



Vấn đề 5. CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN



Câu 111. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = a^3\sqrt{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 112. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{18}$. Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp đã cho. Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = 36\sqrt{3}$. B. $S_{\max} = 18\sqrt{3}$. C. $S_{\max} = 18$. D. $S_{\max} = 36$.

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 6$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{80}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{20}{3}$. D. $V_{\max} = 24$.

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{1}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{1}{12}$.

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 4$. Các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{130}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{128}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{125}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{250}{3}$.

Câu 116. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng 1; SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. B. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$. D. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a^3$. C. $V_{\max} = 8a^3$. D. $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AB = 2$. Cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{1}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{1}{4}$. C. $V_{\max} = \frac{1}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{1}{6}$.

Câu 119. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SC = 1$, tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$. D. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

Câu 120. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 1$. Các cạnh bên $SA = SB = SC = 2$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{5}{8}$. B. $V_{\max} = \frac{5}{4}$. C. $V_{\max} = \frac{2}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{4}{3}$.

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2 + y^2 = a^2$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $V_{\max} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$, $SC = 6$ và mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$. B. $V_{\max} = 40$. C. $V_{\max} = 80$. D. $V_{\max} = \frac{80}{3}$.

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{1}{4}$. B. $V_{\max} = \frac{1}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{1}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{1}{16}$.

Câu 124. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = 3\sqrt{2}$. B. $x = \sqrt{6}$. C. $x = 2\sqrt{3}$. D. $x = \sqrt{14}$.

Câu 125. Trên ba tia Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi, lần lượt lấy các điểm A , B , C sao cho $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Giả sử A cố định còn B , C thay đổi nhưng luôn luôn thỏa $OA = OB + OC$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối tứ diện $OABC$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3}{24}$. D. $V_{\max} = \frac{a^3}{32}$.

Câu 126. Cho tứ diện $SABC$ có SA , AB , AC đôi một vuông góc với nhau, độ dài các cạnh $BC = a$, $SB = b$, $SC = c$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ khối tứ diện đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{4}$. B. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{24}$.

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Trên SB , SD lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho

$\frac{SM}{SB} = m > 0$, $\frac{SN}{SD} = n > 0$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AMN$ biết $2m^2 + 3n^2 = 1$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{72}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $V_{\max} = \frac{a^3}{48}$.

Câu 128. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Biết tổng diện tích tất cả các mặt của khối hộp bằng 32. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối hộp đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{56\sqrt{3}}{9}$. B. $V_{\max} = \frac{80\sqrt{3}}{9}$. C. $V_{\max} = \frac{70\sqrt{3}}{9}$. D. $V_{\max} = \frac{64\sqrt{3}}{9}$.

Câu 129. Cho hình lăng trụ đứng có thể tích V và có đáy là tam giác đều. Khi diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì độ dài cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt[3]{4V}$. B. $\sqrt[3]{V}$. C. $\sqrt[3]{2V}$. D. $\sqrt[3]{6V}$.

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

A. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 131. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 132. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $AB = a\sqrt{3}$. C. $AB = 2a$. D. $AB = 3a\sqrt{5}$.

Câu 133. Cho tam giác OAB đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. D. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 134. Cho tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = 2$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy các điểm M, N khác phía so với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM.AN = 1$. Tính thể tích nhỏ nhất $V_{\min}$ của khối tứ diện $MNBC$.

A. $V_{\min} = \frac{1}{3}$. B. $V_{\min} = \frac{1}{6}$. C. $V_{\min} = \frac{1}{12}$. D. $V_{\min} = \frac{2}{3}$.

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $SA = AB = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 136. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 3$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tìm x để thể tích khối hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất.

A. $x = \frac{3\sqrt{15}}{5}$. B. $x = \frac{3\sqrt{6}}{2}$. C. $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 137. Cho hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 và độ dài đường chéo bằng 6. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V_{\max} = 16\sqrt{2}$. B. $V_{\max} = 12$. C. $V_{\max} = 8\sqrt{2}$. D. $V_{\max} = 6\sqrt{6}$.

