

Phần

CƠ HỌC VẬT RẮN

Dạng 1. TÍNH MÔMEN QUÁN TÍNH – XÁC ĐỊNH KHỐI TÂM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Mô men quán tính

- là một đại lượng vật lý (với đơn vị đo trong SI là kilôgam mét vuông kg m^2) đặc trưng cho mức quán tính của các vật thể trong chuyển động quay, tương tự như khối lượng trong chuyển động thẳng.

- Với một khối lượng m có kích thước nhỏ so với khoảng cách r tới trục quay, mô men quán tính được tính bằng: $I = m r^2$

- Với hệ nhiều khối lượng có kích thước nhỏ, mô men quán tính của hệ bằng tổng của mô men quán tính từng khối lượng: $I = \sum m_i r_i^2$

- Với vật thể rắn đặc, chứa các phần tử khối lượng gần như liên tục, phép tổng được thay bằng tích phân toàn bộ thể tích vật thể: $I = \int r^2 dm$

- Với dm là phần tử khối lượng trong vật và r là khoảng cách từ dm đến tâm quay. Nếu khối lượng riêng của vật là ρ thì: $dm = \rho dV$ Với dV là phần tử thể tích.

Định lý trục song song (Định lý Stê-nơ (Steiner) hay định lý Huy-ghen (Huyghens)).

Xét với trục quay Δ song song với trục quay Δ_G qua khối tâm G của vật rắn, chúng cách nhau một khoảng d . Khối lượng vật rắn là M , mô men quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ là I được xác định qua mô men quán tính I_G đối với trục quay Δ_G

$$I = I_G + Md^2$$

(Định lý Stê-nơ (Steiner) hay định lý Huy-ghen (Huyghens)).

I_G - là mô men quán tính của vật đối với trục quay qua khối tâm

m - là khối lượng của vật

d - là khoảng cách giữa 2 trục quay

2. Khối tâm

a) Đối với hệ chất điểm S là trọng tâm của các điểm M_i có khối lượng m_i , gọi O là một điểm tùy ý, ta có

$$\overrightarrow{OG} = \vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{với } \vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$$

Nếu ta chọn O ở G thì $\vec{r}_G = \vec{0}$

b) Đối với vật rắn:

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

B. VÍ DỤ MẪU

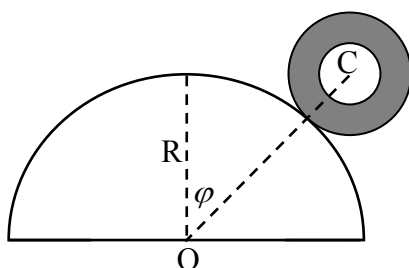
Ví dụ 1.

Cho một khối trụ đồng chất khối lượng m phân bố đều, có tiết diện là hình vành khăn,

bán kính ngoài là r, bán kính trong là $\frac{r}{2}$.

Khối trụ này lăn không trượt, không vận tốc đầu từ đỉnh của một bán trụ cố định bán kính R.

Gọi I là momen quán tính của khối trụ đối với trục của nó. Hãy tính I theo m và r.



Hướng dẫn

Khối lượng riêng của khối trụ rỗng: $D = \frac{m}{\ell \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right)} = \frac{4m}{3 \cdot \ell \cdot \pi \cdot r^2}$

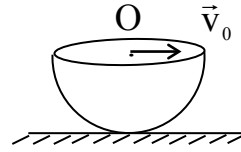
Khối lượng của khối trụ đặc bán kính r: $m_1 = \frac{r^2}{\left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right)} m = \frac{4}{3} m$

Khối lượng của khối trụ đặc bán kính r/2: $m_2 = \frac{4}{3} m - m = \frac{1}{3} m$

Momen quán tính của khối trụ rỗng: $I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 - \frac{1}{2} m_2 \frac{r^2}{4} = \frac{5}{8} m r^2 \quad (1)$

Ví dụ 2.

Cho một bán cầu đặc đồng chất, khối lượng m , bán kính R , tâm O (hình vẽ). Chứng minh rằng khối tâm G của bán cầu cách tâm O của nó một đoạn là $d = 3R/8$.

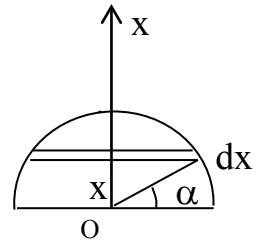


Hướng dẫn

Do đối xứng, G nằm trên trục đối xứng Ox . Chia bán cầu thành nhiều lớp mỏng dày dx nhỏ (hình vẽ).

Một lớp ở điểm có tọa độ $x = R \sin \alpha$, dày $dx = R \cos \alpha \cdot d\alpha$

có khối lượng $dm = \rho \pi (R \cos \alpha)^2 dx$ với $m = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$ nên:



$$x_G = \frac{\int_0^m x dm}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} \rho \pi R^4 \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha}{m}$$

$$\Rightarrow d = x_G = -\frac{\rho \pi R^4}{4m} \cos^4 \alpha \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\rho \pi R^4}{4m} = \frac{3R}{8} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3. Xác định tọa độ trọng tâm của các vật đồng chất có khối lượng là ρ trên một đơn vị phân bố tương ứng có hình dạng như sau

a. Đoạn dây hình cung, bán kính R , chắn góc α . Áp dụng cho đoạn dây nửa đường tròn bán kính R .

b. Bản phẳng hình quạt bán kính R , góc ở tâm α . Áp dụng cho bản bán nguyệt bán kính R .

Hướng dẫn

a) Tọa độ trọng tâm của cung tròn

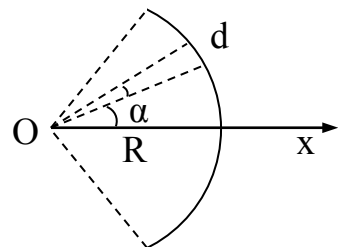
+ Do tính chất đối xứng nên vị trí khối tâm G của đoạn dây nằm trên trục Ox

+ Xét phần tử vi phân chiều dài rất bé có độ dài và khối lượng tương ứng là

$$\begin{cases} dl = R \cdot d\varphi \\ dm = \rho \cdot R \cdot d\varphi \end{cases}$$

(Vì khối lượng phân bố theo chiều

dài)



+Tọa độ khối tâm G

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} dm \cdot R \cos \varphi = \frac{1}{m} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho \cdot R^2 \cos \varphi \cdot d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{R}{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{2R \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

(với $m = \rho \cdot \alpha \cdot R$)

+ Áp dụng cho đoạn dây nửa đường tròn $\alpha = \pi \Rightarrow x_G = \frac{2R}{\pi}$

b) Tọa độ trọng tâm của hình quạt.

+ Biện luận như câu a. Trọng tâm nằm

trên trục Ox

+ Xét phần tử vi phân diện tích dS
giới hạn bởi hai đường tròn bán kính
 r và $(r + dr)$ có góc ở tâm là $d\varphi$ có
khối lượng tương ứng là dm với

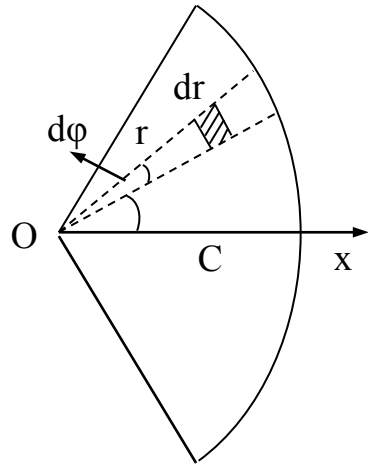
$$\begin{cases} dS = dl \cdot dr = r \cdot d\varphi \cdot dr \\ dm = \rho \cdot dS = \rho r \cdot d\varphi \cdot dr \end{cases}$$

(Vì khối lượng phân bố theo diện tích)

+ Tọa độ khối tâm G

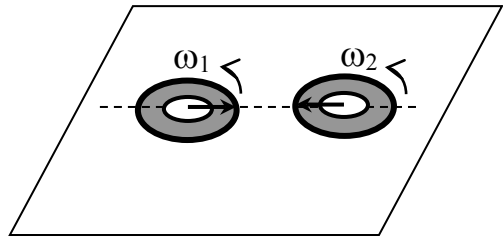
$$x_G = \frac{1}{m} \int_0^R \rho \cdot r^2 \cdot dr \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{4 \cdot R \sin \frac{\alpha}{2}}{3\alpha} \quad (\text{với } m = \frac{1}{2} \rho \alpha R^2)$$

+ Áp dụng cho hình bán nguyệt $\alpha = \pi \Rightarrow x_G = \frac{4R}{3\pi}$



C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hai chiếc đĩa tròn đồng chất giống nhau chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang rất nhẵn, theo đường thẳng nối tâm các đĩa, đến gặp nhau. Các đĩa này quay cùng chiều quanh trục thẳng đứng qua tâm của chúng với các tốc độ góc tương ứng là ω_1 và ω_2 .

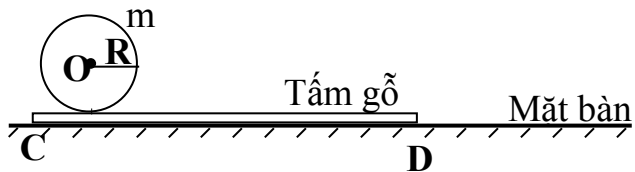


Tác dụng của lực ma sát giữa các đĩa và mặt bàn không đáng kể, còn tác dụng của lực ma sát xuất hiện ở điểm tiếp xúc hai đĩa với nhau thì đáng kể. Biết các đĩa có khối lượng m , có dạng trụ tròn thẳng đứng, hai đáy phẳng, bán kính R ; phần tâm đĩa có khoét một lỗ thủng hình trụ tròn đồng tâm với vành đĩa, bán kính $R/2$. Tính mômen quán tính đối với trục quay nói trên của mỗi đĩa.

Bài 2. Một vật hình cầu bán kính R đang đứng yên trên tấm gỗ mỏng CD. Mật độ khối lượng của vật phụ thuộc vào khoảng cách r đến tâm của nó theo quy luật:

$$\rho = \frac{3m}{7\pi R^3} \left(1 + \frac{r}{R} \right), m$$

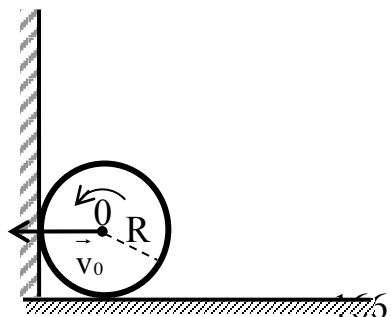
là một hằng số dương.



Tấm gỗ được kéo trên mặt bàn nằm ngang theo chiều DC với gia tốc

không đổi a (xem hình vẽ). Kết quả là vật lăn không trượt về phía D được đoạn ℓ và rơi xuống mặt bàn. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt bàn là k , gia tốc trọng trường là g . Tính khối lượng và mô men quán tính của vật đối với trục quay qua tâm của nó.

Bài 3. Một khối trụ đặc có bán kính R , chiều cao h , khối lượng m , lăn không trượt trên mặt sàn nằm ngang rồi va vào một bức tường thẳng đứng cố định (trục của khối trụ luôn song song với mặt sàn và tường). Biết hệ số ma sát giữa khối trụ và bức tường là μ ; vận tốc của trục khối



trụ trước lúc va chạm là v_0 ; sau va chạm thành phần vận tốc theo phương ngang của trục giảm đi một nửa về độ lớn; mômen quán tính đối với trục của khối trụ là

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \text{ (hình vẽ). Bỏ qua tác dụng của trọng lực trong lúc va chạm và bỏ qua}$$

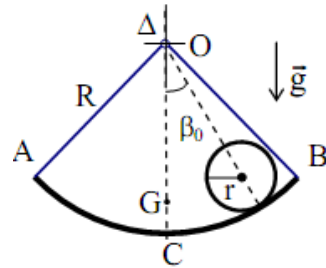
ma sát lăn. Biết mật độ khối lượng ρ tại một điểm của khối trụ phụ thuộc vào

$$\text{khoảng cách } r \text{ từ điểm đó đến trục của nó theo quy luật } \rho = A\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{m}{R^2 h}.$$

Tìm hệ số A .

Bài 4.

Cho vật 1 là một bản mỏng đều, đồng chất, được uốn theo dạng lòng máng thành một phần tư hình trụ AB cứng, ngắn, có trục Δ , bán kính R và được gắn với điểm O bằng các thanh cứng, mảnh, nhẹ. Vật 1 có thể quay không ma sát quanh một trục cố định (trùng với trục Δ) đi qua điểm O . Trên hình vẽ, OA và OB là các thanh cứng cùng độ dài R , OAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục Δ , chứa khối tâm G của vật 1, C là giao điểm của OG và lòng máng. Tìm vị trí khối tâm G của vật 1.



