

**O Bài 01**

**MẶT CẦU - KHỐI CẦU**

**I. ĐỊNH NGHĨA**

**1. Mặt cầu**

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm  $O$  cố định một khoảng  $R$  không đổi gọi là mặt cầu có tâm là  $O$  và bán kính bằng  $R$ .

Kí hiệu:  $S(O; R) = \{M | OM = R\}$ .

**2. Khối cầu**

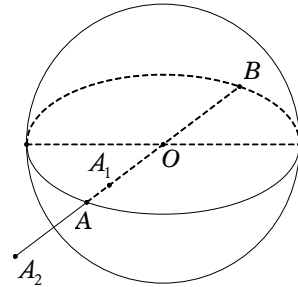
Mặt cầu  $S(O; R)$  cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm  $O$ , bán kính  $R$ .

Kí hiệu:  $B(O; R) = \{M | OM \leq R\}$ .

Nếu  $OA, OB$  là hai bán kính của mặt cầu sao cho  $A, O, B$  thẳng hàng thì đoạn thẳng  $AB$  gọi là đường kính của mặt cầu.

**Định lí.** Cho hai điểm cố định  $A, B$ . Tập hợp các điểm  $M$  trong không gian sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  là mặt cầu đường kính  $AB$ .

- $A \in S(O; R) \Leftrightarrow OA = R$ .
- $OA_1 < R \Leftrightarrow A_1$  nằm trong mặt cầu.
- $OA_2 > R \Leftrightarrow A_2$  nằm ngoài mặt cầu.

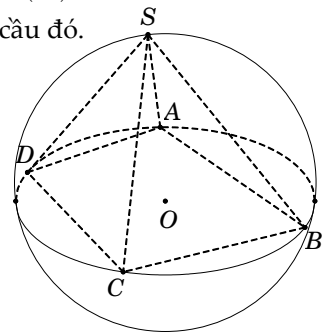


**II. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN**

**Định nghĩa:** Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện  $(H)$  gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện  $(H)$  và khi đó  $(H)$  được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.



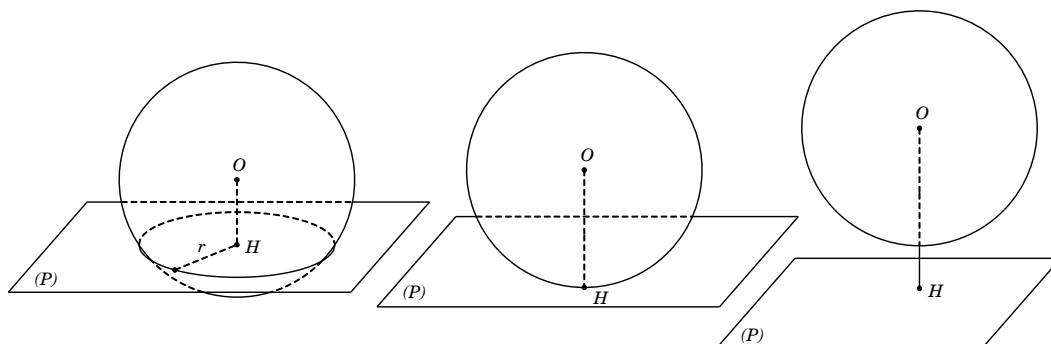
**III. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP**

1. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất cả các mặt của hình chóp.

2. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

**IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG**

Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và mặt phẳng  $(P)$ , gọi  $d$  là khoảng cách từ  $O$  đến  $(P)$  và  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $(P)$ . Khi đó



• Nếu  $d < R$  thì mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $S(O; R)$  theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng  $(P)$  có tâm là  $H$  và có bán kính  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

Khi  $d = 0$  thì mặt phẳng  $(P)$  đi qua tâm  $O$  của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm  $O$  và bán kính  $R$ , đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

• Nếu  $d = R$  thì mặt phẳng  $(P)$  và mặt cầu  $S(O; R)$  có một điểm chung duy nhất  $H$ .

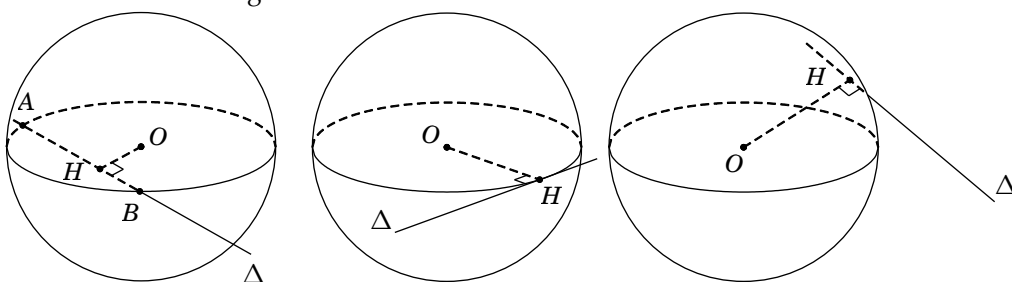
Khi đó ta nói  $(P)$  tiếp xúc với  $S(O; R)$  tại  $H$  và  $(P)$  gọi là tiếp diện của mặt cầu,  $H$  gọi là tiếp điểm.

**Chú ý.** Cho  $H$  là một điểm thuộc mặt cầu  $S(O; R)$  và mặt phẳng  $(P)$  qua  $H$ . Thế thì  $(P)$  tiếp xúc với  $S(O; R) \Leftrightarrow OH \perp (P)$ .

• Nếu  $d > R$  thì mặt phẳng  $(P)$  và mặt cầu  $S(O; R)$  không có điểm chung.

## V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và đường thẳng  $\Delta$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $\Delta$  và  $d = OH$  là khoảng cách từ  $O$  đến  $\Delta$ . Khi đó



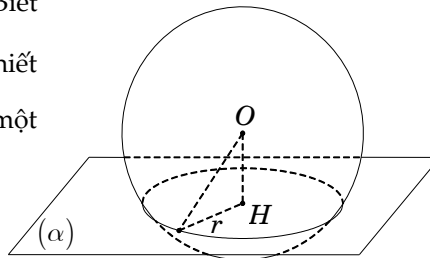
• Nếu  $d < R$  thì  $\Delta$  cắt  $S(O; R)$  tại hai điểm  $A, B$  và  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

• Nếu  $d = R$  thì  $\Delta$  và  $S(O; R)$  chỉ có một điểm chung  $H$ , trong trường hợp này  $\Delta$  gọi là tiếp tuyến của mặt cầu  $S(O; R)$  hay  $\Delta$  tiếp xúc với  $S(O; R)$  và  $H$  là tiếp điểm.

• Nếu  $d > R$  thì  $\Delta$  và  $S(O; R)$  không có điểm chung.

## VI. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

- Thể tích khối cầu:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .



**Câu 6.** Cho mặt cầu tâm  $I$  bán kính  $R = 2,6\text{cm}$ . Một mặt phẳng cắt mặt cầu và cách tâm  $I$  một khoảng bằng  $2,4\text{cm}$ . Thế thì bán kính của đường tròn do mặt phẳng cắt mặt cầu tạo nên là:

- A.  $1,2\text{cm}$ .      B.  $1,3\text{cm}$ .      C.  $1\text{cm}$ .      D.  $1,4\text{cm}$ .

**Câu 7.** Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là  $p$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là  $\frac{p}{2}$ . Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng:

- A.  $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$ .      B.  $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ .      C.  $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$ .      D.  $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$ .

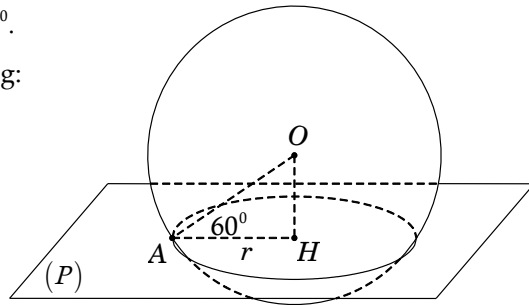
**Câu 8.** Một hình cầu có bán kính là  $2\text{m}$ , một mặt phẳng cắt hình cầu theo một hình tròn có độ dài là  $2,4\pi\text{m}$ . Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là:

- A.  $1,6\text{m}$ .      B.  $1,5\text{m}$ .      C.  $1,4\text{m}$ .      D.  $1,7\text{m}$ .

**Câu 9.** Cho mặt cầu  $S(O; R)$ ,  $A$  là một điểm ở trên mặt cầu  $(S)$  và  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$  sao cho góc giữa  $OA$  và  $(P)$  bằng  $60^\circ$ .

Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

- A.  $\pi R^2$ .      B.  $\frac{\pi R^2}{2}$ .  
C.  $\frac{\pi R^2}{4}$ .      D.  $\frac{\pi R^2}{8}$ .



**Câu 10.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng  $a$ . Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp  $S.ABCD$  có bán kính bằng:

- A.  $\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$ .      B.  $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ .      C.  $\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ .      D.  $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$ .

**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  và  $BA = BC = a$ . Cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  là:

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $3a$ .      C.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .      D.  $a\sqrt{6}$ .

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Cạnh bên  $SA = a\sqrt{6}$  và vuông góc với đáy  $(ABCD)$ . Tính theo  $a$  diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  ta được:

- A.  $a^2\sqrt{2}$ .      B.  $8\pi a^2$ .      C.  $2a^2$ .      D.  $2\pi a^2$ .

**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ . Cạnh bên  $SA = a\sqrt{2}$ , hình chiếu của điểm  $S$  lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền  $AC$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$  là:

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 14.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ .

Gọi  $h$  là chiều cao của khối chóp và  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số  $\frac{R}{h}$  bằng:

- A.  $\frac{7}{12}$       B.  $\frac{7}{24}$       C.  $\frac{7}{6}$       D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc  $60^\circ$ . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABCD$  là:

- A.  $\frac{4\pi a^3}{3}$       B.  $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$       C.  $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$       D.  $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$ .

