

Chuyên đề 13

CÁC DẠNG CÂN BẰNG

A – TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Cân bằng của vật trên mặt chân đế



- Mặt chân đế: mặt chân đế là đa giác lồi nhỏ nhất chứa tất cả các điểm tiếp xúc giữa vật và mặt tiếp xúc.
- Điều kiện cân bằng: Điều kiện cân bằng của vật trên mặt chân đế là giá của trọng lực phải qua mặt chân đế (hay *trọng tâm của vật phải “rơi” trên mặt chân đế*).
- Mức vững vàng của cân bằng: Cân bằng càng vững vàng nếu diện tích mặt chân đế càng lớn và trọng tâm của vật càng thấp.

2. Cân bằng của vật trên một điểm hoặc một trục cố định

- Cân bằng không bền:

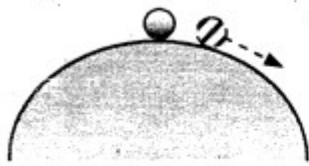
- + Trọng tâm của vật ở vị trí cao nhất so với các vị trí lân cận.
- + Thế năng trọng trường cực đại so với các vị trí lân cận.
- + Vật có xu hướng lệch xa vị trí cân bằng khi bị kéo ra khỏi vị trí cân bằng.

- Cân bằng bền:

- + Trọng tâm của vật ở vị trí thấp nhất so với các vị trí lân cận.
- + Thế năng trọng trường cực tiểu so với các vị trí lân cận.
- + Vật có xu hướng trở về vị trí cân bằng khi bị kéo ra khỏi vị trí cân bằng.

- Cân bằng phiếm định:

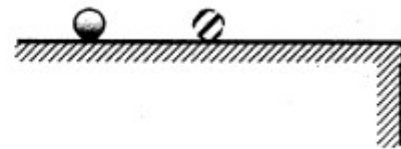
- + Trọng tâm của vật có vị trí hoặc độ cao không đổi.
- + Thế năng trọng trường có cùng giá trị so với các vị trí lân cận.



Cân bằng không bền



Cân bằng bền



Cân bằng phiếm định

B – NHỮNG CHÚ Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

*** VỀ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG**

- Đối với các dạng cân bằng của vật trên một điểm hoặc một trục cố định, để xác định dạng cân bằng của vật ta có thể:

+ So sánh độ cao trọng tâm của vật ở vị trí cân bằng với các vị trí lân cận, nếu trọng tâm của vật ở vị trí cân bằng cao hơn các vị trí lân cận thì đó là cân bằng không bền; nếu trọng tâm của vật ở vị trí cân bằng thấp hơn các vị trí lân cận thì đó là cân bằng bền; nếu trọng tâm hoặc độ cao trọng tâm của vật không đổi thì đó là cân bằng phiếm định.

+ Đưa vật dịch khỏi vị trí cân bằng, nếu hợp lực tác dụng lên vật có tác dụng đưa vật trở lại vị trí cân bằng cũ thì đó là cân bằng bền; nếu hợp lực tác dụng lên vật có tác dụng đưa vật ra xa vị trí cân bằng cũ thì đó là cân bằng không bền; nếu hợp lực tác dụng lên vật không có tác dụng đưa vật trở lại hoặc ra xa vị trí cân bằng cũ thì đó là cân bằng phiếm định.

- Có thể dựa vào dạng cân bằng để xác định vị trí trọng tâm của vật.

*** VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

1. Với dạng bài tập về cân bằng của vật tựa trên một điểm hoặc một trục cố định. Phương pháp giải là dựa vào mục **Về kiến thức và kỹ năng trên.**

2. Với dạng bài tập về cân bằng của vật tựa trên một điểm hoặc một trục cố định. Phương pháp giải là :

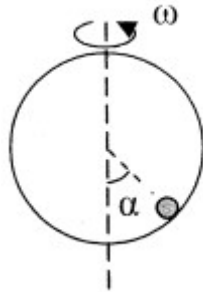
- Điều kiện của cân bằng là giá của trọng lực phải đi qua mặt chân đế hay trọng tâm phải “rơi” trên mặt chân đế.

- Để tăng mức vững vàng của cân bằng ta có thể tăng diện tích mặt chân đế hoặc hạ thấp trọng tâm của vật (hoặc làm cả hai).

C – CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG

13.1. Hình cầu bán kính R chứa một hòn bi ở đáy. Khi hình cầu quay quanh trục thẳng đứng đứng với vận tốc góc ω đủ lớn thì bi cùng quay với hình cầu ở vị trí xác định bởi góc α .

Xác định các vị trí cân bằng tương đối của bi và nghiên cứu sự bền vững của chúng.

