

○ Bài 01

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số u_n có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số v_n có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - a = 0.$$

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

• $\lim u_n + v_n = a + b$

• $\lim u_n - v_n = a - b$

• $\lim u_n \cdot v_n = a \cdot b$

• $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn u_n có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q} \quad |q| < 1.$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số u_n có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- Dãy số u_n có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim -u_n = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

- $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. DÃY SỐ DẠNG PHÂN THỨC



Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right)$ bằng:

- A. -2 . B. 3 . C. 0 . D. $\frac{5}{3}$.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim \frac{n - 2\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{2n} = \frac{1}{2}$.

- A. 0 . B. 1 . C. 4 . D. Vô số.

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1}$ bằng:

- A. 1 . B. 0 . C. 2 . D. 3 .

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right)$ bằng:

- A. 4 . B. $\frac{1}{4}$. C. 5 . D. -4 .

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$ là:

- A. $-\infty$. B. -2 . C. 0 . D. $+\infty$.

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{-1^n}{n+1} \right)$ bằng:

- A. 1 . B. 3 . C. 4 . D. 2 .

Câu 7. Cho hai dãy số u_n và v_n có $u_n = \frac{-1^n}{n^2+1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim u_n + v_n$

có giá trị bằng:

- A. 3 . B. 0 . C. 2 . D. 1 .

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\infty$. C. 0 . D. -1 .

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng:

- A. 2 . B. 1 . C. $\frac{2}{3}$. D. 0 .

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

- A. $+\infty$. B. 0 . C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. 2 . C. 1 . D. 0 .

Câu 12. Cho hai dãy số u_n và v_n có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim \frac{v_n}{u_n}$ có giá

trị bằng:

- A. 1 . B. 2 . C. 0 . D. 3 .

Câu 13. Cho dãy số u_n với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số u_n

có giới hạn bằng 2 , giá trị của a là:

- A. $a=10$. B. $a=8$. C. $a=6$. D. $a=4$.

Câu 14. Cho dãy số u_n với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số u_n

có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là:

- A. b là một số thực tùy ý. B. $b=2$.
C. không tồn tại b . D. $b=5$.

Câu 15. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

- A. $L = \frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 2$. D. $L = 1$.

Câu 16. Cho dãy số u_n với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

- A. $a = -4$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Câu 17. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

- A. $L = -\frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{5}$. C. $L = \frac{1}{2}$. D. $L = 0$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{1 - an^4 + 2n + 1} > 0$.

- A. $a \leq 0; a \geq 1$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 0; a > 1$. D. $0 \leq a < 1$.

Câu 19. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n - n^3}{2n - 1} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n^4 - 7}$.

- A. $L = -\frac{3}{2}$. B. $L = 1$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Câu 20. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^4 - 3n - 1} \cdot \frac{2n^3 + 1}{3n^2 - 7} \cdot \frac{4n + 5}{3n^2 - 7}$.

- A. $L = 0$. B. $L = 1$. C. $L = \frac{8}{3}$. D. $L = +\infty$.

Câu 21. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 8}$.

- A. $L = \frac{1}{2}$. B. $L = 1$. C. $L = \frac{1}{8}$. D. $L = +\infty$.

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ là:

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1}$ là:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $+\infty$. C. 0 . D. $\frac{5}{7}$.

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3n - n^4}{4n - 5}$ là:

- A. 0 . B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$. B. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. C. $\lim \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$. D. $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\frac{1}{3}$?

- B. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{3n^2 + 5}$. A. $u_n = \frac{-n^4 + 2n^3 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$. C. $u_n = \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1}$. D. $u_n = \frac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \frac{1+n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+5n^3}$. C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 29. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 + 5n - 3$.

A. $L = 3$. B. $L = -\infty$. C. $L = 5$. D. $L = +\infty$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $-10; 10$ để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} 5n - 3a^2 - 2n^3 = -\infty$.

A. 19. B. 3. C. 5. D. 10.

Câu 31. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^4 + 4n^2 - n + 1$.

A. $L = 7$. B. $L = -\infty$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Câu 32. Cho dãy số u_n với $u_n = \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \dots + \sqrt{2}^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. D. Không tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+2n+1}{3n^2+4} \right)$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2n-1(2n+1)} \right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 1. D. 2.

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right)$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + 1}$ bằng:

- A. 4. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn u_n xác định bởi $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = -1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. D. $\lim u_n = 1$.

Câu 41. Cho dãy số có giới hạn u_n xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = 2$. D. $\lim u_n = +\infty$.

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. 0. D. 3.

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}}$ bằng:

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}$ là:

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $+\infty$ D. 1.

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n}$ bằng:

- A. 1. B. 0. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 46. Biết rằng $\lim \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 - n} - 2} = a \sin \frac{\pi}{4} + b$. Tính $S = a^3 + b^3$.

- A. $S = 1$. B. $S = 8$. C. $S = 0$. D. $S = -1$.

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4 + n^2} + 1}$ là:

- A. $+\infty$ B. 10. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim n + 1 \sqrt{\frac{2n+2}{n^4 + n^2 - 1}}$ là:

- A. $+\infty$ B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 49. Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị

của biểu thức $P = \frac{a+c}{b^3}$.

- A. $P = 3$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 2$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ là:

- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.



Vấn đề 2. DÃY SỐ CHỨA CĂN THỨC



Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n^2 - n + 1} - n$ là:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. $-\infty$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2}$ là:

- A. -2. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim \sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + a + 2n + 1} = 0$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}$ là:

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}$ là:

- A. -1. B. $1 - \sqrt{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim \sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 = 0$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 59. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt{n^2 - 2n + 3} - n$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 60. Cho dãy số u_n với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực.

Tìm a để $\lim u_n = -1$.

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2}$ bằng:

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 62.** Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$ là:
- A. $\frac{1}{3}$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 63.** Giá trị của giới hạn $\lim \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n$ bằng:
- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.
- Câu 64.** Giá trị của giới hạn $\lim \left[\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \right]$ là:
- A. -1. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 65.** Giá trị của giới hạn $\lim \left[\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right]$ bằng:
- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 66.** Giá trị của giới hạn $\lim \left[n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3} \right]$ bằng:
- A. -1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.
- Câu 67.** Giá trị của giới hạn $\lim \left[n \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 6} \right]$ là:
- A. $\sqrt{7} - 1$. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. $+\infty$.
- Câu 68.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}}$ là:
- A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.
- Câu 69.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} - \sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:
- A. 1. B. 0. C. 3. D. $+\infty$.
- Câu 70.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - n}$ là:
- A. 2. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.



Vấn đề 3. Dãy số chứa hàm lũy thừa



- Câu 71.** Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ bằng:
- A. $-\frac{25}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 1. D. $-\frac{5}{2}$.
- Câu 72.** Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$ bằng:
- A. -15. B. -10. C. 10. D. 15.

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ là:

- A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 1}{2^n - 2 \cdot 3^n + 1}$ bằng:

- A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 75. Biết rằng $\lim \left(\frac{\sqrt{5}^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + \sqrt{5}^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá

trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $S = 26$. B. $S = 30$. C. $S = 21$. D. $S = 31$.

