

○ Bài 01

ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

I – ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $a; b$ và $x_0 \in a; b$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0 , tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0 .

Chú ý:

a) Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

b) Nếu $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0 .

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lý 2

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Định lý 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

5. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

II – ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f': (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA



Câu 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
- C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- D. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 2. Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A. $f(x_0)$.
- B. $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

$$\text{A. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad \text{B. } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$\text{C. } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad \text{D. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \frac{1}{4}$. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus 2$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \frac{3}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. Không tồn tại.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số không liên tục tại $x = 0$. B. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$. D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 8. Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

A. $b = 3$. B. $b = 6$. C. $b = 1$. D. $b = -6$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

A. Không tồn tại m, n . B. $m = 2, \forall n$.
C. $n = 2, \forall m$. D. $m = n = 2$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số

a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. B. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. C. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. D. $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Vấn đề 2. SỐ GIA CỦA HÀM SỐ

Câu 11. Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 13$. B. $\Delta y = 9$. C. $\Delta y = 5$. D. $\Delta y = 2$.

Câu 12. Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Câu 13. Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{1}{2} \Delta x^2 - \Delta x$. B. $\Delta y = \frac{1}{2} [\Delta x^2 - \Delta x]$.
C. $\Delta y = \frac{1}{2} [\Delta x^2 + \Delta x]$. D. $\Delta y = \frac{1}{2} \Delta x^2 + \Delta x$.

Câu 14. Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

- A. $\Delta y = \Delta x \Delta x + 2x_0 - 4$. B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \Delta x \Delta x - 4\Delta x$. D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Câu 15. Tính số gia của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x \Delta x + x}$. B. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x \Delta x + x}$.
C. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x + \Delta x}$. D. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

Câu 16. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 3x + 1$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Câu 17. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$.

Câu 18. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2 \Delta x^3}{\Delta x}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \Delta x^2$.
C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2 \Delta x^2$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$.

Câu 19. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \Delta x + x}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x \Delta x + x}$.

C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x + \Delta x}$.

D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x + \Delta x}$.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 + 2x\Delta x - \Delta x$.

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 2x - 1$.

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 2x + 1$.

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 + 2x\Delta x + \Delta x$.



Vấn đề 3. Ý NGHĨA VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM



Câu 21. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2m/s.

B. 3m/s.

C. 4m/s.

D. 5m/s.

Câu 22. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690m.

B. 1069m.

C. 1906m.

D. 1960m.

Câu 23. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1s$.

B. $t = 2s$.

C. $t = 3s$.

D. $t = 6s$.

Câu 24. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

A. $6m/s^2$.

B. $11m/s^2$.

C. $14m/s^2$.

D. $20m/s^2$.

Câu 25. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t = 5s$ đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001s$.

A. $v_{tb} = 49m/s$.

B. $v_{tb} = 49,49m/s$.

C. $v_{tb} = 49,0049m/s$.

D. $v_{tb} = 49,245m/s$.



Vấn đề 4. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN



Câu 26. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

C. $k = \frac{1}{4}$.

D. $k = -\frac{1}{2}$.

Câu 27. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 28. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.

Câu 29. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8 .

- A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

- A. $y = 2x$. B. $y = 2$. C. $y = 0$. D. $y = -2$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

- A. $y = -9x + 7$; $y = -2$. B. $y = -2$.
C. $y = 9x + 7$; $y = -2$. D. $y = 9x + 7$; $y = 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

- A. $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$. B. $y = 9x - 25$.
C. $y = 9x - 7$; $y = 9x + 25$. D. $y = 9x + 25$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

- A. $y = 45x - 173$; $y = 45x + 83$. B. $y = 45x - 173$.
C. $y = 45x + 173$; $y = 45x - 83$. D. $y = 45x - 83$.

Câu 34. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

- A. $x + 4y - 1 = 0$; $x + 4y + 1 = 0$. B. $x + 4y - 4 = 0$; $x + 4y + 4 = 0$.
C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$; $y = -\frac{1}{4}x + 4$. D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

- A. $y = 2$; $y = 1$. B. $y = -2$; $y = 1$. C. $y = -2$; $y = -1$. D. $y = 2$; $y = -2$.

○ Bài 02

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I – ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lí 1

Hàm số $y = x^n$ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $x^n' = nx^{n-1}$.

Định lí 2

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

II – ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

1. Định lí

Định lí 3

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$$u + v' = u' + v'$$

$$u - v' = u' - v'$$

$$uv' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad v = v(x) \neq 0.$$

2. Hệ quả

Hệ quả 1

Nếu k là một hằng số thì $ku' = ku'$.

Hệ quả 2

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad v = v(x) \neq 0.$$

III – ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

Định lí 4

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ĐA THỨC



Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là:

- A. $-2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $-4\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$. B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.

C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup 0; +\infty$.

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup 0; +\infty$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 4$.

B. $f'(-1) = 14$.

C. $f'(-1) = 15$.

D. $f'(-1) = 24$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2m + 1x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

B. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in -\infty; -1 \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + m - 1x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}; m = -1 - \sqrt{2}$.

B. $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}; m = 1 + \sqrt{2}$.

D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Câu 6. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a > 0$ có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$.

B. $b^2 - 3ac \geq 0$.

C. $b^2 - 3ac < 0$.

D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Câu 7. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a < 0$ có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$.

B. $b^2 - 3ac \geq 0$.

C. $b^2 - 3ac < 0$.

D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Câu 8. Tính đạo hàm của của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.

C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = 2x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x .

B. $-\infty; 0$.

C. $0; +\infty$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = 7x - 5$.

A. $y' = 47x - 5$.

B. $y' = -287x - 5$.

C. $y' = -285 - 7x$.

D. $y' = 285 - 7x$.

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = 1 - x^3$.

A. $y' = 5x^2 - 1 - x^3$.

B. $y' = -15x^2 - 1 - x^3$.

C. $y' = -3x^2 - 1 - x^3$.

D. $y' = -5x^2 - 1 - x^3$.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - 2x^2$.

A. $y' = 2016 x^3 - 2x^{2^{2015}}$.

B. $y' = 2016 x^3 - 2x^{2^{2015}} 3x^2 - 4x$.

C. $y' = 2016 x^3 - 2x^2 3x^2 - 4x$.

D. $y' = 2016 x^3 - 2x^2 3x^2 - 2x$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.

B. $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$.

D. $f'(-1004) = 1004!^2$.



Vấn đề 2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHÂN THỨC



Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 1$.

B. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

C. $f'(-1) = -2$.

D. $f'(-1) = 0$.

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

A. $y' = 1 + \frac{3}{x+2}^2$.

B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{x+2}^2$.

C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{x+2}^2$.

D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{x+2}^2$.

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y' = \frac{-9x^2 - 4x + 1}{(x+1)^2}$.

B. $y' = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$.

C. $y' = 1 - 6x^2$.

D. $y' = \frac{1 - 6x^2}{x+1}^2$.

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x}{x-2}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = -4$.

B. $f'(1) = -3$.

C. $f'(1) = -2$.

D. $f'(1) = -5$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $x \in [1; +\infty)$.

D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

- A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$. C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$.

- A. $y' = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5^2}$. B. $y' = \frac{-2x+2}{x^2 - 2x + 5^2}$.
C. $y' = (2x-2)(x^2 - 2x + 5)$. D. $y' = \frac{1}{2x-2}$.

Câu 23. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $2x + \frac{1}{x^2}$?

- A. $y = \frac{x^3-1}{x}$. B. $y = \frac{3x^2+x}{x^3}$. C. $y = \frac{x^3+5x-1}{x}$ D. $y = \frac{2x^2+x-1}{x}$

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+5}{x^2+3x+3}$.

- A. $y' = \frac{2x^2+10x+9}{x^2+3x+3^2}$. B. $y' = \frac{-2x^2-10x-9}{x^2+3x+3^2}$.
C. $y' = \frac{x^2-2x-9}{x^2+3x+3^2}$. D. $y' = \frac{-2x^2-5x-9}{x^2+3x+3^2}$.

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

- A. $y' = \frac{-3x^2-13x-10}{x^2+3^2}$. B. $y' = \frac{-x^2+x+3}{x^2+3^2}$.
C. $y' = \frac{-x^2+2x+3}{x^2+3^2}$. D. $y' = \frac{-7x^2-13x-10}{x^2+3^2}$.



Vấn đề 3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM CHỨA CĂN



Câu 26. Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

- A. $S = -\infty; +\infty$. B. $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$.
C. $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$. D. $S = \emptyset$.

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

- A. $f'(1) = \frac{1}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. Không tồn tại.

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. B. $y' = \frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

C. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}.$

D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}.$

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}.$

A. $y' = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}.$

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}.$

C. $y' = \frac{x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}.$

D. $y' = \frac{x - 6x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}.$

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$ Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ với $x > 0.$ Giá trị $f'(8)$ bằng:

A. $\frac{1}{6}.$

B. $\frac{1}{12}.$

C. $-\frac{1}{6}.$

D. $-\frac{1}{12}.$

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

A. $f'(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}.$

B. $f'(x) = \frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}.$

C. $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$

D. $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}.$ Với giá trị nào của k thì $f'(1) = \frac{3}{2}?$

A. $k = 1.$

B. $k = \frac{9}{2}.$

C. $k = -3.$

D. $k = 3.$

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}.$

A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}.$

B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

C. $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x}.$

D. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}.$

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}.$

A. $y' = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

B. $y' = \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

C. $y' = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

D. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x - 1\sqrt{x^2 + x}.$

A. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} - \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

B. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x}}.$

C. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

D. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

$$\text{A. } y' = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{B. } y' = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{D. } y' = -\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tại điểm $x=0$.

$$\text{A. } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{B. } f'(0) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{C. } f'(0) = 1.$$

$$\text{D. } f'(0) = 2.$$

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\text{A. } y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

$$\text{A. } y' = \frac{5}{2x-1} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2x-1} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

$$\text{A. } y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\text{B. } y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\text{D. } y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(x - \frac{1}{x^2} \right).$$

Câu 42. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

$$\text{A. } y' = -\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Câu 43. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$ tại điểm $x=0$.

$$\text{A. } f'(0) = 0.$$

$$\text{B. } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{C. Không tồn tại.}$$

$$\text{D. } f'(0) = 1.$$

Câu 44. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số).

$$\text{A. } y' = \frac{a^3x}{a^2-x^2 \sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{a^3x}{a^2-x^2}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{a^3x}{2a^2-x^2 \sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{a^3 \cdot 3a^2 - 2x}{2a^2-x^2 \sqrt{a^2-x^2}}.$$

Câu 45. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y' \sqrt{x^2 + 1} = y$. B. $2y' \sqrt{x^2 + 1} = y$. C. $y' \sqrt{x^2 + 1} = 2y$. D. $2y \sqrt{x^2 + 1} = y'$.

○ Bài 03

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

Định lý 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lý 2

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\sin x' = \cos x$.

Nếu $y = \sin u$ và $u = u(x)$ thì $\sin u' = u' \cdot \cos u$.

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lý 3

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\cos x' = -\sin x$.

