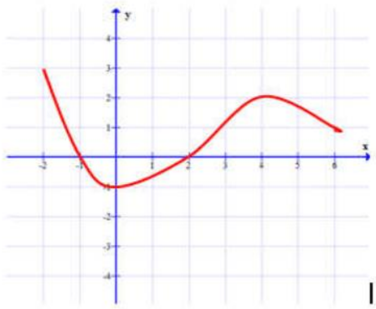
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

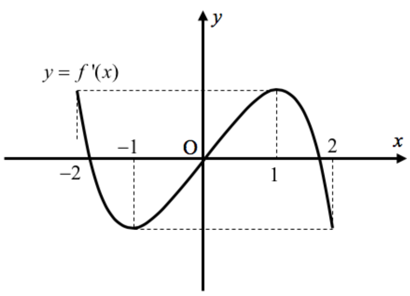


Biết rằng $f(-1) + f(3) = f(2) + f(6)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;6]$ là

A. $f(2)$ và $f(3)$. **B.** $f(2)$ và $f(6)$. **C.** $f(2)$ và $f(-1)$. **D.** $f(-1)$ và $f(6)$.

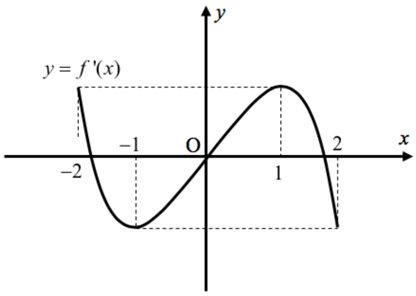
Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

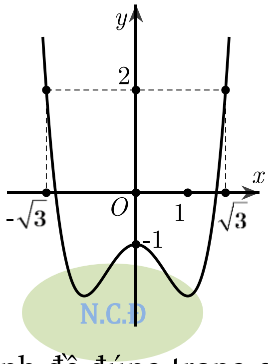


Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\dfrac{3\cos x+4\sin x}{5}\right)+x^4-3x+2019$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.



Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ

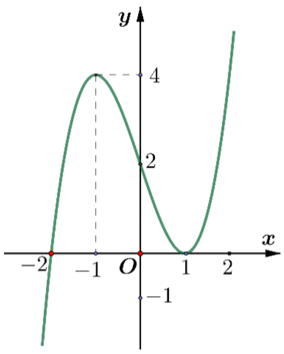


Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(\sqrt{3})$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(-\sqrt{3})$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



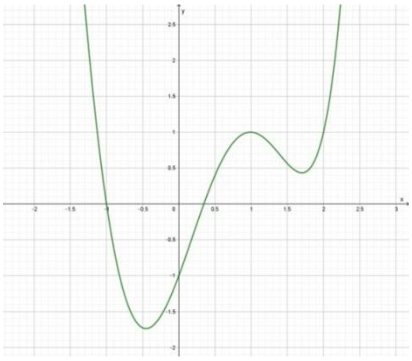
Đặt $g(x)=f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 5.

C. 8. **D.** 7.

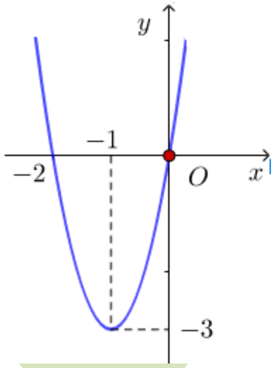
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.

Khi đó hàm số $g(x)=f(x)-x$ có bao nhiêu điểm cực trị?



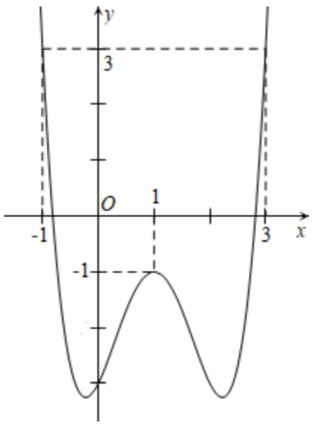
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

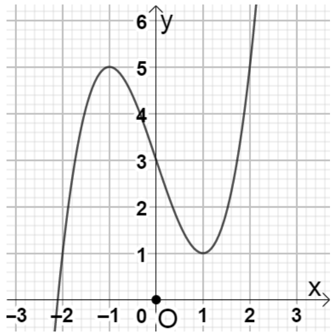
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \le x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi

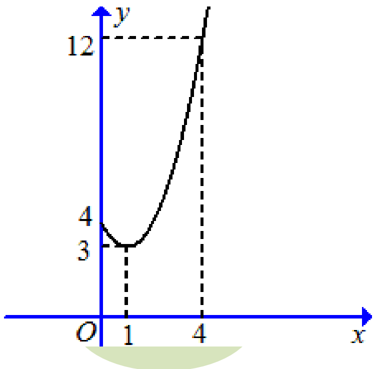
A. $m > 3f(3)$. **B.** $m \ge 3f(3)$. **C.** $m > 3f(-1) + 4$. **D.** $m \ge 3f(-1) + 4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?



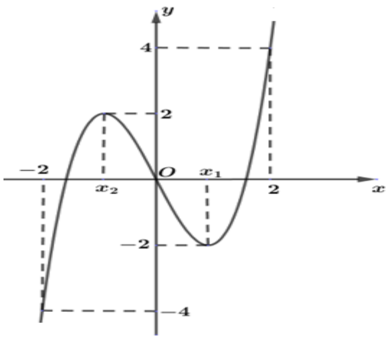
A. $g(0) \le g(2)$. **B.** $g(-2) > g(0)$. **C.** $g(2) < g(4)$. **D.** $g(-4) = g(-2)$.

Câu 15. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = \dfrac{50}{3}$ (km). **B.** $s = 10$ (km) **C.** $s = 20$ (km). **D.** $s = \dfrac{64}{3}$ (km).

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.

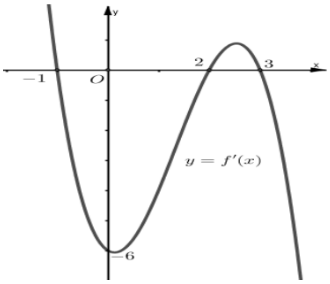


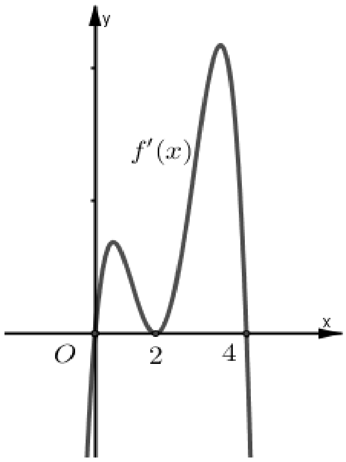
Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b. Giá trị $(a-b)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;9)$. **B.** $(12;16)$. **C.** $(16;+\infty)$. **D.** $(9;12)$.

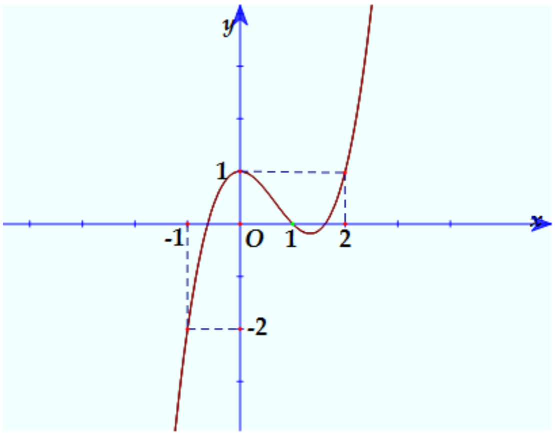




Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có ba điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2.
C. 3. **D.** 1.