Câu 138*. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Dựng một hình lập phương có cạnh bằng tổng ba kích thước của hình hộp chữ nhật trên. Biết rằng thể tích hình lập phương luôn gấp 32 lần thể tích hình hộp chữ nhật. Gọi S là tỉ số giữa diện tích toàn phần hình lập phương và diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật. Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{1}{10}$. B. $S_{\max} = \frac{16}{5}$. C. $S_{\max} = \frac{32}{5}$. D. $S_{\max} = \frac{48}{5}$.

Câu 139*. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của SG cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$.

A. $T_{\min} = \frac{2}{7}$. B. $T_{\min} = \frac{3}{7}$. C. $T_{\min} = \frac{18}{7}$. D. $T_{\min} = 6$.

Câu 140*. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$; mặt phẳng (α) đi động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K, Q . Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.MNKQ$.

A. $V_{\max} = \frac{V}{2}$. B. $V_{\max} = \frac{V}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{3V}{4}$. D. $V_{\max} = \frac{2V}{3}$.

Vấn đề 5. CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 111. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(SBC) \longrightarrow AH \perp (SBC)$.

Ta có

- $AH \leq AS$.

Dấu "=" xảy ra khi $AS \perp (SBC)$.

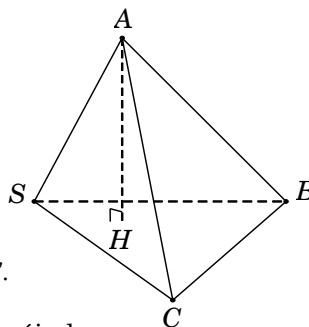
- $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin \widehat{BSC} \leq \frac{1}{2}SB \cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi $SB \perp SC$.

Khi đó $V = \frac{1}{3}S_{\Delta SBC} \cdot AH \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}SB \cdot SC \right) AS = \frac{1}{6}SA \cdot SB \cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp là $V_{\max} = \frac{1}{6}SA \cdot SB \cdot SC = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. **Chọn D.**



Câu 112. Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

Khi đó $S_{\text{tp}} = 2(ab + bc + ca)$.

Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 + c^2 = AC^2 = 18$.

Từ bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, suy ra $S_{\text{tp}} = 2(ab + bc + ca) \leq 2 \cdot 18 = 36$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{6}$. **Chọn D.**

Câu 113. Đặt cạnh $BC = x > 0$.

Tam giác vuông ABC , có $AC^2 = 16 + x^2$.

Tam giác vuông SAC , có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{20 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4x$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{4}{3}x\sqrt{20 - x^2}$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có

$$x \cdot \sqrt{20 - x^2} \leq \frac{x^2 + (\sqrt{20 - x^2})^2}{2} = 10.$$

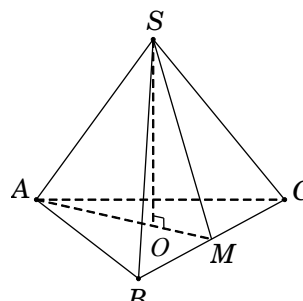
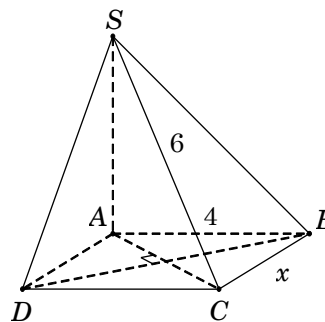
Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{4}{3} \cdot 10 = \frac{40}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{20 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$. Vậy $V_{\max} = \frac{40}{3}$. **Chọn A.**

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{20 - x^2}$ trên $(0; 2\sqrt{5})$.

Câu 114. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Vì $S.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x > 0$. Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{2}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông SOA , có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} \cdot x^2\sqrt{3-x^2}$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2\sqrt{3-x^2}$ trên $(0; \sqrt{3})$, ta được $\max_{(0; \sqrt{3})} f(x) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{6}$. **Chọn A.**

Cách 2. Ta có $x^2\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot (6-2x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+6-2x^2}{3}\right)^3} = 2$.

Câu 115. Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $SA = SB = SC = SD$ suy ra hình chiếu của S trên mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$.