Nếu $y = \cos u$ và $u = u(x)$ thì $\cos u' = -u' \sin u$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Định lý 4

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\tan x' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Nếu $y = \tan u$ và $u = u(x)$ thì $\tan u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Định lý 5

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $\cot x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Nếu $y = \cot u$ và $u = u(x)$ thì $\cot u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. TÍNH ĐẠO HÀM



Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

B. $y' = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

D. $y' = -3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

A. $y' = x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

B. $y' = \frac{1}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

C. $y' = \frac{1}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

D. $y' = \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x^2 - 3x + 2$.

A. $y' = \cos x^2 - 3x + 2$.

B. $y' = 2x - 3 \cdot \sin x^2 - 3x + 2$.

C. $y' = 2x - 3 \cdot \cos x^2 - 3x + 2$.

D. $y' = -2x - 3 \cdot \cos x^2 - 3x + 2$.

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -2\sin x^2$. B. $y' = -4x\cos x^2$. C. $y' = -2x\sin x^2$. D. $y' = -4x\sin x^2$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

B. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

D. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

C. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}$.

D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sin x$.

A. $y' = \cos \sin x$.

B. $y' = \cos \cos x$.

C. $y' = \cos x \cdot \cos \sin x$.

D. $y' = \cos x \cdot \cos \cos x$.

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \tan x$.

A. $y' = \sin \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = -\sin \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \sin \tan x$.

D. $y' = -\sin \tan x$.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4 \sin x + \sin 2x + 1$.

B. $y' = 4 \sin 2x + 1$.

C. $y' = 4 \cos x + 2 \sin 2x + 1$.

D. $y' = 4 \sin x - 2 \sin 2x + 1$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2 \sin \pi - 4x + \frac{\pi}{2}$.

B. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}$.

C. $y' = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \frac{\pi}{2}x$.

D. $y' = -2 \sin \pi - 4x$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 2x - 1$.

A. $y' = -3 \sin 4x - 2 \cos 2x - 1$.

B. $y' = 3 \cos^2 2x - 1 \sin 2x - 1$.

C. $y' = -3 \cos^2 2x - 1 \sin 2x - 1$.

D. $y' = 6 \cos^2 2x - 1 \sin 2x - 1$.

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3 1 - x$.

A. $y' = \cos^3 1 - x$.

B. $y' = -\cos^3 1 - x$.

C. $y' = -3 \sin^2 1 - x \cdot \cos 1 - x$.

D. $y' = 3 \sin^2 1 - x \cdot \cos 1 - x$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

A. $y' = 3 \tan^2 x \cdot \cot x + 2 \tan 2x$.

B. $y' = -\frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = 3 \tan^2 x - \frac{1}{\sin^2 2x}$.

D. $y' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sin x - \cos x}^2$.

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}^2$.

$$\text{C. } y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{\sin x - \cos x}^2.$$

$$\text{D. } y' = \frac{-2}{\sin x - \cos x}^2.$$

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan 1 - 2x}$.

$$\text{A. } y' = \frac{4x}{\sin^2 1 - 2x}.$$

$$\text{B. } y' = \frac{-4}{\sin 1 - 2x}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{-4x}{\sin^2 1 - 2x}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{-4}{\sin^2 1 - 2x}.$$

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x + 1}$.

$$\text{A. } y' = \frac{-2 \ 3x + 1 \ \sin 2x - 3 \cos 2x}{3x + 1}^2.$$

$$\text{B. } y' = \frac{-2 \ 3x + 1 \ \sin 2x - 3 \cos 2x}{3x + 1}.$$

$$\text{C. } y' = \frac{- \ 3x + 1 \ \sin 2x - 3 \cos 2x}{3x + 1}^2.$$

$$\text{D. } y' = \frac{2 \ 3x + 1 \ \sin 2x + 3 \cos 2x}{3x + 1}^2.$$

Câu 20. Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

$$\text{A. } g'(x) = 2 \cos 2x - \sin x.$$

$$\text{B. } g'(x) = 2 \sin 2x + \cos x.$$

$$\text{C. } g'(x) = 2 \sin 2x - \cos x.$$

$$\text{D. } g'(x) = 2 \cos 2x + \sin x.$$



Vấn đề 2. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM



Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{A. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3. \quad \text{B. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3. \quad \text{C. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5. \quad \text{D. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

$$\text{A. } f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 4. \quad \text{B. } f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4. \quad \text{C. } f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2. \quad \text{D. } f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2.$$

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \tan x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{A. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \quad \text{B. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4. \quad \text{C. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2. \quad \text{D. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ tại điểm $x = 0$.

$$\text{A. } f'(0) = -\sqrt{3}. \quad \text{B. } f'(0) = 4. \quad \text{C. } f'(0) = -3. \quad \text{D. } f'(0) = \sqrt{3}.$$

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 3x \cos 5x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{8}$.

$$\text{A. } f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -8 - \sqrt{2}.$$

$$\text{B. } f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{-15\sqrt{2}}{2}.$$

C. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -8 + \sqrt{2}.$

D. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + 4\sqrt{2}.$

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.$

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$

Câu 30. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos \pi x}$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$.

A. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 8.$ B. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$ C. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 4\pi\sqrt{3}.$ D. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi\sqrt{3}.$

Câu 31. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ D. Không tồn tại.

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

Câu 33. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin \pi \sin x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = \frac{4}{3}.$ B. $P = \frac{4}{9}.$ C. $P = \frac{8}{9}.$ D. $P = \frac{8}{3}.$

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$ B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$ C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$ D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$ tại điểm $x = \frac{\pi^2}{16}$.

A. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \sqrt{2}$. B. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = 0$. C. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. D. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Câu 37. Hàm số $f(x) = x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 2x + \sin \frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(1)}{g'(1)}$.

A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = 2$. C. $P = -2$. D. $P = -\frac{4}{3}$.

Câu 38. Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{16}{16 + \pi}$. C. $P = \frac{16}{17}$. D. $P = \frac{1}{16}$.

Câu 39. Hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$. D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x$. B. $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x$.
C. $f(x) = x - \sin 2x$. D. $f(x) = x + \sin 2x$.

○ Bài 04 _____

VI PHÂN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $a; b$ và có đạo hàm tại $x \in a; b$. Giả sử Δx là số gia của x .

Ta gọi tích $f'(x_0) \Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy , tức là

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x) \Delta x.}$$

Chú ý:

- Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$, ta có $dx = d(x) = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.
- Do đó, với hàm số $y = f(x)$ ta có $dy = df(x) = f'(x) \Delta x$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$.

- A. $df(2) = -0,07$. B. $df(2) = 10$.
C. $df(2) = 1,1$. D. $df(2) = -0,4$.

Câu 2. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$ tại điểm $x = 4$ ứng với $\Delta x = 0,002$.

- A. $df(4) = \frac{1}{8}$. B. $df(4) = \frac{1}{8000}$. C. $df(4) = \frac{1}{400}$. D. $df(4) = \frac{1}{1600}$.

Câu 3. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0,001$.

- A. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$. B. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,1$. C. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,001$. D. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,001$.

Câu 4. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$.

- A. $dy = \frac{1}{7}dx$. B. $dy = 7dx$. C. $dy = -\frac{1}{7}dx$. D. $dy = -7dx$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.
C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Câu 6. Tính vi phân của hàm số $y = x - 1^2$.

- A. $dy = 2x - 1 dx$. B. $dy = 2x - 1$.
C. $dy = x - 1 dx$. D. $dy = x - 1^2 dx$.

Câu 7. Tính vi phân của hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

- A. $dy = 3x^2 - 18x + 12 dx$. B. $dy = -3x^2 - 18x + 12 dx$.
C. $dy = -3x^2 - 18x + 12 dx$. D. $dy = -3x^2 + 18x - 12 dx$.

Câu 8. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$.

- A. $dy = -\frac{8}{(2x-1)^2} dx$. B. $dy = \frac{4}{(2x-1)^2} dx$.
C. $dy = -\frac{4}{(2x-1)^2} dx$. D. $dy = -\frac{7}{(2x-1)^2} dx$.

Câu 9. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

- A. $dy = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} dx$. B. $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$.
C. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$. D. $dy = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} dx$.

Câu 10. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

A. $dy = -\frac{4x}{1+x^2} dx$.

B. $dy = -\frac{4}{1+x^2} dx$.

C. $dy = -\frac{4}{1+x^2} dx$.

D. $dy = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Câu 11. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{a+b}$ với a, b là hằng số thực dương.

A. $dy = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} dx$.

B. $dy = \frac{2}{(a+b)\sqrt{x}} dx$.

C. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{a+b} dx$.

D. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(a+b)} dx$.

Câu 12. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

A. $dy = \frac{8-x}{x^2+2} dx$.

B. $dy = \frac{8+x}{x^2+2} dx$.

C. $dy = \frac{8+x}{x^2+2} dx$.

D. $dy = \frac{8-x}{x^2+2} dx$.

Câu 13. Tính vi phân của hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2+3}$.

A. $dy = \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx$.

B. $dy = \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx$.

C. $dy = \frac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx$.

D. $dy = \frac{2x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx$.

Câu 14. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{x}$.

A. $dy = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}} dx$.

B. $dy = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}} dx$.

C. $dy = \frac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x^2+x}} dx$.

D. $dy = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$.

Câu 15. Tính vi phân của hàm số $y = \cot 2017x$.

A. $dy = -2017 \sin 2017x dx$.

B. $dy = \frac{2017}{\sin^2 2017x} dx$.

C. $dy = -\frac{2017}{\cos^2 2017x} dx$.

D. $dy = -\frac{2017}{\sin^2 2017x} dx$.

Câu 16. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

A. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

B. $dy = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

$$\text{C. } dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$\text{D. } dy = -\frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$$

Câu 17. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2x}$.

$$\text{A. } dy = \frac{2 - \cos x}{2\sqrt{\sin x + 2x}} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{\cos x + 1}{\sqrt{\sin x + 2x}} dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\sin x + 2x}} dx.$$

Câu 18. Tính vi phân của hàm số $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

$$\text{A. } dy = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1} \cdot \cos \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right] dx.$$

$$\text{C. } dy = -\frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{x} - 1} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1} \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right] dx.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } df|_0 = -dx.$$

$$\text{B. } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1.$$

$$\text{C. } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x = 0.$$

$$\text{D. } f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

$$\text{A. } f'(0^+) = 1.$$

$$\text{B. } f'(0^-) = 1.$$

$$\text{C. } df|_0 = dx.$$

D. Hàm số không có vi phân tại $x = 0$.

○ Bài 05 _____

ĐẠO HÀM CẤP HAI

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý:

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)'$$

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t .

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$. Giải bất phương trình $f''(x) \leq f'(x) - 1$.

Nghiệm của bất phương trình là:

- A. $x \in [1; 3]$. B. $x \in \mathbb{R}$.
C. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ là:

- A. $x = 1; x = \frac{1}{6}$. B. $x = -1; x = \frac{1}{6}$.
C. $x = -1; x = -\frac{1}{6}$. D. $x = 1; x = -\frac{1}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A. $x \in [1; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. C. $x \in (-1; 1)$. D. $x \in (-2; 2)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x + 10^6$. Tính giá trị của $f''(2)$.

- A. $f''(2) = 622080$. B. $f''(2) = 1492992$.
C. $f''(2) = 124416$. D. $f''(2) = 103680$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

- A. $y^{(3)}(2017) = 0$. B. $y^{(3)}(2017) = -2017$.
C. $y^{(3)}(2017) = 2017$. D. $y^{(3)}(2017) = -18$.

Câu 6. Tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x) = 2x + 5^5$.

- A. $f^{(3)}(x) = 80 \cdot 2x + 5^3$. B. $f^{(3)}(x) = 480 \cdot 2x + 5^2$.
C. $f^{(3)}(x) = -480 \cdot 2x + 5^2$. D. $f^{(3)}(x) = -80 \cdot 2x + 5^3$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

- A. $x = 3; x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 5; x = 6$. D. $x = -3$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x+2}$. Tìm x sao cho $y'' = 20$.