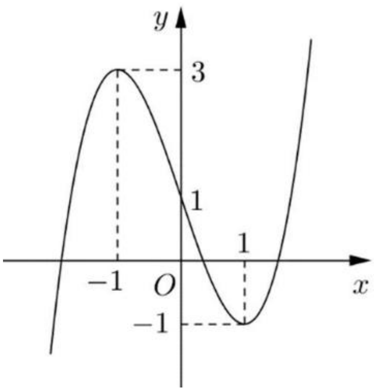
Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

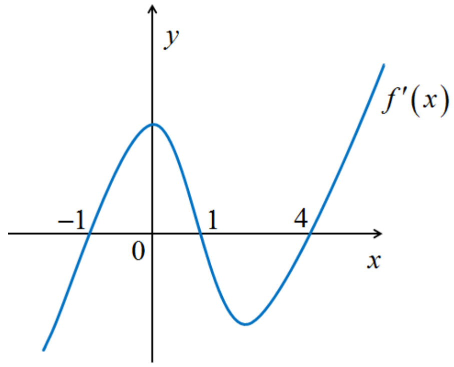
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

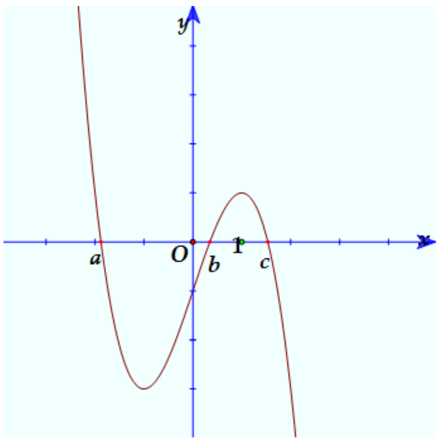
Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $y=f\left(1-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

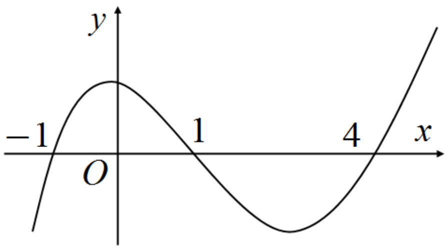
Câu 22. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên (với $a<b<c$). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $f\left(c\right)>f\left(a\right)>f\left(b\right)$. **B.** $f\left(a\right)=f\left(c\right)>f\left(b\right)$.

C. $f\left(a\right)>f\left(b\right)>f\left(c\right)$. **D.** $f\left(a\right)>f\left(c\right)>f\left(b\right)$.

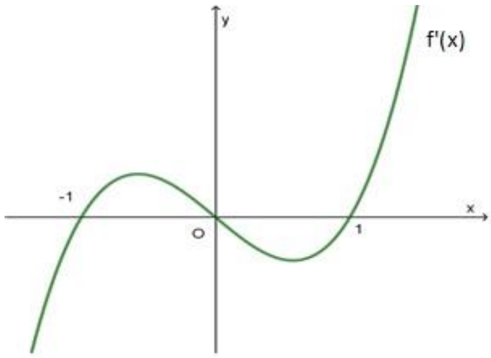
Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(f'\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

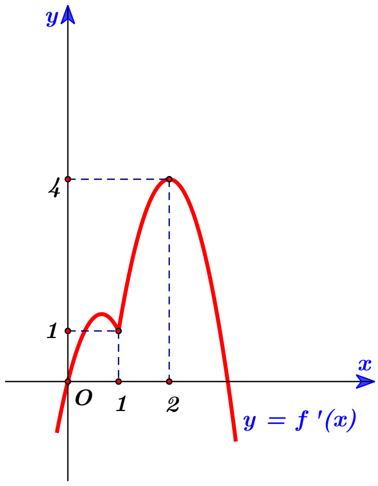
Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=\log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;1)$.

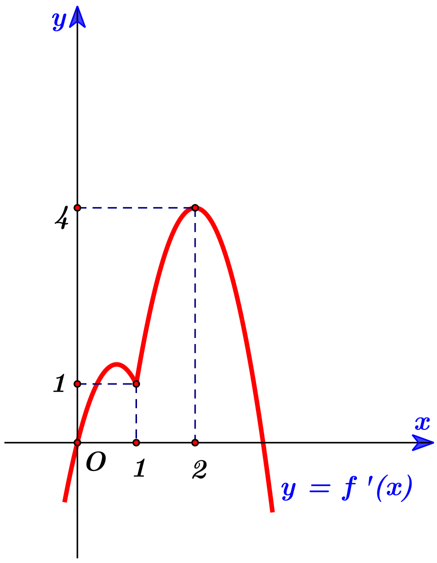
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

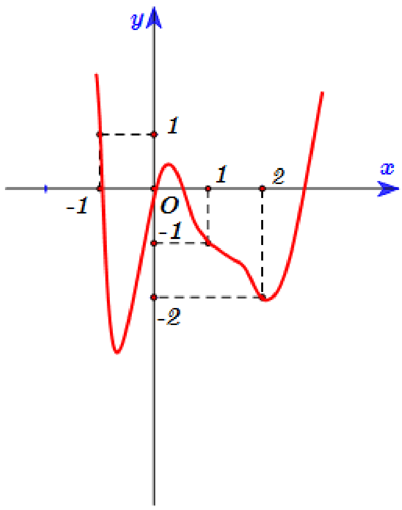
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $y=\left|3f\left(x\right)-x^3\right|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

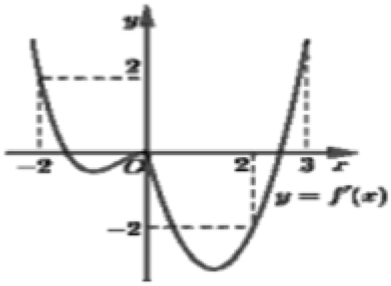
Câu 28. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;-3\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

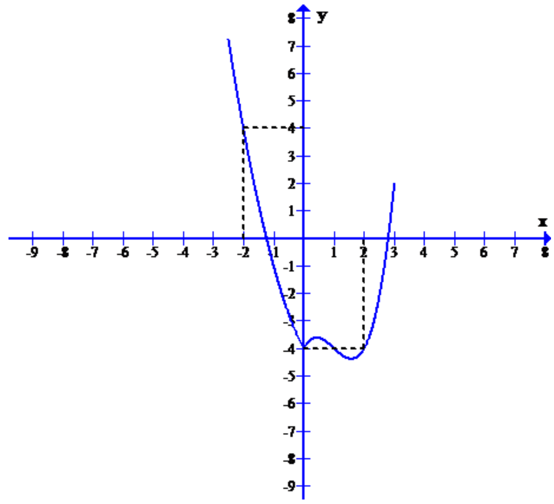
Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\frac{1}{2}x^2-f\left(0\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $\left(-2;3\right)$.

A.6. **B.**2. **C.**5. **D.**3

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f(x)+x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-3;3)$.

A.6. **B.**2. **C.**5. **D.**3

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0 ↗		↘ 0 ↘		↗ 0 ↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên $[-1;1]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0 ↗		↘ 0 ↘		↗ 0 ↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^4(2x)$ trên $[-1;1]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

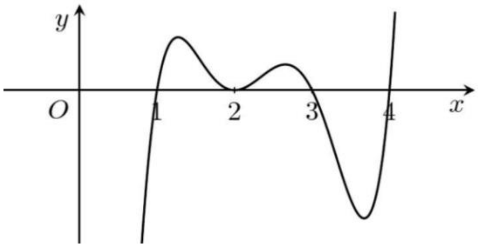
Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0 ↗		↘ 0 ↘		↗ 0 ↗	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)+(x-1)^2$ trên $[0;2]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

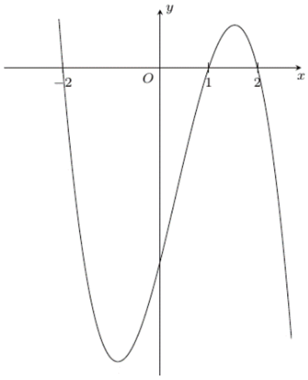
Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)-\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};+\infty\right)$.