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là:

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 77. Kết quả của giới hạn $\lim \left[3^n - \sqrt{5}^n \right]$ là:

- A. 3. B. $-\sqrt{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 78. Kết quả của giới hạn $\lim 3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1. C. $-\infty$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ là:

- A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 80. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ là:

- A. $+\infty$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 81. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $0; 2018$ để $\lim \sqrt[n]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

- A. 2007. B. 2008. C. 2017. D. 2016.

Câu 82. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} + \frac{-1^n}{3^n} \right)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 83. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. -1.

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $0; 20$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 85. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là:

- A. 0. B. 2. C. 3. D. $+\infty$.



Vấn đề 4. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN



Câu 86. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Câu 87. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 88. Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

- A. $S = \sqrt{2} + 1$. B. $S = 2$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 89. Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Câu 90. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{-1^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ bằng:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 91. Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) + \dots$.

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 92. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} \quad |a| < 1, |b| < 1$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{1-b}{1-a}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. Không tồn tại.

Câu 93. Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 94. Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. D. $S = \tan^2 x$.

Câu 95. Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$. B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$. C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. D. $S = \tan^2 \alpha$.

Câu 96. Cho m, n là các số thực thuộc $-1; 1$ và các biểu thức:

$$\begin{aligned} M &= 1 + m + m^2 + m^3 + \dots \\ N &= 1 + n + n^2 + n^3 + \dots \\ A &= 1 + mn + m^2 n^2 + m^3 n^3 + \dots \end{aligned}$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$. B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}$.
C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$. D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Câu 97. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản

$\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

A. 17. B. 68. C. 133. D. 137.

Câu 98. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\dots$ được biểu diễn bởi phân số

tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. B. 3465. C. 3645. D. 3546.

Câu 99. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\dots$ được biểu diễn bởi phân số

tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409. B. 1490. C. 1049. D. 1940.

Câu 100. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối

giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. B. $a - b > 2^{14}$. C. $a - b > 2^{13}$. D. $a - b > 2^{12}$.

○ Bài 02

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên

$K \setminus x_0$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số x_n bất kì, $x_n \in K \setminus x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $x_0; b$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số x_n bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $a; x_0$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số x_n bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Định lí 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

II – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $a; +\infty$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số x_n bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $-\infty; a$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số x_n bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Chú ý:

a) Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x_n \rightarrow +\infty$ hoặc $x_n \rightarrow -\infty$.

III – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $a; +\infty$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số x_n bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$.

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		$+$	$-\infty$

		—	$+\infty$
--	--	---	-----------

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN



Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 7x + 11$ là:

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:

- A. $\sin \frac{1}{2}$. B. $+\infty$ C. $-\infty$. D. 0.

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

- A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{2x - 1} \cdot \frac{1}{x^4 - 3}$ là:

- A. 1. B. -2. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{2x - 1} \cdot \frac{1}{x^4 - 3}}$ là:

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. 5.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là:

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. $+\infty$.



Vấn đề 2. GIỚI HẠN MỘT BÊN



Câu 11. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. 1.

Câu 12. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. Không xác định.

Câu 13. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|3x + 6|}{x + 2}$ là:

- A. $-\infty$. B. 3. C. $+\infty$. D. Không xác định.

Câu 14. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 13x + 30}{\sqrt{x + 3} \cdot x^2 + 5}$ là:

- A. -2. B. 2. C. 0. D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2 + 1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. 2. C. 4. D. $-\infty$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{với } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2} + 3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 4$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3. \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6.$

B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$

C. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6.$

D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -15.$



Vấn đề 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC



Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là:

A. 1.

B. $-\infty.$

C. 0.

D. $+\infty.$

Câu 22. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là:

A. 0.

B. $+\infty.$

C. 1.

D. $-\infty.$

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty.$

C. $\sqrt{2} - 1.$

D. $-\infty.$

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3} + 1.$

B. $+\infty.$

C. $\sqrt[3]{3} - 1.$

D. $-\infty.$

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{4x^2 + 7x + 2}$ là:

A. 4.

B. $-\infty.$

C. 6.

D. $+\infty.$



Vấn đề 4. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$



Câu 26. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là:

A. 0.

B. $+\infty.$

C. 3.

D. Không xác định.

Câu 27. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ là:

A. $-\frac{3}{5}.$

B. $\frac{3}{5}.$

C. $-\frac{5}{3}.$

D. $\frac{5}{3}.$

Câu 28. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

A. 10.

B. 25.

C. 5.

D. 13.

Câu 29. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$ là:

A. $\frac{1}{3}.$

B. $\frac{2}{3}.$

C. $\frac{5}{3}.$

D. $\frac{3}{5}.$

Câu 30. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. 0. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 31. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \pi^{21} \sqrt[7]{1-2x} - \pi^{21}}{x}$ là:

- A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$. B. $-\frac{2\pi^{21}}{9}$. C. $-\frac{2\pi^{21}}{5}$. D. $\frac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là:

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{13}{12}$. C. $\frac{11}{12}$. D. $-\frac{13}{12}$.

Câu 35. Biết rằng $b > 0$, $a+b=5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới

đây sai?

- A. $1 < a < 3$. B. $b > 1$. C. $a^2 + b^2 > 10$. D. $a-b < 0$.



Vấn đề 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$



Câu 36. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. 2.

Câu 37. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 2.

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\infty$.

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. -1.

Câu 40. Biết rằng $\frac{2-a}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số).

Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.

- A. $P_{\min} = 1$. B. $P_{\min} = 3$. C. $P_{\min} = 4$. D. $P_{\min} = 5$.

Câu 41. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{x + 1}$ là:

- A. -2 . B. -1 . C. -2 . D. $+\infty$.

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}}$ là:

- A. $-\frac{1}{5}$. B. $+\infty$ C. $-\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 43. Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số).

Khẳng định nào dưới đây đúng.

- A. $a \geq 0$. B. $L = -\frac{3}{a+b}$ C. $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$ D. $b > 0$.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 0 . C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 1 .

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} + ax$ là $+\infty$.

- A. $a > \sqrt{2}$. B. $a < \sqrt{2}$. C. $a > 2$. D. $a < 2$.



Vấn đề 6. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty - \infty$



Câu 46. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - x^2$ là:

- A. 1 . B. $+\infty$ C. -1 . D. $-\infty$.

Câu 47. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$ C. 0 . D. 1 .

Câu 48. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right).$$

- A. 1 . B. 2 . C. 1 . D. -2 .

Câu 49. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+2x^2} - x$ là:

- A. 0 . B. $+\infty$ C. $\sqrt{2}-1$. D. $-\infty$.

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ là:

- A. 0 . B. $+\infty$ C. $\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 51. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5} = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = 5$. D. $S = -5$.

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}$ là:

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $+\infty$ D. $-\infty$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}$ là:

- A. $\sqrt[3]{3} + 1$. B. $+\infty$ C. $\sqrt[3]{3} - 1$. D. $-\infty$.

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $+\infty$ C. -1 . D. $-\infty$.

Câu 55. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1}$ là:

- A. 0. B. $+\infty$ C. -1 . D. $-\infty$.



Vấn đề 7. DẠNG VÔ ĐỊNH $0 \cdot \infty$



Câu 56. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là:

- A. $+\infty$ B. -1 . C. 0. D. $+\infty$.