**Câu 16.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân, đáy lớn  $AD = 2a$ ,  $AB = BC = CD = a$ . Cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với đáy. Gọi  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABCD$ . Tỉ số  $\frac{R}{a}$  nhận giá trị nào sau đây?

- A.  $a\sqrt{2}$       B.  $a$       C. 1      D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $AD = a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy và góc giữa  $SC$  với đáy bằng  $45^\circ$ . Gọi  $N$  là trung điểm  $SA$ ,  $h$  là chiều cao của khối chóp  $S.ABCD$  và  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $N.ABC$ . Biểu thức liên hệ giữa  $R$  và  $h$  là:

- A.  $4R = \sqrt{5}h$       B.  $\sqrt{5}R = 4h$       C.  $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h$       D.  $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}h$ .

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Đường thẳng  $SA = a\sqrt{2}$  vuông góc với đáy ( $ABCD$ ). Gọi  $M$  là trung điểm  $SC$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $A$  và  $M$  đồng thời song song với  $BD$  cắt  $SB$ ,  $SD$  lần lượt tại  $E$ ,  $F$ . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm  $S$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $F$  nhận giá trị nào sau đây?

- A.  $a\sqrt{2}$       B.  $a$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{a}{2}$ .

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Đường thẳng  $SA$  vuông góc với đáy ( $ABCD$ ). Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên đường thẳng  $SB$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $HBCD$  có giá trị nào sau đây?

- A.  $a\sqrt{2}$       B.  $a$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{a}{2}$ .

**Câu 20.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  và  $BC = a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy ( $ABC$ ). Gọi  $H$ ,  $K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên cạnh bên  $SB$  và  $SC$ . Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A.HKCB$  là:

- A.  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$       B.  $\sqrt{2}\pi a^3$       C.  $\frac{\pi a^3}{6}$       D.  $\frac{\pi a^3}{2}$ .

**Câu 21.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ ,  $BD = a$ . Hình chiếu vuông góc  $H$  của đỉnh  $S$  trên mặt phẳng đáy  $(ABCD)$  là trung điểm  $OD$ . Đường thẳng  $SD$  tạo với mặt đáy một góc bằng  $60^\circ$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  nhận giá trị nào sau đây?

- A.  $\frac{a}{4}$ .                      B.  $\frac{a}{3}$ .                      C.  $\frac{a}{2}$ .                      D.  $a$ .

**Câu 22.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu vuông góc của đỉnh  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm  $H$  của cạnh  $BC$ . Góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ ,  $R$  là bán kính mặt cầu có tâm  $G$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(SAB)$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $R = d[G, (SAB)]$ .                      B.  $3\sqrt{13}R = 2SH$ .  
C.  $\frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$ .                      D.  $\frac{R}{a} = \sqrt{13}$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác vuông tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  là:

- A.  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .                      B.  $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$ .                      C.  $\frac{\pi a^3}{6}$ .                      D.  $\frac{\pi a^3}{3}$ .

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là một tam giác đều cạnh bằng  $a$ . Cạnh bên  $SA = a\sqrt{3}$  và vuông góc với đáy  $(ABC)$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$  là:

- A.  $\frac{a}{2}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{39}}{6}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{15}}{4}$ .

**Câu 25.** Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = a$ ,  $OB = 2a$ ,  $OC = 3a$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $O.ABC$  là:

- A.  $a\sqrt{3}$                       B.  $\frac{3a}{2}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = AC = a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy  $(ABC)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $SI$  tạo với đáy  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$ . Gọi  $S, V$  lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ . Tỉ số  $\frac{V}{S}$  bằng ?

- A.  $a\sqrt{14}$                       B.  $\frac{a\sqrt{14}}{12}$ .                      C.  $\frac{3a\sqrt{14}}{4}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ .

**Câu 27.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Cạnh bên  $SA = a\sqrt{3}$  và vuông góc với đáy  $(ABCD)$ .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ACD$  nhận giá trị:

- A.  $\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{2a}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{13}}{3}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{13}}{3\sqrt{3}}$ .

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $C$  và  $BC = a$ . Mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với đáy,  $SA = SB = a$ ,  $\widehat{ASB} = 120^\circ$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  là:

- A.  $\frac{a}{4}$ .      B.  $\frac{a}{2}$ .      C.  $a$ .      D.  $2a$ .

**Câu 29.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ , góc  $\widehat{ACB}$  bằng  $30^\circ$ . Góc giữa đường thẳng  $AB'$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $A'ABC$  bằng:

- A.  $\frac{3a}{4}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{21}}{4}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{21}}{2}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{21}}{8}$ .

**Câu 30.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Mặt phẳng  $(AB'C')$  tạo với mặt đáy góc  $60^\circ$  và điểm  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $G.A'B'C'$  bằng:

- A.  $\frac{85a}{108}$ .      B.  $\frac{3a}{2}$ .      C.  $\frac{3a}{4}$ .      D.  $\frac{31a}{36}$ .

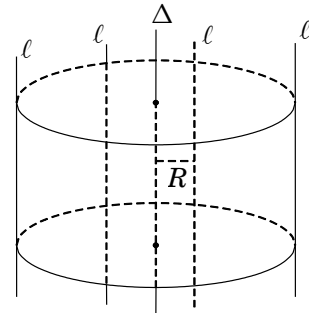
## ○ Bài 02

### MẶT TRỤ – HÌNH TRỤ – KHỐI TRỤ

#### I. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Cho hai đường thẳng  $\ell$  và  $\Delta$  sao cho  $\ell$  song song với  $\Delta$  và  $d[\ell, \Delta] = R$ . Khi ta quay  $\ell$  quanh trục  $\Delta$  một góc  $360^\circ$  thì  $\ell$  tạo thành một mặt trụ tròn xoay  $(T)$  (hoặc đơn giản hơn là mặt trụ).

- $\Delta$  gọi là trục của mặt trụ  $(T)$ .
- $\ell$  gọi là đường sinh của mặt trụ  $(T)$ .
- $R$  gọi là bán kính của mặt trụ  $(T)$ .



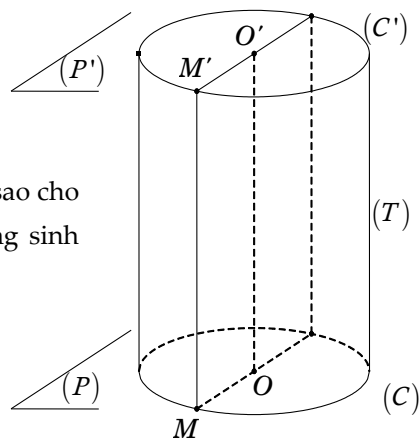
#### II. HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

##### 1. Định nghĩa hình trụ

Cắt mặt trụ  $(T)$  trục  $\Delta$ , bán kính  $R$  bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(P')$  cùng vuông góc với  $\Delta$ , ta được giao tuyến là hai đường tròn  $(C)$  và  $(C')$ .

• Phần của mặt trụ  $(T)$  nằm giữa  $(P)$  và  $(P')$  cùng với hai hình tròn xác định bởi  $(C)$  và  $(C')$  gọi là hình trụ.

- Hai đường tròn  $(C)$  và  $(C')$  gọi là hai đường tròn đáy của hình trụ.
- $OO'$  gọi là trục của hình trụ.
- Độ dài  $OO'$  gọi là chiều cao của hình trụ.
- Phần giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Với mỗi điểm  $M \in (C)$ , có một điểm  $M' \in (C')$  sao cho  $MM' \parallel OO'$ . Các đoạn thẳng như  $MM'$  gọi là đường sinh của hình trụ.



## 2. Nhận xét

Các đường sinh của hình trụ đều bằng nhau và bằng với trục của hình trụ.

Các thiết diện qua trục của hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

Thiết diện vuông góc với trục của hình trụ là một hình tròn bằng hình tròn đáy.

Nếu một điểm  $M$  di động trong không gian có hình chiếu vuông góc  $M'$  lên một mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $M'$  di động trên một đường tròn  $(C)$  cố định thì  $M$  thuộc một mặt trụ cố định  $(T)$  chứa  $(C)$  và có trục vuông góc  $(\alpha)$ .

## 3. Khối trụ

**Định nghĩa.** Hình trụ cùng với phần bên trong nó được gọi là khối trụ.

## III. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính  $R$  và chiều cao  $h$  là:  $S_{xq} = 2\pi Rh$ .

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh hình trụ với diện tích hai đáy của nó.

Thể tích của khối trụ có bán kính  $R$  và chiều cao  $h$  là:  $V = \pi R^2 h$ .

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Câu 31.** Xét các mệnh đề

(I) Tập hợp các đường thẳng  $d$  thay đổi nhưng luôn luôn song song và cách đường thẳng  $\Delta$  cố định một khoảng không đổi là một mặt trụ.

(II) Hai điểm  $A, B$  cố định. Tập hợp các điểm  $M$  trong không gian mà diện tích tam giác  $MAB$  không đổi là một mặt trụ.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

- |                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| A. Chỉ (I).        | B. Chỉ (II).              |
| C. Cả (I) và (II). | D. Không có mệnh đề đúng. |

**Câu 32.** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Thể tích khối trụ bằng:

- |                |                          |                          |                          |
|----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| A. $\pi a^3$ . | B. $\frac{\pi a^3}{2}$ . | C. $\frac{\pi a^3}{3}$ . | D. $\frac{\pi a^3}{4}$ . |
|----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|



**Câu 33.** Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng  $R$  và có chiều cao bằng  $R\sqrt{3}$ . Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lần lượt có giá trị là:

- A.  $2(\sqrt{3}+1)\pi R^2$  và  $2\sqrt{3}\pi R^2$ .      B.  $2\sqrt{3}\pi R^2$  và  $2(\sqrt{3}+1)\pi R^2$ .  
C.  $2\sqrt{3}\pi R^2$  và  $2\pi R^2$ .      D.  $2\sqrt{3}\pi R^2$  và  $2\sqrt{3}\pi R^2 + R^2$ .