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

- A. $x > 1$. B. $x < 1$. C. $x \neq 1$. D. Vô nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}^3$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A. $x < -1$. B. $x > -1$. C. $x \neq 1$. D. Vô nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^3 - 1$.

- A. $y^3 - 1 = -\frac{3}{4}$. B. $y^3 - 1 = \frac{3}{4}$. C. $y^3 - 1 = -\frac{4}{3}$. D. $y^3 - 1 = \frac{4}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^3 - 2$.

- A. $y^3 - 2 = \frac{80}{27}$. B. $y^3 - 2 = \frac{-80}{27}$. C. $y^3 - 2 = \frac{40}{27}$. D. $y^3 - 2 = \frac{-40}{27}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. B. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. C. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$. D. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$. Tính giá trị của $f''(\pi)$.

- A. $f''(\pi) = 24$. B. $f''(\pi) = 4$. C. $f''(\pi) = -16$. D. $f''(\pi) = -8$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$.

- A. $y'' = 49\sin 7x + 9\sin 3x$. B. $y'' = -49\sin 7x - 9\sin 3x$.
C. $y'' = \frac{49}{2}\sin 7x + \frac{9}{2}\sin 3x$. D. $y'' = -\frac{49}{2}\sin 7x - \frac{9}{2}\sin 3x$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính giá trị của $y^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $y^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$. B. $y^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$. C. $y^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$. D. $y^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x \sin x$. Biểu thức $P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng:

- A. $P = 2$. B. $P = -2$. C. $P = 4$. D. $P = -4$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^2 - 1^2$. Tính giá trị biểu thức $M = y^4 + 2xy''' - 4y''$.

- A. $M = 0$. B. $M = 20$. C. $M = 40$. D. $M = 100$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính giá trị biểu thức $M = y'^2 - 2y.y''$.

- A. $M = 0$. B. $M = 2$. C. $M = -1$. D. $M = 1$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ có đạo hàm là $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính giá trị biểu thức $M = f'(\sqrt{2}) + \frac{2}{3}f''(\sqrt{2})$.

- A. $M = 8\sqrt{2}$. B. $M = 6\sqrt{2}$. C. $M = 7$. D. $M = \frac{13}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x + \frac{5}{x}$ có đạo hàm là y' . Rút gọn biểu thức $M = xy' + y$.

- A. $M = 2x$. B. $M = -2x$. C. $M = x$. D. $M = \frac{10}{x}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = 5 - \frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy'' + 2y'$.

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = 4$. D. $M = 10$.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2y'^2 = y + 1y''$. B. $2y'^2 = y - 1y''$.
C. $2y'^2 = -y - 1y''$. D. $2y'^2 = -y - 1y''$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ và biểu thức $M = 2y'^2 + 1 - y y''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{x+4}$. D. $M = \frac{2x}{x+4}^2$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính giá trị biểu thức $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = -1$. D. $M = 2$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \sin 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^2 + y'^2 = 4$. B. $4y + y'' = 0$.
C. $y = y' \cdot \tan 2x$. D. $4y - y'' = 0$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \cos 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y + y'' = 0$. B. $4y'' - y = 0$. C. $y'' + 4y = 0$. D. $y + 2y' = 0$.

Câu 29. Cho hàm số $y = A \sin \omega x + \varphi$ có đạo hàm là y' và y'' và biểu thức $M = y'' + \omega^2 y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $M = 1$. B. $M = -1$. C. $M = \cos^2 \omega x + 4$. D. $M = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \cot \frac{x}{2}$ có đạo hàm là y' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^2 - y' + 2 = 0$. B. $y^2 + 2y' + 1 = 0$.
C. $3y^2 - y' + 1 = 0$. D. $3y^2 + y'^2 + 1 = 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và biểu thức $M = y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $M = 0$. B. $M = 8$. C. $M = -8$. D. $M = \cos 4x$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \tan^2 x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' - 2(1+y^2) + 3y^2 = 0$. B. $y'' + 5(1+y^2) + 3y^2 = 0$.

C. $y'' - 2 + 3y^2 = 0$.

D. $y'' - 3 + y^2 = 0$.

Câu 33. Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Rút gọn biểu thức $M = y'' + 9y$.

A. $M = \sin x$.

B. $M = 6 \sin x$.

C. $M = 6 \cos x$.

D. $M = -6 \sin x$.

Câu 34. Cho hàm số $y = x \sin x$ và biểu thức $M = xy - 2y' - \sin x + xy''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 1$.

B. $M = 0$.

C. $M = 2$.

D. $M = \sin x$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + xy'' - 2y' - \cos x$.

A. $M = 2$.

B. $M = 1$.

C. $M = 0$.

D. $M = -1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x \cdot \tan x$. Rút gọn biểu thức $M = x^2 y'' + 2x^2 + y^2 - 1 - y$.

A. $M = \frac{4x^2}{\cos^2 x}$.

B. $M = 1$.

C. $M = x^2 - \tan^2 x$.

D. $M = 0$.

Câu 27. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây.

A. 15 m/s^2 .

B. 9 m/s^2 .

C. 12 m/s^2 .

D. 6 m/s^2 .

Câu 28. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3 \text{ s}$ là $v = 12 \text{ m/s}$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3 \text{ s}$ là $v = 24 \text{ m/s}$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 \text{ s}$ là $a = 18 \text{ m/s}^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 \text{ s}$ là $a = 9 \text{ m/s}^2$.

Câu 29. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là:

A. 12 m/s^2 .

B. 14 m/s^2 .

C. 16 m/s^2 .

D. 18 m/s^2 .

Câu 30. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:

A. -9 m/s^2 .

B. 12 m/s^2 .

C. 9 m/s^2 .

D. -12 m/s^2 .

ÔN TẬP TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1; 2)$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 3x - 1$.

C. $y = x + 1$.

D. $y = 2 - x$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $y = -x - 3$. B. $y = -x + 2$. C. $y = x - 1$. D. $y = x + 2$.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5$ tại điểm có tung độ bằng -1 và hoành độ âm.

- A. $y = 2\sqrt{6}x + \sqrt{6} - 1$. B. $y = -2\sqrt{6}x + \sqrt{6} - 1$.
C. $y = 2\sqrt{6}x - \sqrt{6} + 1$. D. $y = 2\sqrt{6}x - \sqrt{6} - 1$.

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 12 .

- A. $y = 12x \pm 16$. B. $y = 12x \pm 8$. C. $y = 12x \pm 2$. D. $y = 12x \pm 4$.

Câu 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x$.

- A. $y = 9x + 40$. B. $y = 9x - 40$. C. $y = 9x + 32$. D. $y = 9x - 32$.

Câu 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$.

- A. $y = 5x - 3$. B. $y = 3x - 5$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 4$.

Câu 7. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là C . Trong số các tiếp tuyến của C , có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng:

- A. $-3,5$. B. $-5,5$. C. $-7,5$. D. $-9,5$.

Câu 8. Gọi d là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11$. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M\left(-5; \frac{2}{3}\right)$. B. $P\left(5; -\frac{2}{3}\right)$. C. $N\left(2; -\frac{5}{3}\right)$. D. $Q\left(-2; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$.

- A. $y = 24x + 15$. B. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.
C. $y = 24x + 15$; $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$. D. $y = 24x + 33$.

Câu 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; -1)$.

- A. $y = -x + 1$; $y = x - 3$. B. $y = -x + 3$; $y = x + 1$.
C. $y = -x - 3$; $y = x - 1$. D. $y = -x - 1$; $y = x + 3$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị C . Gọi d là tiếp tuyến của C , biết d đi qua điểm $A(4; -1)$. Gọi M là tiếp điểm của d và C , tọa độ điểm M là:

- A. $M(2; 5)$, $M(0; -1)$. B. $M(2; 5)$, $M(-2; 1)$.
C. $M(0; -1)$, $M(-2; 1)$. D. $M\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $M(-2; 1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị C và đường thẳng $d: x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của C tại giao điểm của C và d song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 3$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 4x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$.

- A. $m = 0$; $m = 4$. B. $m = 1$; $m = 2$.
C. $m = 3$. D. Không có giá trị của m .

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để từ điểm $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ kẻ đến đồ thị hàm

số $y = \frac{5}{6}x^3 + mx - \frac{2m}{3}$ hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

- A. $m = \frac{1}{2}$; $m = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}$; $m = -2$.
C. $m = \frac{1}{2}$; $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$; $m = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a \neq 0$, có đồ thị C . Tìm tập hợp tất cả giá trị thực của tham số a để tiếp tuyến của C tại điểm $x_0 = -\frac{b}{3a}$ có hệ số góc nhỏ nhất.

- A. $a < 0$. B. $a > 0$. C. $-1 < a < 0$. D. $0 < a < 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a \neq 0$, có đồ thị C . Tìm điều kiện của a, b, c để mọi tiếp tuyến của C đều có hệ số góc âm.

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, có đồ thị C . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là hai điểm phân biệt thuộc C sao cho tiếp tuyến của C tại A, B có cùng hệ số góc. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + b = 0$. B. $a + b = 1$. C. $a + b = 2$. D. $a + b = 3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị C . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc C sao cho các tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k . Hỏi đường thẳng đi qua hai điểm A và B là đường thẳng nào dưới đây?

- A. $y = \frac{1}{3}(6 - k)x + 1$. B. $y = \frac{1}{3}(k - 6)x - 1$.
C. $y = \frac{1}{3}(6 - k)x - 1$. D. $y = \frac{1}{3}(k - 6)x + 1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị C . Trên C lấy hai điểm phân biệt A và B sao cho tiếp tuyến tại A, B có cùng hệ số góc k và ba điểm O, A, B thẳng hàng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $-3 < k < 0$. B. $0 < k < 3$. C. $8 < k < 12$. D. $4 < k < 8$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị C . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc C sao cho các tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Tính $S = 2x_A - 3x_B$.

- A. $S = 15$. B. $S = 90$. C. $S = -15$. D. $S = -90$.

Câu 21. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$, biết khoảng cách từ điểm $I(-1; 1)$ đến tiếp tuyến là lớn nhất.

- A. $y = -x + 2$; $y = -x - 2$. B. $y = -x + 2$; $y = -x - 1$.
C. $y = x + 2$; $y = x - 2$. D. $y = -x + 1$; $y = -x - 1$.

Câu 22. Tìm giá trị của tham số a để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua $M(0; a)$.

- A. $a = 10$. B. $a = 9$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.

Câu 23. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{bx+3}$ tại điểm $M(-2; -4)$ song song với đường thẳng $d: 7x - y + 5 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b - 2a = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $b - 3a = 0$. D. $a - 3b = 0$.

Câu 24. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ tại điểm $M(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + b = 2$. B. $a + b = 1$. C. $a + b = 4$. D. $a + b = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{2x+3}$ có đồ thị đi qua điểm $A(1; 1)$. Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng -2 có hệ số góc bằng 5. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2; b = 3$. B. $a = 3; b = 2$. C. $a = 2; b = -3$. D. $a = 3; b = -2$.

Câu 26. Tìm tất cả các cặp số $a; b$ để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ đi qua $A(3; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 2x - 4$.

- A. $a; b = 2; 4$; $a; b = 10; 28$. B. $a; b = 2; -4$; $a; b = 10; -28$.
C. $a; b = -2; 4$; $a; b = -10; 28$. D. $a; b = -2; -4$; $a; b = -10; -28$.