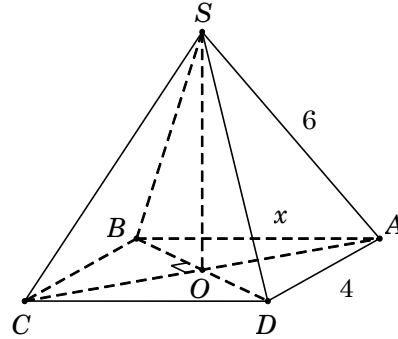
Tam giác vuông ABC , có

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 16}.$$

Tam giác vuông SOA , có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{128 - x^2}}{2}.$$

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{128 - x^2}}{2}$
 $= \frac{1}{3} \cdot (2x\sqrt{128 - x^2}) \leq \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 128 - x^2) = \frac{128}{3}$.



Dấu "=" xảy ra $x = \sqrt{128 - x^2} \Leftrightarrow x = 8$. Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{128}{3}$. **Chọn B.**

Câu 116. Đặt $OA = OC = x$.

Tam giác vuông AOD , có

$$OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Suy ra $BD = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = OA \cdot BD = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Tam giác vuông SOC , có

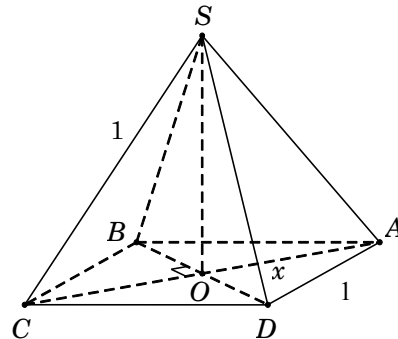
$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2x\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = \frac{2}{3}x(1 - x^2).$$

Xét hàm $f(x) = x(1 - x^2)$ trên $(0; 1)$, ta được $\max_{(0; 1)} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Suy ra $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$. **Chọn D.**



Cách 2. Áp dụng BDT Côsi, ta có

$$\frac{2x(1-x^2)}{3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

Câu 117. Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, do đó tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H = AC \cap BD$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$. Ta có

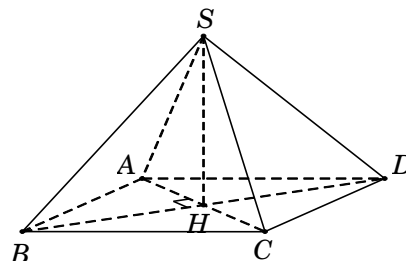
$$AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 16a^2}.$$

Tam giác vuông SHA , có

$$SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2} = \frac{a}{3} (2x\sqrt{8a^2 - x^2}) \leq \frac{a}{3} (x^2 + 8a^2 - x^2) = \frac{8a^3}{3}. \text{ Chọn A.}$$



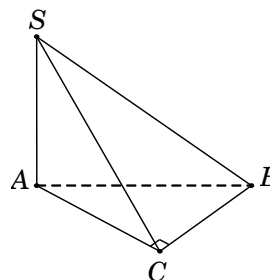
Câu 118. Đặt $AC = x > 0$.

$$\text{Suy ra } CB = \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} (x\sqrt{4 - x^2})$$

$$\leq \frac{1}{6} \left(\frac{x^2 + 4 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{3}. \text{ Chọn A.}$$

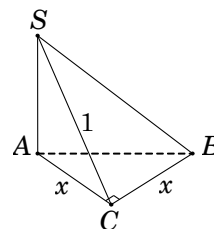


Câu 119. Giả sử $CA = CB = x > 0$.

$$\text{Suy ra } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} x^2.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$



Xét hàm $f(x) = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}$ trên $(0;1)$, ta được $\max_{(0;1)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27}$. **Chọn D.**

$$\text{Cách 2. Ta có } x^2 \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot (2 - 2x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 2 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

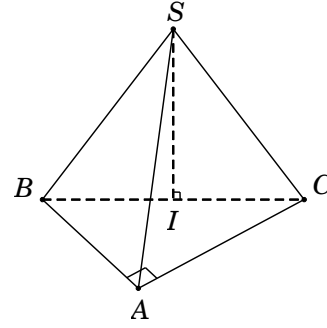
Câu 120. Gọi I là trung điểm của BC . Suy ra $IA = IB = IC \longrightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo giả thiết, ta có $SA = SB = SC$ suy ra I là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABC) \longrightarrow SI \perp (ABC)$.