D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

$$\text{Mô men: } I = \int_r^R \left(\frac{m}{\pi(R^2 - r^2)} \right) 2\pi r_l^3 dr_l ; r = R/2, I = m \frac{(R^2 + r^2)}{2} = \frac{5mR^2}{8}$$

Bài 2.

$$\text{Khối lượng của vật: } \int_0^R \rho dV = m$$

$$\text{Mô men quán tính: } dI_0 = \frac{2}{3} dm \cdot r^2 = \frac{2}{3} \frac{3m}{7\pi R^3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r^2 \cdot dr$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_0^R R dI_0 = \frac{44}{105} mR^2$$

Bài 3.

Sử dụng hệ tọa độ trụ:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi h \int_0^R \rho r^3 dr = 2\pi h \frac{mA}{R^2 h} \int_0^R \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) r^3 dr = \frac{2}{5} mR^2$$

$$\rightarrow A = \frac{12}{25\pi}$$

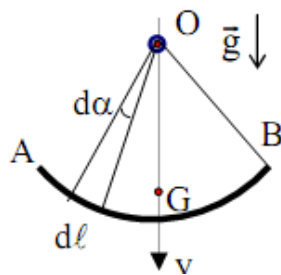
Bài 4.

Do tính đối xứng, ta thấy ngay G nằm trên đường thẳng đứng Oy (xem hình vẽ) nên chỉ cần tính tọa độ

$y_G = OG$ của vật. Mật độ khối lượng: $\rho = \frac{2m}{\pi R}$

Xét phần tử dài $d\ell$, có khối lượng $dm = \rho \cdot d\ell =$

$$\frac{2m}{\pi R} d\ell = \frac{2m}{\pi} \cdot d\alpha$$



Theo công thức tính tọa độ khối tâm: $y = \frac{1}{m} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} R \cos \alpha \frac{2m}{\pi} d\alpha = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$.

$$\text{Vậy } OG = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$$

Dạng 2. ĐỘNG HỌC - ĐỘNG LỰC HỌC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Các chú ý về động học và động lực học vật rắn:

- Các đại lượng $\varphi, \varphi_0, \omega, \gamma$ là đại lượng đặc trưng cho chuyển động quay của vật rắn. Trong một hệ quy chiếu, ω có giá trị như nhau với các trục quay bất kì song song với nhau.
- Các đại lượng $\vec{a}_t; \vec{a}_n; \vec{a}; \vec{v}$ chỉ đặc trưng cho một điểm trên vật rắn.
- Giữa chuyển động quay của vật rắn và chuyển động tịnh tiến có các đại lượng vật lý tương đương nhau:
- Các đại lượng liên quan đến chuyển động của một chất điểm (hay chuyển động tịnh tiến của vật rắn) được gọi là những *đại lượng dài*.
- Các đại lượng liên quan đến chuyển động quay của một vật rắn quanh một trục được gọi là những *đại lượng góc*.

<i>Các đại lượng dài:</i>	<i>Các đại lượng góc:</i>
- Gia tốc.	- Gia tốc góc.
- Vận tốc.	- Vận tốc góc.
- Lực.	- Momen lực.
- Động lượng.	- Momen động lượng.

Nếu đại lượng dài là đại lượng vector thì các đại lượng góc tương ứng cũng là đại lượng vector.

- Định lý phân bố vận tốc:

Xét vật rắn P dịch chuyển trong hệ quy chiếu (HQC) O.

Xét hai điểm bất kì trên vật rắn là A và B. Gọi ω là vận tốc góc quay của vật rắn trong hệ quy chiếu O. Hệ thức quan trọng giữa các vận tốc của A và B của vật rắn tại một thời điểm cho trước là: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ (1)

2. Đặc điểm của lực tác dụng lên vật rắn

- Lực tác dụng lên vật rắn thì điểm đặt là tùy ý trên giá.

- Hệ lực tác dụng lên vật rắn ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$) có thể tìm được hợp lực hoặc không tìm được hợp lực. Cần phân biệt hợp lực và tổng véc tơ các lực.

Lý thuyết và thực nghiệm cho thấy, có thể xảy ra một trong ba trường hợp (TH)

dưới đây:

TH1: Vật chỉ chuyển động tịnh tiến giống như một chất điểm. Trong trường hợp này hệ lực tương đương với một lực duy nhất đặt tại khối tâm và tổng các lực cũng là hợp lực.

TH2: Vật chỉ quay quanh một trục đi qua khối tâm. Trong trường hợp này hệ lực tương đương với một ngẫu lực mà như ta đã biết không thể tìm được hợp lực của nó. Vì hệ lực không có hợp lực nên ta phải nói là tổng các lực tác dụng vào vật bằng 0, còn tổng các momen lực đối với một trục đi qua khối tâm thì khác không và do đó vật chỉ quay quanh khối tâm đứng yên (nếu lúc đầu vật đứng yên).

TH3: Vật vừa chuyển động tịnh tiến, vừa quay quanh khối tâm. Trong trường hợp này, hệ lực tương đương với một lực đặt tại khối tâm và một ngẫu lực. Do đó, lực tương đương đặt ở khối tâm không phải là hợp lực mà chỉ là tổng các lực.

3. Cách xác định tổng các lực:

a. Phương pháp hình học:

Giả sử vật rắn chịu ba lực đồng thời tác dụng là

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$ (Hình a). Lấy một điểm P bất kì trong không gian làm điểm đặt của lực, ta vẽ các

lực $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ và $\vec{F}'_3$ song song, cùng chiều và

cùng độ lớn với các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$ (Hình b).

Dùng quy tắc hình bình hành ta tìm được hợp lực

của hệ lực đồng quy $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ và $\vec{F}'_3$. Hợp lực

này là tổng các lực của hệ lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$.

b. Phương pháp đại số:

Chọn một hệ trục tọa độ Đề-các (Ox, Oy) nằm trong mặt phẳng của vật rồi chiếu

các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ lên các trục tọa độ. Tổng của các lực là một lực $\vec{F}$, có hình

chiếu lên các trục tọa độ bằng tổng đại số của hình chiếu của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và

$\vec{F}_3$ lên các trục đó:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum F_{ix}.$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum F_{iy}.$$

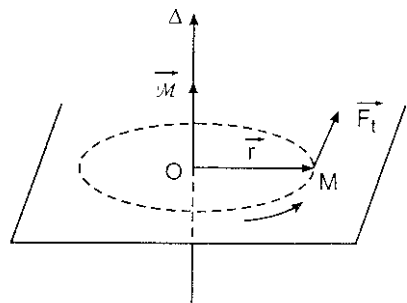
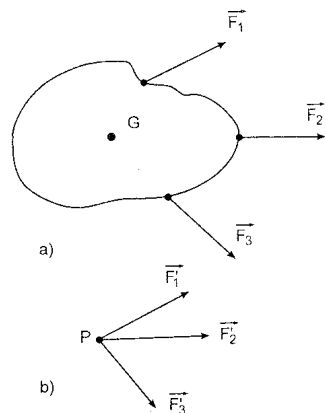
Tóm lại, tổng các lực là một lực chỉ tương đương với hệ lực về tác dụng gây ra chuyển động tịnh tiến cho vật rắn mà thôi.

4. Biểu thức vectơ mômen lực đối với một trục quay.

Biểu thức của momen lực đối với trục quay

Δ được viết dưới dạng vector như sau:

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_t$, trong đó, $\vec{F}_t$ là thành phần



tiếp tuyến của lực $\vec{F}$ với quỹ đạo chuyển động của điểm đặt M của vector lực, còn $\vec{r} = \vec{OM}$ là vector bán kính của điểm đặt M .

Theo tính chất của tích có hướng của hai vector thì ba vector $\vec{r}$, $\vec{F}_t$ và $\vec{M}$ tạo thành một tam diện thuận. Theo đó, vector momen $\vec{M}$ có phương vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{r}$ và $\vec{F}_t$, tức là có phương của trục quay Δ . Vì thế momen lực là một đại lượng góc và được biểu diễn bằng một vector nằm dọc theo trục quay (vector trục).

Nếu chọn chiều dương cho trục quay (phù hợp với chiều dương của chuyển động quay) thì momen lực là đại lượng đại số. Momen lực có giá trị dương nếu vector $\vec{M}$ cùng chiều với chiều dương của trục quay và ngược lại.

5. Định luật Niu-ơn II cho chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay

- Trong trường hợp tổng quát, khi chịu các lực tác dụng, vật rắn vừa chuyển động tịnh tiến vừa quay quanh khối tâm.

Để tìm gia tốc $\vec{a}$ của chuyển động tịnh tiến (cũng là gia tốc $\vec{a}$ của khối tâm), ta áp

dụng phương trình: $\sum \vec{F} = m \vec{a}$, (1)

hay: $\sum F_x = ma_x$ và $\sum F_y = ma_y$ (1.b)

Để tìm gia tốc góc của chuyển động quay quanh một trục đi qua khối tâm, ta áp dụng phương trình:

$$\sum \vec{M} = I_G \vec{\gamma}, \quad (2)$$

hay: $\sum M = I_G \gamma$ (dạng đại số).

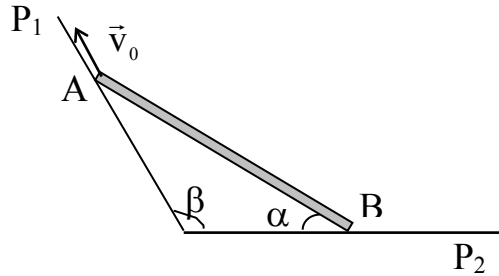
- Điều kiện cân bằng tổng quát chỉ là trường hợp riêng của hai phương trình (1) và (2) khi $\vec{a} = \vec{0}$ và $\vec{\gamma} = \vec{0}$. Nếu ban đầu vật đứng yên thì vật tiếp tục đứng yên. Ta có trạng thái cân bằng tĩnh.

Cần chú ý là, khi vật ở trạng thái cân bằng tĩnh thì $\sum \vec{M} = 0$ không chỉ đối với trục đi qua khối tâm, mà đối với cả một trục bất kỳ.

- Đối với một vật rắn quay quanh một trục cố định thì chuyển động tịnh tiến của vật bị khử bởi phản lực của trục quay.

B. VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Một thanh cứng AB có chiều dài L tựa trên hai mặt phẳng P_1 và P_2 (Hình vẽ). Người ta kéo đầu A của thanh lên trên dọc theo mặt phẳng P_1 với vận tốc $\vec{V}_0$ không đổi. Biết thanh AB và vectơ $\vec{V}_0$ luôn nằm trong mặt phẳng



vuông góc với giao tuyến của P_1 và P_2 ; trong quá trình chuyển động các điểm A, B luôn tiếp xúc với hai mặt phẳng; góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng là $\beta = 120^\circ$. Hãy tính vận tốc, gia tốc của điểm B và vận tốc góc của thanh theo v_0 , L , α (α là góc hợp bởi thanh và mặt phẳng P_2).

Hướng dẫn

Các thành phần vận tốc của A và B dọc theo thanh bằng nhau nên:

$$v_B = v_A \cos(60^\circ - \alpha) / \cos \alpha = v_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha \right)$$

Chọn trục Oy như hình vẽ, A có toạ độ:

$$y = L \sin \alpha \Rightarrow y' = L \cos \alpha \cdot \alpha' = v_0 \cos 30^\circ.$$

Vận tốc góc của thanh:

$$\omega = \alpha' = \frac{v_0 \cos 30^\circ}{L \cos \alpha} = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2L \cos \alpha}.$$

$$\text{Gia tốc của B: } a = \frac{dv_B}{dt} = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2 \cos^2 \alpha} \alpha' = \frac{3v_0^2}{4L \cos^3 \alpha}$$

Ví dụ 2. Một vật hình cầu bán kính R đang đứng yên trên tấm gỗ mỏng CD. Tấm gỗ được kéo trên mặt bàn nằm ngang theo chiều DC với gia tốc không đổi a (hình vẽ). Kết quả là vật lăn không trượt về phía D được đoạn ℓ và rơi xuống mặt bàn.