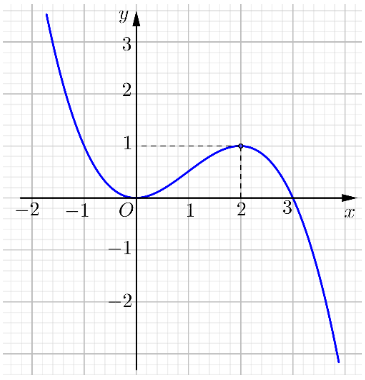
Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên và $f(2)=f(-2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

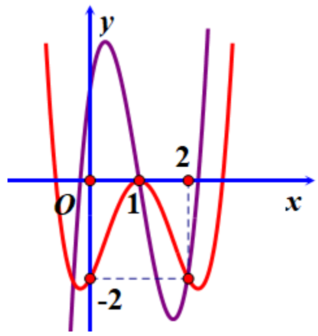
A. $(1;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ với $(a,\,b,\,c,\,d,\,k\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=k$ có bốn nghiệm phân biệt?



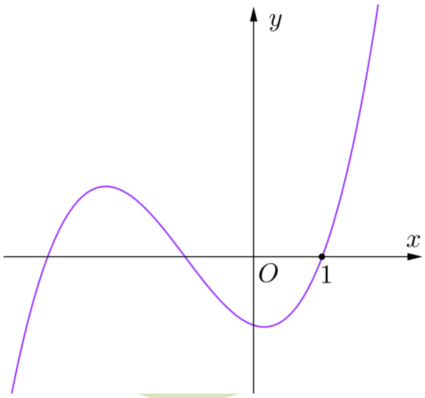
A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$. Phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a;b)$. Giá tị của $a+b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. $0,27$. **B.** $-0,54$. **C.** $-0,27$. **D.** $0,54$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x)=f\left(2019^x\right)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$



A. $m\le \ln 2019$. **B.** $0<m<\ln 2019$. **C.** $m>\ln 2019$. **D.** $m\le 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(x)-x$ có bao nhiều điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$

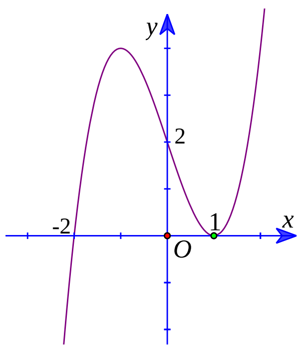
$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ với $x_0>1$

Từ bảng biến thiên của đề bài ta được bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số $g(x)$ có 1 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

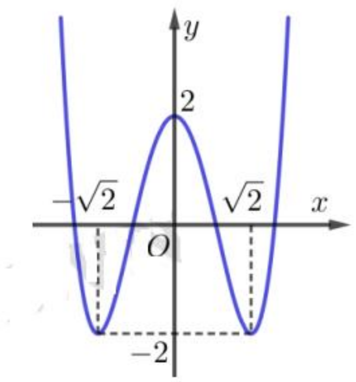
Lời giải

Quan sát đồ thị ta có $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f(x^2-3)\right]'=2x.f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y=f(x^2-3)$ có ba cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

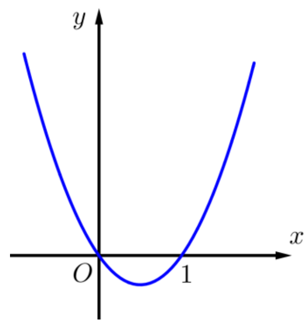
Ta có: $y' = f'(x).3^{f(x)}.\ln 3 + f'(x).2^{f(x)}.\ln 2 = f'(x)\left[3^{f(x)}.\ln 3 + 2^{f(x)}.\ln 2\right]$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (do $3^{f(x)}.\ln 3 + 2^{f(x)}.\ln 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$ có 4 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(-x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (-x - x^2)'.f'(-x - x^2) = -(1 + 2x).f'(-x - x^2)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 2x = 0 \\ f'(-x - x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0,5 \\ -x - x^2 = 0 \\ -x - x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ và $(0;+\infty)$. Dựa vào các đáp án ta chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=(x^2-2)'.f'(x^2-2)=2x.f'(x^2-2)$.

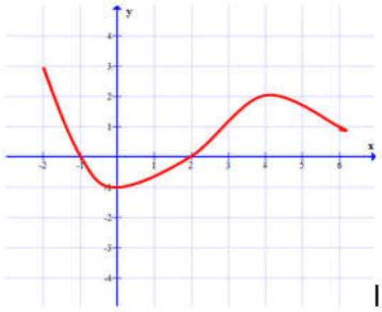
Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có số nghiệm hữu hạn nên phương trình $g'(x)=0$ cũng có số nghiệm hữu hạn. Do đó, ta cần tìm x sao cho $g'(x)\le 0$.

Ta có $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow xf'(x^2-2)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2-2)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2-2)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ x\le -2\end{array}\right.$.

Do đó hàm số nghịch biến trên mỗi tập: $[0;2],(-\infty;-2]$.

Từ các đáp án của đề bài ta chọn hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1)+f(3)=f(2)+f(6)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;6]$ là

A. $f(2)$ và $f(3)$. **B.** $f(2)$ và $f(6)$. **C.** $f(2)$ và $f(-1)$. **D.** $f(-1)$ và $f(6)$.

Lời giải

Chọn B

x	-1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

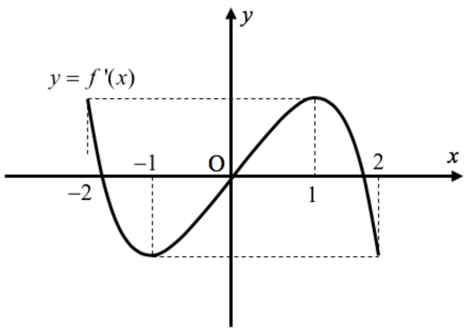
Quan sát bảng biến thiên ta thấy $\underset{[-1;6]}{Min} f(x)=f(2)$.

Mặt khác vì $f(3)>f(2)$ nên $f(-1)-f(6)=f(2)-f(3)<0 \Leftrightarrow f(-1)<f(6)$.

Vậy $\underset{[-1;6]}{\max} f(x)=f(6)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.



Lời giải

Chọn A

Phân tích:

Bản chất dạng toán này thường là đặc điểm: Tổng hai hàm dương (hàm đồng biến), tổng hai hàm âm (hàm nghịch biến)

Tính chất:

Cho hàm số $y=f(x)$ tăng trên khoảng D_1 , hàm số $y=f(x)$ tăng trên khoảng D_2. Khi đó ta có hàm số $y=f(x)+g(x)$ tăng trên khoảng $D=D_1\cap D_2$

+ Quan sát bài toán: $y=x^2-x\Rightarrow y'=2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$, nếu trắc nghiệm thấy ngay đáp án A.

Lời giải

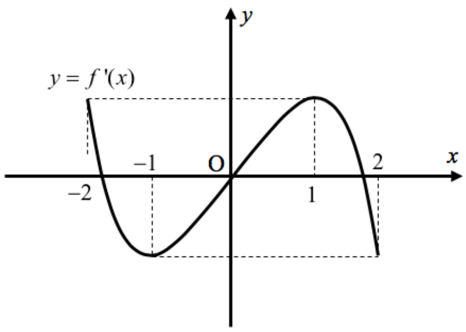
Ta có: $y'=-\sin x.f'(\cos x)+2x-1$

+ Vì $\cos x\in[-1;1]\Rightarrow -\sin x.f'(\cos x)\in[-1;1]$ mà $2x-1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$

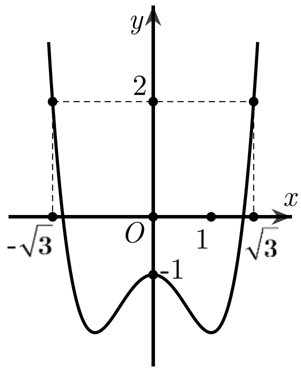
+ Suy ra $y'=-\sin x.f'(\cos x)+2x-1\geq 0,\forall x\geq 1$ hay hàm số tăng trên $[1;+\infty)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\frac{3\cos x+4\sin x}{5}\right)+x^4-3x+2019$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.



Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



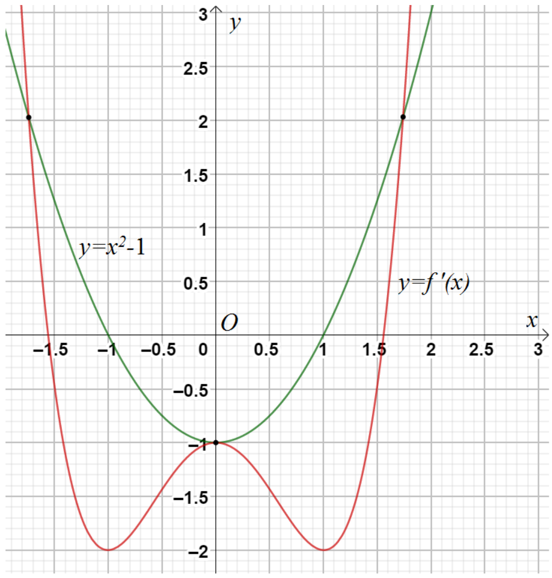
Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$. **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(\sqrt{3})$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$. **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D



Xét $h(x)=3f(x)-x^3+3x$ với $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)-3x^2+3$.

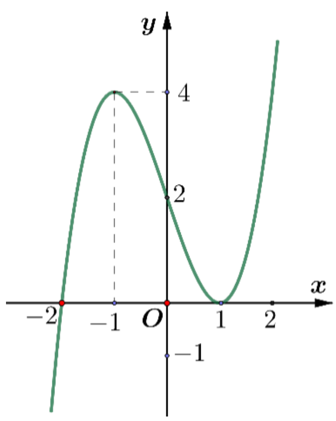
$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$h(x)$	$3f\left(-\sqrt{3}\right)$	$\searrow$			$3f\left(\sqrt{3}\right)$

Vậy $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} h(x)=h\left(-\sqrt{3}\right)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

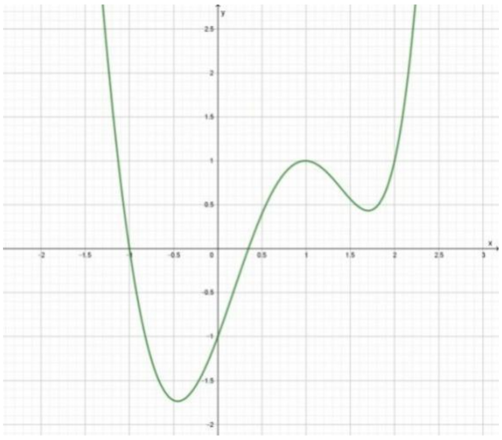
Ta có $g'(x) = f'(f(x)).f'(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 1 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta có phương trình $f(x) = -1$ có 1 nghiệm; phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là $1+3+1+1=6$ nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ.



Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

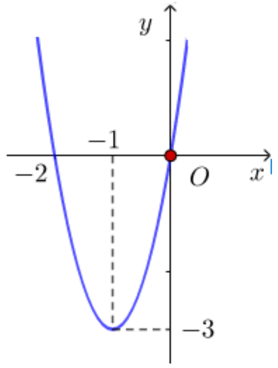
Từ đồ thị của $f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 1$ có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = a, (a < 1) \\ x = 1 \\ x = b, (b > 1) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		1		b		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Nhìn đồ thị ta thấy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Do đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=0$ và $x=-2$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow f\left(-2\right)=0$. (1)

Mặt khác $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

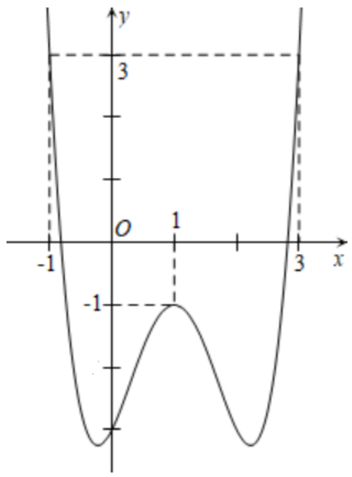
Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ đi qua các điểm có tọa độ $\left(0;0\right)$, $\left(-2;0\right)$, $\left(-1;-3\right)$. (2)

Từ (1), (2) lập được hệ phương trình $\begin{cases}c=0\\12a-4b+c=0\\3a-2b+c=-3\\-8a+4b-2c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=0\\d=-4\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+3x^2-4$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=f\left(0\right)=-4$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>3f\left(3\right)$. **B.** $m\ge 3f\left(3\right)$. **C.** $m>3f\left(-1\right)+4$. **D.** $m\ge 3f\left(-1\right)+4$.

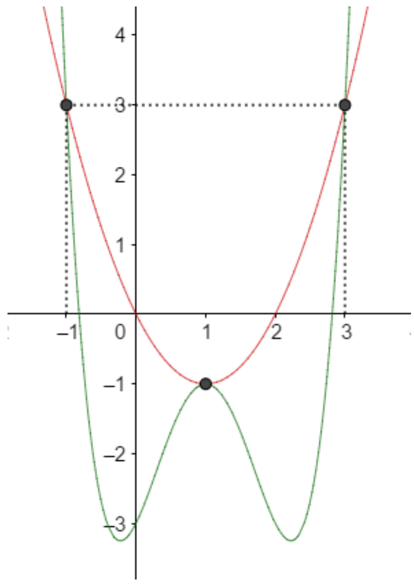
Chọn D

Ta có: $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m \Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x^2\le m$ với mọi $x\in\left(-1;3\right)$.

Xét $g(x)=3f(x)-x^3+3x^2$ với $x\in\left(-1;3\right)$.

Khi đó: $g'(x)=3f'(x)-3x^2+6x=3\left[f'(x)-x^2+2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-2x$.



Phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1; x=3; x=1$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[3f\left(x\right)-x^3+3x^2\right]=3f\left(-1\right)+4$;

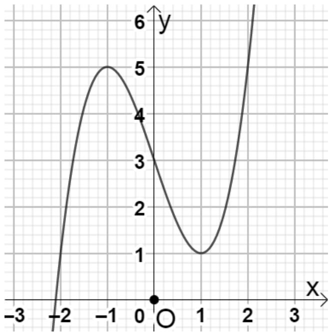
$\lim\limits_{x\to 3^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[3f\left(x\right)-x^3+3x^2\right]=3f\left(3\right)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		1		3
$g'(x)$	0	-	0	-	0
$g(x)$	$3f\left(-1\right)+4$	↘		↘	$3f\left(3\right)$

Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi $m\ge g\left(x\right),\forall x\in\left(-1;3\right)\Leftrightarrow m\ge 3f(-1)+4$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}x^2-3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?



A. $g(0) \le g(2)$. **B.** $g(-2) > g(0)$. **C.** $g(2) < g(4)$. **D.** $g(-4) = g(-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - x - 3 = f'(x) - (x+3)$.

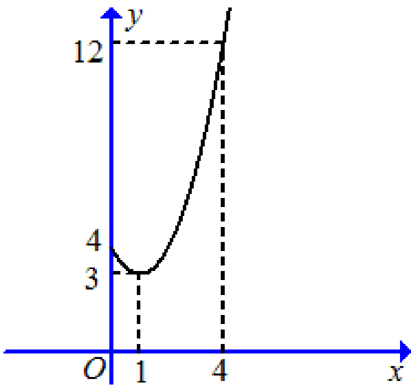
Khi đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x+3) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Lập Bảng biến thiên

		2		)		!		$+\infty$
	-	)	-	)	-	)	-	
	↘		↗	)	↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ nên suy ra được $g(2) < g(4)$.