Câu 27. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 2}$ đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng -3 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $4a - b = 1$. B. $a - 4b = 1$. C. $4a - b = 0$. D. $a - 4b = 0$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị H . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc H sao cho tiếp tuyến của H tại A, B song song với nhau. Tính tổng $S = x_1 + x_2$.

- A. $S = 0$. B. $S = -1$. C. $S = 2$. D. $S = 1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị H . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc H sao cho tiếp tuyến của H tại A, B song song với nhau. Tính độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB .

- A.** $AB_{\min} = 3\sqrt{2}$. **B.** $AB_{\min} = \sqrt{3}$. **C.** $AB_{\min} = \sqrt{6}$. **D.** $AB_{\min} = 2\sqrt{6}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị H . Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc H sao cho tiếp tuyến của H tại A, B có cùng hệ số góc k . Biết diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $k < -9$. **B.** $-9 \leq k < -6$. **C.** $-6 \leq k < -3$. **D.** $-3 \leq k < 0$.

○ Bài 01

ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Câu 1. Chọn C.

Câu 2. Cho f là hàm số liên tục tại x_0 .

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt $h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. **Chọn C.**

Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Chọn C.

Câu 4. Xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{4 - x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - x}}{2 + \sqrt{4 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{16}$. **Chọn B.**

Câu 5. Xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 6. Xét $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 3)}{x - 2} = 2$.

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$. Do đó, hàm số không liên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 7. Xét các giới hạn $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0 \end{cases}$.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$. **Chọn D.**

Câu 8. Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức

là $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6$.

Thử lại với $b=6$, ta có

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. **Chọn B.**

Câu 9. Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 10.

• Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\longrightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - a \cdot 1 + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{2} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số có đạo hàm tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1. \quad 2$$

Từ 1 và 2, ta có $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 11. Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + 1) - f(2) = f(3) - f(2)$

$$= 3^2 + 2 - 2^2 + 2 = 5. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 12. Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$

$$= [x_0 + 1^3 + x_0 + 1^2 + 1] - [x_0^3 + x_0^2 + 1] = 3x_0^2 + 5x_0 + 2. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 13. Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-1 + \Delta x) - f(-1)$

$$\frac{-1 + \Delta x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\Delta x + \Delta x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Delta x^2 - \Delta x. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 14. Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [x_0 + \Delta x^2 - 4x_0 + \Delta x + 1] - [x_0^2 - 4x_0 + 1]$

$= \Delta x \Delta x + 2x_0 - 4$. **Chọn A.**

Câu 15. Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. **Chọn B.**

Câu 16. Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [3(x + \Delta x) + 1] - 3x + 1 = 3\Delta x$

$\longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$. **Chọn D.**

Câu 17. Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x^2 - 1] - x^2 - 1 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$\longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. **Chọn B.**

Câu 18. Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3$

$\longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2$. **Chọn C.**

Câu 19. Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$

$\longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$. **Chọn B.**

Câu 20. Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [x_0 + \Delta x^2 - x_0 + \Delta x] - x_0^2 - x_0$

$= \Delta x^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x \longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0 - 1$.

Khi đó $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 2x_0 - 1$. **Chọn B.**

Câu 21. Ta tính được $s'(t) = 2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \longrightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4\text{m/s}$. **Chọn C.**

Câu 22. Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \longrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196 \cdot 20 - 4,9 \cdot 20^2 = 1960\text{m}$.

Chọn D.

Câu 23. Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t - 1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$. **Chọn A.**

Câu 24. Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \quad t > 0$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \longrightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14\text{m/s}^2$. **Chọn C.**

Câu 25. Ta có $v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}$.

Chọn C.

Câu 26. Ta có $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 + \Delta x = 1$.

Vậy $k = y' \left(\frac{1}{2} \right) = 1$. **Chọn B.**

Câu 27. Ta tính được $k = y' - 1 = 3$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3 \end{cases} \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$. **Chọn D.**

Câu 28. Ta tính được $k = y' - 1 = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases} \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$. **Chọn A.**

Câu 29. Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y' \big|_{x=2} = 12$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases} \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$. **Chọn D.**

Câu 30. Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y' \big|_{x=0} = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases} \longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2$. **Chọn B.**

Câu 31. Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y' - 1 = 9 \end{cases} \longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y' - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

Chọn C.

Câu 32. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y' \big|_{x=x_0} = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng

$y = 9x + 7$ nên có $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases} \longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ loại (vì

trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases} \longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$. **Chọn B.**

Câu 33. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y' x_0 = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$$y = -\frac{1}{45}x \text{ nên có } k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_0 = 5 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases} \longrightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = 45x - 173.$$

$$\text{Với } x_0 = -3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases} \longrightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = 45x + 83.$$

Chọn A.

Câu 34. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y' x_0 = -\frac{1}{x_0^2}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

$$\bullet \text{ Với } x_0 = 2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{1}{4}x - 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0.$$

$$\bullet \text{ Với } x_0 = -2 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{1}{4}x + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Chọn B.

Câu 35. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\longrightarrow k = y' x_0 = 3x_0^2 - 6x_0$.

$$\longrightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến } d \text{ có dạng } y + y_0 = kx - x_0.$$

$$\longrightarrow \text{tiếp tuyến } d \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_d = -k; 1.$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_\Delta = 4; -3.$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \cos d, \Delta = \frac{|-4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} \longrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{24}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Với } k = -\frac{24}{7} \longrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7}: \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } k = 0 \longrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

$$\bullet x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

$$\bullet x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2.$$

Chọn D.

○ Bài 02

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 1. Ta có: $f' x = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$.

$$\text{Phương trình } f' x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 2. Ta có: $y' = 9x^2 + 2x$.

Do đó, $y' \leq 0 \Leftrightarrow y' = 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{9}; 0\right]$. **Chọn A.**

Câu 3. Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

Suy ra $f'(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 24$. **Chọn C.**

Câu 4. Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Câu 5. Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}.$$

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 6. Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$. **Chọn C.**

Câu 7. Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$. **Chọn C.**

Câu 8. Ta có: $y' = 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 2(3x^2 - 4x) \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Chọn A.

Câu 9. Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3 \cdot 4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.

Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. **Chọn C.**

Câu 10. Ta có: $y' = 4(7x - 5)'(7x - 5)^3 = 4 \cdot 7(7x - 5)^3 = 28(7x - 5)^3$. **Chọn C.**

Câu 11. Ta có: $y' = 5(1 - x^3)'(1 - x^3)^4 = 5 \cdot (-3x^2)(1 - x^3)^4 = -15x^2(1 - x^3)^4$. **Chọn B.**

Câu 12. Ta có: $y' = 2016(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

Chọn B.

Câu 13. Ta có:

$$y' = (x^2 - 2)'(2x - 1) + (x^2 - 2)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 - 2) = 6x^2 - 2x - 4. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 14. Xét hàm số $f(x) = f_0(x) \cdot f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) \quad n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'x = f'_0 x f_1 x \dots f_n x + f_0 x f'_1 x \dots f_n x + \dots + f_0 x f_1 x \dots f'_n x$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f x = x x - 1 x - 2 \dots x - 2018$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0 0 = 0$ ta được:

$$f' 0 = -1 \cdot -2 \dots -2018 + 0 \cdot -2 \dots -2018 + 0 \cdot -1 \dots -2017 = 2018! \text{ . Chọn D.}$$

Câu 15. Xét hàm số $f x = f_0 x f_1 x f_2 x \dots f_n x \quad n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f' x = f'_0 x f_1 x \dots f_n x + f_0 x f'_1 x \dots f_n x + \dots + f_0 x f_1 x \dots f'_n x \text{ .}$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f x = x x + 1 x + 2 \dots x + 2018$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004} -1004 = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f' -1004 &= [-1004 \cdot -1004 + 1 \dots -1004 + 1003] \cdot [-1004 + 1005 \dots -1004 + 2018] \\ &= -1 \cdot 1 \cdot -2 \cdot 2 \dots -1004 \cdot 1004 = 1004!^2 \text{ .} \end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 16. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus 1$.

$$\text{Ta có } f' x = \frac{-2}{x-1}^2 \Rightarrow f' -1 = -\frac{1}{2} \text{ . Chọn B.}$$

$$\text{Câu 17. Ta có } y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{x+2}^2 \text{ . Chọn A.}$$

$$\text{Câu 18. Ta có: } y = \frac{x - 3x}{x+1} = \frac{x - 3x^2}{x+1}$$

$$\longrightarrow y' = \frac{x - 3x^2}' x + 1 - x - 3x^2 x + 1}' = \frac{1 - 6x x + 1 - x - 3x^2}{x + 1}^2 = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{x + 1}^2 \text{ .}$$

Chọn B.

$$\text{Câu 19. Ta có } f' x = \frac{x^2 + x' x - 2 - x^2 + x x - 2}'}{x - 2}^2$$

$$= \frac{2x + 1 x - 2 - x^2 + x}{x - 2}^2 = \frac{x^2 - 4x - 2}{x - 2}^2 \longrightarrow f' 1 = -5 \text{ . Chọn D.}$$

$$\text{Câu 20. Ta có: } f' x = \frac{1 - 3x + x^2}' x - 1 - 1 - 3x + x^2 x - 1}'}{x - 1}^2$$

$$= \frac{-3 + 2x x - 1 - 1 - 3x + x^2}{x - 1}^2 = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}^2 \text{ .}$$

$$\text{Bất phương trình } f' x > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus 1 \text{ .}$$

Chọn A.

$$\text{Câu 21. Ta có } f' x = \frac{x^3}' x - 1 - x^3 x - 1}' = \frac{3x^2 x - 1 - x^3}{x - 1}^2 = \frac{2x^3 - 3x^2}{x - 1}^2 \text{ .}$$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 22. Ta có $y' = \frac{-x^2 - 2x + 5}{x^2 - 2x + 5} = \frac{-2x + 2}{x^2 - 2x + 5}$. **Chọn B.**

Câu 23. Kiểm tra đáp án A: $y = \frac{x^3 - 1}{x} = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{x^2}$ (đúng). **Chọn A.**

Câu 24. Ta có $y' = \frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 3} - \frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 3} = \frac{2x^2 + 3x + 3 - 2x + 5}{x^2 + 3x + 3} = \frac{-2x^2 - 10x - 9}{x^2 + 3x + 3}$. **Chọn B.**

Câu 25. Ta có: $y' = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3} - \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} = \frac{-2x^2 + x - 7 - x^2 + 3}{x^2 + 3} = \frac{-3x^2 + x - 4}{x^2 + 3}$. **Chọn C.**

Câu 26. Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}$. **Chọn C.**

Câu 27. Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x=1$ thì $f'(x)$ không xác định. **Chọn D.**

Câu 28. Ta có $y' = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **Chọn C.**

Câu 29. Ta có $y' = \frac{2x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}} = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. **Chọn A.**

Câu 30. Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Khi đó, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$\Leftrightarrow x-1 \geq x^2-2x \Leftrightarrow x^2-3x+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1, 2 \Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên. **Chọn C.**

Câu 31. Với $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Khi đó $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow f'(8) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2} = \frac{1}{12}$. **Chọn B.**

Câu 32. Xét $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \longrightarrow [g(x)]^3 = \frac{1}{x}$. Đạo hàm 2 vế ta được:

$$3g^2(x) \cdot g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot g'(x) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Suy ra $f'(x) = g'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **Chọn C.**

Câu 33. Ta có $\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ và $\sqrt[3]{u}' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

Do đó $f'(x) = \frac{k}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f'(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}k + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}k = 1 \Leftrightarrow k = 3$. **Chọn D.**

Câu 34. Ta có $f'(x) = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x}' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. **Chọn B.**

Câu 35. Ta có $y' = \sqrt{x^2 - 2x} + x \cdot \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x^2 - 2x + x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. **Chọn C.**

Câu 36. Ta có $y' = (2x - 1)' \cdot \sqrt{x^2 + x} + (2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + x}'$
 $= 2 \cdot \sqrt{x^2 + x} + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$. **Chọn C.**

Câu 37. Ta có $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{-\sqrt{x^2 + 1}'}{x^2 + 1} = \frac{-x^2 + 1'}{2\sqrt{x^2 + 1} \cdot x^2 + 1}$
 $= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot x^2 + 1}$. **Chọn B.**

Câu 38. Ta có $f'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{4 - x^2} - x \cdot \sqrt{4 - x^2}'}{4 - x^2} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}$
 $= \frac{4 - x^2 + x^2}{\sqrt{4 - x^2} \cdot 4 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2 \sqrt{4 - x^2}} \longrightarrow y'(0) = \frac{4}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 39. Ta có $y' = \frac{(x - 1)' \cdot \sqrt{x^2 + 1} - (x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}'}{\sqrt{x^2 + 1}^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1}^2}$
 $= \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}^3} = \frac{1 + x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$. **Chọn B.**

Câu 40. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x - 1}{x + 2}}} \cdot \left(\frac{2x - 1}{x + 2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{x + 2} \cdot \sqrt{\frac{x + 2}{2x - 1}}$. **Chọn D.**

Câu 41. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}} \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$. **Chọn A.**

Câu 42. Ta có $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$.