Hệ số ma sát trượt giữa

vật và mặt bàn là k , gia

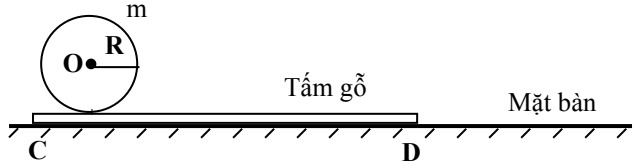
tốc trọng trường là g . Biết

khối lượng và mô men

quán tính của vật đối với

trục quay qua tâm của nó

lần lượt là m và $I_0 = \frac{44}{105}mR^2$



1. Hãy xác định thời gian vật lăn trên tấm gỗ và gia tốc tâm O của vật đối với mặt bàn.
2. Tại thời điểm vật rơi khỏi tấm gỗ vận tốc góc của vật bằng bao nhiêu?
3. Chứng minh rằng trong suốt quá trình chuyển động trên mặt bàn vật luôn luôn lăn có trượt.
4. Vật chuyển động được một quãng đường s bằng bao nhiêu trên mặt bàn?

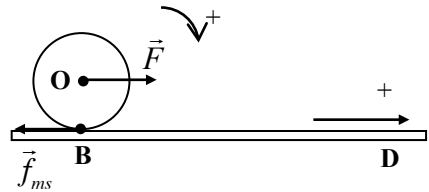
Hướng dẫn

Cách 1:

Xét hệ quy chiếu gắn với tấm gỗ. Vật chịu tác dụng của lực quán tính hướng về phía D: $\vec{F} = -m\vec{a}$ và có độ lớn $F = ma$. Xét trục quay tức thời đi qua B. Chọn các chiều chuyển động là dương.

$$I_B = I_0 + mR^2 = \frac{149}{105}mR^2 \quad (1)$$

$$F_{qt} R = ma = I_B \gamma \quad (2)$$



Giải hệ: $\gamma = \frac{105a}{149R}$; $a_{12} = \gamma R = \frac{105a}{149}$; $a_1 = \frac{44}{149}a$

Cách 2:

Viết phương trình chuyển động quay với trục quay qua tâm O:

Gọi F là lực ma sát nghỉ giữa quả cầu và tấm ván, a_1 là gia tốc của quả cầu đối với đất:

$$FR = I_0\gamma \quad (1)$$

$$F = ma_1 \quad (2)$$

$$a = a_1 + \gamma R \quad (3)$$

$$\text{Giải hệ: } \gamma = \frac{105a}{149R} ; a_{12} = \gamma R = \frac{105a}{149} ; a_1 = \frac{44}{149}a$$

(γR là gia tốc tiếp tuyến đối với tâm quay B, a_{12} là gia tốc tâm O của vật đối với tấm gỗ).

1. Thời gian để vật chuyển động trên tấm gỗ cho đến lúc rời xe:

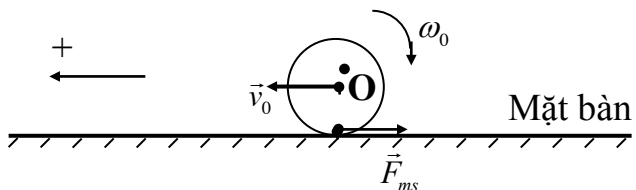
$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a_{12}}} = \sqrt{\frac{298\ell}{105a}} \approx 1,7\sqrt{\frac{\ell}{a}}$$

$$2. \quad \omega_0 = \gamma t = \gamma \sqrt{\frac{2\ell}{\gamma R}} = \sqrt{\frac{2\gamma\ell}{R}} = \sqrt{\frac{210\ell a}{149R^2}} \approx 1,2\sqrt{\frac{a\ell}{R}}$$

3. Vận tốc theo phương ngang của vật khi chạm mặt bàn bằng vận tốc theo phương

$$\text{ngang của nó khi rời khỏi tấm gỗ: } v_0 = a_1 t = \frac{44a}{149} \sqrt{\frac{298\ell}{105a}} \approx 0,5\sqrt{a\ell}.$$

Chọn thời điểm vật chạm mặt bàn là thời điểm ban đầu. Các chiều dương như hình vẽ. Chúng ta có nhận xét là ngay từ thời điểm



này vật đã lăn có trượt, vì $v_0 \neq R\omega_0$. Trước khi đổi chiều quay thì vật luôn lăn có trượt. Muốn vật lăn không trượt, điều kiện cần là vật phải đổi chiều quay.

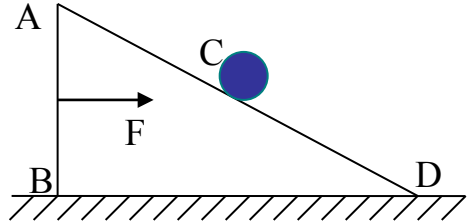
Giả sử đến thời điểm τ nào đó vật chuyển động tịnh tiến với vận tốc v' và quay với vận tốc góc ω' . Sử dụng các định lý biến thiên động lượng và mômen động lượng :

$$\int_0^{\tau} \mathbf{F}_{ms} dt = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) \Rightarrow \int_0^{\tau} \mathbf{F}_{ms} R dt = I_0(\omega' - \omega_0) \Rightarrow I_0(\omega' - \omega_0) = mR(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) (*)$$

Thay biểu thức của I_0 và ω_0 vào (*), ta thu được: $I_0\omega' = mR^2v'$. Điều đó có nghĩa khi quả cầu đổi chiều quay ($\omega'=0$) thì $v'=0$ vật dừng lại. Vậy vật lăn có trượt trên suốt quá trình chuyển động trên mặt bàn cho tới khi dừng lại.

$$4. t = \frac{v_0}{kg}; s = v_0 t - \frac{kg}{2} t^2 = \frac{v_0^2}{2kg} = \frac{44^2 a\ell}{149.105.kg} \approx 0,124 \frac{a\ell}{kg}$$

Ví dụ 3. Một quả cầu đặc đồng chất có tâm C bán kính R và khối lượng $m_1=1\text{kg}$, được đặt trên mặt nghiêng AB của một nêm ABD có góc nghiêng là $\alpha = 45^\circ$, khối lượng của nêm là $m_2 = 2\text{kg}$. Bỏ qua ma sát trượt giữa nêm và mặt sàn nằm ngang, lấy $g = 10\text{m/s}^2$ (hình vẽ). Hãy xác định lực F theo phương ngang cần tác dụng lên thành AB của nêm để:



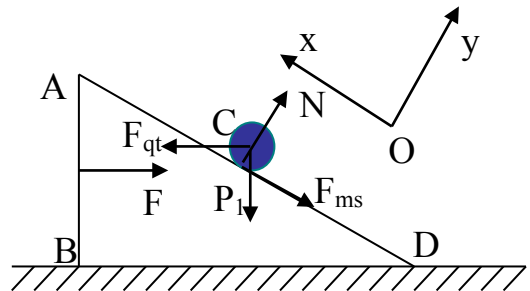
- Quả cầu C vẫn đứng yên trên mặt nêm.
- Quả cầu C lăn không trượt đi lên đỉnh A với gia tốc $a = 2\text{m/s}^2$.

Hướng dẫn

a. Do quả cầu đứng yên trên nêm, nêm

gia tốc của hệ là $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ (1)

+ Xét quả cầu m_1 , Chọn hệ quy chiếu gắn với nêm có các trục tọa độ như hình vẽ



Trên phương Ox: $F_{qt} \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - F_{msn} = 0$

$$\Leftrightarrow m_1 a \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - F_{msn} = 0 \quad (2)$$

Phương trình chuyển động quay quanh tâm C là:

$$F_{msn} \cdot R = I\gamma = 0 \quad (3)$$

+ Từ (1), (2) và (3) Ta có $F = (m_1 + m_2)g \tan \alpha = 30(\text{N})$

b. Phương trình động lực học của nêm trên phương chuyển động, chọn chiều dương là chiều chuyển động có

$$F - Q \sin \alpha - F_{msn} \cos \alpha = m_2 a_0 \text{ với } Q = N \quad (4)$$

+ Các phương trình động lực học của quả cầu đối với nêm, chọn chiều chuyển động là chiều dương

$$\text{Trên trục Ox: } m_1 a_0 \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - F_{msn} = m_1 a \quad (5)$$

$$\text{Trên trục Oy: } N - m_1 a_0 \sin \alpha - m_1 g \cos \alpha = 0 \quad (6)$$

Phương trình động lực học quay quanh tâm C là:

$$F_{msn} R = I \gamma = \frac{2}{5} m_1 R^2 \frac{a}{R} \Rightarrow F_{msn} = \frac{2}{5} m_1 a \quad (7)$$

+ Từ (4), (5), (6) và (7) ta tìm được

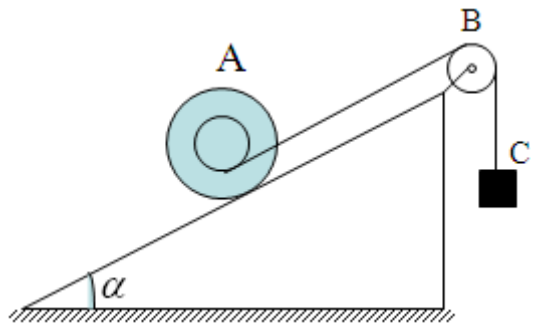
$$F = \frac{5(m_1 + m_2)g \sin \alpha + 7a(m_1 \sin^2 \alpha + m_2) + 2m_1 a \cos^2 \alpha}{5 \cos \alpha} \approx 40,6(\text{N})$$

Ví dụ 4. Một khối trụ đặc, đồng chất, khối lượng M , bán kính R , được đặt trên mặt phẳng nghiêng cố định, nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với mặt phẳng ngang. Giữa chiều dài khối trụ có một khe hẹp trong đó có lõi có bán kính $R/2$. Một dây nhẹ, không giãn được quấn nhiều vòng vào lõi rồi vắt qua ròng rọc B (khối lượng không đáng kể, bỏ qua ma sát ở trục ròng rọc). Đầu còn lại của dây mang một vật nặng C khối lượng $m = M/5$. Phần dây AB song song với mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát nghỉ và hệ số ma sát trượt giữa khối trụ và mặt phẳng nghiêng: $\mu_n = \mu_t = \mu$.

Thả hệ từ trạng thái nghỉ:

a. Tìm điều kiện về μ để khối trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Tính gia tốc a_0 của trục khối trụ và gia tốc a của m khi đó.

b. Giả sử μ không thỏa mãn điều kiện ở câu a. Tìm gia tốc a_0 của trục khối trụ và gia tốc a của m .



Hướng dẫn

- Chọn chiều dương như hình vẽ.
Giả sử chiều của lực ma sát như hình.

- Phương trình ĐL II Niu-ơn cho khối tâm khối trụ A và vật C:

$$\vec{P}_A + \vec{F}_{ms} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}_0$$

$$\vec{T}' + \vec{P}_C = m\vec{a}$$

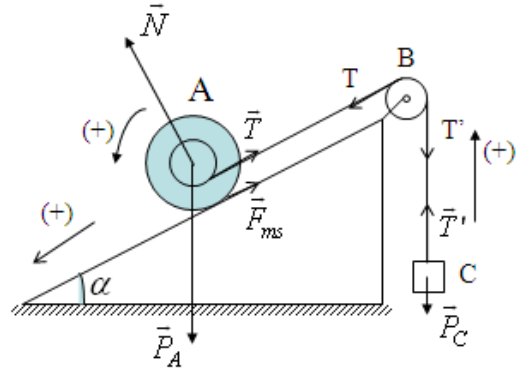
- Phương trình cho chuyển động quay quanh trục đối xứng qua khối tâm G: $F_{ms} \cdot R + T \cdot \frac{R}{2} = I_G \gamma$

- Khối trụ không trượt trên dây

nên: $a_0 - \frac{\gamma R}{2} = a$

Bỏ qua khối lượng của ròng rọc và ma sát ở trục ròng rọc nên: $T = T'$.

a, Khối trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng nên: $a_0 = \gamma R$



Từ đó ta có hệ:
$$\begin{cases} P \sin \alpha - F_{ms} - T = Ma_0 & (1) \\ F_{ms} \cdot R + T \cdot \frac{R}{2} = I_G \gamma = M \frac{R^2}{2} \gamma = M \frac{R}{2} a_0 & (2) \\ T - \frac{P}{5} = \frac{M}{5} a = \frac{M}{10} a_0 & (3) \\ a_0 = \gamma R = 2a & (4) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow T = \frac{P}{5} + \frac{M}{5} a = \frac{M}{5} (a_0/2 + g)$ (5)

Từ (5), (2) $F_{ms} = I_G \gamma / R - \frac{T}{2} = M \frac{a_0}{2} - \frac{M}{10} (a_0/2 + g) = \frac{M}{10} (\frac{9a_0}{2} - g)$ (6)

Thay (5), (6) vào (1):

$$\frac{Mg}{2} - \frac{M}{10} (\frac{9a_0}{2} + g) - \frac{M}{10} (a_0 + 2g) = Ma_0 \rightarrow a_0 = \frac{8}{31} g > 0 \quad (7)$$

Thay a_0 vào (6), (4) suy ra:
$$\begin{cases} F_{ms} = \frac{M}{10} (\frac{9a_0}{2} - g) = \frac{1}{62} Mg > 0 \\ a = \frac{4}{31} g > 0 \end{cases}$$

Vậy khối trụ A đi xuống, vật C đi lên và lực ma sát có chiều như hình vẽ.