Câu 57. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$ là:

- A. 1. B. $+\infty$ C. 0. D. $-\infty$.

Câu 58. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x + 1}{3x^3 + x^2 + 2}}$ là:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $+\infty$ D. $-\infty$.

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right)$ là:

- A. 0. B. -1 . C. π . D. $+\infty$.

Câu 60. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 + 1 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$ là:

- A. 3. B. $+\infty$ C. 0. D. $-\infty$.

○ Bài 03 _____

HÀM SỐ LIÊN TỤC

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

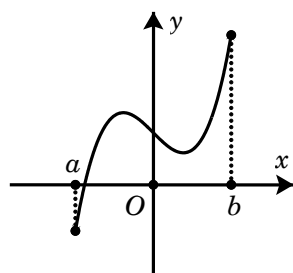
Định nghĩa 2

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

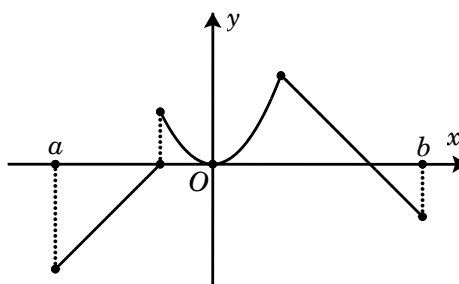
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $[a; b]$



Hàm số không liên tục trên khoảng $[a; b]$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;

- Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ



Câu 1. Hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

- A. $[-4; 3]$. B. $[-4; 3)$. C. $(-4; 3]$. D. $[-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x \cos x + \sin x}{2 \sin x + 3}$ liên tục trên:

- A. $[-1; 1]$. B. $[1; 5]$. C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ với mọi $x \neq 1$. Tính $f(1)$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3; 3]$ với $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. 1. D. 0.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-4; +\infty)$ với $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.



Vấn đề 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM



Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên

tục tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 6$.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên

tục tại $x=1$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = -\frac{1}{2}$. D. $k = 0$.

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là

tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-3; 0)$. B. $m \leq -3$. C. $m \in (0; 5)$. D. $m \in (5; +\infty)$.

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên

tục tại $x=0$.

- A. $m \in (-2; -1)$. B. $m \leq -2$. C. $m \in (-1; 7)$. D. $m \in (7; +\infty)$.

Câu 11. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên khoảng

nào sau đây?

- A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. D. $-\infty; +\infty$.

Câu 12. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

- A. $m = -\pi$. B. $m = \pi$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Câu 13. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos x}{x-\pi} & \text{khi } x \neq \pi \\ m & \text{khi } x = \pi \end{cases}$ liên tục tại $x=\pi$.

- A. $m = \frac{\pi}{2}$. B. $m = -\frac{\pi}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 14. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

- A. mọi điểm trừ $x=0, x=1$. B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
C. mọi điểm trừ $x=-1$. D. mọi điểm trừ $x=0$.

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



Vấn đề 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG



Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ 1-mx & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 17. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ liên tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 19. Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham

số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

- A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ.
C. $a > 5$. D. $a < 0$.

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào

dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ không liên tục trên $[0; 2]$.
C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục

tại $x = 3$.

- A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục

tại $x = 2$.

- A. $a_{\max} = 3$. B. $a_{\max} = 0$. C. $a_{\max} = 1$. D. $a_{\max} = 2$.

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

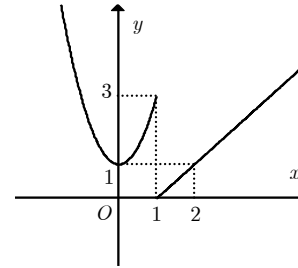
- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. B. $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 1$.
C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
B. Hàm số liên tục trên các khoảng $-\infty, -1$; $1; +\infty$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
D. Hàm số liên tục trên khoảng $-1, 1$.

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?

- A. $x = 0$.
B. $x = 1$.
C. $x = 2$.
D. $x = 3$.



Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. B. mọi điểm trừ $x = 0$.
C. mọi điểm trừ $x = 1$. D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. B. mọi điểm trừ $x = 1$.
C. mọi điểm trừ $x = 3$. D. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Câu 28. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 29. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$.

- A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$. B. mọi điểm trừ $x = 0$.
C. mọi điểm trừ $x = 1$. D. mọi điểm trừ $x = 0; x = 1$.



Vấn đề 5. SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRÊN MỘT KHOẢNG



Câu 31. Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $-\infty; 1$.
C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $-2; 0$.
D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 32. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $-1; 1$.
B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $-2; 0$.
C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $-2; 1$.
D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $0; 2$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$:

- A. Vô nghiệm. B. Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm. D. Có đúng hai nghiệm.

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $-10;10$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2m - 2x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

○ Bài 01

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Ta có $0 \leq \left| \frac{\sin 5n}{3n} \right| \leq \frac{1}{n}$, mà $\lim \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim \frac{\sin 5n}{3n} = 0$, do đó
 $\lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right) = -2$. **Chọn A.**

Nhận xét: Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự):

$$\text{Nhập } \frac{\sin 5X}{3X} - 2.$$

Bấm CALC và nhập 999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Câu 2. Ta có $\frac{n - 2\sqrt{n} \sin 2n}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n} \sin 2n}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim \frac{\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{n} = 0$.

Ta có $\lim \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim \frac{\sqrt{n^k}}{n} = \lim n^{\frac{k}{2}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow k < 2 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}^*, k=3!} \text{không tồn tại } k \text{ (do } k \text{ nguyên}$

duy dương và chẵn). **Chọn A.**

Câu 3. Ta có $0 \leq \left| \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} \right| \leq \frac{7}{n+1} \leq \frac{7}{n} \rightarrow 0 \rightarrow \lim \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0$. **Chọn B.**

Câu 4. Ta có

$$0 \leq \left| \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \rightarrow \lim \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} = 0 \rightarrow \lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right) = 5. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 5. Ta có $\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right) = \lim n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right)$. Vì

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ 0 \leq \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -2 < 0 \end{cases} \rightarrow \lim n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -\infty.$$

Chọn A.

Câu 6. Ta có $0 \leq \left| \frac{-1^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \rightarrow \lim \frac{-1^n}{n+1} = 0 \rightarrow \lim \left(4 + \frac{-1^n}{n+1} \right) = 4$.

Chọn C.

Câu 7. Ta có
$$\begin{cases} 0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ 0 \leq |v_n| \leq \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \longrightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \longrightarrow \lim u_n + v_n = 0.$$

Chọn B.

Chú ý : Cho P_n, Q_n lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n :

$$P_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad a_m \neq 0$$

$$Q_n = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0 \quad b_k \neq 0$$

Khi đó $\lim \frac{P_n}{Q_n} = \lim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P_n}{Q_n} \sim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » < « bậc mẫu » ($m < k$) thì $\lim \frac{P_n}{Q_n} = 0$.

Nếu « bậc tử » = « bậc mẫu » ($m = k$) thì $\lim \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » > « bậc mẫu » ($m > k$) thì $\lim \frac{P_n}{Q_n} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_m b_k > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_m b_k < 0 \end{cases}$.