Câu 15. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = \dfrac{50}{3}$ (km). **B.** $s = 10$ (km) **C.** $s = 20$ (km). **D.** $s = \dfrac{64}{3}$ (km).

Lời giải

Chọn D

Đồ thị được cho hình vẽ là đồ thị của Parabol nên có dạng: $y = ax^2 + bx + c$.

Biểu diễn mối liên hệ vận tốc và thời gian nên $v(t) = at^2 + bt + c$.

Quan sát đồ thị ta thấy parabol đi qua 3 điểm $A(0;4)$, $B(4;12)$, $I(1;3)$ áp vào biểu thức Parabol ta được hệ

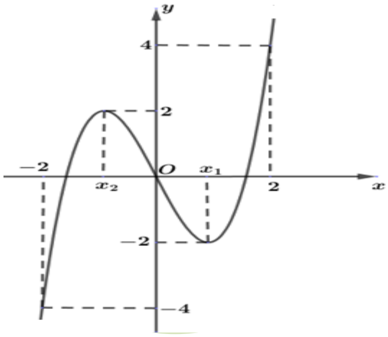
$$\begin{cases} 4=c \\ 12=16a+4b+c \\ 3=a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}.$$

Ta có biểu thức vận tốc $v(t)=t^2-2t+4$ lại có $s'(t)=v(t)$ nên

$$S=\int_0^4 (t^2-2t+4)\mathrm{d}t=\frac{64}{3}.$$

Là quãng đường vật chuyển động mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ.



Hỏi phương trình $|f(x)-1|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $|f(x)-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=1 \\ f(x)-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2\ (1) \\ f(x)=0\ (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

Phương trình $f(x)=2\,(1)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$.

Phương trình $f(x)=0\,(2)$ có 3 nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ không có nghiệm nào trùng với hai nghiệm của phương trình (1).

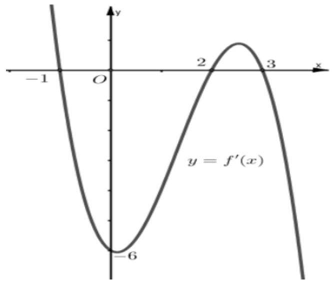
Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;2]$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a,b. Giá trị $(a-b)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;9)$. **B.** $(12;16)$. **C.** $(16;+\infty)$. **D.** $(9;12)$.

GIÁO VIÊN TRƯỜNG THPT ĐẦM DƠI

NGUYỄN CÔNG ĐỊNH



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(2) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$\Leftrightarrow y = f(2)$.

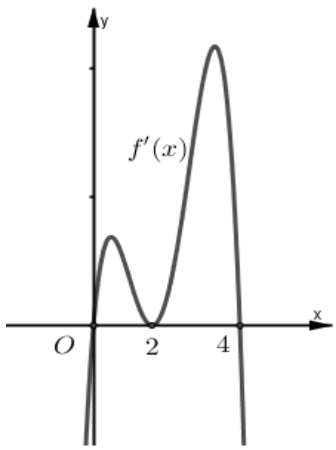
Cũng từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$ là

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘	$f(2)$	↗		↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y = f(2)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b thì $\begin{cases} a < -1 \\ b > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \\ -b < -3 \end{cases} \Rightarrow a - b < -4 \Rightarrow (a-b)^2 > 16$.

Vậy $(a-b)^2 \in (16; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị ta thấy

$f'\left(x^2 - m\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - m < 4 \Leftrightarrow m < x^2 < m + 4$.

$$f'\left(x^2 - m\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - m < 0 \\ x^2 - m > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 < m \\ x^2 > m + 4 \end{array}\right..$$

TH1: Với $m \le -4$.

$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra hàm số $y = f\left(x^2 - m\right)$ không thể có ba cực trị.

TH2: Với $-4 < m \le -2$.

$$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m + 4} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$

x		$-\sqrt{m+4}$		0		$\sqrt{m+4}$	
$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH3: Với $-2 < m \le 0$.

$$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m + 2} \\ x = \pm\sqrt{m + 4} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		0		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH4: Với $m > 0$.

$$y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \\ x = \pm\sqrt{m + 2} \\ x = \pm\sqrt{m + 4} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x.f'\left(x^2 - m\right)$.

x		$-\sqrt{m+4}$		$-\sqrt{m+2}$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$\sqrt{m+2}$		$\sqrt{m+4}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng trên suy ra hàm số có 5 cực trị.

Từ các trường hợp trên, hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có ba cực trị khi $m\in\left(-4;0\right]$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Cách 2:

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-m\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-m=0\\ x^2-m=2\\ x^2-m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\\ x^2=m+2\\ x^2=m+4\end{array}\right..$$

Dễ thấy

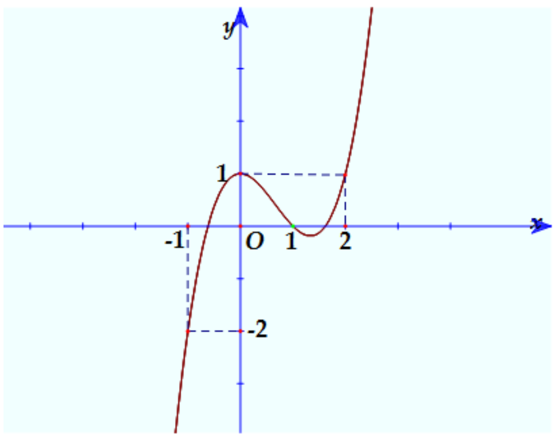
$x=0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0\Rightarrow x=0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$.

$x^2=m+2$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y'=0$.

Mặt khác $m<m+4\ \forall m$ nên hai phương trình $x^2=m$ (1) và $x^2=m+4$ (2) không có nghiệm trùng nhau.

Vậy để hàm số $y=f\left(x^2-m\right)$ có 3 điểm cực trị thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 đồng thời (1) vô nghiệm hoặc (1) có 1 nghiệm kép bằng 0 $\Rightarrow -4<m\le 0\Rightarrow$ $m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



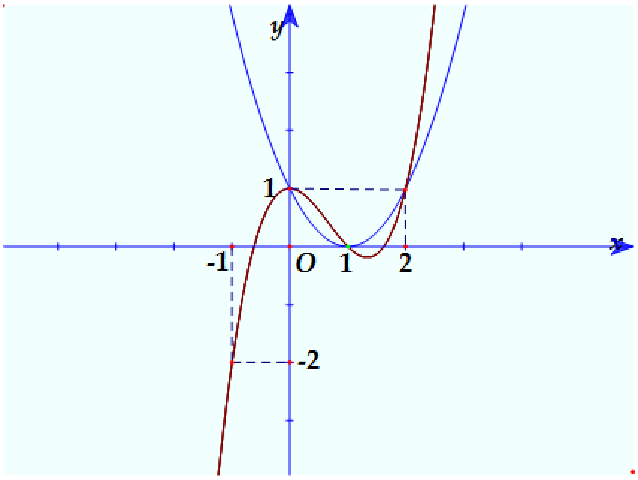
Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 1$.