Điều kiện: $F_{ms} = F_{msn} \leq \mu N \Leftrightarrow \frac{1}{62} Mg \leq \mu Mg \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{93} \leq \mu$

b, Khi xảy ra sự lăn có trượt của khối trụ trên

mặt phẳng nghiêng: $F_{ms} = F_{mst} = \mu N = \mu Mg \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} P \sin \alpha - F_{mst} - T = Ma_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} F_{mst} \cdot R + T \cdot \frac{R}{2} = I_G \gamma = M \frac{R^2}{2} \gamma \end{cases} \quad (9)$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} T - \frac{P}{5} = \frac{M}{5} a \end{cases} \quad (10)$

$$\begin{cases} a_0 - \frac{\gamma R}{2} = a \end{cases} \quad (11)$$

Từ (9) $\rightarrow T = MR\gamma - \mu Mg\sqrt{3} \quad (12)$

Thay T vào (10) $\rightarrow a = \frac{MR\gamma - \mu Mg\sqrt{3} - Mg/5}{M/5} = 5R\gamma - 5\mu g\sqrt{3} - g$

Thay a vào (11) $\rightarrow a_0 = 5R\gamma - 5\mu g\sqrt{3} - g + \frac{\gamma R}{2} = \frac{11\gamma R}{2} - 5\mu g\sqrt{3} - g$

Thay a_0, T vào (8) $\rightarrow \gamma = \frac{3 + 11\sqrt{3}\mu}{13} \frac{g}{R}$;

$$a = -\frac{10}{13}\mu g\sqrt{3} + \frac{2}{13}g; a_0 = -\frac{9}{26}\mu g\sqrt{3} + \frac{7}{26}g$$

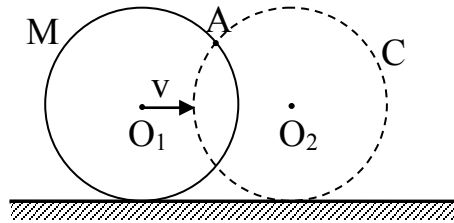
Với $\frac{\sqrt{3}}{93} > \mu$ thì $a > 0, a_0 > 0$ khối trụ và vật chuyển

động cùng chiều dương.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trên mặt phẳng thẳng đứng

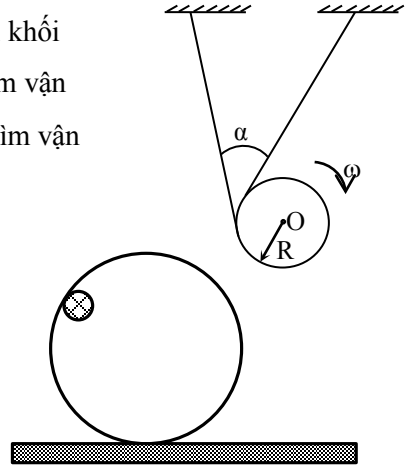
P có vẽ một vòng tròn C bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng ngang. Một chiếc vòng M có bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng ngang tiến về phía vòng tròn C. Vận tốc



của tâm O_1 của vòng M là v . Mặt phẳng của M nằm sát mặt phẳng P. Gọi A là một giao điểm của hai vòng tròn khi khoảng cách giữa tâm của chúng là $d < 2R$. Tìm:

- Vận tốc và gia tốc của A.
- Bán kính quỹ đạo và vận tốc của điểm nằm trên vòng M tại A.

Bài 2. Một đĩa nặng bán kính R có 2 dây không giãn quấn vào. Các đầu tự do của dây gắn chặt (hình vẽ). Khi khối đĩa chuyển động thì dây luôn căng. Ở một thời điểm vận tốc góc của đĩa bằng ω và góc giữa các dây là α . Tìm vận tốc của tâm đĩa ở thời điểm này.



Bài 3. Một vành tròn mảnh bán kính R khối lượng M phân bố đều. Trên vành ở mặt trong có gắn một vật nhỏ khối lượng m (hình vẽ). Kéo cho vành lăn không trượt trên mặt ngang sao cho tâm của vành có vận tốc v_0 . Hỏi v_0 phải thỏa mãn điều kiện gì để vành không nảy lên? Lực tác dụng lên vành để kéo vành chuyển động với vận tốc không đổi (như giả thiết) không có thành phần thẳng đứng?

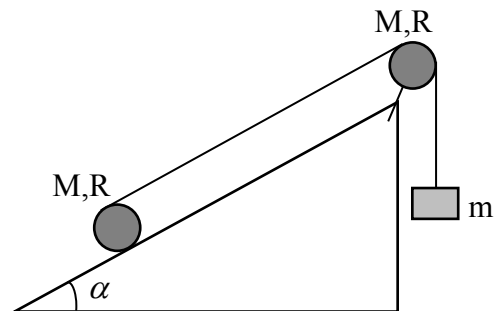
Bài 4. Một hình trụ có khối M được bó trí thành cơ hệ như hình vẽ, hệ số ma sát của hình trụ với mặt phẳng ngang là μ_1 , với mặt phẳng ngang là μ_2 . mặt phẳng ngang chuyển động đều về phía trái, cần phải tác động vào mặt phẳng ngang một lực F nhỏ nhất là bao nhiêu để xảy ra điều trên.

Bài 5. Có hai ròng rọc là hai đĩa tròn gắn đồng trục. Ròng rọc lớn có khối lượng $m = 200\text{g}$, bán kính $R_1 = 10\text{cm}$. Ròng rọc nhỏ có khối lượng $m' = 100\text{g}$, bán kính $R_2 = 5\text{cm}$. Trên rãnh hai ròng rọc có hai dây chỉ quấn ngược chiều nhau để khi m_1 đi xuống m_2 đi lên hoặc ngược lại. Đầu dây của ròng rọc lớn mang khối lượng $m_1 = 300\text{g}$, đầu dây của ròng rọc nhỏ mang khối lượng $m_2 = 250\text{g}$. Thả cho hệ chuyển động từ trạng thái đứng yên Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

a. Tính gia tốc của các vật m_1 và m_2 .

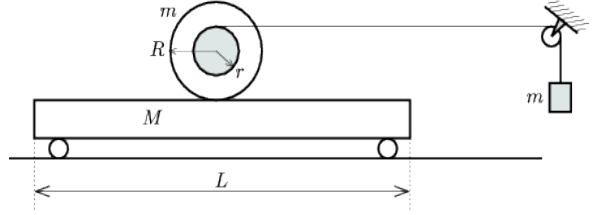
b. Tính lực căng của mỗi dây treo.

Bài 6. Cho cơ hệ như hình vẽ. Ròng rọc cố định và con lăn cùng khối lượng M , bán kính R . Sợi dây quấn quanh con lăn rồi vắt qua ròng rọc. Một vật khối lượng m được buộc vào đầu tự do của dây. Thả cho con lăn lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng có



định. Biết dây không trượt trên ròng rọc và trên con lăn. Tính gia tốc của vật m .

Bài 7. Cho hệ như hình vẽ. Đĩa đồng chất có khối lượng m , bán kính R . Xe đẩy có khối lượng $M = 2m$ chiều dài $L = 1m$. Xe đẩy có thể chuyển động dễ dàng. Trên đĩa gắn một vành rất nhẹ bán kính $r = \frac{R}{2}$, trên vành quấn



một sợi dây nhẹ không dẫn, đầu kia của dây được nối với vật m qua một ròng rọc nhẹ. Ban đầu đĩa nằm giữa xe đẩy, dây được giữ căng. Sau đó người ta thả nhẹ cho hệ chuyển động. Biết rằng đĩa lăn không trượt trên xe. Cho $g = 10m/s^2$. Xác định thời gian đĩa lăn trên xe và quãng đường vật m rơi xuống tương ứng.

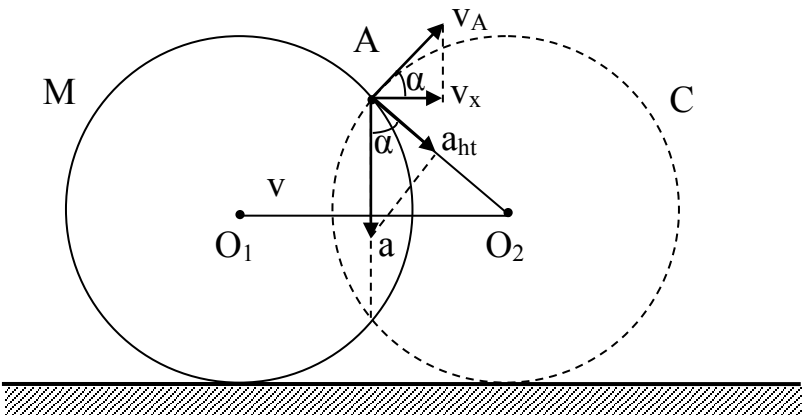
Bài 8. Trên mặt phẳng nghiêng góc α có một hình hộp nhỏ và một hình trụ rỗng. Trụ rỗng có khối lượng m bán kính r , có momen quán tính là $I = mr^2$. Cả hai bắt đầu chuyển động xuống dưới, hộp trượt với hệ số ma sát μ , trụ lăn không trượt.

a) Tính α để hai vật chuyển động luôn cách nhau khoảng không đổi.

b) Nếu μ' là hệ số ma sát giữa trụ và mặt phẳng nghiêng. Tìm điều kiện của μ' để có chuyển động trên?

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.



a) Giao điểm A dịch chuyển trên đường tròn C với vận tốc v_A tiếp tuyến với C,

hình chiếu lên phương ngang là $v_x = v/2 = v_A \cos \alpha = v_A \frac{\sqrt{R^2 - d^2/4}}{R}$. Vậy:

$$v_A = \frac{v}{2\sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}}}.$$

Vì thành phần vận tốc của $\vec{v}_A$ theo phương ngang không đổi nên gia tốc của A hướng thẳng đứng và thành phần của gia tốc này lên phương bán kính O_2A là gia tốc hướng tâm:

$$a_{ht} = a \cdot \cos \alpha = \frac{v_A^2}{R} \rightarrow a = \frac{v_A^2}{R \cos \alpha} = \frac{v^2}{4R \cdot \cos^3 \alpha} = \frac{v^2}{4R(1 - d^2/4R^2)^{3/2}}$$

b) Trong khoảng thời gian rất ngắn quỹ đạo cong của điểm A_1 (tại A) trên vòng có thể coi là một cung tròn. Vòng lăn không trượt nên có thể xem như nó đang quay quanh điểm tiếp xúc với vận tốc góc $\omega = v/R$.

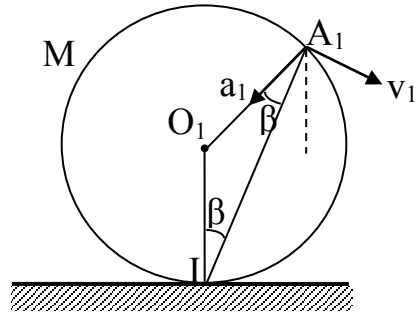
Ta có: $IA_1 = 2R \cdot \cos \beta$, với $\beta = \alpha/2$.

$$\rightarrow \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \right)}$$

$$\text{Do đó } v_1 = \omega \cdot IA_1 = v \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \right)}.$$

Gia tốc của A_1 hướng về tâm O_1 và có độ lớn là $a_1 = v^2/R$. Gia tốc hướng tâm

$$\text{của } A_1 \text{ lại là: } a_{ht1} = a_1 \cdot \cos \beta = \frac{v_1^2}{R_1}. \text{ Vậy: } R_1 = 2R \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \right)}$$



Bài 2.