Để ý rằng nếu P_n, Q_n có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ thì có bậc là $\frac{k}{m}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

Câu 8. Ta có
$$\lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim \frac{\frac{-3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0. \text{ Chọn C.}$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 9. Ta có
$$\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0. \text{ Chọn D.}$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 10. Ta có
$$\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1} = \lim \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{4} = 0. \text{ Chọn B.}$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 11. Ta có
$$\lim \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0. \text{ Chọn D.}$$

Giải nhanh : $\frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2} \sim \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$

Câu 12. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1$. **Chọn A.**

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1$.

Câu 13. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{4}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{a}{5}$. Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10 \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $2 \sim \frac{an+4}{5n+3} \sim \frac{an}{5n} = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 10$.

Câu 14. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+b}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \quad \forall b \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Chọn A.}$

Giải nhanh : $\frac{2n+b}{5n+3} \sim \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.

Câu 15. Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Chọn B.}$

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

Câu 16. $2 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{a+\frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad a \neq 0 \Leftrightarrow a = 2$. **Chọn D.**

Giải nhanh : $2 \sim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} \sim \frac{4n^2}{an^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 17. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{-3}{2} \longrightarrow \text{Chọn A.}$

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} \sim \frac{-3n^3}{2n^3} = -\frac{3}{2}$.

Câu 18. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-3an^4}{1-an^4+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^2}-3a}{1-a+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{1-a} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 19. Ta có

$$L = \lim \frac{2n - n^3}{2n - 1} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n^4 - 7} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \cdot n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 - \frac{1}{n} \right) \cdot n^4 \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)} = \lim \frac{\left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)} = \frac{-1.3}{2.1} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn A.

Giải nhanh: $\frac{2n - n^3}{2n - 1} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n^4 - 7} \sim \frac{-n^3 \cdot 3n^2}{2n \cdot n^4} = -\frac{3}{2}.$

Câu 20. $L = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^4 - 3n - 1} \cdot \frac{2n^3 + 1}{3n^2 - 7} \cdot \frac{4n + 5}{n^4} = \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) \left(4 + \frac{5}{n} \right)}{\left(1 - \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4} \right) \left(3 - \frac{7}{n^2} \right)} = \frac{1.2.4}{1.3} = \frac{8}{3}.$

Chọn C.

Giải nhanh: $\frac{n^2 + 2n}{n^4 - 3n - 1} \cdot \frac{2n^3 + 1}{3n^2 - 7} \cdot \frac{4n + 5}{n^4} \sim \frac{n^2 \cdot 2n^3 \cdot 4n}{n^4 \cdot 3n^2} = \frac{8}{3}.$

Câu 21. $L = \lim \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 8} = \lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 8} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 1.$

Câu 22. $\lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 3 \right)} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3}.$ Ta có

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\infty \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Giải nhanh: $\frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} \sim \frac{n^3}{-3n^2} = -\frac{1}{3}n \longrightarrow -\infty.$

Câu 23. $\lim \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} + 3 \right)}{n^2 \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}.$ Ta có

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty. \text{ Chọn B.}$$

Giải nhanh: $\frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} \sim \frac{3n^3}{4n^2} = \frac{3}{4}n \longrightarrow +\infty.$

Câu 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(\frac{3}{n^3} - 1 \right)}{n \left(4 - \frac{5}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}}$. Ta có

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\frac{1}{4} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{3n - n^4}{4n - 5} = \lim n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\infty. \text{ Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\frac{3n - n^4}{4n - 5} \sim \frac{-n^4}{4n} = -\frac{1}{4}n^3 \longrightarrow -\infty$.

Câu 25. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » < « bậc mẫu » !

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k = 2.2 = 4 > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4} = 0 : \text{ « bậc tử » } < \text{ « bậc mẫu ». Chọn B.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_n b_k = -3 \cdot -2 > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} : \text{ « bậc tử » } = \text{ « bậc mẫu » và } \frac{a_m}{b_k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 26. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » = « bậc mẫu » và $a_m b_k > 0$. **Chọn C.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 27. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » > « bậc mẫu » với $a_m b_k > 0$. **Chọn A.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2}{5n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{5 + \frac{5}{n}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{5 + \frac{5}{n}} = \frac{a_m}{b_k} = \frac{1}{5} > 0 \end{cases}$$

Các đáp án còn lại đều rơi vào trường hợp « bậc tử » $\leq$ « bậc mẫu » nên cho kết quả hữu hạn.

Câu 28. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » = « bậc mẫu » và $a_m b_k < 0$. **Chọn C.**

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3} : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty.$$

Chú ý : (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_m n^m + a_{n-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0 = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_n > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_n < 0 \end{cases}$

(ii) Giả sử $|q| > \max |q_i| : i = 1; 2; \dots; m$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot q^n + a_m q_m^n + \dots + a_1 q_1^n + a_0 = \begin{cases} a_0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } a > 0, q > 1. \\ -\infty & \text{khi } a < 0, q > 1 \end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 29. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 + 5n - 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = 2 > 0 \end{cases}$.

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^2 + 5n - 3 \sim 3n^2 \longrightarrow +\infty$.

Câu 30. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3a^2 - 2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{5}{n^3} - 3a^2 - 2 \right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^3} - 3a^2 - 2 \right) = a^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}, a \in [-10; 10]} a = -1; 0; 1$. **Chọn B.**

Câu 31. Ta có

$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^4 + 4n^2 - n + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = 3 > 0 \end{cases}$.

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^4 + 4n^2 - n + 1 \sim 3n^4 \longrightarrow +\infty$.

Câu 32. Vì $\sqrt{2}, \sqrt{2}^2, \dots, \sqrt{2}^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1 = \sqrt{2} = q$ nên

$u_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}^n}{1 - \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \left[\sqrt{2}^n - 1 \right] \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ vì $\begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ q = \sqrt{2} > 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 33. Ta có $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{4n^2 + 4} = \frac{1}{4}$ (“bậc tử” = “bậc mẫu”). **Chọn D.**

Câu 34. Ta có $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} (1+n-1) = \frac{n^2 - n}{2n^2}$.

Do đó

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 35. Ta có $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ nên

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1}{3n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 4} = \frac{1}{3} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 36. Ta có

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

Chọn B.

Câu 37. Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$, do đó

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) &= \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn A.

Câu 38. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)\end{aligned}$$

Do đó $\lim \left(\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \lim \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}$. **Chọn A.**

Câu 39. Đặt $P_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= P_2 - P_1 + P_3 - P_2 + \dots + P_{n+1} - P_n \\ &= P_{n+1} - P_1 = \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Do đó $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + 1} = \lim \frac{n(n+1)(2n+3)}{6n^2 + 1} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 40. Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a(2 - a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 41. Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n + 1}{2} = \frac{a + 1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \longrightarrow \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 42. $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4} \longrightarrow \text{ **Chọn B.**}$

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} \sim \frac{\sqrt{9n^2}}{4n} = \frac{3}{4}$.