Đặt $AC = x > 0$. Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 1}$.

Tam giác vuông SBI , có $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \frac{\sqrt{15 - x^2}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{x}{2}$.

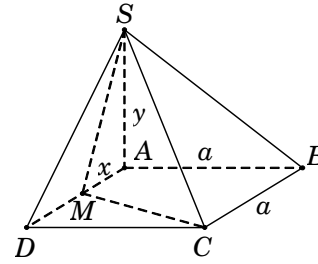
Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{15 - x^2}}{2}$
 $= \frac{1}{12} (x\sqrt{15 - x^2}) \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2 + 15 - x^2}{2} = \frac{5}{8}$. **Chọn A.**



Câu 121. Từ $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Diện tích mặt đáy $S_{ABCM} = \left(\frac{BC + AM}{2} \right) \cdot AB = \left(\frac{a + x}{2} \right) a$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3} S_{ABCM} \cdot SA$
 $= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a + x}{2} \cdot a \right) \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{6} (a + x) \sqrt{a^2 - x^2}$.



Xét hàm $f(x) = (a + x) \sqrt{a^2 - x^2}$ trên $(0; a)$, ta được $\max_{(0; a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Suy ra $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$. **Chọn B.**

Câu 122. Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$.

Mà $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

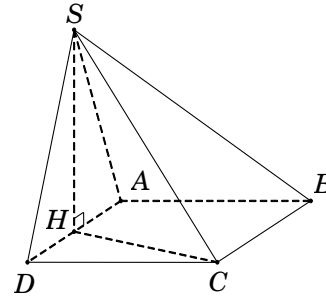
Giả sử $AD = x > 0$.

Suy ra $HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 16}$.

Tam giác vuông SHC , có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SH$

$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot x \sqrt{20 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{3} (2x\sqrt{80 - x^2}) \leq \frac{1}{3} (x^2 + 80 - x^2) = \frac{80}{3}$. **Chọn D.**



Câu 123. Ta có tam giác ABC và SBC là những tam giác đều cạnh bằng 1.

Gọi N là trung điểm BC . Trong tam giác SAN , kẻ $SH \perp AN$. (1)

Ta có

• SN là đường cao của tam giác đều $SBC \longrightarrow SN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

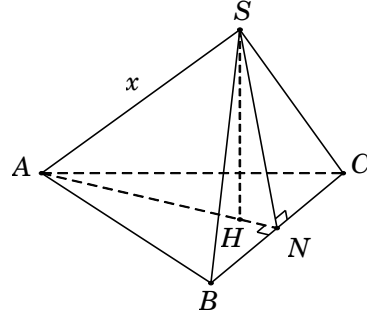
• $\begin{cases} BC \perp AN \\ BC \perp SN \end{cases} \longrightarrow BC \perp (SAN) \longrightarrow BC \perp SH$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SH \perp (ABC)$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH \\ &\leq \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SN = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv N$. **Chọn B.**



Câu 124. Hình vẽ.

Cách làm tương tự như bài trên.

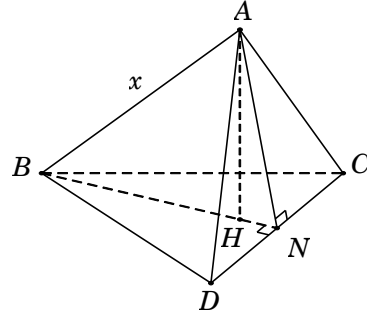
Tam giác BCD đều cạnh bằng $2\sqrt{3} \rightarrow BN = 3$.

V_{ABCD} lớn nhất $H \Leftrightarrow N$. Khi đó ANB vuông.

Trong tam giác vuông cân ANB , có

$$AB = BN\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Chọn A.