→ $y' = \frac{1}{2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$. **Chọn C.**

Câu 43. Ta có $f' x = \frac{3x^2 + 2x + 1 \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - 3x^2 + 2x + 1 \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}'}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}^2}$

$= \frac{6x + 2 \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - 3x^2 + 2x + 1 \cdot \frac{9x^2 + 4x}{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}^2} = \frac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4 \cdot 3x^3 + 2x^2 + 1 \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$

→ $f' 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 44. Ta có $y' = \frac{-a^3 \sqrt{a^2 - x^2}'}{a^2 - x^2} = \frac{-a^3 - 2x}{2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot a^2 - x^2} = \frac{a^3 x}{a^2 - x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$.

Chọn A.

Câu 45. Ta có $y^2 = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y^2' = x' + \sqrt{x^2 + 1}'$

→ $2y \cdot y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow 2y \cdot y' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\Leftrightarrow 2y \cdot y' = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow 2y' \sqrt{x^2 + 1} = y$. **Chọn B.**

○ Bài 03

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Ta có $y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right)' \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right) = -3 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right)$. **Chọn B.**

Câu 2. Ta có $y' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right)' \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right)$
 $= -\frac{1}{2} \cdot -2x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right) = x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right)$. **Chọn A.**

Câu 3. Ta có $y' = x^2 - 3x + 2' \cdot \cos x^2 - 3x + 2 = 2x - 3 \cdot \cos x^2 - 3x + 2$. **Chọn C.**

Câu 4. Ta có $y' = x^2' \tan x + \tan x' \cdot x^2 + \sqrt{x}' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **Chọn C.**

Câu 5. Ta có $y' = -2 \cdot x^2' \cdot \sin x^2 = -2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 = -4x \sin x^2$. **Chọn D.**

Câu 6. Ta có $y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$. **Chọn A.**

Câu 7. Ta có $y' = \sqrt{2+x^2}' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{2+x^2}'{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$

Chọn C.

Câu 8. Ta có $y' = -\sqrt{2x+1}' \sin \sqrt{2x+1} = \frac{2x+1}{'2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

Chọn A.

Câu 9. Ta có $y' = -\frac{\sqrt{x^2+1}'}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$. **Chọn A.**

Câu 10. Ta có: $y' = [\sin \sin x]' = \sin x' \cdot \cos \sin x = \cos x \cdot \cos \sin x$. **Chọn C.**

Câu 11. Ta có $y' = -\tan x' \sin \tan x = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin \tan x$. **Chọn B.**

Câu 12. Ta có $y' = 2 \cdot 2 \sin x' \cdot \sin x + 2x' \sin 2x + 1 = 4 \cos x \sin x + 2 \sin 2x + 1 = 2 \sin 2x + 2 \sin 2x + 1 = 4 \sin 2x + 1$. **Chọn B.**

Câu 13. Ta có $y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos \pi - 4x}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$
 $= -\frac{1}{2} \cos \pi - 4x + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$

Suy ra $y' = \left(-\frac{1}{2} \cos \pi - 4x + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)'$
 $= \frac{1}{2} \pi - 4x' \sin \pi - 4x + \frac{\pi}{2} = -2 \sin \pi - 4x + \frac{\pi}{2}$. **Chọn A.**

Câu 14. Ta có $y' = [\cos^3 2x - 1]' = 3 \cos^2 2x - 1 [\cos 2x - 1]'$
 $= -6 \sin 2x - 1 \cos^2 2x - 1$
 $= -3[2 \sin 2x - 1 \cos 2x - 1] \cos 2x - 1 = -3 \sin 4x - 2 \cos 2x - 1$. **Chọn A.**

Câu 15. Ta có $y' = [\sin^3 1-x]' = 3[\sin 1-x]' \cdot \sin^2 1-x = -3 \cdot \cos 1-x \cdot \sin^2 1-x$.

Chọn C.

Câu 16. Ta có $y' = \tan^3 x + \cot 2x' = 3 \tan^2 x \tan x' - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Chọn D.

Câu 17. Ta có $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{-\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = -\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Suy ra $y' = -\frac{1}{\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{-2}{\sin x - \cos x^2}$. **Chọn D.**

Câu 18. Ta có $y' = -\frac{-2 \tan 1-2x}{\tan^2 1-2x} = -4 \cdot \frac{1}{\cos^2 1-2x} = \frac{-4}{\sin^2 1-2x}$. **Chọn D.**

Câu 19. Ta có $y' = \frac{\cos 2x \cdot 3x+1 - 3x+1 \cdot \cos 2x}{3x+1^2} = \frac{-2 \cdot 3x+1 \sin 2x - 3 \cos 2x}{3x+1^2}$.

Chọn A.

Câu 20. Ta có $g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$

$\longrightarrow g'(x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2' = 2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x$. **Chọn C.**

Câu 21. Ta có $f'(x) = 5\sin x - 3\cos x' = 5\sin x' - 3\cos x' = 5\cos x + 3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$. **Chọn A.**

Câu 22. Ta có $f'(x) = \left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)\right]' = 2\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)' \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$.

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -4\cos\pi = 4$. **Chọn A.**

Câu 23. Ta có $f'(x) = 2\tan x' = \frac{2}{\cos^2 x} \longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 4$. **Chọn D.**

Câu 24. Ta có $f'(x) = \left[\tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]' = \frac{\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)'}{\cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)}$.

Suy ra $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(0 - \frac{2\pi}{3}\right)} = 4$. **Chọn B.**

Câu 25. Ta có $f(x) = 2\sin 3x \cos 5x = \sin 8x - \sin 2x$.

Do đó $f'(x) = \sin 8x - \sin 2x' = 8\cos 8x - 2\cos 2x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 8\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = -8 - \sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 26. Ta có $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$
 $\longrightarrow f'(x) = -\sin 4x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$. **Chọn C.**

Câu 27. Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \longrightarrow f'(x) = -2\sin 2x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -2$. **Chọn C.**

Câu 28. Ta có $f'(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x' = 2\cos 2x - 2\cos 2x + 4x \sin 2x = 4x \sin 2x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \pi$. **Chọn D.**

Câu 29. Ta có $f'(x) = -\sqrt{2} \cdot \frac{\cos 3x}{\cos^2 3x} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x}$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin \pi}{\cos^2 \pi} = 0$. **Chọn D.**

Câu 30. Ta có $f'(x) = -\frac{2[\cos \pi x]'}{\cos^2 \pi x} = 2\pi \frac{\sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$.

Suy ra $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 4\pi\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 31. Ta có $f'(x) = -\frac{\sqrt{\sin x}'}{\sin x} = -\frac{\frac{\sin x'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2 \sin x \sqrt{\sin x}}$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}}} = 0$. **Chọn C.**

Câu 32. Ta có $f'(x) = \frac{\tan x + \cot x'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}}$
 $= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x \sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{-2 \cos 2x}{\sin^2 2x \sqrt{\tan x + \cot x}}$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}} = 0$. **Chọn B.**

Câu 33. Ta có $f'(x) = \pi \sin x' \cdot \cos \pi \sin x = \pi \cos x \cdot \cos \pi \sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\pi \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$. **Chọn D.**

Câu 34. Ta có $f'(x) = \frac{\cos x' \cdot 1 - \sin x - (1 - \sin x)' \cos x}{1 - \sin x^2}$

$= \frac{-\sin x \cdot 1 - \sin x + \cos^2 x}{1 - \sin x^2} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x^2} = \frac{1}{1 - \sin x}$.

Suy ra $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{1 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 35. Ta có $f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot \sin^2 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3} - \sin^3 5x \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3}$
 $= 15 \cdot \cos 5x \cdot \sin^2 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \sin^3 5x \cdot \sin \frac{2x}{3}$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 15 \cos \frac{5\pi}{2} \sin^2 \frac{5\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{5\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} = 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. **Chọn A.**

Câu 36. Ta có $f' x = \sqrt{x}' \cos \sqrt{x} - \sqrt{x}' \sin \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$.

Suy ra $f' \left(\frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}} \sin \frac{\pi}{4} = 0$. **Chọn B.**

Câu 37. Ta có $f' x = 4x^3$ và $g' x = \left(2x + \sin \frac{\pi x}{2} \right)' = 2 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P = \frac{f' 1}{g' 1} = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = 2$. **Chọn B.**

Câu 38. Ta có $f' x = 4$ và $g' x = 4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P = \frac{f' 2}{g' 2} = \frac{4}{4 + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi \cdot 2}{4}} = 1$. **Chọn A.**

Câu 39. Ta có $f' x = a \cos x - b \sin x$. Khi đó $\begin{cases} f' 0 = \frac{1}{2} \\ f \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cos 0 - b \sin 0 = \frac{1}{2} \\ a \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + b \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 40. Ta có $y' x = f' x + 2 \sin x \cos x = f' x + \sin 2x$.

Suy ra $y' x = 1 \Leftrightarrow f' x + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f' x = 1 - \sin 2x$.

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$$f' x = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x \right)' = x' + \frac{1}{2} \cos 2x' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}.$$

Chọn A.

○ Bài 04 _____

VI PHÂN

Câu 1. Ta có $f' x = 6x - 1 \Rightarrow f' 2 = 11$

Vậy $df 2 = f' 2 \Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$. **Chọn C.**

Câu 2. Ta có $f x = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \longrightarrow f' x = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \longrightarrow f' 4 = \frac{1}{16}$.

Vậy $df 4 = f' 4 \Delta x = \frac{1}{16} \cdot 0,002 = \frac{1}{8000}$. **Chọn B.**

Câu 3. Ta có $f' x = 2 \cos 2x \longrightarrow f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = -1$.

Vậy $df \left(\frac{\pi}{3} \right) = f' \left(\frac{\pi}{3} \right) \Delta x = -1 \cdot 0,001 = -0,001$. **Chọn D.**

Câu 4. Ta có $y' = \frac{7}{1-2x} \Rightarrow y' \cdot 3 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

Vậy $dy = y' \cdot 3 \, dx = \frac{1}{7} dx$. **Chọn A.**

Câu 5. Ta có $f'(x) = \frac{1 + \cos^2 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-2 \cos 2x \cdot \sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}}$.