Câu 43. $\lim \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} = \lim \frac{-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \text{ **Chọn C.**}$

Giải nhanh: $\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}} \sim \frac{-n^2}{\sqrt{3n^4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 44. $\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{2+\frac{5}{\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$ **Chọn D.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} \sim \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} = 1.$

Câu 45. $\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{0}{1} = 0 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

Câu 46. Ta có $\lim \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2} = \lim \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}} = \frac{1+\sqrt{1}}{1} = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=0 \end{cases} \longrightarrow S=8 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 47. $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim \frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{0}{1} = 0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh: $\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \sim \frac{10}{\sqrt{n^4}} = \frac{10}{n^2} \longrightarrow 0.$

Câu 48. $\lim n+1 \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{n^4+n^2-1}} \cdot \frac{n+1}{n} = 0$ (“bậc tử” < “bậc mẫu”). **Chọn C.**

Giải nhanh: $n+1 \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}} \sim n \cdot \sqrt{\frac{2n}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

Câu 49. Ta có $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim \frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3}$

$= b\sqrt{3}+c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a}=\frac{b}{3} \Rightarrow P=\frac{1}{3} \\ c=0 \end{cases}.$ **Chọn B.**

Câu 50. Ta có

$$\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} = \lim n \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}} \right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}} \right) = -\sqrt[5]{3} < 0 \end{cases}$$

Chọn D.

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} \sim \sqrt[5]{-3n^5} = -\sqrt[5]{3} \cdot n \longrightarrow -\infty$.

Câu 51. $\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}-\sqrt{n}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n+5}-\sqrt{n+1} = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = 0 \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Câu 52. $\sqrt{n^2-n+1}-n \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n^2-n+1}-n = \lim \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \sim \frac{-n}{\sqrt{n^2}+n} = -\frac{1}{2}$.

Câu 53. $\lim \sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2} = \lim n \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = 1-\sqrt{3} < 0. \text{ Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2} = 1-\sqrt{3} \cdot n \longrightarrow -\infty$.

Câu 54. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = 2. \text{ Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = 2$.

Câu 55. $\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+a+2n+1} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim \sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+a+2n+1} &= \lim \frac{a^2-a-2n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim \frac{a^2-a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2-a-2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Chọn B.} \end{aligned}$$

Câu 56. $\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} \sim \sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} &= \lim \frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}} \\ &= \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Chọn B.

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2} = \frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 57. Giải nhanh : $\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{2n^2} = 1 - \sqrt{2} \cdot n \longrightarrow -\infty$.

Cụ thể : $\lim \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n} = \lim n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0 \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Câu 58. Nếu $\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\text{Ta có } \lim \sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 = \lim \frac{2a^2 - 8}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim \frac{2a^2 - 8}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 59. $\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n^2 - 2n + 3} - n = \lim \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -1 \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

$$\text{Giải nhanh : } \sqrt{n^2 - 2n + 3} - n = \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \sim \frac{-2n}{\sqrt{n^2} + n} = -1.$$

Câu 60. $\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} -1 &= \lim u_n = \lim \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Chọn C.

Giải nhanh :

$$-1 \sim \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \sim \frac{an}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2.$$

Câu 61. $\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \sim \sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{n^3} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} = \lim \frac{-1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}^2 + \sqrt[3]{n^3 + 1} \cdot \sqrt[3]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{n^3 + 2}} = 0. \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Câu 62. $\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \sim \sqrt[3]{-n^3} + n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^2 - n^3}^2 - n \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Chọn A.

$$\text{Giải nhanh : } \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^2 - n^3}^2 - n \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} \sim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6 - n^3} + n^2} = \frac{1}{3}.$$

Câu 63. $\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \sim \sqrt[3]{n^3} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n = \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n^2} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} + 1} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn B.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n = \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n^2} \sim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6} + n \sqrt[3]{n^3} + n^2} = -\frac{2}{3}.$

Câu 64. $\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n} \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1 \longrightarrow \text{Chọn D.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = 1.$

Câu 65. $\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \sqrt{n} \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$

Câu 66. $n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3} \sim n \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3} = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} = 2 \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $n \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3} = \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = 2.$

Câu 67. $n \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 6} \sim n \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \lim n \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 6} &= \lim \frac{7n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 6}} \\ &= \lim \frac{7}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Chọn C.

Giải nhanh : $n \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 6} = \frac{7n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 6}} \sim \frac{7n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{7}{2}.$

Câu 68. $\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}} = \lim -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 4}}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 4}} = \lim n \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{vì } \lim n = +\infty, \lim \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right] = -1 < 0 \longrightarrow \text{Chọn C.}$$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} \sim -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}} = -n \longrightarrow -\infty.$$

Câu 69. $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2} \sim \sqrt{9n^2} = 3n \neq 0 \longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2} \sim \frac{\sqrt{9n^2}}{3n} = 1 \longrightarrow \text{Chọn A.}$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Câu 70. $\sqrt[3]{n^3+1}-n \sim \sqrt[3]{n^3}-n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3+1}-n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}^2 + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = 0 \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 71. Giải nhanh : $\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} \sim \frac{-5^{n+2}}{2.5^n} = -\frac{25}{2} \longrightarrow \text{Chọn A.}$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

Câu 72. Giải nhanh : $\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n} \sim \frac{-2.5^{n+1}}{5^n} = -10 \longrightarrow \text{Chọn B.}$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

Câu 73. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0. \text{ Chọn A.}$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Câu 74. Giải nhanh : $\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} \sim \frac{3^n}{-2.3^n} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{Chọn B.}$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 75. Giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{5}^n - 2^{n+1} + 1}{5.2^n + \sqrt{5}^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \sim \frac{\sqrt{5}^n}{\sqrt{5}^{n+1}} + \frac{2n^2}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5. \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy $S = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30. \text{ Chọn B.}$

Cụ thể: $\lim \left(\frac{\sqrt{5}^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + \sqrt{5}^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \lim \left(\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n}{5 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n + \sqrt{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n} + \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2.$$

Câu 76. Giải nhanh: $\frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \frac{\pi^n + 3^n + 4^n}{3\pi^n - 3^n + 4 \cdot 4^n} \sim \frac{4^n}{4 \cdot 4^n} = \frac{1}{4} \longrightarrow$ **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{4} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1}{3 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^n - 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n + 4} = \frac{1}{4}.$

Câu 77. Giải nhanh: Vì $3 > \sqrt{5}$ nên $3^n - \sqrt{5}^n \sim 3^n \longrightarrow +\infty$. **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim \left[3^n - \sqrt{5}^n \right] = \lim 3^n \left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n \right] = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n = 1 > 0 \end{cases}.$

Câu 78. Giải nhanh: $3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n \sim -5 \cdot 3^n = -\infty$ $-5 < 0 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Cụ thể: $\lim 3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n = \lim 3^n \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 5 \right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 5 \right) = -5 < 0 \end{cases}.$

Câu 79. Giải nhanh: $\frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4} \right)^n \longrightarrow 0$. **Chọn A.**

Cụ thể: $0 \leq \left| \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \right| \leq \frac{8 \cdot 3^{n+1}}{4^n} = 24 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n \rightarrow 0 \longrightarrow \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} = 0.$

Câu 80. Ta có $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow 2^n \geq C_n^3 = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{6} \sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \\ \frac{2^n}{n^2} \rightarrow +\infty \end{cases}$. Khi đó:

$$\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2} = \lim \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = +\infty$$

vì $\begin{cases} \lim \frac{2^n}{n^2} = +\infty \\ \lim \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} > 0 \end{cases}.$

Chọn A.