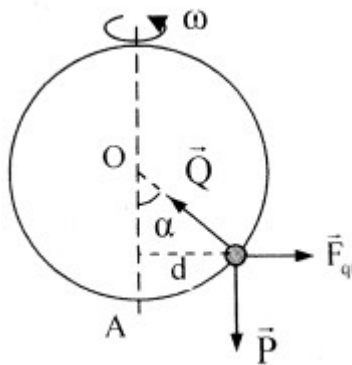


Bài giải

- Chọn hệ quy chiếu gắn với hình cầu.

- Các lực tác dụng lên hòn bi: trọng lực \vec{P} , phản lực \vec{Q} , lực quán tính li tâm \vec{F}_{qt} ($F_{qt} = m\omega^2 d = m\omega R \sin \alpha$):

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{qt} = \vec{0} \quad (1)$$



- Chiếu (1) lên phương tiếp tuyến ta được:

$$P \sin \alpha - F_{qt} \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow mg \sin \alpha - m\omega^2 R \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 0 (\alpha = 0) \text{ và } \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} \left(\alpha = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right) \right).$$

Như vậy, với mọi ω ta luôn có một vị trí cân bằng ứng với $\alpha = 0$ (ở đáy hình cầu); nếu $\cos \alpha < 1 \left(\omega^2 > \frac{g}{R} \right)$

ta có vị trí cân bằng thứ hai với $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$.

Vậy giờ ta khảo sát tính bền vững ứng với các trường hợp trên:

- Vị trí $\alpha = 0$: Đưa hòn bi lệch khỏi A một góc nhỏ, vì α nhỏ nên $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. Hợp các lực tác dụng lên hòn bi sẽ là: $R_1 \approx m(g\alpha - \omega^2 R\alpha)$:

+ nếu $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow R_1 > 0$: R_1 sẽ kéo hòn bi trở lại A: cân bằng bền.

+ nếu $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow R_1 < 0$: R_1 không thể kéo hòn bi trở lại A: cân bằng không bền.

- Vị trí ứng với $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$: Đưa hòn bi lệch khỏi vị trí cân bằng một chút (lên cao hoặc xuống thấp) thì:

+ nếu đưa hòn bi lên cao (α tăng) thì: $R_1 = m(g - \omega^2 R \cos \alpha) \sin \alpha > 0$: hòn bi bị kéo tụt xuống: cân bằng bền.

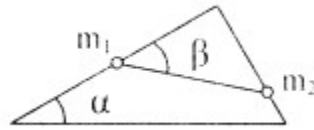
+ nếu đưa hòn bi xuống thấp (α giảm) thì: $R_1 = m(g - \omega^2 R \cos \alpha) \sin \alpha < 0$: hòn bi bị kéo lên cao: cân bằng bền.

Vậy: Có hai vị trí cân bằng tương đối là đáy hình cầu và vị trí ứng với $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$:

+ Ở đáy hình cầu, hòn bi cân bằng bền nếu $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ và không bền nếu $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$.

+ Ở vị trí $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$ hòn bi luôn cân bằng bền nếu $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$.

13.2. Khung dây có dạng hình tam giác vuông với $\alpha = 30^\circ$ đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Hai vật $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ và $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ nối với nhau bằng dây có thể trượt không ma sát dọc theo hai cạnh khung dây.



Khi hai vật ở vị trí cân bằng, lực căng của dây nối và góc β là bao nhiêu? Cân bằng là bền hay không bền?

Bài giải

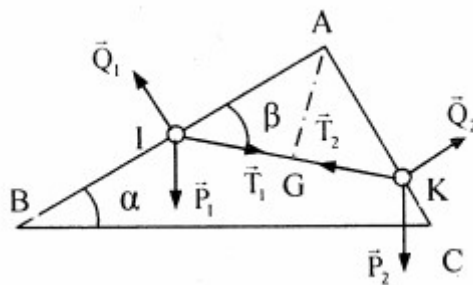
- Các lực tác dụng lên m_1 : trọng lực \vec{P}_1 , phản lực \vec{Q}_1 , lực căng dây \vec{T}_1 . Điều kiện cân bằng với m_1 là:

$$\vec{P}_1 + \vec{Q}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \quad (1)$$

- Các lực tác dụng lên m_2 : trọng lực \vec{P}_2 , phản lực \vec{Q}_2 , lực căng dây \vec{T}_2 . Điều kiện cân bằng với m_2 là:

$$\vec{P}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

- Chiếu (1) và (2) lên phương hai cạnh bên của tam giác, ta được:



$$T_1 \cos \beta - P_1 \sin \alpha = 0 \quad (1')$$

$$T_2 \sin \beta - P_2 \cos \alpha = 0 \quad (2')$$

$$\Rightarrow T \cos \beta = P_1 \sin \alpha \quad (1'')$$

$$\text{và } T \sin \beta = P_2 \cos \alpha (T_1 = T_2 = T) \quad (2'')$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{P_2}{P_1 \cdot \tan \alpha} = \frac{0,3 \cdot 10}{0,1 \cdot 10 \cdot \tan 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \beta = 79^\circ$$