**Câu 34.** Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh có cạnh bằng  $2R$ . Diện tích toàn phần của khối trụ bằng:

- A.  $4\pi R^2$ .      B.  $6\pi R^2$ .      C.  $8\pi R^2$ .      D.  $2\pi R^2$ .

**Câu 35.** Một hình trụ có bán kính đáy  $R = 70\text{cm}$ , chiều cao hình trụ  $h = 20\text{cm}$ . Một hình vuông có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục hình trụ. Khi đó cạnh của hình vuông bằng bao nhiêu?

- A.  $80\text{cm}$ .      B.  $100\text{cm}$ .      C.  $100\sqrt{2}\text{cm}$ .      D.  $140\text{cm}$ .

**Câu 36.** Bán kính đáy hình trụ bằng  $4\text{cm}$ , chiều cao bằng  $6\text{cm}$ . Độ dài đường chéo của thiết diện qua trục bằng:

- A.  $10\text{cm}$ .      B.  $6\text{cm}$ .      C.  $5\text{cm}$ .      D.  $8\text{cm}$ .

**Câu 37.** Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng  $R$  và có chiều cao bằng  $R\sqrt{3}$ . Hai điểm  $A, B$  lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa  $AB$  và trục của hình trụ bằng  $30^\circ$ . Khoảng cách giữa  $AB$  và trục của hình trụ bằng:

- A.  $R$ .      B.  $R\sqrt{3}$ .      C.  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\frac{R\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 38.** Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm  $O$  và  $O'$ , bán kính bằng chiều cao và bằng  $a$ . Trên đường tròn tâm  $O$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn tâm  $O'$  lấy điểm  $B$  sao cho  $AB = 2a$ . Thể tích của khối tứ diện  $OO'AB$  bằng:

- A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ .

**Câu 39.** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi  $A, B$  là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ . Biết  $AB = 2a$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OO'$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Bán kính đáy bằng:

- A.  $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{14}}{3}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{14}}{9}$ .

**Câu 40. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Trong không gian, cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1$  và  $AD = 2$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục  $MN$ , ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

- A.  $2\pi$ .      B.  $3\pi$ .      C.  $4\pi$ .      D.  $8\pi$ .

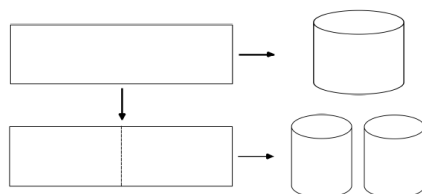
**Câu 41.** Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là  $a$  và  $2a$  ( $a$  là độ dài có sẵn). Người ta cuộn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng  $2a$  thì thể tích của nó bằng:

- A.  $\frac{a^3}{\pi}$ .      B.  $\pi a^3$ .      C.  $\frac{a^3}{2\pi}$ .      D.  $2\pi a^3$ .

**Câu 42.** Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là  $a$  và  $2a$  ( $a$  là độ dài có sẵn). Người ta cuộn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chiều dài đường sinh bằng  $2a$  thì bán kính đáy bằng:

- A.  $\frac{a}{\pi}$ .      B.  $\frac{a}{2}$ .      C.  $\frac{a}{2\pi}$ .      D.  $2\pi a$ .

**Câu 43. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước  $50\text{cm} \times 240\text{cm}$ , người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng  $50\text{cm}$ , theo hai cách sau (xem hình minh họa sau đây):



- **Cách 1:** Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- **Cách 2:** Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu  $V_1$  là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và  $V_2$  là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Khi đó tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$  bằng:

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B. 1.      C. 2.      D. 4.

**Câu 44.** Một hộp sữa hình trụ có thể tích  $V$  (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy  $R$  và đường cao  $h$  bằng:

- A.  $h = R$ .      B.  $h = \sqrt{2}R$ .      C.  $h = \sqrt{3}R$ .      D.  $h = 2R$ .

**Câu 45.** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ , chiều cao  $2R$  và bán kính đáy  $R$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua trung điểm của  $OO'$  và tạo với  $OO'$  một góc  $30^\circ$ . Hỏi  $(\alpha)$  cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$ .      C.  $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{2R}{3}$ .

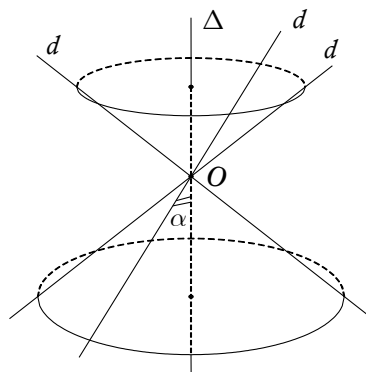
## ○ Bài 03

### MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

#### I. ĐỊNH NGHĨA MẶT NÓN

Cho đường thẳng  $\Delta$ . Xét một đường thẳng  $d$  cắt  $\Delta$  tại  $O$  tạo thành một góc  $\alpha$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng  $d$  như thế khi quay quanh  $\Delta$  gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản hơn là mặt nón).

- $\Delta$  gọi là trục của mặt nón.
- $d$  gọi là đường sinh của mặt nón.
- $O$  gọi là đỉnh của mặt nón.
- Góc  $2\alpha$  gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.



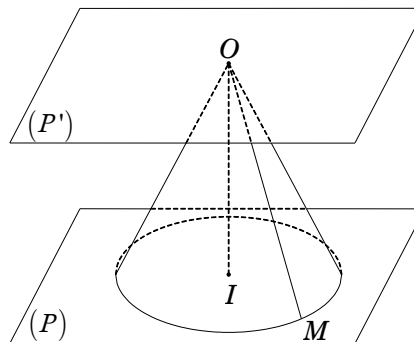
#### II. HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

##### 1. Hình nón

Cho mặt nón  $N$  với trục  $\Delta$ , đỉnh  $O$ , góc ở đỉnh  $2\alpha$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng vuông góc với  $\Delta$  tại điểm  $I$  khác  $O$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt nón theo một đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$ . Lại gọi  $(P')$  là mặt phẳng vuông góc với  $\Delta$  tại  $O$ .

• Phần của mặt nón  $N$  giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(P')$  cùng với hình tròn xác định bởi  $(C)$  được gọi là hình nón.

- $O$  gọi là đỉnh của hình nón.
- Đường tròn  $(C)$  gọi là đường tròn đáy của hình nón.
- Với mỗi điểm  $M$  nằm trên đường tròn  $(C)$ , đoạn thẳng  $OM$  gọi là đường sinh của hình nón.
- Đoạn thẳng  $OI$  gọi là trục của hình nón, độ dài  $OI$  gọi là chiều cao của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh  $O$  đến mặt đáy.)



##### 2. Khối nón

Một hình nón chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của nó. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

#### III. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH HÌNH NÓN VÀ THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là nội tiếp một hình nón nếu:

- Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón.
- Đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

##### 1. Định nghĩa

Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của một hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn.

## 2. Định lí 1

Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy  $R$  và đường sinh  $\ell$  là

$$S_{xq} = \pi R \ell.$$

## 3. Định lí 2

Thể tích của khối nón có bán kính đáy  $R$  và chiều cao  $h$  là

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Câu 46.** Hình nón có đường sinh  $\ell = 2a$  và hợp với đáy góc  $\alpha = 60^\circ$ . Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

- A.  $4\pi a^2$ .      B.  $3\pi a^2$ .      C.  $2\pi a^2$ .      D.  $\pi a^2$ .

**Câu 47.** Cho hình nón đỉnh  $S$  có bán kính đáy  $R = a\sqrt{2}$ , góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$ . Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

- A.  $4\pi a^2$ .      B.  $3\pi a^2$ .      C.  $2\pi a^2$ .      D.  $\pi a^2$ .

**Câu 48. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Trong không gian, cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$  và  $AC = a\sqrt{3}$ . Độ dài đường sinh  $\ell$  của hình nón nhận được khi quay tam giác  $ABC$  xung quanh trục  $AB$  bằng:

- A.  $\ell = a$ .      B.  $\ell = a\sqrt{2}$ .      C.  $\ell = a\sqrt{3}$ .      D.  $\ell = 2a$ .

**Câu 49.** Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng  $a$ . Diện tích toàn phần và thể tích hình nón có giá trị lần lượt là:

- A.  $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$  và  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$  và  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$ .  
C.  $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$  và  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$  và  $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ .

**Câu 50.** Cạnh bên của một hình nón bằng  $2a$ . Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Diện tích toàn phần của hình nón là:

- A.  $\pi^2(3+\sqrt{3})$ .      B.  $2\pi a^2(3+\sqrt{3})$ .      C.  $6\pi a^2$ .      D.  $\pi a^2(3+2\sqrt{3})$ .

**Câu 51.** Cho mặt cầu tâm  $O$ , bán kính  $R = a$ . Một hình nón có đỉnh là  $S$  ở trên mặt cầu và đáy là đường tròn tương giao của mặt cầu đó với mặt phẳng vuông góc với đường thẳng  $SO$  tại  $H$  sao cho  $SH = \frac{3a}{2}$ . Độ dài đường sinh  $\ell$  của hình nón bằng:

- A.  $\ell = a$ .      B.  $\ell = a\sqrt{2}$ .      C.  $\ell = a\sqrt{3}$ .      D.  $\ell = 2a$ .

**Câu 52.** Cho hình nón đỉnh  $S$  có đáy là hình tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Dựng hai đường sinh  $SA$  và  $SB$ , biết  $AB$  chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng  $60^\circ$ , khoảng cách từ tâm  $O$  đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $\frac{R}{2}$ .

Đường cao  $h$  của hình nón bằng:

- A.  $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$ .      B.  $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $h = a\sqrt{3}$ .      D.  $h = a\sqrt{2}$ .