Câu 81. Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}} \sim \sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}} = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^a \geq 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow a \geq 10.$

Mà $a \in [0; 2018]$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in [10; 2017] \longrightarrow$ có 2008 giá trị a . **Chọn B.**

Cụ thể: $\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt[4]{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{2^{a \cdot 2}}} = \frac{1}{2^a}.$

Câu 82. Ta có $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \frac{-1^n}{3^n} \right) = \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \lim \frac{-1^n}{3^n}.$ Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq \left| \frac{-1^n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{-1^n}{3^n} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \frac{-1^n}{3^n} \right) = \frac{1}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 83. $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \lim \left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} + \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right).$ Ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \sqrt{3}.$$

Chọn B.

Câu 84. Ta có $\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + a}.$

Ta có $\left\{ \begin{array}{l} a \in [0; 20], a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \longrightarrow a \in \{1; 6; 13\}. \text{ Chọn B.}$

Câu 85. Ta có $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n} \cdot \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$ Vì

$$\left. \begin{array}{l} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{C_n^2} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{2} > 0 \end{array} \right.,$$

do đó $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = +\infty.$ **Chọn D.**

Câu 86. Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \cdot \frac{1}{1-q} \\ 2 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \end{cases} . \text{ Chọn A.}$$

Câu 87. Ta có

$$S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 9 \left(1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=\frac{1}{3}} \right) = 9 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{27}{2}.$$

Chọn A.

Câu 88. Ta có

$$S = \sqrt{2} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 89. Ta có

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3. \text{ Chọn A.}$$

Câu 90. Ta có :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{-1^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{-1^{n+1}}{3^{n-1}}}_{\text{CSN lnh: } u_1=1, q=-\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{8}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 91. Ta có

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) + \dots \\ &= \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=q=\frac{1}{2}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots}_{\text{CSN lnh: } u_1=q=\frac{1}{3}} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 92. Ta có $1 + a + a^2 + \dots + a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số

hạng đầu là 1 và công bội là a , nên $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 \cdot 1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

$$\text{Tương tự: } 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 \cdot 1 - b^{n+1}}{1 - b} = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - a^{n+1}}{1 - b^{n+1}} = \frac{1 - b}{1 - a} \quad |a| < 1, |b| < 1.$$

Chọn B.

Câu 93. Ta có

$$S = \underbrace{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 94. Ta có

$$S = \underbrace{1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \sin^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 95. Ta có $\tan \alpha \in (0; 1)$ với mọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S = \underbrace{1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\tan \alpha} = \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 96. Ta có $\begin{cases} M = \frac{1}{1-m} \\ N = \frac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{1}{M} \\ n = 1 - \frac{1}{N} \end{cases}$, khi đó

$$A = \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \frac{MN}{M + N - 1}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 97. Ta có $0,5111\dots = 0,5 + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n} + \dots$

Dãy số $10^{-2}; 10^{-3}; \dots; 10^{-n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng

$$u_1 = 10^{-2}, \text{ công bội bằng } q = 10^{-1} \text{ nên } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{90}.$$

$$\text{Vậy } 0,5111\dots = 0,5 + S = \frac{46}{90} = \frac{23}{45} \longrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \longrightarrow T = a + b = 68. \text{ Chọn B.}$$

Câu 98. Ta có

$$A = 0,353535\dots = 0,35 + 0,0035 + \dots = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \dots = \frac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow T = 3465..$$

Chọn B.

Câu 99. Ta có

$$B = 5,231231\dots = 5 + 0,231 + 0,000231 + \dots$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + \dots = 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \longrightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409$$

Chọn A.

Câu 100. Ta có

$$\begin{aligned}
0,17232323... &= 0,17 + 23 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} \dots \right) \\
&= \frac{17}{100} + 23 \cdot \frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100 \cdot 99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950}. \\
&\longrightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}.
\end{aligned}$$

Chọn D.

○ Bài 02

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 7x + 11 = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 11 = 37 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 2. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = |\sqrt{3}^2 - 4| = 1 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 3. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{-1^2 - 3}{-1^3 + 2} = -2 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{2x - 1} = \frac{1 - 1^3}{2 \cdot 1 - 1} = 0 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 6. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3} = \frac{|-1 - 1|}{1 - 1 - 3} = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 7. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1} = \frac{\sqrt{3 + 1} + 1}{-1 - 1} = -\frac{3}{2} \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{2x - 1}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2 - 3}{2 \cdot 3 - 1}} = \sqrt{\frac{81 - 3}{6 - 1}} = \sqrt{\frac{78}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 10. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1} = \frac{\sqrt[3]{12 - 4} - \sqrt{6 - 2}}{3} = \frac{0}{3} = 0 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 11. Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 15 = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0 \text{ \& } x - 2 > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty.$ **Chọn A.**

Câu 12. $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x + 2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x - 2} = 0 \text{ \& } \sqrt{x - 2} > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}} = +\infty.$ **Chọn B.**

Câu 13. Ta có $|x + 2| = x + 2$ với mọi $x > -2$, do đó :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|3x + 6|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3|x + 2|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x + 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} 3 = 3 \longrightarrow \text{Chọn B.}$$

Câu 14. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{2-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 15. Ta có $x+3 > 0$ với mọi $x > -3$, nên:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{x+3} \cdot x^2+5} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{x+10}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3} \cdot x+10}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{\sqrt{-3+3} \cdot -3+7}{\sqrt{-3^2+5}} = 0.$$

Chọn C.

Câu 16. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{3 \cdot 1^2+1} = 2 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 17. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2+1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0 \text{ \& } 1-x > 0 \quad \forall x < 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 18. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2-3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$

Chọn C.

Câu 19. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax-1 = 2a-1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}+3 = 3 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a-1=3 \Leftrightarrow a=2$. **Chọn B.**

Câu 20. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2-2x+3 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3-2x^2 = -15 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai. **Chọn C.**

Câu 21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x-x^3+1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0 \end{cases}$.

Chọn D.

Giải nhanh: $x-x^3+1 \sim -1 \cdot x^3 \longrightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 22. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^3+2x^2+3|x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3+2x^2-3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty. \text{ **Chọn B.**}$$

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x| \sim |x|^3 \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 23. Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty: \sqrt{x^2+1}+x \sim \sqrt{x^2}+x = 2x \rightarrow +\infty$. **Chọn B.**

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 = 2 > 0 \end{cases}.$$

Câu 23. Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty: \sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2} = \sqrt[3]{3}+1 \cdot x \rightarrow +\infty$.

Chọn B.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \right) = +\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0 \end{cases}$$

Câu 25. Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : x \sqrt{4x^2+7x} + 2x \sim x \sqrt{4x^2} + 2x = 4x^2 \rightarrow +\infty$.

Chọn D.

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{4x^2+7x} + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{4+\frac{7}{x}} + 2 \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4+\frac{7}{x}} + 2 \right) = 4 > 0 \end{cases}$$

Câu 26. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$

Chọn C.

Câu 27. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5+1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+1} \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1} = \frac{5}{3}$.

Chọn D.