Vậy $df(x) = f'(x) \, dx = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$. **Chọn A.**

Câu 6. Ta có $y' = 2x - 1$.

Vậy $dy = d(x-1)^2 = y' \, dx = 2x - 1 \, dx$. **Chọn A.**

Câu 7. Ta có $y' = 3x^2 - 18x + 12$.

Vậy $dy = d(x^3 - 9x^2 + 12x - 5) = y' \, dx = 3x^2 - 18x + 12 \, dx$. **Chọn A.**

Câu 8. Ta có $y = \frac{2x+3}{2x-1} \longrightarrow y' = -\frac{8}{(2x-1)^2}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) = y' \, dx = -\frac{8}{(2x-1)^2} dx$. **Chọn A.**

Câu 9. Ta có $y = \frac{x^2+x+1}{x-1} \longrightarrow y' = \frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1 - x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right) = y' \, dx = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} dx$. **Chọn D.**

Câu 10. Ta có $y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \longrightarrow y' = \frac{-2x \cdot 1 + x^2 - 2x \cdot 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = y' \, dx = -\frac{4x}{1+x^2} dx$. **Chọn A.**

Câu 11. Ta có $y = \frac{\sqrt{x}}{a+b} \longrightarrow y' = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{\sqrt{x}}{a+b}\right) = y' \, dx = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} dx$. **Chọn A.**

Câu 12. Ta có $y' = \frac{4x+1}{x^2+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{4x+1}{x^2+2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{4\sqrt{x^2+2} - \frac{4x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$
 $= \frac{4\sqrt{x^2+2}^2 - 4x^2 - x}{x^2+2\sqrt{x^2+2}} = \frac{4x^2+8-4x^2-x}{x^2+2\sqrt{x^2+2}} = \frac{8-x}{x^2+2\sqrt{x^2+2}}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}\right) = y' \, dx = \frac{8-x}{x^2+2\sqrt{x^2+2}} dx$. **Chọn D.**

Câu 13. Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Vậy $dy = d(x - 2\sqrt{x^2 + 3}) = y'dx = \frac{2x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$. **Chọn C.**

Câu 14. Ta có $y' = \sqrt{x + \sqrt{x}}' = \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$.

Vậy $dy = d\sqrt{x + \sqrt{x}} = y'dx = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}} dx$. **Chọn B.**

Câu 15. Ta có $y = \cot 2017x \longrightarrow y' = -\frac{2017}{\sin^2 2017x}$.

Vậy $dy = d(\cot 2017x) = y'dx = -\frac{2017}{\sin^2 2017x} dx$. **Chọn D.**

Câu 16. Ta có $y' = \frac{\tan \sqrt{x}' \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x}' \cdot \tan \sqrt{x}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} - \frac{\tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x}$
 $= \frac{\frac{1}{2\cos^2 \sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$.

Vậy $dy = d\left(\frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = y'dx = \frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$. **Chọn C.**

Câu 17. Ta có $y = \sqrt{\sin x + 2x} \longrightarrow y' = \frac{\sin x + 2x'}{2\sqrt{\sin x + 2x}} = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}}$.

Vậy $dy = d\sqrt{\sin x + 2x} = y'dx = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}} dx$. **Chọn B.**

Câu 18. Dùng công thức hạ bậc, ta có $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right]$.

Khi đó $y' = -\frac{1}{2} \cdot \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right]' \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1} \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right]$.

Cách 2. Áp dụng công thức $\cos^\alpha u' = \alpha \cdot \cos u' \cdot \cos^{\alpha-1} u = \alpha \cdot u' \cdot -\sin u \cdot \cos^{\alpha-1} u$.

Ta có $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \longrightarrow y' = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)' \cdot \left[-\sin \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right]$.

Mà $\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right)' = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1}^2$ suy ra $y' = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1}^2 \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right]$.

Vậy $dy = d\left(\cos^2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right) = y'dx = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{x} - 1}^2 \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \right] dx$. **Chọn D.**

Câu 19. Ta có $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$.

Do đó B đúng, C sai.

Ta có $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{x - 0} = 2$. Do đó D sai.

Vì $f'(0^+) \neq f'(0^-) \longrightarrow$ hàm số không có vi phân tại $x = 0$. Do đó A sai.

Vậy chỉ có B đúng. **Chọn B.**

Câu 20. Ta có

$$\bullet f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Do đó A đúng.}$$

$$\bullet f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1. \text{ Do đó B đúng.}$$

Vì $f'(0^+) = f'(0^-) \longrightarrow$ hàm số có vi phân tại $x = 0 \longrightarrow df(0) = 1 \cdot dx = dx$.

Do đó C đúng, D sai. **Chọn D.**

○ Bài 05

ĐẠO HÀM CẤP HAI

Câu 1. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 \longrightarrow f''(x) = 6x - 6$.

Bất phương trình $f''(x) \leq f'(x) - 1 \Leftrightarrow 6x - 6 \leq 3x^2 - 6x + 4 - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 2. Ta có $\begin{cases} f'(x) = 4x^3 - 8x \\ g'(x) = -14x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = 12x^2 - 8 \\ g'(x) = -14x + 10 \end{cases}.$

Khi đó, phương trình $f''(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8 + (-14x + 10) = 0$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 3. Ta có $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

Bất phương trình $y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$

Câu 4. Ta có $f'(x) = 6x + 10^5 \Rightarrow f''(x) = 30x + 10^4$

$\longrightarrow f''(2) = 30 \cdot 2 + 10^4 = 622080$. **Chọn A.**

Câu 5. Ta có $y' = -9x^2 + 6x - 1 \Rightarrow y'' = -18x + 6 \longrightarrow y^3 = -18$. **Chọn D.**

Câu 6. Ta có $f'(x) = 10 \cdot 2x + 5^4 \Rightarrow f''(x) = 80 \cdot 2x + 5^3 \Rightarrow f^3(x) = 480 \cdot 2x + 5^2$.

Chọn B.

Câu 7. Ta có $f'(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2 \cdot x + 1 \cdot 3}{x+1^4} = \frac{-6}{x+1^3}$.

Phương trình $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x+1^2} = \frac{-6}{x+1^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} = 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$. **Chọn D.**

Câu 8. Ta có $y' = \frac{10}{x+2} \Rightarrow y'' = \frac{-2 \cdot x+2 \cdot 10}{x+2^2} = \frac{-20}{x+2^3}$.

Khi đó $y'' = 20 \Leftrightarrow \frac{-20}{x+2^3} = 20 \Leftrightarrow \frac{-1}{x+2^3} = 1 \Leftrightarrow x+2^3 = -1 \Leftrightarrow x = -3$. **Chọn B.**

Câu 9. Ta có $y' = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y'' = \frac{-2 \cdot x-1}{x-1^2} = \frac{-2}{x-1^3}$.

Bất phương trình $y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x-1^3} > 0 \Leftrightarrow x-1^3 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. **Chọn B.**

Câu 10. Ta có $y' = \frac{-3 \cdot x+1^2}{x+1^6} = \frac{-3}{x+1^4} \Rightarrow y'' = \frac{12 \cdot x+1^3}{x+1^8} = \frac{12}{x+1^5}$.

Bất phương trình $y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{12}{x+1^5} < 0 \Leftrightarrow x+1^5 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. **Chọn A.**

Câu 11. Ta có $y' = \frac{-2}{x+1^2} \Rightarrow y'' = \frac{4 \cdot x+1}{x+1^4} = \frac{4}{x+1^3} \Rightarrow y^3 = \frac{-12 \cdot x+3^2}{x+1^6} = \frac{-12}{x+1^4}$
 $\longrightarrow y^3 \cdot 1 = \frac{-12}{1+1^4} = -\frac{3}{4}$. **Chọn A.**

Câu 12. Ta có $y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$
 $\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x-1^2} - \frac{-1}{x+1^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot x-1}{x-1^4} - \frac{2 \cdot x+1}{x+1^4} \right) = \frac{1}{x-1^3} - \frac{1}{x+1^3}$
 $\Rightarrow y^3 = \frac{-3 \cdot x-1^2}{x-1^6} - \frac{-3 \cdot x+1^2}{x+1^6} = \frac{-3}{x-1^4} - \frac{-3}{x+1^4}$
 $\longrightarrow y^3 \cdot 2 = \frac{-3}{2-1^4} - \frac{-3}{2+1^4} = -\frac{80}{27}$. **Chọn B.**

Câu 13. Ta có $f' \cdot x = 3 \cos x \cdot \sin^2 x + 2x \Rightarrow f'' \cdot x = 6 \cos^2 x \cdot \sin x - 3 \sin^3 x + 2$
 $\longrightarrow f'' \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 5$. **Chọn D.**

Câu 14. Ta có $f' \cdot x = 4x - 16 \sin x + 2 \sin 2x \Rightarrow f'' \cdot x = 4 - 16 \cos x + 4 \cos 2x$
 $\longrightarrow f'' \cdot \pi = 24$. **Chọn A.**

Câu 15. Ta có $y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x \Rightarrow y'' = -4 \cos 2x + 4 \sin 2x$.
 Phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow -4 \cos 2x + 4 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn B.**

Câu 16. Ta có $y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 7x + \sin 3x$.
 $\longrightarrow y' = \frac{1}{2} 7 \cos 7x + 3 \cos 3x \longrightarrow y'' = \frac{1}{2} -49 \sin 7x -9 \sin 3x$. **Chọn D.**

Câu 17. Ta có $y' = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x \Rightarrow y^3 = 4 \sin 2x$
 $\longrightarrow y^3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 18. Ta có $f' x = \sin x + x \cos x \Rightarrow f'' x = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - f' x$
 $\Rightarrow f''' x = -2 \sin x - f' x$.

Khi đó $f x + f' x + f'' x + f''' x$
 $= f x + f' x + [2 \cos x - f' x] + [-2 \sin x - f' x] = 2 \cos x - \sin x$
 $\longrightarrow P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$. **Chọn B.**

Câu 19. Hàm số viết lại: $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y'' = 12x^2 - 4$, $y''' = 24x$, $y^4 = 24$.

Khi đó $M = y^4 + 2xy''' - 4y'' = 24 + 2x.24x - 4.12x^2 - 4 = 40$. **Chọn C.**

Câu 20. Ta có $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \longrightarrow y' = x + 1$ và $y'' = 1$.

Khi đó $M = y'^2 - 2y.y'' = (x + 1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1$.

Chọn C.

Câu 21. Ta có $f' x = 3x^2 - 4x + 1$ và $f'' x = 6x - 4$.

Khi đó $f' \sqrt{2} = 7 - 4\sqrt{2}$ và $f'' \sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 4$.

Suy ra $M = 7 - 4\sqrt{2} + \frac{2}{3}6\sqrt{2} - 4 = \frac{13}{3}$. **Chọn D.**

Câu 22. Ta có $y' = 1 - \frac{5}{x^2} \longrightarrow M = x\left(1 - \frac{5}{x^2}\right) + x + \frac{5}{x} = 2x$. **Chọn A.**

Câu 23. Ta có $y' = \frac{3}{x^2} \longrightarrow y'' = -\frac{6}{x^3}$.

Khi đó $M = x\left(-\frac{6}{x^3}\right) + 2.\frac{3}{x^2} = -\frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$. **Chọn A.**

Câu 24. Ta có $y' = \frac{7}{(x + 4)^2} \longrightarrow y'' = -\frac{14}{(x + 4)^3}$.