- Bình phương hai vế (1'') và (2'') rồi cộng lại, ta được:

$$T^2 = P_1^2 \sin^2 \alpha + P_2^2 \cos^2 \alpha = (0,1.10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (0,3.10)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 7$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{7} \approx 2,65N$$

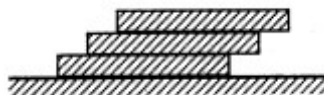
- Dạng cân bằng? Vì tam giác AIK vuông tại A nên khi đoạn dây IK di chuyển thì trọng tâm G của hai vật di chuyển trên cung tròn tâm A, bán kính $AG = \frac{IK}{2}$. Gọi G' là vị trí trọng tâm thấp nhất ($G \neq G'$), lúc đó tiếp tuyến với cung tròn phải nằm ngang và vuông góc với bán kính AG'.

$$\Rightarrow AG' \perp BC \Rightarrow \widehat{BAG'} = \widehat{AIG'} = 60^\circ = \alpha \Rightarrow \text{vô lí!}$$

=> G là vị trí trọng tâm thấp nhất => đó là cân bằng bền.

Vậy: Lực căng dây nói là $T \approx 2,65N$, góc $\beta = 79^\circ$ và đó là cân bằng bền.

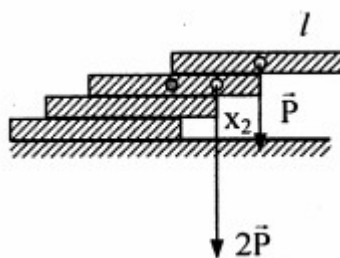
13.3. Có n tấm đồng chất như nhau, chiều dài $2l$ được xếp chồng lên nhau sao cho tấm trên nhô ra một phần so với tấm dưới. Xác định chiều dài phần nhô ra tối đa của mỗi tấm để hệ vẫn còn cân bằng.



Bài giải

Gọi P là trọng lượng của mỗi tấm.

- Xét tấm trên cùng: Trọng tâm của tấm nằm chính giữa tấm nên phần nhô ra tối đa để nó vẫn cân bằng là l .



- Xét hai tấm trên cùng: Phần nhô ra tối đa của tấm thứ hai là x_2 được xác định bởi:

$$P(l - x_2) = Px_2 \Rightarrow x_2 = \frac{l}{2}$$

- Xét ba tấm trên cùng: Phần nhô ra tối đa của tấm thứ ba là x_3 được xác định bởi:

$$P(l - x_3) = 2Px_3 \Rightarrow x_3 = \frac{l}{3}$$

- Tổng quát, phần nhô ra của tấm thứ i là x_i với: $x_i = \frac{l}{i}$.

Vậy: để hệ vẫn cân bằng thì phần nhô ra tối đa của tấm thứ i là $x_i = \frac{l}{i}$.

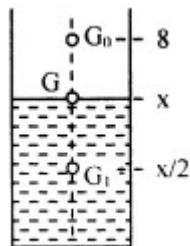
13.4. Cốc nước chia độ có khối lượng 180g và trọng tâm (của cốc không) nằm ở độ chia thứ 8. Mỗi độ chia tương ứng với 20 cm^3 . Hỏi đổ nước tới độ chia nào thì cân bằng vững vàng nhất?

Trọng tâm chung của nước và cốc bây giờ sẽ ở độ chia nào?

Bài giải

Vì cốc nước cân bằng vững vàng nhất khi vị trí trọng tâm của cốc nước nằm ở vị trí thấp nhất. Lúc này vị trí trọng tâm sẽ nằm ở mặt thoáng nước trong cốc.

Gọi G là trọng tâm chung của cốc nước; G_0 là trọng tâm của cốc không; G_1 là trọng tâm của phần nước trong cốc: $G \in G_0G_1$. Theo quy tắc hợp lực song song, ta có:



$$\frac{G_0G}{G_1G} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{m_1}{m_0}$$

$$\Rightarrow \frac{8-x}{\frac{x}{2}} = \frac{20x}{180} \Rightarrow \frac{2(8-x)}{x} = \frac{20x}{180}$$

$$\Rightarrow x^2 + 18x - 144 = 0 \Rightarrow x = 6$$

Vậy: Mực nước và trọng tâm chung nằm ở độ chia thứ 6.