Câu 125. Từ giả thiết ta có $a = b + c$.

$$\text{Do } OA, OB, OC \text{ vuông góc từng đôi nên } V_{OABC} = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} a \cdot (bc) \leq \frac{1}{6} a \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{24}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**

Câu 126. Đặt $AB = x, AC = y, AS = z$. Ta có
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V &= \frac{xyz}{6} \rightarrow V^2 = \frac{(2xy)(2yz)(2zx)}{288} \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)}{288} = \frac{a^2 b^2 c^2}{288} \rightarrow V \leq \frac{abc\sqrt{2}}{24}. \end{aligned}$$

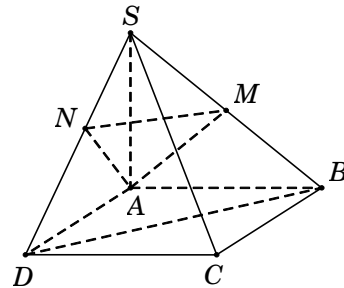
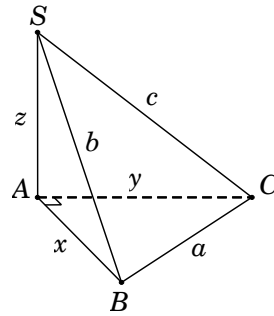
Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z \rightarrow a = b = c$. **Chọn D.**

Câu 127. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là $V_{S.ABD} = \frac{a^3}{6}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} &= \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = mn \\ \rightarrow V_{S.AMN} &= mn \cdot V_{S.ABD} = \frac{mna^3}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } mn = \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot \sqrt{3} \cdot n}{\sqrt{6}} \leq \frac{2m^2 + 3n^2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}m = \sqrt{3}n \\ 2m^2 + 3n^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}; n = \frac{1}{\sqrt{6}}.$ Suy ra $V_{S.AMN} \leq \frac{a^3 \sqrt{6}}{72}$. **Chọn B.**



Câu 128. Đặt a là độ dài cạnh của hình vuông đáy, b là chiều cao của khối hộp với $a, b > 0$.

Theo giả thiết ta có $2a^2 + 4ab = 32 \Leftrightarrow 2a(a + 2b) = 32 \Leftrightarrow a(a + 2b) = 16 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{a} - a\right)$.

Do $b > 0 \longrightarrow \frac{16}{a} - a > 0 \rightarrow a < 4$.

Khi đó thể tích của khối hộp $V = a^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{16}{a} - a\right) = -\frac{1}{2}a^3 + 8a$.

Xét hàm $f(a) = -\frac{1}{2}a^3 + 8a$ trên $(0; 4)$, ta được $\max_{(0;4)} f(a) = f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9}$.

Chọn D.

Câu 129. Gọi $h > 0$ là chiều cao lăng trụ; $a > 0$ là độ dài cạnh đáy.

Theo giả thiết ta có $V = S_{\text{day}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \longrightarrow h = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$.

Diện tích toàn phần của lăng trụ: $S_{\text{tp}} = S_{\text{2 day}} + S_{\text{xung quanh}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có $S_{\text{toàn phần}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$
 $= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a}} = 3\sqrt[3]{6\sqrt{2}V^2}$

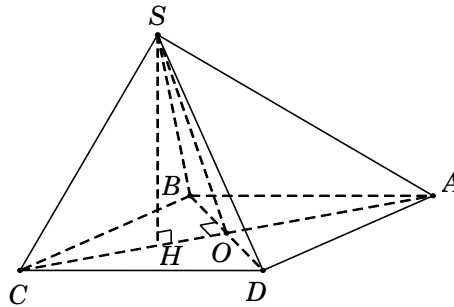
Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}V}{a} = \frac{2\sqrt{3}V}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V}$. **Chọn A.**

Câu 130. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OA = OC$. (1)

Theo bài ra, ta có $\triangle SBD = \triangle CBD \Rightarrow OS = OC$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Suy ra $OA = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$ và $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$.



Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2 \cdot OA \cdot OB = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2}$.

Ta có $SB = SC = SD = 1$, suy ra hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BCD \longrightarrow H \in AC$.