Câu 28. Ta có $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x} \frac{x^2-\sqrt{3}x+3}{\sqrt{3}+x} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2-\sqrt{3}x+3}{\sqrt{3}-x}$
 $= \frac{2 \left[-\sqrt{3}^2 - \sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} + 3 \right]}{\sqrt{3} - -\sqrt{3}} = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=10$. **Chọn A.**

Câu 29. $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2-x+6}{x^2+3x} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{x+3}{x} \frac{x-2}{x+3} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{x-2}{x} \right| = \left| \frac{-3-2}{-3} \right| = \frac{5}{3}$. **Chọn C.**

Câu 30. Ta có $3-x > 0$ với mọi $x < 3$, do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{3-x} \sqrt{9+3x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}} = \frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}} = 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \pi^{21} \sqrt[3]{1-2x} - \pi^{21}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \pi^{21} \sqrt[3]{1-2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x = -\frac{2\pi^{21}}{7}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 32. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x-x}{x^2 \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} = +\infty$

vì $1 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x} = 0$ và $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$. **Chọn D.**

Câu 33. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \sqrt[3]{4x+4}^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}{4x+4-8 \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x+4}^2 + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4}{4 \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{12}{12} = 1. \text{ Chọn C.}$$

Câu 34. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{8-x}^2} \right) = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 35. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax}{x \sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} + \frac{bx}{x \cdot 1 + \sqrt{1-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} + \frac{b}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2.$$

Vậy ta được: $\begin{cases} a+b=5 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+3b=12 \end{cases} \Leftrightarrow a=3, b=2 \longrightarrow \text{Chọn A.}$

Câu 36. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2. \text{ Chọn D.}$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì: $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2.$

Câu 37. Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\infty. \text{ Chọn C.}$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì: $\frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^3}{x^2} = 2x \rightarrow -\infty.$

Câu 38. Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{11}{x^6}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0. \text{ Chọn C.}$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì: $\frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} \sim \frac{2x^3}{3x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \rightarrow 0.$

Câu 39. Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $\sqrt{x^2} = -x \longrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = -x - x = -2x \neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x , ta được $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = -1.$

Chọn D.

Câu 40. Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\sqrt{x^2} = x \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-a x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-a x-3}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2-a-\frac{3}{x} \right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 \right).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 \right) = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-a x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2-a-\frac{3}{x} \right) = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2.$$

$$\text{Giải nhanh: ta có } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \frac{2-a x-3}{\sqrt{x^2+1}+x} \sim \frac{2-a x}{\sqrt{x^2}+x} = \frac{2-a x}{2 x} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a < 2.$$

Khi đó $P = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \geq 3$, $P = 3 \Leftrightarrow a = 1 < 2 \Rightarrow P_{\min} = 3$. **Chọn B.**

Câu 41. Giải nhanh: khi $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} \sim \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$. **Chọn C.**

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2.$$

Câu 42. Giải nhanh: khi

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} \sim \frac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x} = \frac{2x-x}{3x+2x} = \frac{1}{5}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2} = \frac{1}{5}.$$

Câu 43. Ta phải có $ax^2 - 3x > 0$ trên $-\infty; \alpha \Leftrightarrow a \geq 0$.

$$\text{Ta có } x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{4x^2-2x+1}+2-x \sim \sqrt{4x^2}-x = -3x \neq 0.$$

Như vậy xem như “tử” là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} > 0$ khi

và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

$$\text{Ta có } \sqrt{ax^2-3x}+bx \sim \sqrt{ax^2}+bx = -\sqrt{a}+b x \longrightarrow -\sqrt{a}+b \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} \sim \frac{-3x}{-\sqrt{a}+b x} = \frac{3}{b-\sqrt{a}} = L > 0 \Leftrightarrow b-\sqrt{a} > 0 \Rightarrow b > \sqrt{a}.$$

Chọn B.

$$\text{Câu 44. Giải nhanh: } x \rightarrow -\infty \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{2}x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Chọn C.}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 45. Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} + ax \sim \sqrt{2x^2} + x$
 $= -\sqrt{2}x + ax = a - \sqrt{2} \quad x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}. \text{ Chọn B.}$

Cụ thể: vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} + ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = +\infty$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}.$

Câu 46. Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow 2x^3 - x^2 \sim 2x^3 \rightarrow -\infty. \text{ Chọn D.}$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 > 0 \end{cases}.$

Câu 47. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2-1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) = -\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2-4 = 0$ và $x^2-4 < 0$ với mọi $x \in -2; 2$. **Chọn A.**

Câu 48. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+ax+ax^2-b}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}.$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a+1+a^2-b=0 \Leftrightarrow 2a-b=-1.$

Vậy ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow L = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$

$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2}{1+x+x^2} = 1. \text{ Chọn C.}$

Câu 49. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+2x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0. \text{ Chọn B.}$

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{1+2x^2} - x \sim \sqrt{2x^2} - x = \sqrt{2}x - x = \sqrt{2} - 1 \quad x \rightarrow +\infty.$

Câu 50. $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0 \longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}+x} = \frac{1}{2x} \rightarrow 0. \text{ Chọn A.}$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{2} = 0.$

Câu 51. $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5} \sim \sqrt{5x^2} + x\sqrt{5} = -\sqrt{5}x + x\sqrt{5} = 0$
 $\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}$

$$= \frac{2x}{\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}} \sim \frac{2x}{\sqrt{5x^2} - x\sqrt{5}} = \frac{2x}{-2\sqrt{5}x} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Cụ thể: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5 + \frac{2}{x}} + \sqrt{5}} = \frac{2}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -1. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 52. Khi $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}. \text{ **Chọn B.**}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 53. Giải nhanh:

$$x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{3} - 1 \quad x \rightarrow -\infty. \text{ **Chọn D.**}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = -\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} - 1 > 0$.

Câu 54. Khi $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} = x - x = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}^2} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[6]{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad x \rightarrow +\infty. \text{ **Chọn A.**}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Câu 55. $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1} \sim \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{2x-1}^2 + \sqrt[3]{4x^2-1} - \sqrt[3]{2x+1}^2} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \rightarrow 0. \text{ Chọn A.}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x-1}^2 + \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{2x-1}^2 + \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}^2} = 0.$

Câu 56. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = 0 - 1 = -1. \text{ Chọn B.}$

Câu 57. Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0. \text{ Chọn C.}$

Câu 58. Giải nhanh:

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \sim x \cdot \sqrt{\frac{2x}{3x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ Chọn B.}$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 \cdot 2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 59. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \pi x - 1 = -1. \text{ Chọn B.}$

Câu 60. Với $x \in -1; 0$ thì $x+1 > 0$ và $\frac{x}{x-1} > 0.$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 + 1 \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 \cdot x^2 - x + 1 \sqrt{\frac{x}{x-1} \cdot x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} \cdot x^2 - x + 1 \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0. \text{ Chọn C.} \end{aligned}$$

○ Bài 03

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 1. Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \leq -3 \end{cases} \xrightarrow{TXD} D = -4; 3 \longrightarrow \text{hàm số liên tục trên}$

$-4; 3$. Xét tại $x=3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = f(3) \longrightarrow \text{Hàm số liên tục trái tại } x=3.$$

Vậy hàm số liên tục trên $-4; 3$. **Chọn C.**

Câu 2. Vì $2 \sin x + 3 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \xrightarrow{TXD} D = \mathbb{R} \longrightarrow \text{Hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$

Chọn D.