**Câu 53.** Cho hình nón đỉnh  $S$  có đáy là hình tròn tâm  $O$ . Dựng hai đường sinh  $SA$  và  $SB$ , biết tam giác  $SAB$  vuông và có diện tích bằng  $4a^2$ . Góc tạo bởi giữa trục  $SO$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $30^\circ$ . Đường cao  $h$  của hình nón bằng:

- A.  $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .      B.  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $h = a\sqrt{3}$ .      D.  $h = a\sqrt{2}$ .

**Câu 54.** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đường cao  $SO$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$  bằng  $a$  và  $\widehat{SAO} = 30^\circ$ ,  $\widehat{SAB} = 60^\circ$ . Độ dài đường sinh  $\ell$  của hình nón bằng:

- A.  $\ell = a$ .      B.  $\ell = a\sqrt{2}$ .      C.  $\ell = a\sqrt{3}$ .      D.  $\ell = 2a$ .

**Câu 55.** Một hình nón có bán kính đáy  $R$ , góc ở đỉnh là  $60^\circ$ . Một thiết diện qua đỉnh nón chắn trên đáy một cung có số đo  $90^\circ$ . Diện tích của thiết diện là:

- A.  $\frac{R^2\sqrt{7}}{2}$ .      B.  $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\frac{3R^2}{2}$ .      D.  $\frac{R^2\sqrt{6}}{2}$ .

**Câu 56.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , khoảng cách từ tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp của đáy  $ABC$  đến một mặt bên là  $\frac{a}{2}$ . Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  bằng:

- A.  $\frac{4\pi a^3}{3}$ .      B.  $\frac{4\pi a^3}{9}$ .      C.  $\frac{4\pi a^3}{27}$ .      D.  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .

**Câu 57.** Cho hình nón có đỉnh  $S$ , đường cao  $SO = h$ , đường sinh  $SA$ . Nội tiếp hình nón là một hình chóp đỉnh  $S$ , đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Nửa góc ở đỉnh của hình nón có tan bằng:

- A.  $\frac{h\sqrt{2}}{2a}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2h}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{2}}{h}$ .      D.  $\frac{h\sqrt{2}}{a}$ .

**Câu 58.** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ , chiều cao  $R\sqrt{3}$  và bán kính đáy  $R$ . Một hình nón có đỉnh là  $O'$  và đáy là hình tròn  $(O; R)$ . Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng:

- A. 2.      B.  $\sqrt{2}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D. 3.

**Câu 59.** Một hình nón có đường cao bằng  $9\text{cm}$  nội tiếp trong một hình cầu bán kính bằng  $5\text{cm}$ . Tỷ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là:

- A.  $\frac{27}{500}$ .      B.  $\frac{81}{500}$ .      C.  $\frac{27}{125}$ .      D.  $\frac{81}{125}$ .

**Câu 60.** Cho hình nón có bán kính đáy là  $5a$ , độ dài đường sinh là  $13a$ . Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng:

- A.  $\frac{4000\pi a^3}{81}$ .      B.  $\frac{4000\pi a^3}{27}$ .      C.  $\frac{40\pi a^3}{9}$ .      D.  $\frac{400\pi a^3}{27}$ .

**Câu 1. Chọn C.**

**Câu 2.** Vì  $I$  là hình chiếu của  $O$  trên  $(P)$  nên  $d[O, (P)] = OI$  mà  $d[O, (P)] = R$  nên  $I$  là tiếp điểm của  $(P)$  và  $(S)$ .

Đường thẳng  $OM$  cắt  $(P)$  tại  $N$  nên  $IN$  vuông góc với  $OI$  tại  $I$ . Suy ra  $IN$  tiếp xúc với  $(S)$ .

Tam giác  $OIN$  vuông tại  $I$  nên  $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$ . **Chọn D.**

**Câu 3.** Vì  $AB$  tiếp xúc với  $(S)$  tại  $B$  nên  $AB \perp OB$ .

Suy ra  $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$ . **Chọn D.**

**Câu 4.** Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  lên  $BC$ .

Ta có  $OB = OC = R$ , suy ra  $H$  là trung điểm của  $BC$  nên  $HC = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

Suy ra  $OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \frac{R}{2}$ . **Chọn B.**

**Câu 5.** Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  xuống  $(\alpha)$ .

Ta có  $d[O, (\alpha)] = OH = \frac{R}{2} < R$  nên  $(\alpha)$  cắt  $S(O; R)$  theo đường tròn  $C(H; r)$ .

Bán kính đường tròn  $C(H; r)$  là  $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

Suy ra đường kính bằng  $R\sqrt{3}$ . **Chọn B.**

**Câu 6.** Mặt phẳng cắt mặt cầu  $S(I; 2,6\text{cm})$  theo một đường tròn  $(H; r)$ .

Vậy  $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{(2,6)^2 - (2,4)^2} = 1\text{cm}$ . **Chọn C.**

**Câu 7.** Hình tròn lớn của hình cầu  $S$  là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi  $R$  là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là  $R$ .

Theo giả thiết, ta có  $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$  và  $\pi r^2 = \frac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$ .

Suy ra  $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$ . **Chọn D.**

**Câu 8.** Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là  $d$ , ta có  $d^2 = R^2 - r^2$ .

Theo giả thiết  $R = 2\text{m}$  và  $2\pi r = 2,4\pi\text{m} \Rightarrow r = \frac{2,4\pi}{2\pi} = 1,2\text{m}$ .

Vậy  $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 1,6\text{m}$ . **Chọn A.**

**Câu 9.** Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $(P)$  thì

- $H$  là tâm của đường tròn giao tuyến của  $(P)$  và  $(S)$ .
- $\widehat{OA, (P)} = \widehat{(OA, AH)} = 60^\circ$ .

Bán kính của đường tròn giao tuyến:  $r = HA = OA \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$ .

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến:  $\pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$ . **Chọn C.**

**Câu 10.**

Gọi  $H$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ .

Ta có  $SH$  là trục đường tròn ngoại tiếp đáy.

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  và  $I$  là chân đường phân giác trong của góc  $\widehat{SMH}$  ( $I \in SH$ ).

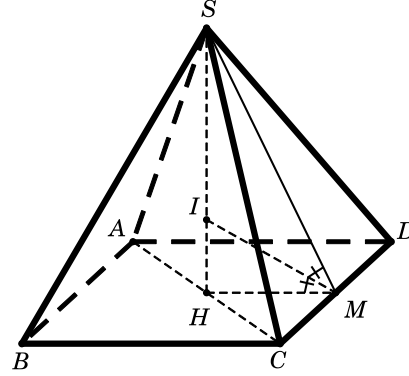
Suy ra  $I$  là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính  $r = IH$ .

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MH = \frac{a}{2}.$$

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH \cdot MH}{MS + MH} = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}. \text{ Chọn B.}$$



**Câu 11.** Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ , suy ra  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Gọi  $I$  là trung điểm  $SC$ , suy ra

$$IM \parallel SA \text{ nên } IM \perp (ABC).$$

Do đó  $IM$  là trục của  $\triangle ABC$ , suy ra

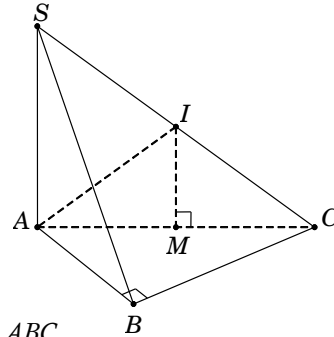
$$IA = IB = IC. \quad (1)$$

Hơn nữa, tam giác  $SAC$  vuông tại  $A$  có  $I$  là trung điểm  $SC$  nên  $IS = IC = IA$ .  $(2)$

Từ (1) và (2), ta có  $IS = IA = IB = IC$

hay  $I$  là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

$$\text{Vậy bán kính } R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Chọn C.}$$



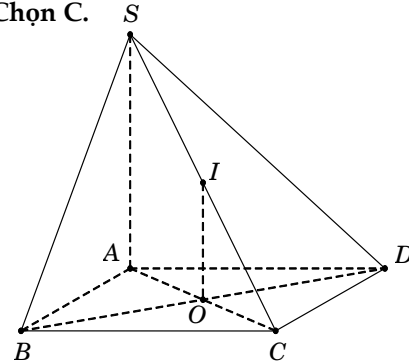
**Câu 12.** Gọi  $O = AC \cap BD$ , suy ra  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông  $ABCD$ .

Gọi  $I$  là trung điểm  $SC$ , suy ra

$$IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD).$$

Do đó  $IO$  là trục của hình vuông  $ABCD$ , suy ra

$$IA = IB = IC = ID. \quad (1)$$



Tam giác  $SAC$  vuông tại  $A$  có  $I$  là trung điểm cạnh huyền  $SC$  nên  $IS = IC = IA$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có:  $R = IA = IB = IC = ID = IS = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$ .

Vậy diện tích mặt cầu  $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$  (đvdt). **Chọn B.**

**Câu 13.** Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ , suy ra  $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$ .

Tam giác  $SAC$  có  $SM$  là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác  $SAC$  cân tại  $S$ .

Ta có  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ , suy ra tam giác  $SAC$  đều.

Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SAC$ , suy ra  $GS = GA = GC$ . (1)

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ , có  $M$  là trung điểm cạnh huyền  $AC$  nên  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

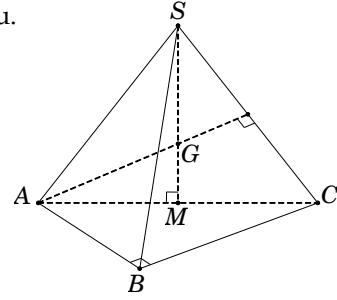
Lại có  $SM \perp (ABC)$  nên  $SM$  là trục của tam giác  $ABC$ .

Mà  $G$  thuộc  $SM$  nên suy ra  $GA = GB = GC$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$GS = GA = GB = GC$  hay  $G$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$ .