Trong tam giác vuông SAC , ta có $SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$\text{Khi đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2+1)(3-x^2)}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{6} x \sqrt{3-x^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^2+3-x^2}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 131. Gọi M là trung điểm của BC , kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$). (1)

Tam giác ABC cân suy ra $BC \perp AM$. Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (SBC)$ nên $d[A, (SBC)] = AH = 3$.

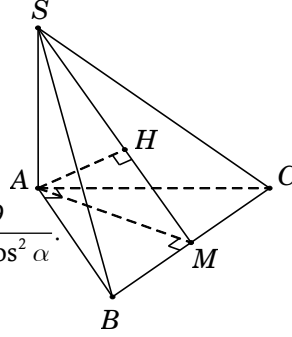
Tam giác vuông AMH , có $AM = \frac{3}{\sin \alpha}$.

Tam giác vuông SAM , có $SA = AM \cdot \tan \alpha = \frac{3}{\cos \alpha}$.

Tam giác vuông cân ABC , $BC = 2AM$.

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = AM^2 = \frac{9}{\sin^2 \alpha} = \frac{9}{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{9}{(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha}.$$



Xét hàm $f(x) = (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x$, ta được $f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Suy ra $V \geq \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Cách 2. Đặt $AB = AC = x$; $SA = y$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} x^2 y$.

Vì AB, AC, AS đôi một vuông góc nên $\frac{1}{9} = \frac{1}{d^2[A, (SBC)]} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{x^4 y^2}}$.

Suy ra $x^2 y \geq 81\sqrt{3} \longrightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6} x^2 y \geq \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 3\sqrt{3} \longrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 132. Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ \widehat{SAB} = 90^\circ \rightarrow AB \perp SA \end{cases} \longrightarrow AB \perp (SAD) \longrightarrow AB \perp SD$.

Tương tự, ta cũng có $BC \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (ABDC)$.

Kẻ $DH \perp SC$ ($H \in SC$) $\longrightarrow DH \perp (SBC)$.

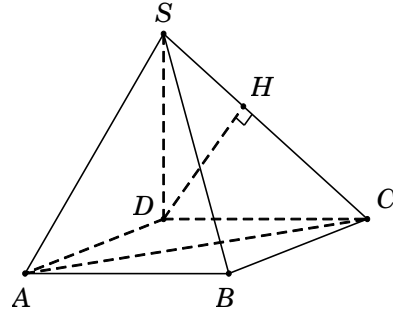
Khi đó $d[A, (SBC)] = d[D, (SBC)] = DH$.

Đặt $AB = x > 0$.

Trong tam giác vuông SDC , có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Suy ra $SD = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$



Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ax^3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$

Xét hàm $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$ trên $(a\sqrt{2}; +\infty)$, ta được $\min_{(a\sqrt{2}; +\infty)} f(x) = f(a\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}a^2$.

Chọn B.

Câu 133. Do tam giác OAB đều cạnh $a \Rightarrow F$ là trung điểm $OB \Rightarrow OF = \frac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$.

Mặt khác, $MB \perp AE$.

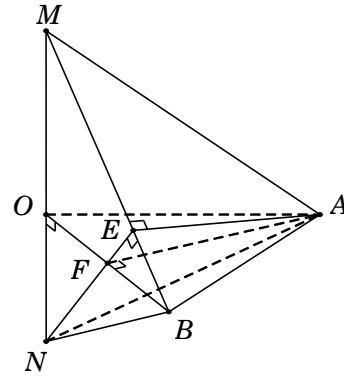
Suy ra $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$.

Suy ra $\triangle OBM \sim \triangle ONF$ nên

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OF} \Rightarrow ON = \frac{OB \cdot OF}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Ta có $V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON}$

$$= \frac{1}{3}S_{\triangle OAB}(OM + ON) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right) \geq \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$



Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 134. Đặt $AM = x$, $AN = y$ suy ra $AM \cdot AN = x \cdot y = 1$.

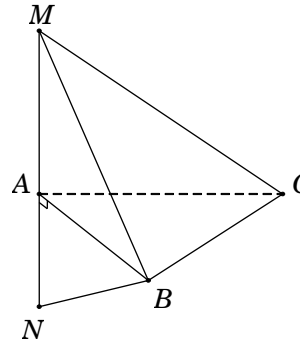
Tam giác vuông ABC , có $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} = 1$.