Khi đó $2 y'^2 = 2\left(\frac{7}{(x + 4)^2}\right)^2 = 2\frac{49}{(x + 4)^4} = \left(\frac{-7}{x + 4}\right)\left(\frac{-14}{(x + 4)^3}\right) = y - 1 y''$. **Chọn B.**

Câu 25. Ta có $y' = \frac{7}{(x + 4)^2} \longrightarrow y'' = -\frac{14}{(x + 4)^3}$ và $1 - y = 1 - \frac{x - 3}{x + 4} = \frac{7}{x + 4}$.

Vậy $M = 2 y'^2 + 1 - y . y'' = 2.\frac{49}{(x + 4)^4} + \frac{7}{x + 4}.\left[-\frac{14}{(x + 4)^3}\right] = 0$. **Chọn A.**

Câu 26. Ta có $y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \longrightarrow y'' = \frac{g x}{2x - x^2}$.

Với $g x = (1 - x)' \cdot \sqrt{2x - x^2} - (1 - x) \cdot \sqrt{2x - x^2}' = -1 \cdot \sqrt{2x - x^2} - \frac{1 - x^2}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Thu gọn ta được $y'' = \frac{-1}{2x - x^2 \sqrt{2x - x^2}} = \frac{-1}{y^3} \longrightarrow y^3 . y'' + 1 = 0$. **Chọn A.**

Câu 27. Ta có $y' = 2 \cos 2x \longrightarrow y'' = -4 \sin 2x = -4y \longrightarrow y'' + 4y = 0$. **Chọn B.**

Câu 28. Ta có $y' = -2 \sin 2x \longrightarrow y'' = -4 \cos 2x = -4y \longrightarrow y'' + 4y = 0$. **Chọn C.**

Câu 29. Ta có $y' = A\omega \cos \omega x + \varphi \longrightarrow y'' = -A\omega^2 \sin \omega x + \varphi$.

Khi đó $M = y'' + \omega^2 y = -A\omega^2 \sin \omega x + \varphi + A\omega^2 \sin \omega x + \varphi = 0$. **Chọn D.**

Câu 30. Ta có $y' = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{x}{2} \right)$.

Khi đó $y^2 + 2y' + 1 = \cot^2 \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{x}{2} \right) + 1 = \cot^2 \frac{x}{2} - \left(1 + \cot^2 \frac{x}{2} \right) + 1 = 0$. **Chọn B.**

Câu 31. Ta có $y = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$.

Do đó $y' = -2 \sin 4x \longrightarrow y'' = -8 \cos 4x \longrightarrow y''' = 32 \sin 4x$.

Khi đó $M = 32 \sin 4x + 16 \cdot -2 \sin 4x - 8 \cos 4x + 8 \cdot 1 + \cos 4x - 8 = 0$. **Chọn A.**

Câu 32. Ta có $y' = 2 \tan x$, $\tan x' = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan x \cdot 1 + \tan^2 x$.

$$\begin{aligned} \longrightarrow y'' &= 2 \left[\tan x' \cdot 1 + \tan^2 x + \tan x \cdot 1 + \tan^2 x' \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot 1 + \tan^2 x + \tan x \cdot 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 1 + 3 \tan^2 x = 2 \cdot 1 + \tan^2 x + 1 + 3 \tan^2 x \end{aligned}$$

Khi đó, $y'' = 2 \cdot 1 + y^2 + 1 + 3y^2 \Leftrightarrow y'' - 2 \cdot 1 + y^2 + 1 + 3y^2 = 0$. **Chọn A.**

Câu 33. Ta có $y = \sin^3 x \longrightarrow y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$ và $y'' = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Khi đó $M = y'' + 9y = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x = 6 \sin x$.

Chọn B.

Câu 34. Ta có $y' = \sin x + x \cos x \longrightarrow y'' = 2 \cos x - x \sin x$.

Khi đó $M = x^2 \sin x - 2 \sin x + x \cos x - \sin x + x \cdot 2 \cos x - x \sin x$

$= x^2 \sin x - 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0$. **Chọn B.**

Câu 35. Ta có $y' = \cos x - x \cdot \sin x \longrightarrow y'' = -2 \sin x - x \cdot \cos x$.

Khi đó $xy + xy'' = x^2 \cos x + x \cdot -2 \sin x - x \cos x = -2x \sin x$.

Và $2 \cdot y' - \cos x = 2 \cos x - x \sin x - \cos x = -2x \sin x$.

Vậy $xy + xy'' = 2 \cdot y' - \cos x \Rightarrow M = 0$. **Chọn C.**

Câu 36. Ta có $y' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} \longrightarrow y'' = \frac{1}{\cos^2 x} + \left(\frac{x}{\cos^2 x} \right)'$.

Mà $\left(\frac{x}{\cos^2 x} \right)' = \frac{\cos^2 x + x \cdot \sin 2x}{\cos^4 x}$. Do đó, $y'' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x + x \sin 2x}{\cos^4 x}$.

Khi đó $\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + x^2 \tan^2 x = \frac{x^2}{\cos^2 x} \Rightarrow x^2 + y^2 \cdot 1 + y = \frac{x^2}{\cos^2 x} - \frac{x^3 \cdot \tan x}{\cos^2 x} \\ 1 - y = 1 - x \tan x \end{cases}$

Và $x^2 y'' = x^2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x + x \sin 2x}{\cos^4 x} \right) = \frac{2x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x^3 \sin x}{\cos^3 x}$.

Vậy $M = x^2 y'' + 2x^2 + y^2 - 1 - y = \frac{4x^2}{\cos^2 x}$. **Chọn A.**

Câu 27. Ta có $s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \rightarrow s''(t) = 6t - 6$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = s''(t) = 6t - 6 \rightarrow a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$. **Chọn C.**

Câu 28. Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t \rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại $t = 3 \Rightarrow v(3) = 3.3^2 - 6.3 = 9 \text{ m/s}$.

Tại $t = 4 \Rightarrow a(4) = 6.4 - 6 = 18 \text{ m/s}^2$. **Chọn C.**

Câu 29. Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 8t \rightarrow a(t) = v'(t) = 6t + 8$.

Thời điểm vận tốc của vật bằng $11 \text{ m/s} \Rightarrow v(t) = 11 \Leftrightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{11}{3} \text{ loại} \end{cases}$.

Với $t = 1 \Rightarrow a(1) = 6.1 + 8 = 14 \text{ m/s}^2$. **Chọn B.**

Câu 30. Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ loại} \\ t = 3 \end{cases}$.

Với $t = 3 \Rightarrow a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$. **Chọn B.**

ÔN TẬP TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Câu 1. Đạo hàm $y' = 3x^2 - 2 \rightarrow$ hệ số góc $k = y'(1) = 1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ k = 1 \end{cases} \rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = x - 1 + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$. **Chọn C.**

Câu 2. Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{-1-1} = -2$.

Đạo hàm $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow$ hệ số góc $k = y'(-1) = -\frac{4}{(-1-1)^2} = -1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \\ k = -1 \end{cases} \rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x + 1 - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3$. **Chọn A.**

Câu 3. Ta có $y_0 = -1 = -x_0^2 + 5 \Leftrightarrow x_0^2 = 6 \xrightarrow{x_0 < 0} x_0 = -\sqrt{6}$.

Đạo hàm $y' = -2x \rightarrow$ hệ số góc $k = y'(-\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{6} \\ y_0 = -1 \\ k = 2\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 2\sqrt{6}x + \sqrt{6} - 1$. **Chọn A.**

Câu 4. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 3x^2 \rightarrow k = y'(x_0) = 3x_0^2 = 12 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

● Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -8 \rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 12x + 2 - 8 = 12x - 6$.

● Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8 \rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 12x - 2 + 8 = 12x + 6$.

Chọn A.

Câu 5. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 12x + 9 \longrightarrow k = y'_{x_0} = 3x_0^2 - 12x_0 + 9$.

Do tiếp tuyến song song với $d: y = 9x + 1$ nên $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}$.

● Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 9x \equiv d$ loại.

● Với $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 4 \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 9x - 4 + 4 = 9x - 32$.

Chọn D.

Câu 6. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 4x^3 + 1 \longrightarrow k = y'_{x_0} = 4x_0^3 + 1$.

Đường thẳng $d: y = -\frac{1}{5}x$ có hệ số góc là $k_1 = -\frac{1}{5}$.

Theo giả thiết ta có $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = 5 \Rightarrow 4x_0^3 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 5x - 1 + 2 = 5x - 3$. **Chọn A.**

Câu 7. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 6x^2 + 6x - 4 \longrightarrow k = y'_{x_0} = 6x_0^2 + 6x_0 - 4$

$$= 6\left(x_0^2 + x_0 - \frac{2}{3}\right) = 6\left(x_0^2 + x_0 + \frac{1}{4} - \frac{11}{12}\right) = 6\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{2} \geq -\frac{11}{2}.$$

Vậy trong các tiếp tuyến của C , tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là $k = -5,5$. **Chọn B.**

Câu 8. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 2x^2 - 8x + 9 \longrightarrow k = y'_{x_0} = 2x_0^2 - 8x_0 + 9$

$$= 2x_0^2 - 4x_0 + 4 + 1 = 2(x_0 - 2)^2 + 1 \geq 1 \longrightarrow k_{\min} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -\frac{11}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến d là $y + \frac{11}{3} = x - 2 \Leftrightarrow y = x - \frac{17}{3} \Rightarrow P\left(5; -\frac{2}{3}\right) \in d$.

Chọn B.

Câu 9. Gọi $M(a; 4a^3 - 6a^2 + 1)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = 12x^2 - 12x \longrightarrow k = y'_a = 12a^2 - 12a$.

Phương trình tiếp tuyến $d: y = 12a^2 - 12a(x - a) + 4a^3 - 6a^2 + 1$.

Do tiếp tuyến đi qua $M(-1; -9)$ nên $-9 = 12a^2 - 12a(-1 - a) + 4a^3 - 6a^2 + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \longrightarrow d: y = 24x + 15 \\ a = \frac{5}{4} \longrightarrow d: y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4} \end{cases} \cdot \text{Chọn C.}$$

Câu 10. Gọi $M\left(a; \frac{a^2}{4} - a + 1\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Đạo hàm $y' = \frac{1}{2}x - 1 \longrightarrow k = y'_a = \frac{1}{2}a - 1$.

Phương trình tiếp tuyến $d: y = \left(\frac{1}{2}a - 1\right)x - a + \frac{a^2}{4} - a + 1$.

Do tiếp tuyến đi qua $M(2; -1)$ nên $-1 = \left(\frac{1}{2}a - 1\right)2 - a + \frac{a^2}{4} - a + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \longrightarrow d: y = -x + 1 \\ a = 4 \longrightarrow d: y = x - 3 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 11. Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right)$ là tiếp điểm d và C .