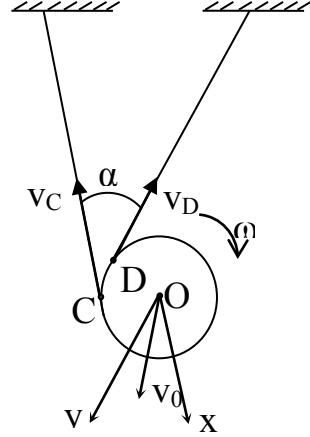
Gọi v_0 là vận tốc của tâm O của đĩa. Tại các điểm tiếp xúc C và D của dây và đĩa vận tốc là:

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{C0} \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_0 + \vec{v}_{D0}\end{aligned}\quad (1)$$

trong đó v_{D0} và v_{C0} là các vận tốc của C và D trong chuyển động quay quanh O:

$$v_{C0} = v_{D0} = \omega R$$

Do dây không giãn nên hình chiếu của $\vec{v}_C$ và $\vec{v}_D$ lên phương của các dây tương ứng phải bằng không. Chọn hệ quy chiếu gắn với tâm O của đĩa và hai trục song song với hai dây, như vậy góc giữa hai trục này bằng α . Chiều $\vec{v}_C$



và $\vec{v}_D$ cho bởi hệ các phương trình (1) lên hai trục ta được:

$$v_{Cx} = v_{0x} - \omega R = 0$$

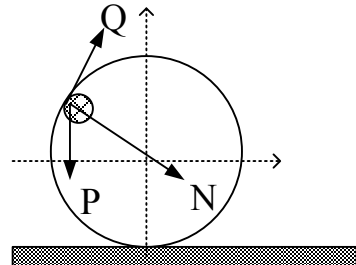
$$v_{Dy} = v_{0y} - \omega R = 0$$

Có nghĩa là $\vec{v}_0$ hướng theo phân giác của góc giữa hai dây, và có độ lớn là:

$$v = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$$

Bài 3.

+ Khi m ở vị trí bất kì, lực tác dụng vào m có P và F lực mà vành tác dụng vào m. Có thể phân tích lực F thành hai phần: $\vec{N}$ có phương trùng với bán kính vành tròn, chiều hướng tâm, $\vec{Q}$ có phương tiếp tuyến với vòng (hình vẽ).



Định luật II:
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} \quad (1)$$

Chiều (1) theo $\vec{Q}$ và theo $\vec{N}$
$$\begin{cases} Q = P \sin \alpha \\ P \cos \alpha + N = \frac{mv_0^2}{R} \end{cases}$$

+Thành phần lực F tác dụng vào m theo phương thẳng đứng: $F_y = Q \sin \alpha - N \cos \alpha$

(3) . Từ (2) và (3) ta có:

$$F_y = P \sin^2 \alpha - \left(\frac{mv_0^2}{R} - P \cos \alpha \right) \cos \alpha = P - \frac{mv_0^2}{R} \cos \alpha .$$

$(F_y)_{\max}$ khi $\alpha = 0$ vật ở vị trí cao nhất, F_y hướng xuống với $(F_y)_{\max} = P - \frac{mv_0^2}{R}$.

Theo định luật III lực tác dụng từ m vào vành M có phương ngược với F_y , $(F_y)'$ hướng xuống):

$$(F_y)'_{\max} = - (F_y)_{\max} = \frac{mv_0^2}{R} - P . \text{ Vành không nảy lên khi:}$$

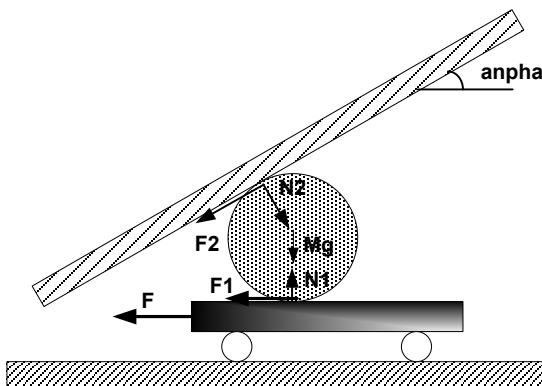
$$(F_y)'_{\max} \leq Mg \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{R} - P \leq Mg \Rightarrow v_0 \leq \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)gR}$$

Bài 4.

Hình trụ có hai khả năng quay hay không quay.

Giả sử trụ quay:

Khi mặt phẳng ngang chuyển động đều thì trụ quay đều và gia tốc của khối trụ bằng không



Ta có: + Tổng các Moment lực đối với trục quay qua khối tâm bằng 0:

$$F_1 = F_2 = F$$

+ Theo phương ngang: $N \sin \alpha - F_2 \cos \alpha - F_1 = 0$ (1)

+ Theo phương thẳng đứng: $N_1 - Mg - N_2 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha = 0$ (2)

Rút gọn biểu thức ta thu được:
$$\begin{cases} F = N_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ N_1 = Mg + N_2 \end{cases} \quad (3)$$

Nhận xét F, N_1, N_2 phụ thuộc vào μ_1, μ_2, α và có hai trường hợp có thể xảy ra:

- Trường hợp 1.

$\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$, hình trụ quay, $F = \mu_2 N_2$

Khi đó từ (3): $N_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \mu_2 N_2$

1.a/ $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} > \mu_2 \Rightarrow N_2 = 0, F = 0$ với điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ với mọi giá trị

của μ_1, μ_2 .

1.b/ $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} < \mu_2$, khi đó hình trụ bị kẹt, điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ xảy ra với

$\mu_1 > \mu_2$.

- Trường hợp 2.

$\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$, hình trụ không quay được $F = \mu_1 N_1$

Từ (3) suy ra: $N_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \mu_1 N_1$

$\mu_1 (Mg + N_2) = N_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$. Tìm ra $N_2 = \frac{\mu_1 Mg}{\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \mu_1}$

2.a/ $\mu_1 \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, khi đó trụ bị kẹt, điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ khi $\mu_1 < \mu_2$.

2.b/ $\mu_1 < \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, khi đó $F = \mu_1 N_1 = \mu_1 (N_2 + Mg)$.

$$\text{Hay: } F = \frac{\mu_1 Mg}{1 - \mu_1 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Điều kiện $\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$ xảy ra khi

$$\mu_2 > \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\mu_2 N_2 > \mu_1 (N_2 + Mg)$$

Đánh giá:

Biểu diễn kết quả qua đồ thị, đồ thị biểu diễn mặt phẳng μ_1, μ_2 chia làm 3 miền

- Miền 1: ứng với trường hợp (1.a)
- Miền 2: ứng với trường hợp (1.b) và (2.a) hình trụ bị kẹt nên $F = \infty$
- Miền 3: ứng với trường hợp (2.b),

$$F = \frac{\mu_1 Mg}{1 - \mu_1 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Bài 5.

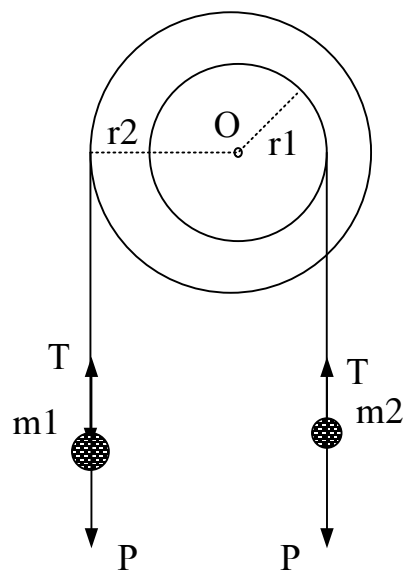
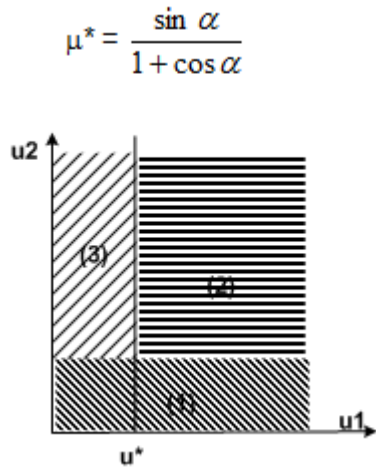
$P_1 = m_1 g > P_2 = m_2 g$, nên m_1 đi xuống, m_2 đi lên. Phương trình chuyển động của m_1 và m_2 :

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1; \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \quad (1)$$

Chiều (1) theo chiều (+) là chiều chuyển động của m_1 và m_2 :

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Với ròng rọc } T_1 R_1 - T_2 R_2 = I \gamma \quad (3).$$



$$I = \frac{1}{2}mR_1^2 + \frac{1}{2}mR_2^2; \gamma = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2}; a_1 = 2a_2.$$

+ Nhân (2a) với R_1 , (2b) với R_2 , rồi cộng hai vế (2) và (3):

$$\Rightarrow m_1gR_1 - m_2gR_2 = m_1a_1R_1 + m_2a_2R_2 + I\gamma =$$

$$a_2 \left(2m_1R_1 + m_2R_2 + \frac{I}{R_2} \right) \Rightarrow a_2 = \frac{(m_1R_1 + m_2R_2)g}{2m_1R_1 + m_2R_2 + \frac{I}{R_2}} \text{ thay số ta được: } a_2 =$$

$$1,842 \text{ (m/s}^2\text{); } a_1 = 2a_2 = 3,68 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

+ Thay a_1, a_2 vào (2) ta được

$$T_1 = 1,986 \text{ (N); } T_2 = 2,961 \text{ (N)}$$

Bài 6.

Vật m: Định luật II Newton

$$-mg + T_1 = ma \quad (1)$$

Ròng rọc B: Cân bằng trục quay qua tâm:

$$-T_1R + T_2R = I\gamma = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}$$

$$\Leftrightarrow -T_1 + T_2 = \frac{Ma}{2} \quad (2)$$

Con lăn A: Cân bằng trục quay qua K:

$$I_K =$$

$$\frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$MgR\sin\alpha - T_2 \cdot 2R = I_K \gamma' = \frac{3}{2}MR^2 \cdot \frac{a'}{R} \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } a = 2a' \quad (4)$$

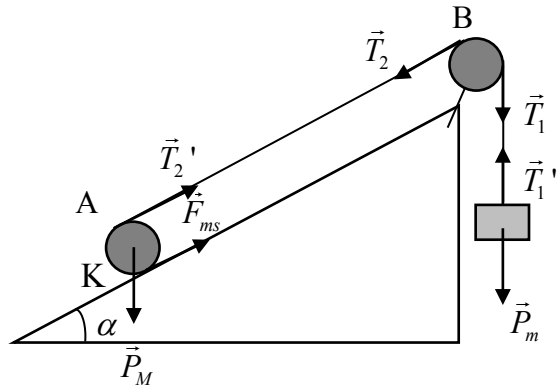
$$\text{Từ (1); (2); (3); (4) tìm được } a = \frac{2g(Mg\sin\alpha - 2m)}{5M + 4m}$$

Biện luận:

Nếu $\sin\alpha > \frac{2m}{M}$ thì $a > 0$: vật m đi lên, con lăn lăn xuống và cuốn dây.

Nếu $\sin\alpha < \frac{2m}{M}$ thì $a < 0$: vật m đi xuống, con lăn lăn lên và nhả dây.

Nếu $\sin\alpha = \frac{2m}{M}$ thì $a = 0$: hệ đứng yên.



Bài 7.

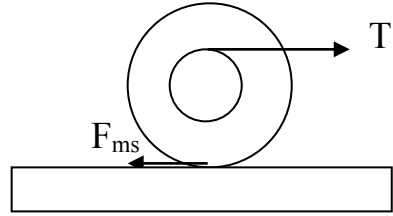
Gọi a_1 : Gia tốc khối tâm đĩa

a_2 : Gia tốc vật m với đất

a_3 : Gia tốc M với đất

Xét chuyển động của đĩa:

+ Với trục quay đĩa qua điểm tiếp xúc: $T \frac{3}{2} R =$



I_γ

Với $I = 1/2 mR^2 + mR^2 = 3/2 mR^2$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} TR = \frac{3}{2} mR^2 \gamma$$

$$\Rightarrow T = mR\gamma \quad (1)$$

+ Giả sử F_{ms} tác dụng lên đĩa hướng như hình vẽ: $T - F_{ms} = ma_1$ (2)

$$(1)(2) \Rightarrow F_{ms} = T - ma_1 = m(R\gamma - a_1) \quad (3)$$

Với trường hợp này M nếu chuyển động thì sẽ chuyển động cùng chiều với đĩa

$$\Rightarrow a_1 \geq R\gamma. \text{ Kết hợp với (3)} \Rightarrow F_{ms} = 0$$

+ Giả sử F_{ms} hướng ngược lại: $T + F_{ms} = ma_1$ (2')

$$(1)(2) \Rightarrow F_{ms} = ma_1 - T = m(a_1 - R\gamma) \quad (3')$$

Với trường hợp này M nếu chuyển động thì sẽ chuyển động ngược chiều với đĩa

$$\Rightarrow a_1 \leq R\gamma. \text{ Kết hợp với (3')} \Rightarrow F_{ms} = 0$$

Vậy $F_{ms}=0 \Rightarrow M$ không chuyển động. Khi đó $a_1 = R\gamma$

$$\text{Xét m: } mg - T = ma_2 = m \cdot \frac{3}{2} R \cdot \gamma \quad (4)$$

$$\text{Thay (1) vào (4)} \Rightarrow mg - mR\gamma = 3/2 \cdot mR\gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{2g}{5R}$$

$$\Rightarrow a_1 = R\gamma = \frac{2g}{5} = 4\text{m/s}^2$$

$$s = L/2 = 0,5\text{m} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0,5\text{s}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} R \cdot \gamma = 6\text{m/s}^2$$

$$\text{m đi xuống một đoạn: } h = 1/2 a_2 t^2 = 0,75\text{m}$$

Bài 8.