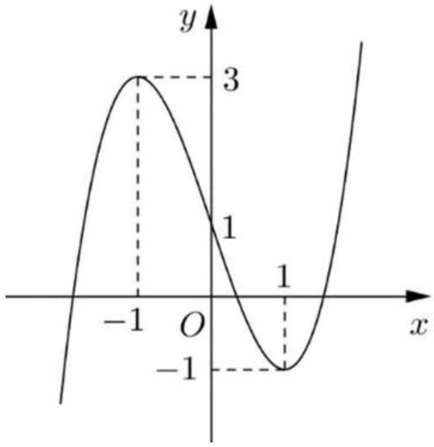
Từ đồ thị, ta thấy $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra, hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại hai điểm.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi]$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

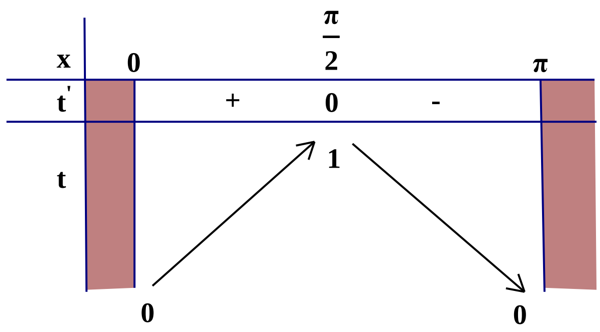
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$, với $x \in [0;\pi]$

Ta có $t' = cosx$, $t' = 0 \Leftrightarrow cosx = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \in [0;\pi]$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có:

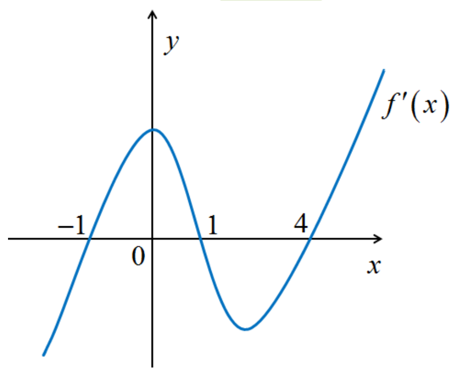
Với mỗi $t \in [0;1)$ cho ta tương ứng $2x \in [0;\pi]$

Với $t = 1$ cho ta tương ứng $x = \frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$

Khi đó ta có phương trình $f(t) = m$ (*)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;\pi] \Leftrightarrow$ pt(*) có đúng một nghiệm $t \in [0;1) \Leftrightarrow -1 < m \le 1$, vì $m \in Z \Rightarrow m \in \{0;1\}$ nên có hai số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $y = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Nguyễn Thị Sen

Chọn A

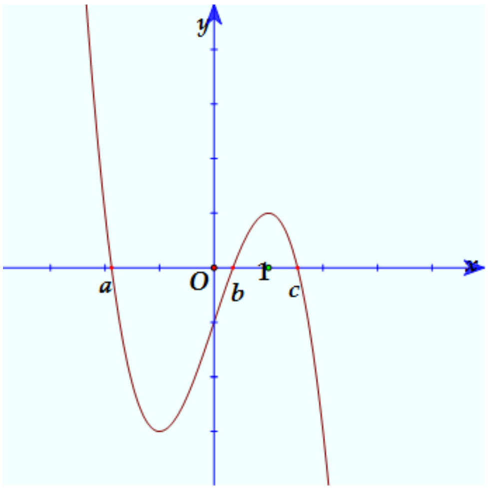
Ta có: $y' = -2x.f'(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1-x^2 = -1 \\ 1-x^2 = 1 \\ 1-x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên (với $a<b<c$). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $f(c)>f(a)>f(b)$. **B.** $f(a)=f(c)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$. **D.** $f(a)>f(c)>f(b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

* $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)<0\Leftrightarrow f(a)>f(b)$.

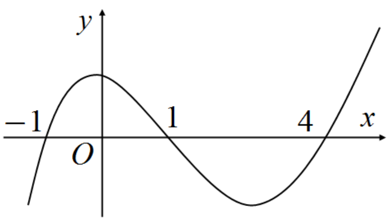
* $\int_b^c f'(x)dx=f(c)-f(b)>0\Leftrightarrow f(c)>f(b)$.

* $\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c f'(x)dx<0\Leftrightarrow\left[f(b)-f(a)\right]+\left[f(c)-f(b)\right]<0$

$\Leftrightarrow f(c)-f(a)<0\Leftrightarrow f(a)>f(c)$.

Vậy $f(a)>f(c)>f(b)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m>0$ và

$f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4)$.

$= 4mx^3 - 16mx^2 - 4mx + 16m$.

* Mà $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Suy ra $\begin{cases} n = -\dfrac{16}{3}m \\ p = -2m \\ q = 16m \end{cases}$

* Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$

$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16}{3}mx^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m - \dfrac{128}{3}m - 8m + 32m + r$

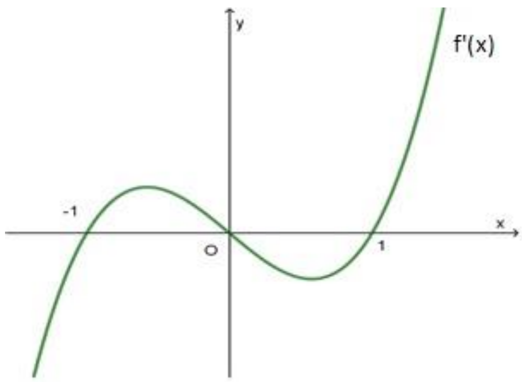
$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^3 - \dfrac{10}{3}x^2 - \dfrac{26}{3}x - \dfrac{4}{3} = 0 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^3 - \dfrac{10}{3}x^2 - \dfrac{26}{3}x - \dfrac{4}{3} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có 4 nghiệm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,(a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Dựa vào đồ thị ta có : $f'(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$.

$g(x) = f(f'(x)) = f(x^3 - x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 1)f'(x^3 - x)$.

Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left(3x^2-1\right)f'\left(x^3-x\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2-1>0\\ f'\left(x^3-x\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}3x^2-1<0\\ f'\left(x^3-x\right)>0\end{cases}\end{array}\right.$.

Xét $\begin{cases}3x^2-1>0\\ f'\left(x^3-x\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)\\ \left[\begin{array}{l}x^3-x<-1\\ 0<x^3-x<1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)\\ x\in(-\infty;-1,32...)\cup(-1;0)\cup(1;1,32....)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1,32...)\cup\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup(1;1,32....)$.

Xét $\begin{cases}3x^2-1<0\\ f'\left(x^3-x\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ \left[\begin{array}{l}-1<x^3-x<0\\ x^3-x>1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ x\in(-1,32...;-1)\cup(0;1)\cup(1,32...;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

N.C.Đ

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng

$(-\infty;-1,32...);\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right);(1;1,32...)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$.

$g(x)=f\left(f'(x)\right)=f\left(x^3-x\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-1\right)f'\left(x^3-x\right)$.

Xét đáp án B: $x\in(-\infty;-2)$.

* $x\in(-\infty;-2) \Rightarrow \left(3x^2-1\right)\in(11;+\infty) \Rightarrow 3x^2-1>0$.

* $x\in(-\infty;-2) \Rightarrow \left(x^3-x\right)\in(-\infty;-6) \Rightarrow f'\left(x^3-x\right)<0$ (dựa vào đồ thị của $f'(x)$).

Vậy với $x\in(-\infty;-2)$ thì ta có: $\begin{cases}3x^2-1>0\\ f'\left(x^3-x\right)<0\end{cases} \Rightarrow g'(x)<0$.

$\Rightarrow$ với $x\in(-\infty;-2)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=\log_2\left(f(2x)\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=g(x)=\log_2\left(f(2x)\right)$.

Ta có $y'=g'(x)=\left(\log_2\left(f(2x)\right)\right)'=\dfrac{\left(f(2x)\right)'}{f(2x).\ln 2}=\dfrac{2.f'(2x)}{f(2x).\ln 2}=0$.