Bán kính mặt cầu  $R = GS = \frac{2}{3}SM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . **Chọn B.**



**Câu 14.** Gọi  $O$  là tâm  $\triangle ABC$ , suy ra  $SO \perp (ABC)$  và  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Trong  $\triangle SOA$ , ta có  $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$ .

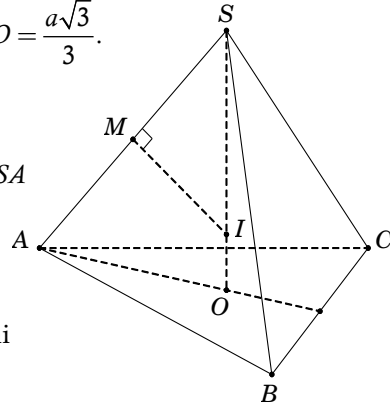
Trong mặt phẳng  $SOA$ , kẻ trung trực  $d$  của đoạn  $SA$  cắt  $SO$  tại  $I$ , suy ra

- $I \in d$  nên  $IS = IA$ .
- $I \in SO$  nên  $IA = IB = IC$ .

Do đó  $IA = IB = IC = IS$  nên  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$ .

Gọi  $M$  là trung điểm  $SA$ , ta có  $\triangle SMI \sim \triangle SOA$  nên

$$R = SI = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}. \text{ Vậy } \frac{R}{h} = \frac{7}{6}. \text{ Chọn C.}$$



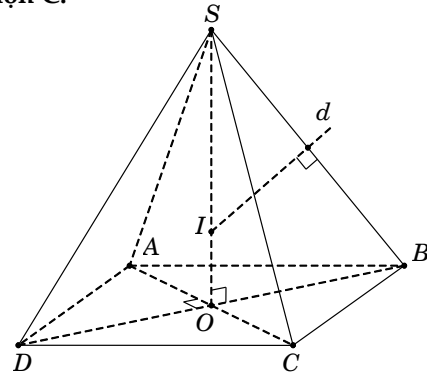
**Câu 15.** Gọi  $O = AC \cap BD$ , suy ra  $SO \perp (ABCD)$ .

Ta có  $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$ .

Trong  $\triangle SOB$ , ta có  $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

Ta có  $SO$  là trục của hình vuông  $ABCD$ .

Trong mặt phẳng  $SOB$ , kẻ đường trung trực  $d$  của đoạn  $SB$ .





$$\text{Gọi } I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IB \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R.$$

$$\text{Xét } \triangle SBD \text{ có } \begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle SBD \text{ đều.}$$

Do đó  $d$  cũng là đường trung tuyến của  $\triangle SBD$ . Suy ra  $I$  là trọng tâm  $\triangle SBD$ .

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Suy ra } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}. \text{ Chọn D.}$$

**Câu 16.** Ta có  $SA \perp AD$  hay  $\widehat{SAD} = 90^\circ$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $AD$ .

Ta có  $EA = AB = BC$  nên  $ABCE$  là hình thoi.

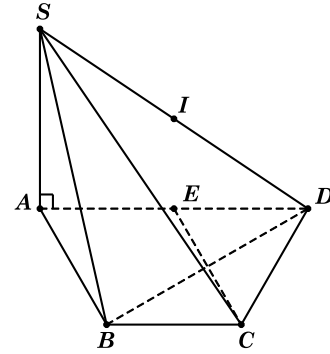
$$\text{Suy ra } CE = EA = \frac{1}{2}AD.$$

Do đó tam giác  $ACD$  vuông tại  $C$ . Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC \text{ hay } \widehat{SCD} = 90^\circ.$$

Tương tự, ta cũng có  $SB \perp BD$  hay  $\widehat{SBD} = 90^\circ$ .

Ta có  $\widehat{SAD} = \widehat{SBD} = \widehat{SCD} = 90^\circ$  nên khối chóp  $S.ABCD$  nhận trung điểm  $I$  của  $SD$  làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính  $R = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$ . Suy ra  $\frac{R}{a} = \sqrt{2}$ . **Chọn D.**



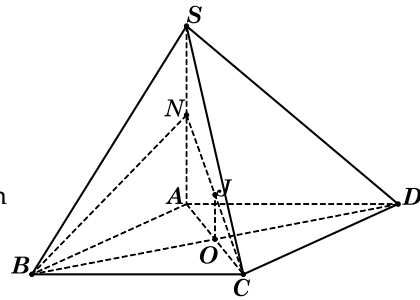
**Câu 17.** Ta có  $45^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$ .

Trong  $\triangle SAC$ , ta có  $h = SA = a\sqrt{5}$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BN.$$

Lại có  $NA \perp AC$ . Do đó hai điểm  $A, B$  cùng nhìn đoạn  $NC$  dưới một góc vuông nên hình chóp  $N.ABC$  nội tiếp mặt cầu tâm  $J$  là trung điểm  $NC$ , bán kính

$$R = JN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}. \text{ Chọn A.}$$



**Câu 18.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $BD$  cắt  $SB, SD$  lần lượt tại  $E, F$  nên  $EF \parallel BD$ .

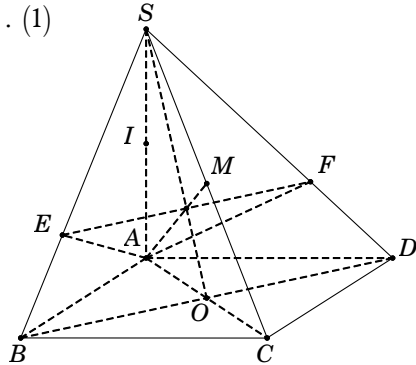
$\triangle SAC$  cân tại  $A$ , trung tuyến  $AM$  nên  $AM \perp SC$ . (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Do đó  $EF \perp SC$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE$ . (\*)

$$\text{Lại có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE. (**)$$



Từ (\*) và (\*\*), suy ra  $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$ . Tương tự ta cũng có  $AF \perp SD$ .

Do đó  $\widehat{SEA} = \widehat{SMA} = \widehat{SFA} = 90^\circ$  nên năm điểm  $S, A, E, M, F$  cùng thuộc mặt cầu tâm  $I$  là trung điểm của  $SA$ , bán kính  $R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 19.** Gọi  $O = AC \cap BD$ .

Vì  $ABCD$  là hình vuông nên  $OB = OD = OC$ . (1)

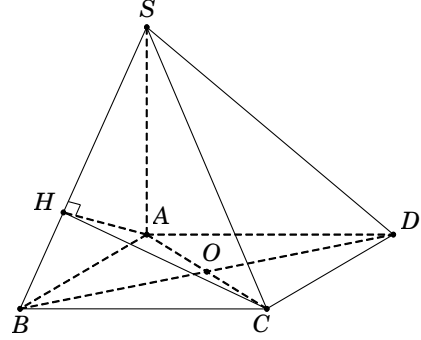
Ta có  $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AH$ .

Lại có  $AH \perp SB$ .

Suy ra  $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$  nên tam giác  $AHC$  vuông tại  $H$  và có  $O$  là trung điểm cạnh huyền  $AC$  nên suy ra  $OH = OC$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$R = OH = OB = OD = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn C.}$$



**Câu 20.** Theo giả thiết, ta có

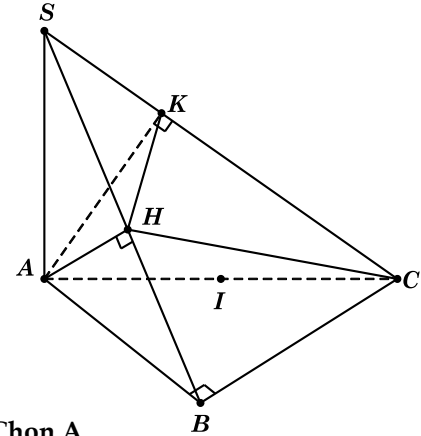
$$\widehat{ABC} = 90^\circ \text{ và } \widehat{AKC} = 90^\circ. \quad (1)$$

Do  $\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \end{cases} (BC \perp (SAB)) \Rightarrow AH \perp HC$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm  $B, H, K$  cùng nhìn xuống  $AC$  dưới một góc  $90^\circ$  nên hình chóp  $A.HKCB$  nội tiếp mặt cầu tâm  $I$  là trung điểm

$$AC, \text{ bán kính } R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3} \text{ (đvtt)}. \text{ Chọn A.}$$



**Câu 21.** Ta có  $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$ .

Trong tam giác vuông  $SHD$ , có

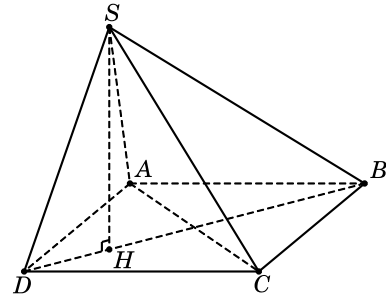
$$SH = \frac{BD}{4} \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \text{ và } SD = \frac{HD}{\cos \widehat{SDH}} = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác vuông  $SHB$ , có

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác  $SBD$ , ta có  $SB^2 + SD^2 = a^2 = BD^2$ .

Suy ra tam giác  $SBD$  vuông tại  $S$ .



Vậy các đỉnh  $S, A, C$  cùng nhìn xuống  $BD$  dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  là  $O$ , bán kính  $R = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 22.** Ta có  $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$ .

Tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  nên  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Trong tam giác vuông  $SHA$ , ta có  $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$ .

Vì mặt cầu có tâm  $G$  và tiếp xúc với  $(SAB)$  nên bán kính mặt cầu  $R = d[G, (SAB)]$ .

Ta có  $d[G, (SAB)] = \frac{1}{3}d[C, (SAB)] = \frac{2}{3}d[H, (SAB)]$ .

Gọi  $M, E$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $MB$ .

Suy ra  $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$  và  $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ .

Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $SE$ , suy ra  $HK \perp SE$ . (1)

Ta có  $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $HK \perp (SAB)$  nên  $d[H, (SAB)] = HK$ .