- Gia tốc của khối hộp: $a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ (1)

- Gọi gia tốc khối trụ là a_2

Phương trình chuyển động tịnh tiến: $mg \sin \alpha - F_{ms} = ma_2$ (2)

Phương trình chuyển động quay: $F_{ms} \cdot r = I \cdot \gamma$ (3)

Trụ lăn không trượt : $a_2 = \gamma \cdot r$ (4)

Từ (2),(3),(4) rút ra: $a_2 = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{1}{2} g \sin \alpha$ (5)

- Để hai vật chuyển động luôn cách nhau một khoảng không đổi:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \tan \alpha = 2\mu$$

Từ (2) $\rightarrow F_{ms} = \frac{1}{2} mg \sin \alpha$

$$F_{ms} \leq \mu' N$$

$$F_{ms} \leq \mu' mg \cos \alpha \rightarrow \mu' \geq \frac{\tan \alpha}{2} = \mu$$

Dạng 3. VA CHẠM – XUNG LỰC – NĂNG LƯỢNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Momen động lượng và định luật bảo toàn momen động lượng

a. Momen động lượng

Momen động lượng của vật rắn đối với một trục quay bằng tích số của momen quán tính của vật đối với trục quay đó và vận tốc góc của vật quay quanh trục đó:
 $L = I\omega$

Đơn vị của momen động lượng: $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$.

b. Định luật bảo toàn momen động lượng

Định luật: Nếu tổng các momen ngoại lực tác dụng lên một vật rắn (hay hệ vật) đối với một trục bằng 0 thì momen động lượng của vật rắn (hay hệ vật) đối với trục đó được bảo toàn.

Các trường hợp riêng:

- Nếu momen quán tính I không đổi: Vật sẽ đứng yên hoặc quay đều quanh trục đó.
- Nếu vật (hoặc hệ vật) có momen quán tính thay đổi, ta có $I\omega = \text{const}$

$$\rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{const}$$

2. Thế năng của vật rắn:

Xét với vật rắn tuyệt đối, trong trọng trường có gia tốc g , Z là độ cao của khối tâm G tính từ một mốc nào đó, vật rắn có thế năng bằng thế năng của khối tâm mang tổng khối lượng của vật rắn: $U = MgZ$.

3. Động năng của vật rắn:

- Khi vật rắn quay xung quanh một trục quay cố định Δ : $W = \frac{1}{2} I_{\Delta}.\omega^2$

Chú ý: Nếu trục quay Δ không qua khối tâm G , cần xác định I_{Δ} qua I_G bởi định lý Steiner.

- Trường hợp tổng quát: $W = \frac{1}{2} I_G.\omega^2 + \frac{1}{2} M.V_G^2$

"Động năng toàn phần của vật rắn bằng tổng động năng tịnh tiến của khối tâm mang khối lượng của cả vật và động năng quay của nó xung quanh trục đi qua khối tâm".

- Nếu vật quay quanh tâm quay tức thời K thì: $W = I_K \frac{\omega_K^2}{2}$

4. Định luật bảo toàn cơ năng:

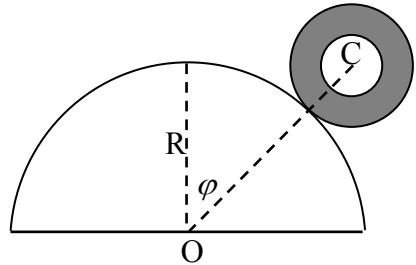
- Nội dung: Khi các lực tác dụng lên vật rắn là lực thế, thì cơ năng E của hệ vật rắn được bảo toàn: $W = W_d + W_t = \text{const.}$

- Nếu trong quá trình biến đổi của hệ từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, có lực ma sát, lực cản... tác dụng mà ta tính được công A của các lực ấy thì có thể áp dụng định luật bảo toàn năng lượng dưới dạng:

$$W_2 - W_1 = A.$$

B. VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho một khối trụ đồng chất khối lượng m phân bố đều, có tiết diện là hình vành khăn, bán kính ngoài là r , bán kính trong là $\frac{r}{2}$. Khối trụ này lăn không trượt, không vận tốc đầu từ đỉnh của một bán trụ cố định bán kính R .



- Gọi I là momen quán tính của khối trụ đối với trục của nó. Hãy tính I theo m và r .
- Xác định vận tốc khối tâm của khối trụ theo φ , với φ là góc hợp bởi đường thẳng đứng và đường thẳng nối tâm của khối trụ và bán trụ.
- Với giá trị nào của φ thì khối trụ bắt đầu rời khỏi mặt bán trụ. Bỏ qua ma sát lăn.

Hướng dẫn

a/ Khối lượng riêng của khối trụ rỗng: $D = \frac{m}{\ell \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right)} = \frac{4m}{3 \cdot \ell \cdot \pi \cdot r^2}$

Khối lượng của khối trụ đặc bán kính r : $m_1 = \frac{r^2}{\left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right)} m = \frac{4}{3} m$

Khối lượng của khối trụ đặc bán kính $r/2$: $m_2 = \frac{4}{3} m - m = \frac{1}{3} m$

Momen quán tính của khối trụ rỗng: $I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}m_1r^2 - \frac{1}{2}m_2\frac{r^2}{4} = \frac{5}{8}mr^2$ (1)

b/ Động năng của khối trụ rỗng: $W_d = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ (2)

Vì khối trụ lăn không trượt trên bán trụ $\rightarrow v_C = r.\omega$ (3)

Thay (1), (3) vào (2): $W_d = \frac{13}{16}mv_C^2$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có: $mg(R+r)(1-\cos\varphi) = \frac{13}{16}mv_C^2$

$\Rightarrow v_C = \sqrt{\frac{16g}{13}(R+r)(1-\cos\varphi)}$ (4)

c/ ĐL II Newton cho khối trụ trên phương hướng tâm: $mg\cos\varphi - N = \frac{mv_C^2}{R+r}$

Khi hình trụ rời khỏi bán trụ: $N = 0 \rightarrow \cos\varphi = \frac{v_C^2}{g(R+r)}$ (5)

Thay (4) vào (5), suy ra: $\cos\varphi = \frac{16}{29}$

Suy ra: $\varphi = 56,5^\circ$

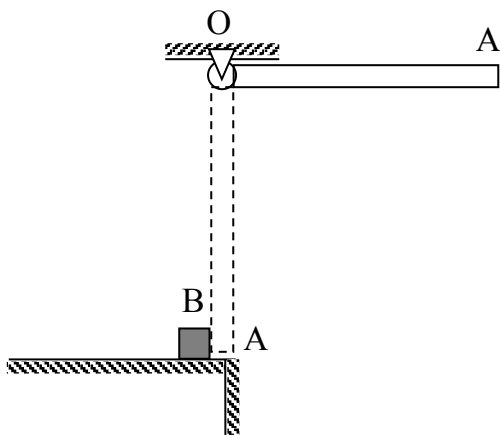
Ví dụ 2.

Một thanh thẳng OA đồng chất, tiết diện đều có chiều dài ℓ và khối lượng M có thể quay không ma sát xung quanh trục cố định nằm ngang đi qua đầu O của nó. Mômen quán tính của thanh OA đối với trục quay

O là $I = \frac{1}{3}M\ell^2$. Lúc đầu, thanh

được giữ nằm ngang, sau được thả rơi không vận tốc đầu. Khi thanh tới

vị trí cân bằng, đầu A của nó đập vào một vật B có kích thước nhỏ và có khối lượng m, đặt trên một giá đỡ phẳng nằm ngang (Hình vẽ). Va chạm là hoàn toàn đàn hồi.



a. Xác định vận tốc góc của thanh OA và vận tốc của vật B ngay sau va chạm. Biện luận các trường hợp có thể xảy ra đối với chuyển động của thanh OA ngay sau va chạm.

b. Xác định góc lớn nhất mà thanh OA quay được so với vị trí thẳng đứng sau va chạm.

c. Xác định quãng đường mà vật B đi được từ thời điểm ngay sau va chạm cho tới lúc nó dừng lại. Biết hệ số ma sát giữa mặt giá đỡ và vật B tỉ lệ bậc nhất với độ dời, hệ số tỉ lệ là k, giá đỡ đủ dài.

Hướng dẫn

a. Gọi ω_0 là vận tốc góc của thanh ngay trước va chạm với vật B.

$$Mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

+ Gọi ω là vận tốc góc của thanh và v là vận tốc của vật B ngay sau va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng cho hệ ngay trước và sau va chạm:

$$I\omega_0 = I\omega + mv\ell \Rightarrow I(\omega_0 - \omega) = mv\ell \quad (1)$$

+ Va chạm là hoàn toàn đàn hồi nên động năng được bảo toàn:

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \frac{mv^2}{I} = \frac{3mv^2}{M\ell^2} \quad (2)$$

+ Giải hệ (1) và (2) ta được:
$$\begin{cases} \omega = \frac{M-3m}{(M+3m)} \omega_0 = \frac{M-3m}{(M+3m)} \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \\ v = \frac{2M\ell}{3m+M} \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \end{cases}$$

+ Nếu $3m > M$ thì $v > 0, \omega < 0$ sau va chạm thanh OA bị bật ngược lại.

+ Nếu $3m = M$ thì $v > 0, \omega = 0$ sau va chạm thanh A dừng lại.

+ Nếu $3m < M$ thì $\omega > 0$, sau va chạm thanh OA tiếp tục đi lên.

b. Gọi α_0 là góc lệch cực đại của thanh OA sau va chạm, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho thanh sau va chạm:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = Mg \frac{\ell}{2} (1 - \cos \alpha_0) \Rightarrow \cos \alpha_0 = 1 - \frac{I \omega^2}{Mg\ell} = 1 - \frac{\omega^2 \ell}{3g}$$

+ Thế giá trị của ω vào, ta được $\cos\alpha_0 = \frac{12m}{M+3m}$

c. Chọn trục Ox nằm ngang có gốc O trùng với vị trí ban đầu của vật B, chiều dương trùng với chiều chuyển động của nó. Lực ma sát tác dụng lên vật có biểu thức: $F_{ms} = -\mu N = -kmg \cdot x$

+ Công của lực ma sát thực hiện khi vật thực hiện độ dời (quãng đường) $\Delta x = S$ là

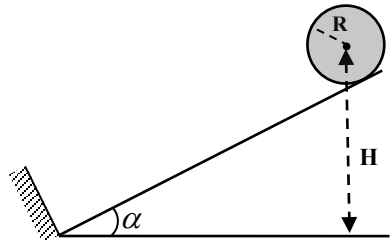
$$A = \int_0^S F_{ms} \cdot dx = -kmg \int_0^S x dx = -\frac{1}{2} kmg s^2.$$

+ Áp dụng định lý động năng:

$$\Delta W_d = A \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{2} kmg \cdot s^2 \Leftrightarrow v^2 = kg \cdot s^2$$

$$\Rightarrow s = v \sqrt{\frac{1}{kg}} = \frac{2M\ell}{M+3m} \sqrt{\frac{3}{k\ell}}$$

Ví dụ 3. Vành mảnh bán kính R, bắt đầu lăn không trượt trên mặt nghiêng góc α với phương ngang từ độ cao H ($R \ll H$). Cuối mặt nghiêng vành va chạm hoàn toàn đàn hồi với thành chắn vuông góc với mặt nghiêng (hình vẽ). Bỏ qua tác dụng của trọng lực trong quá trình va chạm. Hãy xác định:



1. Vận tốc của vành trước va chạm.

2. Độ cao cực đại mà vành đạt được sau va chạm. Hệ số ma sát trượt giữa vành và mặt nghiêng là μ .