Ta có $V_{MNBC} = V_{M.ABC} + V_{N.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN)$

$$= \frac{1}{3}(x + y) \xrightarrow{\text{Cosine}} \geq \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{xy} = \frac{2}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. **Chọn D.**



Câu 135. Đặt $AC = x$ ($0 < x < 2$).

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4 - x^2}$.

Tam giác SAB cân tại A , có đường cao AH suy ra H là trung điểm của SB nên $\frac{SH}{SB} = \frac{1}{2}$.

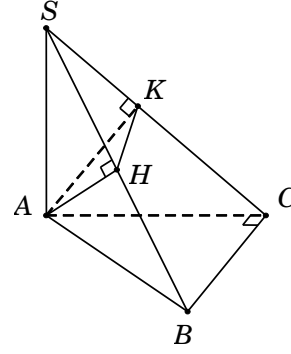
Tam giác vuông SAC , có

$$SA^2 = SK \cdot SC \Rightarrow \frac{SK}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{4 + x^2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x^2 + 4} = \frac{2}{x^2 + 4}$$

$$\longrightarrow V_{S.AHK} = \frac{2}{x^2 + 4} \cdot V_{S.ABC} = \frac{2}{x^2 + 4} \cdot \left(\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x^2 + 4}.$$

Xét hàm $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x^2 + 4}$ trên $(0; 2)$, ta được $\max_{(0; 2)} f(x) = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$. **Chọn A.**

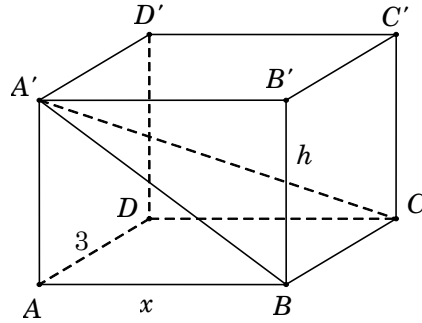


Câu 136. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật suy ra $BC \perp (ABB'A')$.

Khi đó $A'B$ là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABB'A')$.

Suy ra $30^\circ = \widehat{A'C, (ABB'A')} = \widehat{(A'C, A'B)} = \widehat{CA'B}$.

Đặt $BB' = h$ ($h > 0$).



Tam giác vuông $A'B'B$, có $A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{x^2 + h^2}$.

Tam giác vuông $A'BC$, có $\tan \widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} \Leftrightarrow \tan 30^\circ = \frac{3}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Leftrightarrow x^2 + h^2 = 27$.

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = BB' \cdot S_{ABCD} = 3xh$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có $3xh \leq 3 \left(\frac{x^2 + h^2}{2} \right) = 3 \cdot \frac{27}{2} = \frac{81}{2} \Rightarrow V_{\max} = \frac{81}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = h > 0 \\ x^2 + h^2 = 27 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{27}{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 137. Giả sử a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật.

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Tổng diện tích các mặt là $2(ab + bc + ca)$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} 2(ab + bc + ca) = 36 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \end{cases}$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $V = abc$.

● Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 72 \Rightarrow a+b+c = 6\sqrt{2}$.

● Ta có $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (6\sqrt{2}-a)^2 \geq 4[18-a(6\sqrt{2}-a)] \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4\sqrt{2}$.

Khi đó $V = abc = a[18-a(b+c)] = a[18-a(6\sqrt{2}-a)] = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a$ với $a \in [0; 4\sqrt{2}]$, ta được

$$\max_{[0; 4\sqrt{2}]} f(x) = f(\sqrt{2}) = f(4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}.$$

Chọn C.

Nhận xét. Nếu sử dụng $V = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 16\sqrt{2}$ thì sai vì dấu " $=$ " không xảy ra.

Câu hỏi tương tự. Cho hình hộp chữ nhật có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng 32 và độ dài đường chéo bằng $2\sqrt{6}$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối hộp chữ nhật đã cho. ĐS: $V_{\max} = 16$.