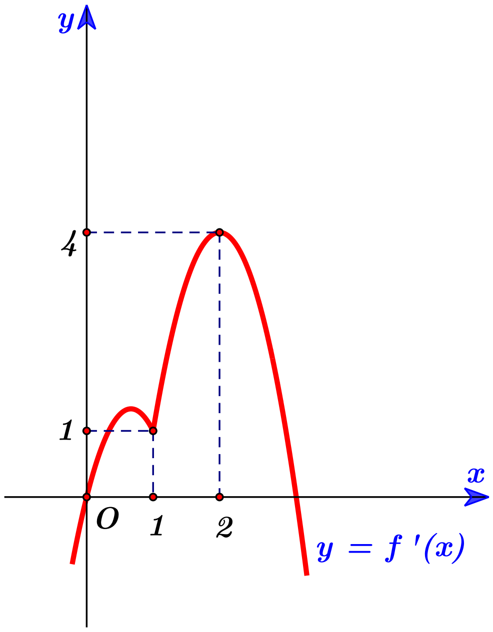
$$\Rightarrow f'(2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-1 \\ 2x=0 \\ 2x=1 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=\log_2\left(f(2x)\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



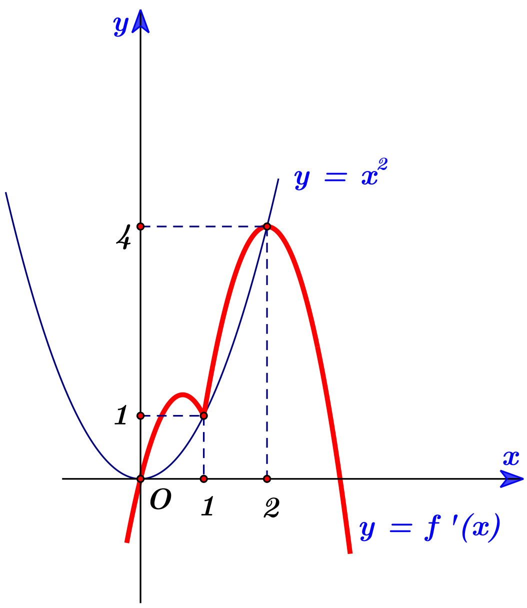
Hàm số $y=\left|3f\left(x\right)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(1;3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=3f\left(x\right)-x^3$, ta có: $g'\left(x\right)=3\left[f'\left(x\right)-x^2\right]$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$ (hoành độ giao điểm của đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ và $\left(P\right):y=x^2$)



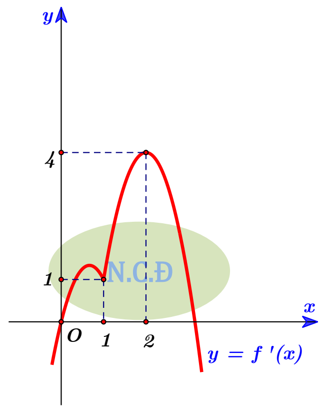
Do $f\left(0\right)=0\Rightarrow g\left(0\right)=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ như sau

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(0;2)$ và $(x_0;+\infty)$ với $x_0>2$, vậy chọn C.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ là

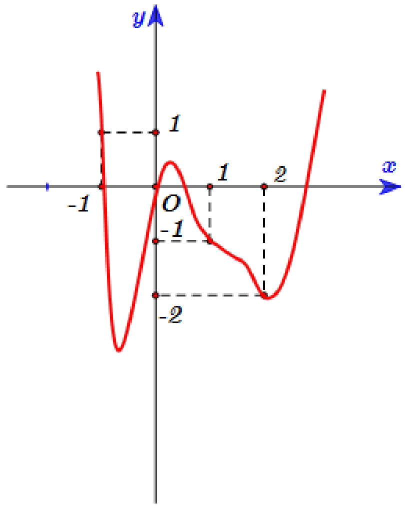
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ **Lời giải** Câu 36 suy ra hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, chọn B.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=\frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=\left|2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;-3\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Lời giải

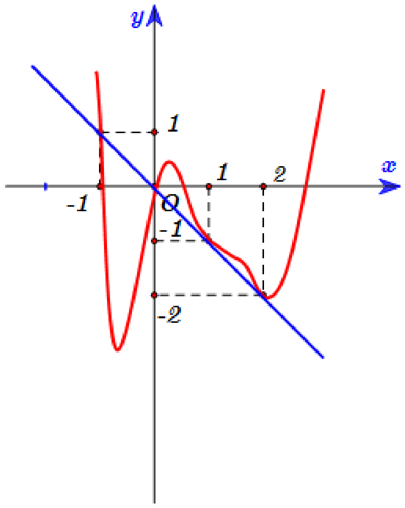
Chọn A

Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=2\left[f'\left(x+2\right)+\left(x+2\right)\right]$, $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)=-\left(x+2\right)$

Đặt $t=x+2$ ta được $f'\left(t\right)=-t$ (1).

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'\left(t\right)$ và đường thẳng $d:\ y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $y=f'\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-t$

Ta có : $f'\left(t\right)=-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=0\\t=1\\t=2\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-2\\x=-1\\x=0\end{array}\right.$

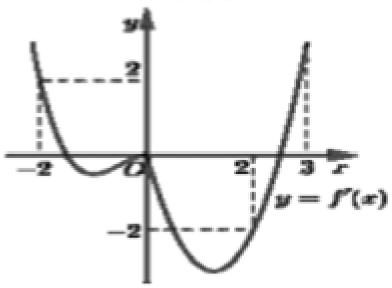
Do $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$ nên $g\left(-2\right)=2f\left(0\right)+\left(-2+1\right)\left(-2+3\right)=0$

Bảng biến thiên của hàm số $y=|g(x)|$

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;x_0)$ và $(-3;-2)$ với $x_0<-3$, vậy chọn A.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2;3)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-f(0)$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$

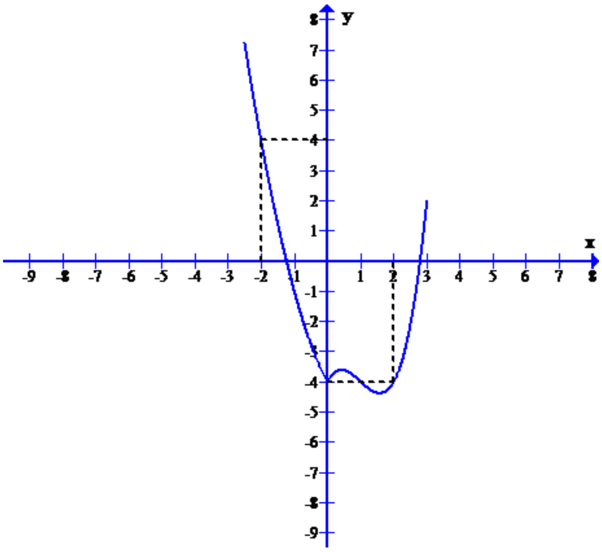
Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=-x$ và $y=f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x)=-x$ có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

Trên khoảng $(-2;3)$, hàm số $h(x)$ có một điểm cực trị là $x=2$, (do qua nghiệm $x=0$, $h'(x)$ không đổi dấu). Do đó đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm.

Suy ra hàm số $y=|h(x)|$ có tối đa $2+1=3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2;3)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f\left(x\right)+x^2-f\left(0\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $\left(-3;3\right)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x^2-f\left(0\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2x$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-2x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=-2x$ và $y=f'\left(x\right)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'\left(x\right)=-2x$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$

Trên khoảng $\left(-3;3\right)$, hàm số $g\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=2, x=-2$. Do đó đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ cắt trục hoành tại tối đa 3 điểm.

Suy ra hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ có tối đa $3+2=5$ điểm cực trị trong khoảng $\left(-3;3\right)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x\right)-\sin^2 x$ trên $\left[-1;1\right]$ là

A. $f\left(-1\right)$. **B.** $f\left(0\right)$. **C.** $f\left(2\right)$. **D.** $f\left(1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(2x\right)-\sin^2 x\le f\left(2x\right)$, $\forall x\in\left[-1;1\right]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)$	$-\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \le f(0)$ với mọi $x \in [-1;1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $[-1;1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x)$ trên $[-1;1]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x) \le f(2x)$, $\forall x \in [-1;1]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \le f(0)$ với mọi $x \in [-1;1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $[-1;1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^4(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) + (x-1)^2$ trên $[0;2]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

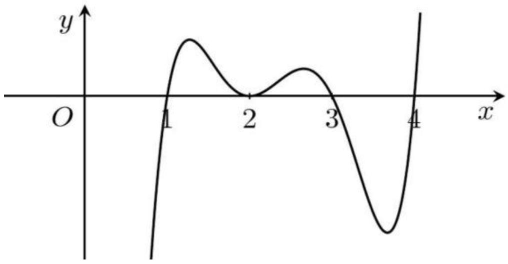
Ta có: $g(x) = f(2x) + (x-1)^2 \ge f(2x)$, $\forall x \in [0;2]$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \ge f(2)$ với mọi $x \in [0;2]$, do đó giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[0;2]$ là $f(2)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(2) \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2-2) - \left(\dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Đặt $y = g(x) = f(x^2-2) - \left(\dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$.