Trong tam giác vuông  $SHE$ , ta có  $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$ .

Vậy  $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$ . **Chọn D.**

**Câu 23.** Gọi  $O = AC \cap BD$

Suy ra  $OA = OB = OC = OD$ . (1)

Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ , do tam giác  $SAB$  vuông tại  $S$  nên  $MS = MA = MB$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên  $AB$ .

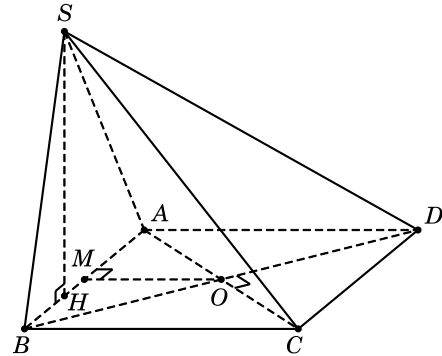
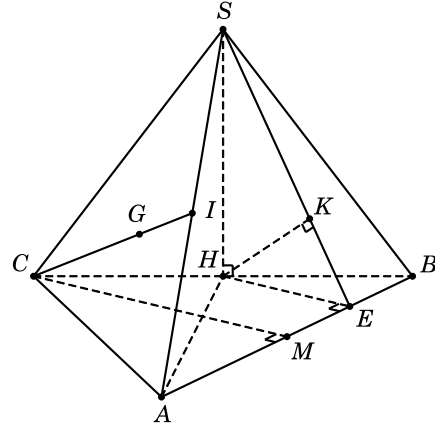
Từ giả thiết suy ra  $SH \perp (ABCD)$ .

Ta có  $\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SH \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$  nên  $OM$  là trục

của tam giác  $SAB$ , suy ra  $OA = OB = OS$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có  $OS = OA = OB = OC = OD$ .

Vậy  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABCD$ , bán kính  $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Suy ra  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$  (đvtt). **Chọn A.**

**Câu 24.** Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , suy ra  $G$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Từ  $G$  dựng tia  $Gx \perp (ABC)$  (như hình vẽ).

Suy ra  $Gx$  là trục của tam giác  $ABC$ .

Trong mặt phẳng  $(SA, Gx)$ ,

kẻ trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $SA$ .

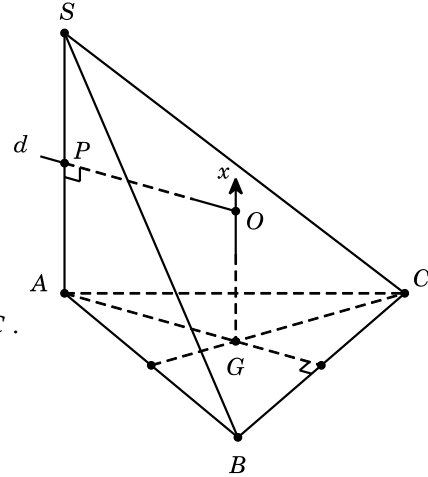
$$\text{Gọi } O = Gx \cap d \Rightarrow \begin{cases} O \in Gx \\ O \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OA = OS \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = OS = R.$$

Suy ra  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$ .

$$\text{Ta có } OG = PA = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Trong tam giác vuông  $OGA$ , ta có  $R = OA = \sqrt{OG^2 + AG^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$ . **Chọn C.**

**Câu 25.** Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,

suy ra  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OBC$ .

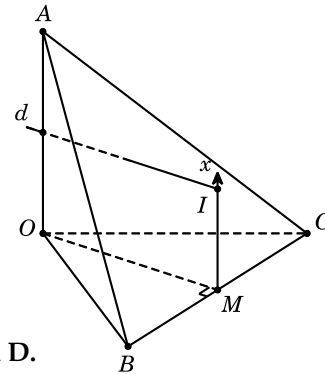
Kẻ  $Mx \perp (OBC)$  (như hình vẽ).

Suy ra  $Mx$  là trục của  $\triangle OBC$ .

Trong mặt phẳng  $(OA, Mx)$ , kẻ trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $OA$  cắt  $Mx$  tại  $I$ .

Khi đó  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

$$\text{Bán kính mặt cầu: } R = IO = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}. \text{ Chọn D.}$$



**Câu 26.** Ta có  $60^\circ = \widehat{SI, (ABC)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIA}$ .

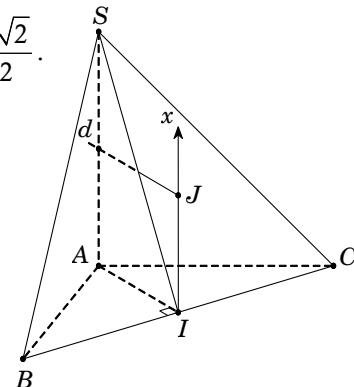
Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , suy ra  $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Trong  $\triangle SAI$ , ta có  $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

Kẻ  $Ix \perp (ABC)$  (như hình vẽ).

Suy ra  $Ix$  là trục của  $\triangle ABC$ .

Trong mặt phẳng  $(SA, Ix)$ , kẻ trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $SA$  cắt  $Ix$  tại  $J$ . Khi đó  $J$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Bán kính:  $R = JA = \sqrt{JI^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$  nên  $\frac{V}{S} = \frac{R}{3} = \frac{a\sqrt{14}}{12}$ . **Chọn B.**

**Câu 27.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ACD$ . Kẻ  $Gx \perp (ACD)$ , suy ra  $Gx$  là trục của  $\Delta ACD$ .

Trong mặt phẳng  $(SA, Gx)$ , kẻ trung trực  $d$  của đoạn  $SA$  cắt  $Gx$  tại  $I$ .

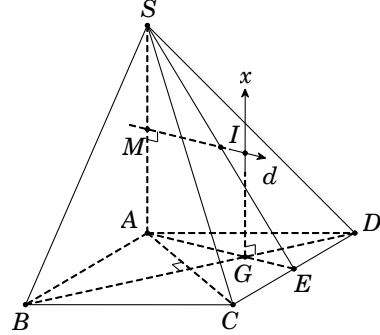
Khi đó  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

$$\text{Ta có } IG = MA = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$GA = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra bán kính:

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + GA^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}. \text{ Chọn A.}$$



**Câu 28.** Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $SM \perp AB$  và  $SM \perp (ABC)$ .

Do đó  $SM$  là trục của tam giác  $ABC$ .

Trong mặt phẳng  $(SMB)$ , kẻ đường trung trực  $d$  của đoạn  $SB$  cắt  $SM$  tại  $I$ . Khi đó  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ , bán kính  $R = SI$ .

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = a\sqrt{3}.$$

Trong tam giác vuông  $SMB$ , ta có

$$SM = SB \cdot \cos \widehat{MSB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

Ta có  $\Delta SMB \sim \Delta SPI$ , suy ra

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SI} \Rightarrow R = SI = \frac{SB \cdot SP}{SM} = a.$$

**Chọn C.**

**Câu 29.** Ta có  $60^\circ = \widehat{AB'}$ ,  $(ABC) = \widehat{AB'}$ ,  $\widehat{AB} = \widehat{B'AB}$ .

Trong  $\Delta ABC$ , ta có

$$AB = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong  $\Delta B'BA$ , ta có

$$BB' = AB \cdot \tan \widehat{B'AB} = \frac{3a}{2}.$$

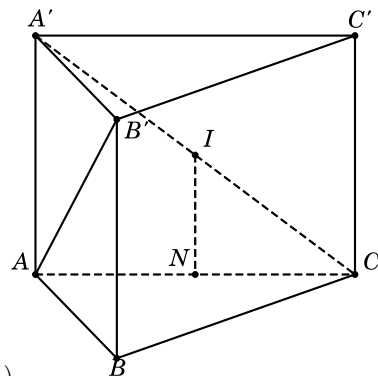
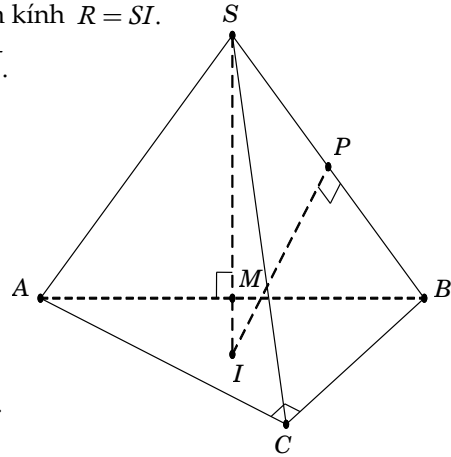
Gọi  $N$  là trung điểm  $AC$ ,

suy ra  $N$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

Gọi  $I$  là trung điểm  $A'C$ ,

suy ra  $IN \parallel AA' \Rightarrow IN \perp (ABC)$ .

Do đó  $IN$  là trục của  $\Delta ABC$ , suy ra  $IA = IB = IC$ . (1)



Hơn nữa, tam giác  $A'AC$  vuông tại  $A$  có  $I$  là trung điểm  $A'C$  nên  $IA' = IC = IA$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có  $IA' = IA = IB = IC$  hay  $I$  là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình

chóp  $A'.ABC$  với bán kính  $R = IA' = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$ . **Chọn B.**

**Câu 30.** Gọi  $M$  là trung điểm  $B'C'$ , ta có

$$60^\circ = \widehat{(AB'C')}, \widehat{(A'B'C')} = \widehat{AM}, \widehat{A'M} = \widehat{AMA'}.$$

Trong  $\triangle AA'M$ , có  $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;

$$AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}.$$

Gọi  $G'$  là trọng tâm tam giác đều  $A'B'C'$ , suy ra  $G'$  cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle A'B'C'$ .