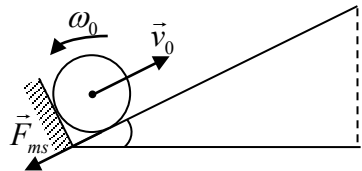
Hướng dẫn

1- Gọi vận tốc khối tâm của vành (vận tốc chuyển động tịnh tiến) trước va chạm là v_0 .

+ Vì vành lăn không trượt nên vận tốc góc của chuyển động quay quanh tâm lúc này là:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} \quad (1)$$

+ Do $R \ll H$. Theo định luật bảo toàn cơ năng:



$$mgH = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mR^2\omega_0^2}{2}$$

$$\text{Hay } mgH = mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{gH} \quad (2)$$

2- Ngay sau va chạm đàn hồi, vận tốc khối tâm đổi ngược hướng, độ lớn vận tốc không đổi và do bỏ qua tác dụng của trọng lực trong quá trình va chạm, thành nhẵn nên chuyển động quay không thay đổi.

+ Kể từ thời điểm này có sự trượt giữa vành và mặt nghiêng. Xét chuyển động lúc này.

+ Phương trình chuyển động tịnh tiến:

$$-mg \sin \alpha - F_{ms} = ma$$

$$F_{ms} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a = -(g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)$$

+ Vành chuyển động chậm dần đều với gia tốc a ,

+ Vận tốc khối tâm:

$$v = v_0 - (g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)t \quad (3)$$

+ Phương trình chuyển động quay:

$$-F_{ms}R = I\beta = mR^2\beta \Rightarrow \beta = -\frac{F_{ms}R}{mR^2} = -\frac{\mu g \cos \alpha}{R}$$

+ Vành quay chậm dần đều với gia tốc góc β .

$$\text{Vận tốc góc của vành: } \omega = \omega_0 - \frac{\mu g \cos \alpha}{R}t \quad (4)$$

+ Vận tốc của chuyển động tịnh tiến bằng 0 khi:

$$t = t_1 = \frac{v_0}{(g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)}$$

+ Vận tốc của chuyển động quay bằng 0 khi: $t = t_2 = \frac{\omega_0 R}{\mu g \cos \alpha} = \frac{v_0}{\mu g \cos \alpha}$

+ Ta có $t_2 > t_1$, nghĩa là đến thời điểm t_1 vật bắt đầu chuyển động xuống.

Quãng đường đi được trong thời gian t_1 là:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{h_{\max}}{\sin \alpha}$$

- Từ đó độ cao cực đại mà vật đạt được là:

$$h_{\max} = -\frac{v_0^2}{2a} \sin \alpha = \frac{H \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

Ví dụ 4. Một khối trụ đặc có bán kính R , chiều cao h , khối lượng m , lăn không trượt trên mặt sàn nằm ngang rồi va vào một bức tường thẳng đứng cố định (trục của khối trụ luôn song song với mặt sàn và tường) (Hình vẽ). Biết hệ số ma sát giữa khối trụ và bức tường là μ ; vận tốc của trục khối trụ trước lúc va chạm là v_0 ; sau va chạm thành phần vận tốc theo phương ngang của trục giảm đi một nửa về độ lớn; mômen quán tính đối với trục của khối trụ là $I = \frac{2}{5}mR^2$. Bỏ qua tác dụng của

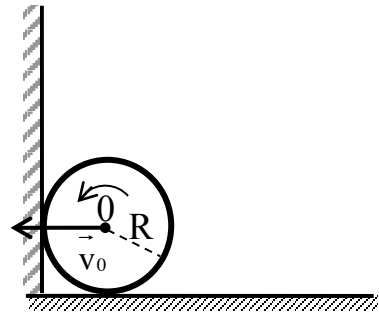
trọng lực trong lúc va chạm và bỏ qua ma sát lăn.

1. Biết mật độ khối lượng ρ tại một điểm của khối trụ phụ thuộc vào khoảng cách r từ điểm đó đến trục của nó theo quy luật

$$\rho = A\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{m}{R^2 h}. \text{ Tìm hệ số } A.$$

2. Tính động năng của khối trụ và góc giữa phương chuyển động của nó với phương nằm ngang ngay sau khi va chạm. áp dụng bằng số

cho trường hợp $\mu = \frac{1}{8}$ và $\mu = \frac{1}{5}$.



Hướng dẫn

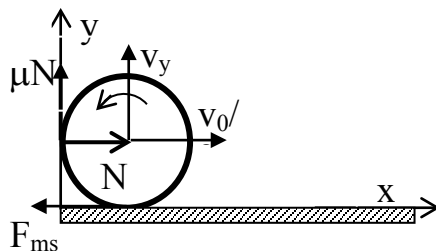
1. Sử dụng hệ tọa độ trụ:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi h \int_0^R \rho r^3 dr = 2\pi h \frac{mA}{R^2 h} \int_0^R \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) r^3 dr = \frac{2}{5}mR^2$$

$$\rightarrow A = \frac{12}{25\pi}$$

2) Có hai khả năng:

α) Nếu trong thời gian va chạm τ , theo phương Oy , khối trụ luôn luôn lăn có trượt.



* Lực ma sát trượt hướng lên theo Oy

* Theo Ox: $1,5mv_0 = \int_0^{\tau} Ndt$ (1) ($N \gg F_{ms}$ sản)

* Theo Oy: $mv_y = \mu \int_0^{\tau} Ndt$ (2) $\rightarrow v_y = \frac{3}{2}\mu v_0$
($\mu N \gg mg$)

* Từ (1) và (2): $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 3\mu$; $I(\omega - \omega_0) = -\mu R \int_0^{\tau} Ndt$ (3)
 $\rightarrow \omega = \frac{4-15\mu}{4R} v_0$

* Điều kiện trên xảy ra nếu khối trụ vẫn trượt trong va chạm:

$$v_y \leq \omega R \Rightarrow \mu \leq \frac{4}{21} \approx 0,19$$

* Trường hợp đầu $\mu = \frac{1}{8} = 0,125 < 0,19$ thoả mãn:

$$\omega = \frac{4-15\mu}{4R} v_0 = \frac{17}{32R} v_0$$

Động năng :

$$E = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{4} v_0^2 + \left(\frac{3}{16} v_0 \right)^2 \right) + \frac{m}{5} R^2 \left(\frac{17}{32R} \right)^2 v_0^2$$

$$E \approx 0,34mv_0^2 = 0,68E_0$$

b) Trường hợp $\mu = 0,2 > 0,19$. Quá trình này xảy ra như sau: khi va chạm khối trụ lăn có trượt trong khoảng thời gian τ_1 và lăn không trượt trong khoảng thời gian τ_2 :

$$mv_y = \mu \int_0^{\tau_1} Ndt \quad (4); \quad I(\omega_1 - \omega_0) = -R\mu \int_0^{\tau_1} Ndt \quad (5)$$

$$\omega_1 = \frac{v_y}{R}; \omega_0 = \frac{v_0}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_y}{R} - \frac{v_0}{R}\right) = -Rmv_y;$$

$$v_y = \frac{2}{7}v_0; \omega_1 = \frac{2v_0}{7R}.$$

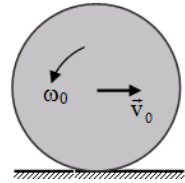
Sau đó khối trụ lăn không trượt với v_y : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{7};$

Động năng sau va chạm là $E = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}$

$$E = \frac{m\left(\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{4}{49}v_0^2\right)}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2 \frac{4}{49R^2}v_0^2}{2} = \frac{297}{1960}mv_0^2 \approx 0,15mv_0^2 = 0,3E_0.$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Một khối trụ đồng chất khối lượng 20kg bán kính 20cm có thể chuyển động trên một mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát trượt giữa khối trụ và mặt phẳng ngang $\mu=0,1$. Lấy $g=10\text{m/s}^2$. Ở thời điểm ban đầu truyền cho khối trụ một chuyển động quay xung quanh khối tâm với tốc độ góc $\omega_0 = 65\text{rad/s}$ và vận tốc của khối tâm $v_0 = 5\text{m/s}$. Bỏ qua ma sát lăn, tính công của lực ma sát.

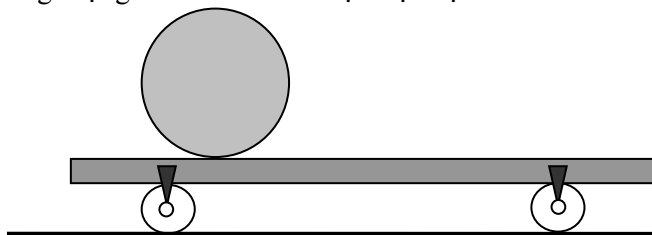


Bài 2. Một quả cầu đặc, đồng chất, khối lượng m bán kính R đang quay với tốc độ góc ω_0 quanh một trục đi qua khối tâm quả cầu và lập với phương thẳng đứng một góc α . Tốc độ tịnh tiến ban đầu của khối tâm quả cầu bằng không. Đặt nhẹ quả cầu lên một mặt bàn nằm ngang. Hãy xác định tốc độ của khối tâm quả cầu và động năng của quả cầu tại thời điểm nó ngừng trượt trên mặt bàn. Bỏ qua ma sát lăn.

Bài 3. Một trụ đặc có khối lượng m , bán kính đáy R đang quay đều quanh trục của nó theo phương ngang với vận tốc góc ω_0 . Trụ được đặt nhẹ nhàng lên một sàn xe phẳng, dài nằm ngang. Xe có cùng khối lượng m với trụ và có thể trượt không ma sát trên mặt đất. Ngay sau đó xe chuyển động nhanh dần, nhưng sau một khoảng thời gian xe đạt được vận tốc ổn định và không đổi.

a. Xác định vận tốc ổn định của xe.

b. Xác định năng lượng mất mát từ khi trụ được đặt lên xe đến khi xe đạt vận tốc không đổi.

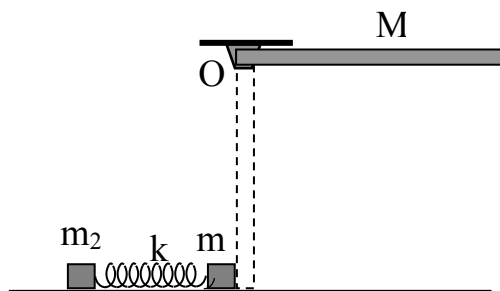


Bài 4. Một hình trụ khối lượng m_1 , bán kính R_1 quay do quán tính quanh trục của nó với vận tốc góc ω_0 . Người ta áp vào hình trụ trên một hình trụ thứ 2 có khối lượng m_2 , bán kính R_2 sao cho chúng có chung đường sinh. Lúc đầu mặt trụ m_1 trượt trên mặt trụ m_2 , sau đó hai trụ lăn không trượt lên nhau.

a. Tính các vận tốc góc ω_1 và ω_2 của hai hình trụ lúc đã hết trượt.

b. Tính nhiệt lượng tỏa ra do sự trượt.

Bài 5. Một thanh mảnh đồng chất khối lượng M chiều dài $L=0,3$ m có thể quay không ma sát quanh trục O cố định nằm ngang đi qua đầu thanh. Từ vị trí nằm ngang, đầu còn lại của thanh được thả ra. Khi tới vị trí thẳng đứng thì thanh va chạm hoàn toàn đàn hồi với một vật nhỏ (coi như chất



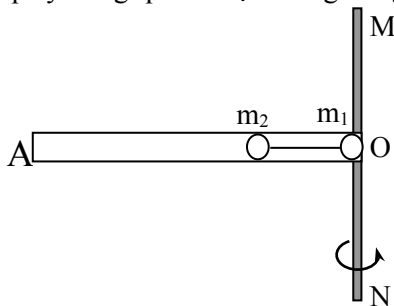
điểm) khối lượng $m_1 = \frac{1}{3} M$ nằm trên

mặt bàn. Cho $m_1=m=120$ g, gia tốc trọng lực $g=10$ m/s². Mômen quán tính của thanh đối với trục quay qua đầu O là $I = \frac{1}{3} ML^2$.

a) Xác định vận tốc của vật m_1 ngay sau va chạm.

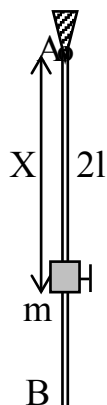
b) Vật m_1 được gắn với $m_2=m_1$ qua một lò xo có độ cứng $k=150$ N/m, khối lượng không đáng kể (Hình vẽ). Xác định biên độ dao động của m_1 và m_2 sau va chạm. Bỏ qua mọi ma sát.