Câu 3. Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 = -1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 4. Vì $f(x)$ liên tục trên $-3; 3$ nên suy ra

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 5. Vì $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$ nên suy ra

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} + 2 = 4. \text{ Chọn C.}$$

Câu 6. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3. \text{ Chọn D.}$$

Câu 7. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn A.

Câu 8. Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\text{Ta có: } k + 1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 9. Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $[-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = -\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} + 2 = -4.$$

Chọn B.

Câu 10. Với mọi $x \neq 0$ ta có

$$0 \leq |f(x)| = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Theo giả thiết ta phải có: $m = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. **Chọn C.**

Câu 11. Tập xác định:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) = \dots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) \cup \dots$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \neq 0 = f(0) \longrightarrow f(x)$ không liên

tục tại $x = 0$. **Chọn A.**

Câu 12. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} m = f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x - \pi) + \pi}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\pi \cdot \frac{\sin \pi(x - 1)}{\pi(x - 1)} \right] * \end{aligned}$$

Đặt $t = \pi(x - 1)$ thì $t \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$. Do đó (*) trở thành:

$$m = \lim_{t \rightarrow 0} -\pi \cdot \frac{\sin t}{t} = -\pi. \text{ Chọn A.}$$

Câu 13. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện của bài toán trở thành:

$$m = f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{x - \pi} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\left[\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \quad *$$

Đặt $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pi$. Khi đó (*) trở thành: $m = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn C.

Câu 14. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; -1$, $-1; 0$ và $0; +\infty$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1).$$

—> hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0).$$

—> hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Chọn B.

Câu 15. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; -1$, $-1; 1$ và $1; +\infty$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1)$ —> Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 1$, ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \longrightarrow \text{Hàm số } y = f(x)$$

gián đoạn tại $x = 1$. **Chọn B.**

Câu 16. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 2$; $2; +\infty$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2). \quad *$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [1 - m(x)] = 2 - 1 - m \longrightarrow * \Leftrightarrow 4m^2 = 2 - 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2 x^2 = 4m^2 \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 17. Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $0; 4$ và $4; 6$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $0; 6$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4$, $x = 0$, $x = 6$.

Tức là ta cần có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases} . \quad *$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases} ;$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} 1+m = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases} ;$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 1+m = 1+m; \\ f(4) = 1+m \end{cases}$$

Khi đó $*$ trở thành $1+m=2 \Leftrightarrow m=1 < 2$. **Chọn A.**

Câu 18. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 1$ và $1; +\infty$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) . \quad *$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2-x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x-2 = -1 \end{cases} \longrightarrow * \text{ không thỏa mãn}$

với mọi $a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu. **Chọn C.**

Câu 19. Hàm số xác định và liên tục trên $(0; 1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. $*$

Ta có
$$\begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x+1] \sqrt{x}+1 = 4 \end{cases} \longrightarrow * \Leftrightarrow a=4. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 20. Để thấy hàm số liên tục trên $-\infty; 1$ và $1; +\infty$.

Ta có
$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-\sqrt{2-x}+1] = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 21. Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. $*$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{1 - x} \cdot \frac{\sqrt{4x - 3} + x}{\sqrt{4x - 3} + x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 - a^2x = 1 - 3a^3. \end{cases}$$

$$\longrightarrow * \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 22. Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. *

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4} \longrightarrow * \Leftrightarrow a = \pm 1 \longrightarrow a_{\max} = 1. \text{ Chọn C.} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2x + \frac{1}{4} \right) = 2a^2 - \frac{7}{4} \end{cases}$$

Câu 23. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 0$ và $0; +\infty$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \cos x = 1 - \cos 0 = 0 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases}$$

Chọn C.

Câu 24. Ta có $f(x)$ liên tục trên $-\infty; -1$, $-1; 1$, $1; +\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có } & \begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1. \text{ Chọn A.} \\ \bullet \text{ Ta có } & \begin{cases} f(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 25. Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**

Câu 26. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 0$, $0; 1$ và $1; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 27. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 1$, $1; 3$ và $3; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 1) = 4 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 3. \end{cases}$$

Chọn D.

Câu 28. Hàm số $y = h(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 0$, $0; 2$ và $2; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 1 = 5 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 1 = 5 \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 29. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. *

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} m^2 x + 1 = m^2 + 1 \longrightarrow * \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = \pm 1 \longrightarrow S = 0$. **Chọn B.**

Câu 30. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 0$, $0; 1$ và $1; +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \cos x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn C.

Câu 31. (i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(-2) = 23 > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_1 trên $[-2; 1]$, mà $-2; -1 \subset [-2; 0] \subset (-\infty; 1] \longrightarrow$ B sai và C đúng $\longrightarrow$ **Chọn B.**

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Kết hợp với (1) suy

ra $f(x) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < \frac{1}{2} \longrightarrow$ D đúng.

Câu 32. Hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

- (i) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $[-1; 0]$.
- (ii) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $[0; 1]$.
- (iii) $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $[1; 2]$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2 \longrightarrow \text{Chọn D.}$$

Câu 33. Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $[-2; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 2]$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0 \longrightarrow f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[-2; -1]$.
- $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[-1; 0]$.

- $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow 1 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0; 2).$

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2; 2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$. Chọn D.

Cách CASIO. (i) Chọn MODE 7 (chức năng TABLE) và nhập: $F(X) = X^3 - 3X - 1$.

(ii) Ấn “=” và tiếp tục nhập: **Start** $\leftrightarrow -5$ (có thể chọn số nhỏ hơn).

End $\leftrightarrow 5$ (có thể chọn số lớn hơn).

Step $\leftrightarrow 1$ (có thể nhỏ hơn, ví dụ $\frac{1}{2}$).

(iii) Ấn “=” ta được bảng sau:

X		F(X)	Math
4	-2	-3	
5	-1	1	
6			

Bên cột X ta cần chọn hai giá trị a và b ($a < b$) sao cho tương ứng bên cột $F(X)$ nhận các giá trị trái dấu, khi đó phương trình có nghiệm $a; b$. Có bao nhiêu cặp số a, b như thế sao cho khác khoảng $a; b$ rời nhau thì phương trình $f(x) = 0$ có bấy nhiêu nghiệm.

Câu 34. Ta có $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1) \cdot g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$ hay phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$. **Chọn B.**

Câu 35. Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m - 2x + m - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Khi đó $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Ta có $f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) > 0$ (do $x_1 < -1 < x_2 < x_3$).

Mà $f(-1) = -m - 5$ nên suy ra $-m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$.

- Thử lại: Với $m < -5$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ nên tồn tại } a < -1 \text{ sao cho } f(a) < 0. \quad 1$$

$$\text{Do } m < -5 \text{ nên } f(-1) = -m - 5 > 0. \quad 2$$

$$f(0) = m - 3 < 0. \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại } b > 0 \text{ sao cho } f(b) > 0. \quad 4$$

Từ 1 và 2, suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -1)$; Từ 2 và 3, suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$; Từ 3 và 4, suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy khi $m < -5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m \in -10;10]{m \in \mathbb{Z}} m \in -9;-8;-7;-6$. **Chọn C.**