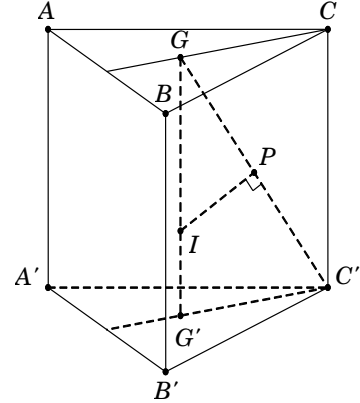
Vì lăng trụ đứng nên  $GG' \perp (A'B'C')$ .

Do đó  $GG'$  là trục của tam giác  $A'B'C'$ .

Trong mặt phẳng  $(GC'G')$ , kẻ trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $GC'$  cắt  $GG'$  tại  $I$ . Khi đó  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $G.A'B'C'$ , bán kính  $R = GI$ .

$$\text{Ta có } \triangle GPI \sim \triangle GG'C' \Rightarrow \frac{GP}{GI} = \frac{GG'}{GC'}$$

$$\Rightarrow R = GI = \frac{GP \cdot GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}. \text{ Chọn D.}$$



**Câu 31.** Hiển nhiên (I) đúng.

Diện tích tam giác  $MAB$  không đổi khi và chỉ khi khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $AB$  không đổi (giả sử bằng  $R$ ).

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là mặt trụ bán kính  $R$  và trục là  $AB$ .

Vì vậy Mệnh đề (II) cũng đúng. **Chọn C.**

**Câu 32.** Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có  $h = a$ .

Bán kính đáy  $R = \frac{a}{2}$ . Do đó thể tích khối trụ  $V = R^2 \pi \cdot h = \frac{\pi a^3}{4}$  (đvtt). **Chọn D.**

**Câu 33.** Diện tích xung quanh của hình trụ:  $S_{xq} = 2\pi R \cdot R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$  (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2(\pi R^2) = 2(\sqrt{3} + 1)\pi R^2 \text{ (đvdt)}. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 34.** Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có  $h = 2R$ .

Diện tích toàn phần là:  $S_{tp} = 2\pi R(R + h) = 6\pi R^2$  (đvdt). **Chọn B.**

**Câu 35.** Xét hình vuông  $ABCD$  có  $AD$  không song song và không vuông góc với trục  $OO'$  của hình trụ.

Dựng đường sinh  $AA'$ , ta có

$$A'C = 2R = 140\text{cm}.$$
$$AC = \sqrt{AA'^2 + A'C^2} = 100\sqrt{2}\text{cm}.$$

Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 8cm và 6cm .

$$\begin{cases} OI \perp AB' \\ OI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABB').$$

Suy ra  $d[AB, OO'] = d[OO', (ABB')] = d[O, (ABB')] = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Gọi bán kính đáy của hình trụ là  $R$ .

Vì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên  $OO' = BB' = 2R$ .

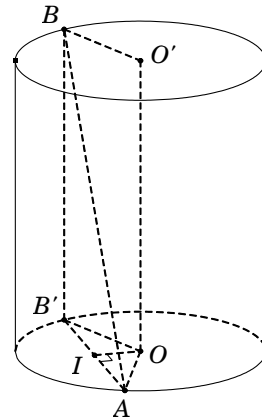
Trong tam giác vuông  $AB'B$ , ta có

$$AB'^2 = AB^2 - BB^2 = 4a^2 - 4R^2.$$

Trong tam giác vuông  $OIB'$ , ta có

$$OB'^2 = OI^2 + IB'^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB'}{2}\right)^2.$$

Suy ra  $AB^{12} = 4R^2 - 3a^2$ . Từ đó ta có  $4a^2 - 4R^2 = 4R^2 - 3a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{4}$ . **Chọn A.**



**Câu 40.**

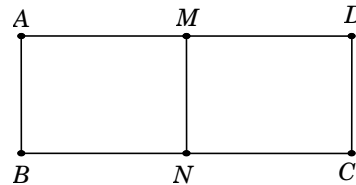
Theo giả thiết ta được hình trụ có chiều cao  $h = AB = 1$ , bán kính đáy  $R = \frac{AD}{2} = 1$ .

Do đó diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 4\pi.$$

**Chọn C.**

**Câu 41.** Gọi bán kính đáy là  $R$ .



Hình trụ có chu vi đáy bằng  $2a$  nên ta có  $2\pi R = 2a \Leftrightarrow R = \frac{a}{\pi}$ .

Suy ra hình trụ này có đường cao  $h = a$ .

Vậy thể tích khối trụ  $V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 a = \frac{a^3}{\pi}$  (đvtt). **Chọn A.**

**Câu 42.** Gọi bán kính đáy là  $R$ .

Từ giả thiết suy ra  $h = 2a$  và chu vi đáy bằng  $a$ .

Do đó  $2\pi R = a \Leftrightarrow R = \frac{a}{2\pi}$ . Chọn C.

**Câu 43.** Công thức thể tích khối trụ  $V = \pi R^2 h$ .

- Ở cách 1, suy ra  $h = 50\text{cm}$  và  $2\pi R_1 = 240 \Leftrightarrow R_1 = \frac{120}{\pi}$ . Do đó  $V_1 = \pi \cdot \left(\frac{120}{\pi}\right)^2 \cdot 50$  (đvtt).
- Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có  $h = 50\text{cm}$  và  $2\pi R_2 = 120 \Leftrightarrow R_2 = \frac{60}{\pi}$ .

- Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có  $h = 50\text{cm}$  và  $2\pi R_2 = 120 \Leftrightarrow R_2 = \frac{60}{\pi}$ .

$$\text{Do đ6 } V_2 = 2 \times \left[ \pi \cdot \left( \frac{60}{\pi} \right)^2 \cdot .50 \right] (\text{đvtt}).$$

Suy ra  $\frac{V_1}{V_2} = 2$ . **Chọn C.**



**Câu 44.** Công thức tính thể tích  $V = \pi R^2 h$ , suy ra  $h = \frac{V}{\pi R^2}$ .

Hộp sữa chỉ kín một đáy nên diện tích tôn cần dùng là:

$$S_p = S_{xq} + S_{\text{day}} = 2\pi R h + \pi R^2 = \frac{2V}{R} + \pi R^2.$$

Xét hàm  $f(R) = \frac{2V}{R} + \pi R^2$  trên  $(0; +\infty)$ , ta được  $\min_{(0; +\infty)} f(R)$  đạt tại  $R = h$ . **Chọn A.**

**Câu 45.** Hình vẽ, kết hợp với giả thiết ta có:

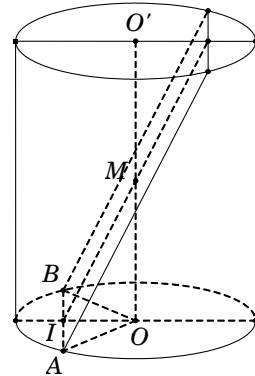
$$OA = OB = R, OO' = 2R \text{ và } \widehat{IMO} = 30^\circ.$$

Trong tam giác vuông  $MOI$ , ta có  $OI = MO \cdot \tan 30^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}$ .

Trong tam giác vuông  $AIO$ , ta có

$$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra  $AB = 2IA = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . **Chọn C.**



**Câu 46.** Theo giả thiết, ta có

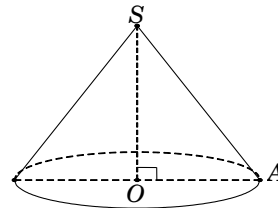
$$SA = \ell = 2a \text{ và } \widehat{SAO} = 60^\circ.$$

Suy ra

$$R = OA = SA \cdot \cos 60^\circ = a.$$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng:

$$S = \pi R \ell + \pi R^2 = 3\pi a^2 \text{ (đvdt)}. \text{ **Chọn B.**}$$



**Câu 47.** Theo giả thiết, ta có

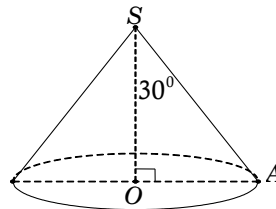
$$OA = a\sqrt{2} \text{ và } \widehat{OSA} = 30^\circ.$$

Suy ra độ dài đường sinh:

$$\ell = SA = \frac{OA}{\sin 30^\circ} = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích xung quanh bằng:

$$S_{xq} = \pi R \ell = 4\pi a^2 \text{ (đvdt)}. \text{ **Chọn A.**}$$

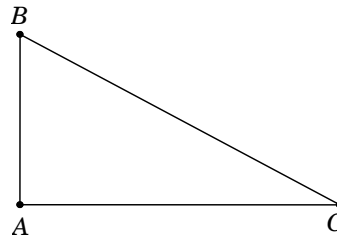


**Câu 48.** Từ giả thiết suy ra hình nón có đỉnh là  $B$ , tâm đường tròn đáy là  $A$ , bán kính đáy là  $AC = a\sqrt{3}$  và chiều cao hình nón là  $AB = a$ .

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là:

$$\ell = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

**Chọn D.**



**Câu 49.** Gọi  $S, O$  là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác  $SAB$ .

Theo bài ra ta có tam giác  $SAB$  vuông cân tại  $S$  nên

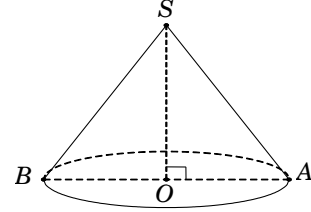
$$AB = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}, SO = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra  $h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $l = SA = a$  và

$$SB\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Diện tích toàn phần của hình nón:  $S_p = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$  (đvdt).

Thể tích khối nón là:  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$  (đvtt). **Chọn A.**



**Câu 50.** Gọi  $S$  là đỉnh,  $O$  là tâm của đáy, thiết diện qua trục là  $SAB$ .

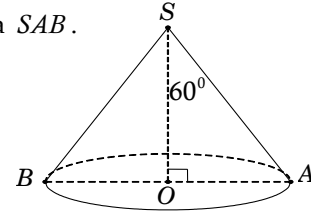
Theo giả thiết, ta có  $SA = 2a$  và  $\widehat{ASO} = 60^\circ$ .