Khi đó $g'(x) = 2x.f'(x^2-2) - (x^2+2x-3)$.

$= 2x.(x^2-2-1)(x^2-2-2)^2(x^2-2-3)(x^2-2-4) - (x^2+2x-3)$

$= 2x.(x^2-3)(x^2-4)^2(x^2-5)(x^2-6) - (x^2+2x-3)$

$g'(-2) = 3 > 0$ nên loại phương án **A** và **B.**

$g'(3) = 10788 > 0$ nên loại phương án **D**.

Cách 2:

Ta có $y' = g'(x) = 2x.f'(x^2-2) - (x^2+2x-3)$

Từ đồ thị ta có $f'(x^2-2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2 < 1 \\ 3 < x^2-2 < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right) \\ x \in \left(-\sqrt{6};-\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\sqrt{6}\right) \end{array}\right.$.

Suy ra $2xf'(x^2-2) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\sqrt{6}\right) \cup \left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{5};\sqrt{6}\right)$

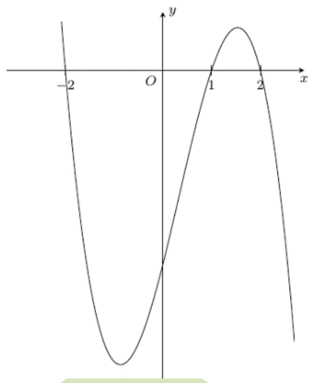
Nên ta lập được bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{5}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$2xf'(x^2-2)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$-$		$-$	
y'		$-$	0		0	$+$	0		0	$+$	0		0	$-$	0		0	$-$			

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;\sqrt{3})$ và $(\sqrt{5};\sqrt{6})$.

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên và $f(2)=f(-2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=-2f(3-x)f(3-x)$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

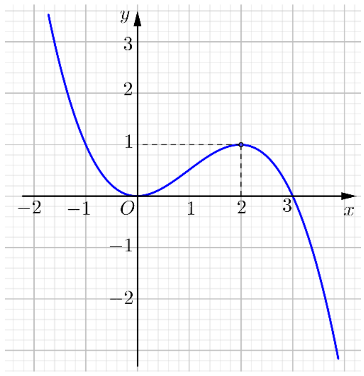
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x)\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(3-x)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$g'(x)=-2f(3-x)f'(3-x)<0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\3-x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<5\\x<1\end{array}\right..$$

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ với $(a,\, b,\, c,\, d,\, k\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)$ không thể có bậc nhỏ hơn bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'(x) = ax^2(x-3)$, đồ thị của nó đi qua $A(2;1)$ nên

$1 = a.2^2.(2-3) = - \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $f'(x) = -\dfrac{x^2}{4}(x-3)$, do đó $f(x) = -\dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^3}{4} + k$.

Ta có $f(x) = k \Leftrightarrow -\dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^3}{4} + k = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Suy ra $f(-x^2 + 2x + m) = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{array}\right.$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_1' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 4$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_2' = 1 + m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

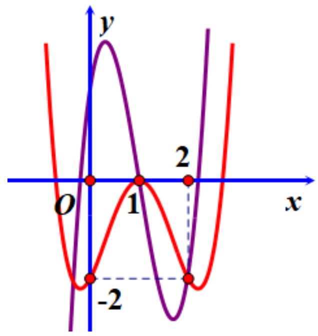
Hai phương trình nếu như có nghiệm chung x_0 thì $\begin{cases} -x_0{}^2 + 2x_0 + m = 0 \\ -x_0{}^2 + 2x_0 + m = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 0$.

Do vậy để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có 4 nghiệm phân biệt thì

$\begin{cases} m > -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Do m nguyên và $m \in [-5;5]$ nên $m \in \{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị của m.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a;b)$. Giá tị của $a + b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. $0,27$. **B.** $-0,54$. **C.** $-0,27$. **D.** $0,54$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình: $f\left(x\right)=m.e^{x}\Leftrightarrow m=\dfrac{f\left(x\right)}{e^{x}}$.

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{e^{x}}$ với $x\in\left[0;2\right]$, có:

$$g'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right).e^{x}-e^{x}.f\left(x\right)}{e^{2x}}\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right).e^{x}-e^{x}.f\left(x\right)=0$$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=f\left(x\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$ với $x\in\left[0;2\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số hàm số ta suy ra được $y=f\left(x\right)$ là đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

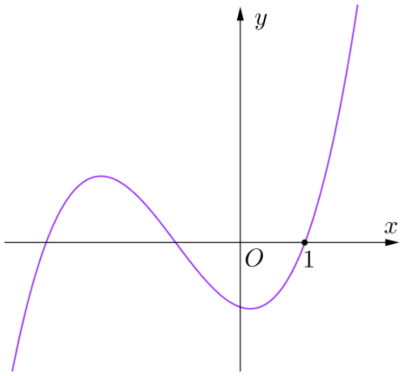
x		1		2
y'	+	0	-	
y	↗	g(1)	↘	g(2)

Với: $g\left(1\right)=\dfrac{f\left(1\right)}{e^{1}}=\dfrac{0}{e}=0$, $g\left(0\right)=\dfrac{f\left(0\right)}{e^{0}}=-2$, $g\left(2\right)=\dfrac{f\left(2\right)}{e^{2}}=-\dfrac{2}{e^{2}}$.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $m=\dfrac{f\left(x\right)}{e^{x}}$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[0;2\right]$ khi và chỉ khi $g\left(2\right)\le m<g\left(1\right)\Leftrightarrow-\dfrac{2}{e^{2}}\le m<0$.

Hay $m\in\left[-\dfrac{2}{e^{2}};0\right)\Rightarrow a+b=-\dfrac{2}{e^{2}}+0=-\dfrac{2}{e^{2}}\approx0,27$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(2019^{x}\right)-mx+2$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$



A. $m \le \ln 2019$. **B.** $0 < m < \ln 2019$. **C.** $m > \ln 2019$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019. f'(2019^x) - m$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x \ln 2019. f'(2019^x) = m$, (1)

Đặt $t = 2019^x$, ta có $t \in [1;2019]$ và $2019^x \ln 2019. f'(2019^x) = t.\ln 2019. f'(t)$

Đặt $h(t) = t.\ln 2019. f'(t), t \in [1;2019]$.

Phương trình (1) trở thành $h(t) = t.\ln 2019. f'(t) = m$, (2)

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $[1;2019]$, do đó $f''(x) \ge 0$ trên $[1;2019]$. Hơn nữa, từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta cũng có $f'(x) \ge 0$ trên $[1;2019]$.

Do đó $h'(t) = \ln 2019[f'(t) + t.f''(t)] \ge 0\ \forall t \in [1;2019]$, $h'(t) = 0$ tại hữu hạn điểm, nên $h(t)$ đồng biến trên $[1;2019]$. Từ đó (2) có số nghiệm là hữu hạn trên $[1;2019]$, nên phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn trên $[1;2019]$.

Như vậy: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;1]$

$\Leftrightarrow g'(x) \ge 0$ với mọi $x \in [0;1]$ $\Leftrightarrow m \le 2019^x.\ln 2019. f'(2019^x)\ \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \le t.\ln 2019. f'(t)\ \forall t \in [1;2019]$ $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;2019]} h(t) = h(1) = 1.\ln 2019. f'(1) = 0$.

Vậy $m \le 0$.