Câu 138*. Theo giả thiết ta có cạnh của hình lập phương bằng $a+b+c$.

● Hình hộp chữ nhật có: $V = abc$ và $S_{\text{tp}} = 2(ab+ac+bc)$.

● Hình lập phương có: $V' = (a+b+c)^3$ và $S'_{\text{tp}} = 6(a+b+c)^2$.

Suy ra $S = \frac{S_1}{S_2} = 3 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$.

Ta có $(a+b+c)^3 = 32abc \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{a^3} = 32 \frac{bc}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 1\right)^3 = 32 \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}\right)$.

Đặt $\begin{cases} \frac{b}{a} = x \\ \frac{c}{a} = y \end{cases} \longrightarrow (x+y+1)^3 = 32xy \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y+1)^3}{32}$.

Khi đó $S = 3 \cdot \frac{(x+y+1)^2}{x+y+xy} = 3 \cdot \frac{(x+y+1)^2}{x+y+\frac{(x+y+1)^3}{32}} \xrightarrow{t=x+y+1>1} S = 96 \cdot \frac{t^2}{t^3+32t-32}$.

Ta có $(x+y+1)^3 = 32xy \leq 8(x+y)^2$

$\longrightarrow t^3 \leq 8(t-1)^2 \longleftrightarrow t^3 - 8t^2 + 16t - 8 \leq 0 \longleftrightarrow 2 \leq t \leq 3 + \sqrt{5}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{t^3+32t-32}$ trên đoạn $[2; 3+\sqrt{5}]$, ta được $\max_{[2; 3+\sqrt{5}]} f(t) = f(4) = \frac{1}{10}$.

Chọn D.

Câu 139*. Do G là trọng tâm $\triangle ABC \longrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$

$\longrightarrow \frac{SG}{SI} \cdot \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3} \left(\frac{SA}{SM} \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \overrightarrow{SN} + \frac{SC}{SP} \overrightarrow{SP} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \overrightarrow{SN} + \frac{SC}{SP} \overrightarrow{SP} \right)$.

Do I, M, N, P đồng phẳng nên $\frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} = 6$.

Áp dụng BĐT bunhiacopxki, ta có

$$\left(\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}\right)(SA^2 + SB^2 + SC^2) \geq \left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP}\right)^2$$

Suy ra $T \geq \frac{36}{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \frac{18}{7}$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm. Do đúng với mọi hình chóp nên ta sẽ chọn trường hợp đặc biệt SA, SB, SC đôi một vuông góc và tọa độ hóa như sau: $S \equiv O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$,

$B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Suy ra $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right) \longrightarrow I\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC lần lượt tại $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

$$\longrightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ và } T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$\text{Vì } I\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \in (\alpha) \longrightarrow (\alpha): \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} = 1.$$

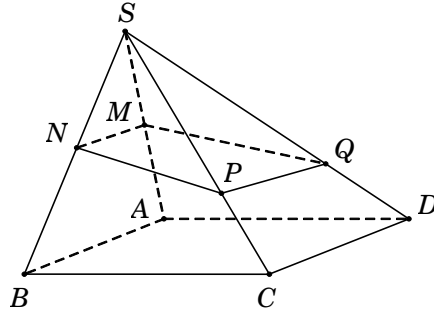
$$\text{Ta có } 1^2 = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \longrightarrow T \geq \frac{18}{7}.$$

Câu 140*. Gọi $a = \frac{SK}{SC}$ ($0 \leq a \leq 1$).

Vì mặt phẳng (α) đi động đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại

hai điểm phân biệt K, Q nên ta có đẳng thức $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SK} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$

$$\longleftrightarrow 2 + \frac{1}{a} = \frac{3}{2} + \frac{SD}{SQ} \longrightarrow \frac{SQ}{SD} = \frac{2a}{2+a}.$$



$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MNKQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{3} - \frac{2}{a+2} \right) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{a+2}.$$

Xét hàm $f(a) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{a+2}$. trên đoạn $[0;1]$, ta được $\max_{[0;1]} f(a) = f(1) = \frac{1}{3}$. **Chọn B.**