Trong tam giác  $SAO$  vuông tại  $O$ , ta có

$$OA = SA \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Vậy diện tích toàn phần:

$$S_p = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot OA \cdot SA + \pi(OA)^2 = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3}) \text{ (đvdt)}. \text{ **Chọn B.**}$$



**Câu 51.**

Gọi  $S'$  là điểm đối xứng của  $S$  qua tâm  $O$  và  $A$  là một điểm trên đường tròn đáy của hình nón.

Tam giác  $SAS'$  vuông tại  $A$  và có đường cao  $AH$  nên  $SA^2 = SH \cdot SS' \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$ .

**Chọn C.**

**Câu 52.** Theo giả thiết ta có tam giác  $OAB$  đều cạnh  $R$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $OE \perp AB$  và  $OE = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SE$ , suy ra  $OH \perp SE$ .

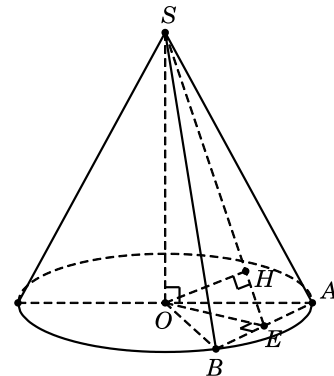
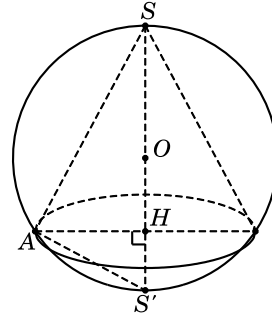
Ta có  $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH$ .

Từ đó suy ra  $OH \perp (SAB)$  nên  $d[O, (SAB)] = OH = \frac{R}{2}$ .

Trong tam giác vuông  $SOE$ , ta có

$$\frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{R\sqrt{6}}{4}.$$

**Chọn A.**



**Câu 53.** Theo giả thiết ta có tam giác  $SAB$  vuông cân tại  $S$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $\begin{cases} SE \perp AB \\ OE \perp AB \end{cases}$  và  $SE = \frac{1}{2}AB$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{\Delta SAB} &= \frac{1}{2}AB \cdot SE = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}AB = 4a^2 \\ &\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SE = 2a. \end{aligned}$$

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SE$ , suy ra  $OH \perp SE$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH.$$

Từ đó suy ra  $OH \perp (SAB)$  nên

$$30^\circ = \widehat{SO, (SAB)} = \widehat{SO, SH} = \widehat{OSH} = \widehat{OSE}.$$

Trong tam giác vuông  $SOE$ , ta có  $SO = SE \cdot \cos \widehat{OSE} = a\sqrt{3}$ . **Chọn C.**

**Câu 54.** Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ , suy ra  $OI \perp AB$ ,  $SI \perp AB$  và  $OI = a$ .

$$\text{Trong tam giác vuông } SOA, \text{ ta có } OA = SA \cdot \cos \widehat{SAO} = \frac{SA\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SIA, \text{ ta có } IA = SA \cdot \cos \widehat{SAB} = \frac{SA}{2}.$$

Trong tam giác vuông  $OIA$ , ta có

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}SA^2 = a^2 + \frac{1}{4}SA^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

**Chọn B.**

**Câu 55.** Vì góc ở đỉnh là  $60^\circ$  nên thiết diện qua trục  $SAC$  là tam giác đều cạnh  $2R$ .

Suy ra đường cao của hình nón là  $SI = R\sqrt{3}$ .

Tam giác  $SAB$  là thiết diện qua đỉnh, chắn trên đáy cung  $AB$  có số đo bằng  $90^\circ$  nên  $IAB$  là tam giác vuông cân tại  $I$ , suy ra  $AB = R\sqrt{2}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  thì

$$\begin{cases} IM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \text{ và } IM = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông  $SIM$ , ta có

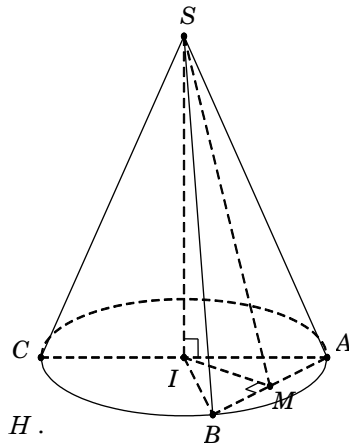
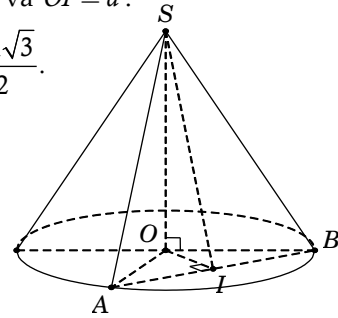
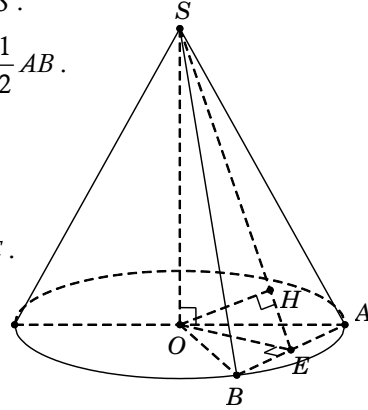
$$SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot SM = \frac{R^2\sqrt{7}}{2} \text{ (đvdt).}$$

**Chọn A.**

**Câu 56.** Gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$ , dựng  $OH \perp SE$  tại  $H$ .

Chứng minh được  $OH \perp (SBC)$  nên suy ra  $OH = d[O, (SBC)] = \frac{a}{2}$ .



Trong tam giác đều  $ABC$ , ta có

$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OA = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác vuông  $SOE$ , ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a.$$

Vậy thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot a = \frac{4\pi a^3}{9} \text{ (đvtt)}.$$

**Chọn B.**

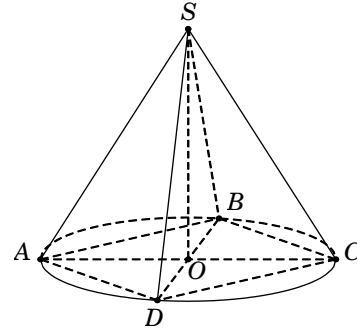
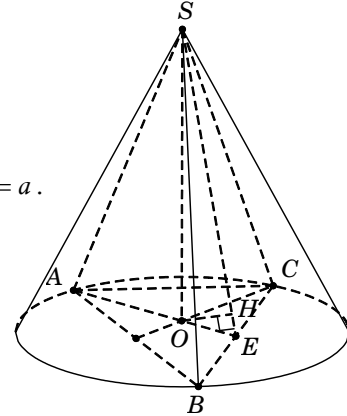
**Câu 57.** Nửa góc ở đỉnh của hình nón là góc  $\widehat{ASO}$ .

Hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  nên suy ra

$$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông  $SOA$ , ta có

$$\tan \widehat{ASO} = \frac{OA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2h}. \text{ **Chọn C.**}$$



**Câu 58.** Diện tích xung quanh của hình trụ:

$$S_{xq(T)} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2 \text{ (đvdt)}.$$

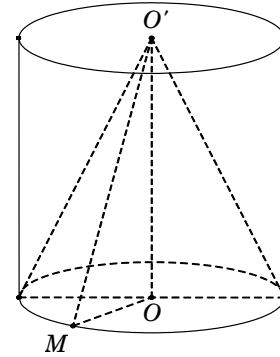
Kẻ đường sinh  $O'M$  của hình nón, suy ra

$$\ell = O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Diện tích xung quanh của hình nón:

$$S_{xq(N)} = \pi R \ell = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 \text{ (đvdt)}.$$

Vậy  $\frac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \sqrt{3}$ . **Chọn C.**



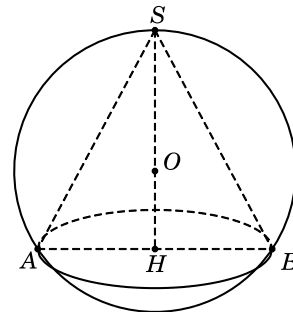
**Câu 59.** Hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có  $SH = 9\text{cm}$ ,  $OS = OA = 5\text{cm}$ .

Suy ra  $OH = 4\text{cm}$  và  $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 3\text{cm}$ .

Thể tích khối nón  $V_n = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot SH = 27\pi$  (đvtt).

Thể tích khối cầu  $V_c = \frac{4}{3}\pi \cdot SO^3 = \frac{500\pi}{3}$  (đvtt).

Suy ra  $\frac{V_n}{V_c} = \frac{81}{500}$ . **Chọn B.**



**Câu 60.** Xét mặt phẳng qua trục  $SO$  của hình nón ta được thiết diện là tam giác cân  $SAB$ .

Mặt phẳng đó cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính  $r$  (bán kính mặt cầu) và nội tiếp trong tam giác cân  $SAB$ .

Trong tam giác vuông  $SOB$ , gọi  $I$  là giao điểm của đường phân giác trong góc  $B$  với đường thẳng  $SO$ .

Chứng minh được  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và bán kính  $r = IO = IE$  ( $E$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên  $SB$ ).

Theo tính chất phân giác, ta có  $\frac{IS}{IO} = \frac{BS}{BO} = \frac{13}{5}$ .

Lại có  $IS + IO = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 12$ .

Từ đó suy ra  $IS = \frac{26}{3}$ ,  $IO = \frac{10}{3}$ .

Ta có  $\triangle SEI \sim \triangle SOB$  nên

$$\frac{IE}{IS} = \frac{BO}{BS} = \frac{5}{13} \Rightarrow IE = \frac{5}{13} IS = \frac{10}{3}.$$

Thể tích khối cầu:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{10a}{3} \right)^3 = \frac{4000\pi a^3}{81} \text{ (đvtt)}. \text{ Chọn A.}$$