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{-3}{x-1} \longrightarrow k = y'_a = -\frac{3}{a-1}.$$

Phương trình tiếp tuyến $d: y = -\frac{3}{a-1} \cdot x - a + \frac{2a+1}{a-1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(4; -1)$ nên $-1 = -\frac{3}{a-1} \cdot 4 - a + \frac{2a+1}{a-1} \Leftrightarrow 3a^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \longrightarrow M(2; 5) \\ a = -2 \longrightarrow M(-2; 1) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 12. Tọa độ giao điểm của C và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; -2m^2 + 2m + 2).$$

$$\text{Đạo hàm } y' = 4x^3 - 4m^2x \longrightarrow k = y'_1 = 4 - 4m^2.$$

Do tiếp tuyến song song với Δ nên $k = -12 \Leftrightarrow 4 - 4m^2 = -12 \Leftrightarrow m = \pm 2$. **Chọn C.**

Câu 13. Điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} x^3 + x + 2 = 4x + m \\ 3x^2 + 1 = 4 \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x + 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 0 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 14. Gọi $M\left(a; \frac{5}{6}a^3 + ma - \frac{2m}{3}\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{5}{2}x^2 + m \longrightarrow k = y'_a = \frac{5}{2}a^2 + m.$$

Phương trình tiếp tuyến $d: y = \left(\frac{5}{2}a^2 + m\right)x - a + \frac{5}{6}a^3 + ma - \frac{2m}{3}$.

Do $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ thuộc tiếp tuyến d nên $0 = \left(\frac{5}{2}a^2 + m\right)\left(\frac{2}{3} - a\right) + \frac{5}{6}a^3 + ma - \frac{2m}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}a^2(a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \longrightarrow k = m = k_1 \\ a = 1 \longrightarrow k = \frac{5}{6} + m = k_2 \end{cases}.$$

Do hai tiếp tuyến vuông góc nên $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -2 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$

Câu 15. Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\longrightarrow \text{hệ số góc } k = y' \big|_{x_0} = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 3a\left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{3ac - b^2}{3a}.$$

$$\text{Ta có } \left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 \geq 0 \text{ nên với } a > 0 \rightarrow 3a\left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow k_{\min} = \frac{3ac - b^2}{3a}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}.$$

Vậy tiếp tuyến của C tại điểm $x_0 = -\frac{b}{3a}$ có hệ số góc nhỏ nhất khi $a > 0$. **Chọn B.**

Câu 16. Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow k = y' = 3ax^2 + bx + c$.

$$\text{Theo giả thiết ta cần có } 3ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 17. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_A = 3a^2 - 6a + 2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_B = 3b^2 - 6b + 2$.

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} a \neq b \\ k_A = k_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \end{cases} \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 18. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Để tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị C có cùng hệ số góc $k \Leftrightarrow$ phương trình $3x^2 - 3 = k$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k + 3 > 0 \Leftrightarrow k > -3$.

$$\text{Khi đó, tọa độ hai điểm } A, B \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} 3x^2 - 3x = k \\ y = x^3 - 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = k \\ y = \frac{x}{3} \cdot 3x^2 - 3 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{xk}{3} - 2x + 1 = \frac{1}{3}k - 6x + 1$$

$$\longrightarrow y = \frac{1}{3}k - 6x + 1 \text{ là đường thẳng đi qua hai điểm } A, B. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 19. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Để tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị C có cùng hệ số góc $k \Leftrightarrow$ phương trình $3x^2 - 6x = k$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k > -3$.

$$\text{Khi đó, tọa độ hai điểm } A, B \text{ thỏa mãn hệ phương trình } \begin{cases} 3x^2 - 6x = k \\ y = x^3 - 3x^2 + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = k \\ y = \frac{x}{3} \cdot 3x^2 - 6x - x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = k \\ y = \frac{x}{3} \cdot 3x^2 - 6x - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 6x - 2x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = k \\ y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot 3x^2 - 6x - 2x + 3 \end{cases} \longrightarrow d: y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right)k - 2x + 3 = \frac{1}{3}k - 6x + 3 - \frac{k}{3}.$$

Suy ra d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B .

$$\text{Theo giả thiết ta có } O, A, B \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow O \in d \longrightarrow 3 - \frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 9 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy giá trị của hệ số góc k thuộc khoảng $8; 12$. **Chọn C.**

Câu 20. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_A = 3x_A^2 - 3$; Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_B = 3x_B^2 - 3$.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} x_A > x_B \\ k_A = k_B \end{cases} \Leftrightarrow 3x_A^2 - 3 = 3x_B^2 - 3 \Leftrightarrow x_A - x_B \cdot x_A + x_B = 0 \Leftrightarrow x_B = -x_A$.

Lại có $\begin{cases} y_A = x_A^3 - 3x_A + 1 \\ y_B = x_B^3 - 3x_B + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = x_A^3 - 3x_A + 1 \\ y_B = -x_A^3 + 3x_A + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y_B - y_A = -2x_A^3 + 6x_A$.

Khi đó $AB^2 = x_B - x_A^2 + y_B - y_A^2 = 4x_A^2 + 4x_A^3 - 3x_A^2$.

Mà theo giả thiết $AB = 6\sqrt{37} \longrightarrow x_A^2 + x_A^3 - 3x_A^2 = 333 \Leftrightarrow x_A^2 \left[x_A^2 - 3 + 1 \right] = 333$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \Rightarrow x_B = -3 \\ x_A = -3 \Rightarrow x_B = 3 \text{ loại} \end{cases} \longrightarrow S = 2x_A - 3x_B = 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) = 15$. **Chọn A.**

Câu 21. Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right)$ với $a \neq -1$ là điểm thuộc C .

Đạo hàm $y' = \frac{-1}{x+1} \longrightarrow k = y' \cdot a = -\frac{1}{a+1}$.

Phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = \frac{-1}{a+1} x - a + \frac{a+2}{a+1} \Leftrightarrow x + a+1^2 y - a^2 - 4a - 2 = 0$.

Ta có $d(I, \Delta) = \frac{|-2a-2|}{\sqrt{1+a+1^4}} = \frac{2|a+1|}{\sqrt{1+a+1^4}} = \frac{2}{\sqrt{a+1^2 + \frac{1}{a+1^2}}}$.

Để $d(I, \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow a+1^2 + \frac{1}{a+1^2}$ nhỏ nhất. Mà $a+1^2 + \frac{1}{a+1^2} \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $a+1^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta: y = -x + 2 \\ \Delta: y = -x - 2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 22. Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$.

Đạo hàm $y' = \frac{-3}{x-1} \longrightarrow k = y' \cdot 2 = -3$.

Phương trình tiếp tuyến $d: y = -3x - 2 + 4 = -3x + 10$.

Để d đi qua M khi và chỉ khi $a = -3 \cdot 0 + 10 \Leftrightarrow a = 10$. **Chọn A.**

Câu 23. Vì $M(-2; -4) \in C$ nên $-4 = \frac{-2a+2}{-2b+3} \Leftrightarrow a+4b-7=0$. 1

Đạo hàm $y' = \frac{3a-2b}{bx+3} \longrightarrow k = y' \cdot (-2) = \frac{3a-2b}{-2b+3}$.

Vì tiếp tuyến song song với d nên ta có $k = 7 \Leftrightarrow \frac{3a-2b}{-2b+3} = 7$. 2

Giải hệ 1 và 2, ta được $a = 3; b = 1$. Suy ra $a-3b = 0$. **Chọn D.**

Câu 24. Vì $M(1; -2) \in C$ nên $\frac{1+b}{a-2} = -2 \Leftrightarrow b = -2a+3$. 1

Đạo hàm $y' = \frac{-2-ab}{ax-2} \longrightarrow k = y' \cdot 1 = \frac{-2-ab}{a-2}$.

Vì tiếp tuyến song song với d nên ta có $k = -3 \Leftrightarrow \frac{-2-ab}{a-2} = -3$. 2

Giải hệ 1 và 2, ta được $a = 1; b = 1$. Suy ra $a + b = 2$. **Chọn A.**

Câu 25. Vì $A(1;1) \in C$ nên $\frac{a+b}{2+3} = 1 \Leftrightarrow a+b = 5$. 1

Đạo hàm $y' = \frac{3a-2b}{2x+3} \longrightarrow k = y'|_{x=2} = 3a-2b$.

Theo giả thiết, ta có $k = 5 \Leftrightarrow 3a-2b = 5$. 2

Giải hệ 1 và 2, ta được $a = 3; b = 2$. **Chọn B.**

Câu 26. Vì $A(3;1) \in C$ nên $\frac{3a+b}{3-1} = 1 \Leftrightarrow b = 2-3a$. 1

Để d tiếp xúc với đồ thị khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} \frac{ax+b}{x-1} = 2x-4 \\ \frac{-a-b}{x-1} = 2 \end{cases}$ có nghiệm.

Thay 1 vào hệ, ta được $\begin{cases} \frac{ax+2-3a}{x-1} = 2x-4 \\ \frac{-a-2-3a}{x-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2-3a = 2x-4 \\ 2a-2 = 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 2; a = 2 \rightarrow b = -4 \\ x = 4; a = 10 \rightarrow b = -28 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 27. Vì $A\left(-1; \frac{5}{2}\right) \in C$ nên $\frac{5}{2} = \frac{a+b}{-3} \Leftrightarrow 2a+b = -15$. 1

Đạo hàm $y' = \frac{ax^2-4ax+2b}{x-2} \longrightarrow k = y'|_{x=0} = \frac{2b}{-2} = -3 \Leftrightarrow b = -6$. 2

Từ 1 và 2, ta có $a = -\frac{3}{2}; b = -6 \longrightarrow 4a-b = 0$. **Chọn C.**

Câu 28. Ta có $y' = -\frac{3}{2x-1}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_1 = y'|_{x_1} = -\frac{3}{2x_1-1}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_2 = y'|_{x_2} = -\frac{3}{2x_2-1}$.

Theo giả thiết ta có $k_1 = k_2 \Leftrightarrow 2x_1-1 = 2x_2-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-1 = 2x_2-1 \\ 2x_1-1 = -(2x_2-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $x_1 \neq x_2 \longrightarrow S = x_1 + x_2 = 1$. **Chọn D.**

Câu 29. Ta có $y' = -\frac{3}{2x-1}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_1 = y'|_{x_1} = -\frac{3}{2x_1-1}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_2 = y'_{x_2} = -\frac{3}{2x_2 - 1^2}$.

Theo giả thiết ta có $k_1 = k_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1^2 = 2x_2 - 1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ 2x_1 - 1 = -2x_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1$.

Ta có $AB^2 = x_2 - x_1^2 + y_2 - y_1^2 = x_2 - x_1^2 + \left(\frac{3}{4x_2 - 2} - \frac{3}{4x_1 - 2} \right)^2$.

Mà $x_2 = 1 - x_1$ suy ra $AB^2 = 2x_1 - 1^2 + \frac{9}{2x_1 - 1^2} \underset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{2x_1 - 1^2 \cdot \frac{9}{2x_1 - 1^2}} = 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x_1 - 1^4 = 9 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Vậy $AB_{\min} = \sqrt{6}$. **Chọn C.**

Câu 30. Ta có $y' = -\frac{3}{2x - 1^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k_1 = -\frac{3}{2x_1 - 1^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_2 = -\frac{3}{2x_2 - 1^2}$.

Theo giả thiết ta có $k_1 = k_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1^2 = 2x_2 - 1^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{1}{2} \longrightarrow |x_1y_2 - x_2y_1| = 1$

$\Leftrightarrow \left| x_1 \cdot \left(\frac{x_2 + 1}{2x_2 - 1} \right) - x_2 \left(\frac{x_1 + 1}{2x_1 - 1} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow \left| x_1 \cdot \left(\frac{2 - x_1}{1 - 2x_1} \right) - 1 - x_1 \left(\frac{x_1 + 1}{2x_1 - 1} \right) \right| = 1$

$\Leftrightarrow |-x_1^2 + 2x_1 + 1 - x_1^2| = |1 - 2x_1| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow k \in -3; 0$. **Chọn D.**