Bài 6. Ống đồng chất OA dài $3L$, khối lượng m quay xung quanh trục thẳng đứng đứng MN. Hai quả cầu nhỏ khối lượng $m_1 = m_2 = m$ được nối với nhau bằng dây không giãn, không khối lượng, có chiều dài L , có thể trượt không ma sát trong ống. Lúc đầu, khi quả cầu m_1 nằm ở vị trí đầu O của ống trùng với trục quay (hình vẽ), truyền cho hệ vận tốc góc ban đầu ω_0 . Bỏ qua khối lượng của trục quay, ma sát ở các ổ trục.



1. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của ống tại thời điểm quả cầu m_2 đến đầu A của ống.
2. Tính lực căng T của dây nối hai quả cầu tại thời điểm nói trên.

Bài 7. Một thanh kim loại mảnh AB đồng chất dài $2l$, khối lượng m và một vật nhỏ cùng khối lượng m có thể di chuyển dọc theo thanh nhờ ốc vít (hình vẽ). Hệ có thể quay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng quanh trục cố định đi qua đầu A của thanh. Tại thời điểm ban đầu thanh ở vị trí thẳng đứng, đầu B ở dưới. Vật cách đầu A đoạn x . Hệ nhận được vận tốc góc ω_0 .



a- Xác định vận tốc góc ω khi thanh đến vị trí nằm ngang như là một hàm số của x . Xác định x để ω đạt giá trị cực tiểu.

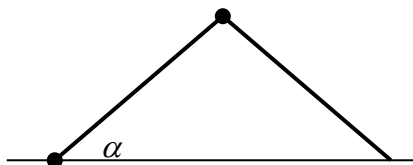
b- Cho $x = 2l$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{15g}{8l}}$. Xác định gia tốc góc và phản

lực R tại A khi thanh ở vị trí nằm ngang.

Bài 8. Một khung sắt hình tam giác ABC vuông góc, với góc $B = 30^\circ$ được đặt thẳng đứng, cạnh huyền nằm ngang. Hai hòn bi nối với nhau bằng thanh cứng, trọng lượng không đáng kể, có thể trượt không ma sát trên hai cạnh góc vuông. Bi I trên cạnh AB có trọng lượng P_1 , bi J trên cạnh AC trọng lượng P_2 .

1. Khi hệ thống đã cân bằng, tính góc α .
2. Cân bằng là bền hay không bền. Xét hai trường hợp:
a) $P_1 = P_2$.
b) $P_2 = 3P_1$.

Bài 9. Hai thanh cứng giống nhau mỗi thanh có khối lượng M , chiều dài L nối với nhau bằng một bản lề. Đầu còn lại của thanh thứ nhất được gắn với sàn bằng một bản lề trong khi đầu còn lại của thanh thứ hai có thể trượt



không ma sát trên mặt sàn nằm ngang (hình vẽ). Gọi α là góc giữa mỗi thanh và sàn. Bỏ qua ma sát tại các bản lề.

1. Tìm lực mà sàn tác dụng lên thanh thứ hai ngay sau khi thả các thanh ở vị trí có $\alpha = 45^\circ$.

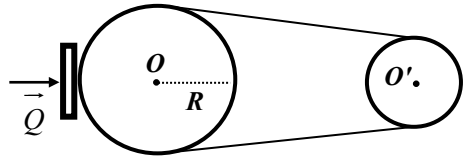
2. Tìm tốc độ góc của hai thanh như là một hàm số của góc α khi $0 < \alpha < 45^\circ$.

Bài 10. Một thanh đồng chất tiết diện đều có khối lượng là $2m$, chiều dài l đang nằm yên trên sàn ngang nhẵn. Một viên bi nhỏ khối lượng m chuyển động với vectơ vận tốc $\vec{v}$ đến và chạm tuyệt đối đàn hồi theo phương vuông góc với thanh tại một điểm cách khối tâm của thanh một đoạn là x .

a. Xác định x để vận tốc khối tâm của thanh ngay sau va chạm có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và các giá trị đó bằng bao nhiêu?

b. Với giá trị nào của x thì ngay sau va chạm viên bi nhỏ đứng yên?

Bài 11. Hai bánh xe là những đĩa tròn đồng chất có tâm lần lượt là O và O' nối với nhau bằng dây curoa không dẫn, không trượt trên các bánh xe (Hình vẽ). Bánh xe tâm O đang quay với vận tốc góc ω_0 thì một má phanh đè vào với áp



lực Q , hệ số ma sát k . Biết bánh xe tâm O có khối lượng M và bán kính R , bánh xe O' có khối lượng M' , dây curoa có khối lượng m .

a) Tìm động năng ban đầu của hệ theo M, M', m, ω_0 và R .

b) Tính số vòng bánh xe tâm O quay cho đến khi dừng và gia tốc góc của nó.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

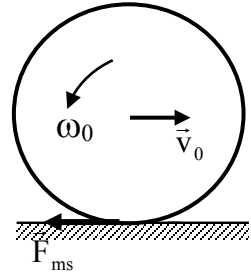
Giai đoạn 1: Khối trụ chuyển động sang phải, lực ma sát trượt: $F_{ms} = \mu mg$.

Theo phương trình động lực học cho chuyển động tịnh tiến. Gia tốc chuyển động tịnh tiến của khối tâm :

$$a = - \frac{F_{ms}}{m} = - \mu g = -1 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (1)$$

Theo phương trình động lực học cho chuyển động quay quanh một trục . Gia tốc góc của chuyển động quay quanh khối tâm :

$$\gamma = - \frac{F_{ms} R}{I} = - \frac{2\mu g}{R} = -10 \text{ (rad/s}^2\text{)} \quad (2)$$



Vận tốc khối tâm giảm đến 0 sau thời gian: $t_1 = - \frac{v_0}{a} = 5 \text{ (s)}$

Lúc này tốc độ góc của chuyển động quay quanh khối tâm:

$$\omega_1 = \omega_0 + \gamma t_1 = 15 \text{ (rad/s)} \quad (3)$$

Giai đoạn 2: Khối trụ chuyển động sang trái, vận tốc chuyển động tịnh tiến của khối tâm tăng dần, tốc độ góc giảm dần cho đến khi $v = \omega R$ thì khối trụ lăn không trượt.

Gia tốc chuyển động tịnh tiến:

$$a' = \frac{F_{ms}}{m} = \mu g = 1 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad (4)$$

Gia tốc góc vẫn không đổi, xác định theo (2)

Gọi t_2 là thời gian khối trụ chuyển động sang trái cho đến khi lăn không trượt. Vận tốc khi chuyển động ổn định:

$$v = \mu g t_2 \quad (5)$$

Tốc độ góc khi chuyển động ổn định:

$$\omega = \omega_1 + \gamma t_2 \quad (6)$$

$$\text{Mặt khác: } v = R\omega \quad (7)$$

Giải (5), (6), (7) ta được: $t_2 = 1 \text{ (s)}$; $V = 1 \text{ (m/s)}$; $\omega = 5 \text{ (rad/s)}$

Động năng của vật lúc này: $W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

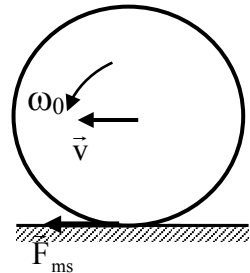
Công của lực ma sát (ngoại lực) bằng độ biến thiên động năng:

$$A = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2) = -1080 \text{ J.}$$

(Sau khi chuyển động ổn định lực ma sát nghỉ không sinh công.)

Bài 2.

Phân tích ω_0 thành hai phần:



* Thành phần $\omega_1 = \omega_0 \cos \alpha$ hướng theo phương thẳng đứng, thành phần này có giá trị không đổi (do không có lực nào gây ra mômen cản trở thành phần chuyển động quay này). Động năng ứng với thành phần này là:

$$E_{D1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} m R^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha$$

* Thành phần $\omega_2 = \omega_0 \sin \alpha$ thay đổi do mômen của lực ma sát trượt F_{ms} , gọi v và ω là tốc độ tịnh tiến của khối tâm và tốc độ góc theo phương ngang của quả cầu khi nó bắt đầu lăn không trượt, ta có: $v = \omega R$ (*).

Phương trình chuyển động quay:

$$F_{ms} R = -I_2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2}{5} m R^2 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow F_{ms} = -\frac{2}{5} m R \frac{d\omega}{dt}$$

Phương trình định luật II Newton: $F_{ms} = m \frac{dv}{dt}$;

$$\text{Suy ra: } dv = -\frac{2}{5} R d\omega \Rightarrow \int_0^v dv = -\frac{2}{5} R \int_{\omega_2}^{\omega} d\omega \Rightarrow v = \frac{2}{5} R (\omega_2 - \omega) \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \text{ rút ra } \omega = \frac{2}{7} \omega_2 = \frac{2}{7} \omega_0 \sin \alpha \text{ và } v = R \omega = \frac{2}{7} R \omega_0 \sin \alpha$$

Vậy động năng của quả cầu tại thời điểm ngừng trượt là:

$$\begin{aligned} E_D &= E_{D1} + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{5} m R^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{7} R \omega_0 \sin \alpha \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \left(\frac{2}{7} \omega_0 \sin \alpha \right)^2 \\ &= \frac{1}{5} m R^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{2}{35} m (R \omega_0 \sin \alpha)^2 = \frac{1}{35} m R^2 \omega_0^2 (5 \cos^2 \alpha + 2) \end{aligned}$$

Vậy vận tốc và động năng của quả cầu ở thời điểm nó ngừng trượt là:

$$v = \frac{2}{7} R \omega_0 \sin \alpha \text{ và } E_D = \frac{1}{35} m R^2 \omega_0^2 (5 \cos^2 \alpha + 2)$$

Bài 3.

Gọi vận tốc của xe khi ổn định là V . Vận tốc của trụ so với xe khi đó là v , vận tốc quay của trụ khi đó là ω . Ban đầu trụ trượt trên sàn xe, lực ma sát làm trụ chuyển động tịnh tiến nhanh dần, chuyển động quay chậm dần đến khi đạt điều kiện lăn không trượt $v = R \cdot \omega$ thì lực ma sát bằng 0 và hệ đạt trạng thái ổn định với các vận tốc không đổi.

Cách 1: Sử dụng các định luật bảo toàn:

a) Định luật bảo toàn động lượng:

$$mV + m(V - v) = 0 \Rightarrow V = \frac{v}{2}$$

Định luật bảo toàn mô men động lượng với một trục nằm trên sàn xe vuông góc với mặt phẳng hình vẽ:

$$I\omega_o = I\omega + m(v - V)R$$

$$\text{Với: } I = \frac{mR^2}{2} \text{ và } v = R\omega$$

Giải các phương trình ta tìm được: $v = \frac{\omega_o R}{2}$

$$Q_{hp} = W_{trước} - W_{sau}$$

$$\text{b) } Q_{hp} = \frac{I\omega_o^2}{2} - \left(\frac{I\omega^2}{2} + \frac{m(v - V)^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \right)$$

Với $V = \frac{v}{2}$; $v = R\omega$; $I = \frac{mR^2}{2}$ mà $v = \frac{\omega_o R}{2}$. Biến đổi ta được: $Q_{hp} = \frac{m\omega_o^2 R^2}{8}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp động lực học:

a) Đối với xe:

$$m \frac{V}{t} = ma = F_{ms}$$

Đối với trụ:

$$m \frac{v}{t} = ma_{12} = F_{qt} + F_{ms} = ma + F_{ms}$$

$$I \frac{\omega - \omega_o}{t} = I\gamma = -F_{ms} R$$

$$\text{Với: } I = \frac{mR^2}{2} \text{ và } v = R\omega$$

Biến đổi ta được: $v = \frac{\omega_o R}{2}$

$$\text{b) } Q_{hp} = -A_{ms} = -(A_{msquay} + A_{mstt})$$

Trong đó: A_{msquay} là công của lực ma sát trong chuyển động quay của trụ trên xe.

A_{mstt} là công của lực ma sát trong chuyển động tịnh tiến tương đối của trụ trên xe.

$$A_{msquay} = F_{ms} \cdot R \cdot \alpha = F_{ms} \cdot R \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\gamma}$$

$$A_{mstt} = F_{ms} \cdot \frac{v^2}{2a_{12}}$$

Biến đổi ta được $Q_{hp} = \frac{m\omega_o^2 R^2}{8}$

Bài 4.

a. Tính các vận tốc ω_1 và ω_2 của hai trụ.

Khi hai trụ lăn trên nhau thì $v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$.

Momen trụ m_1 tác dụng lên trụ m_2 : $M = FR_2$.

Với $M = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta\tau}$ $\Delta\tau$ là thời gian để vận tốc trụ m_2 tăng từ $0 \rightarrow \omega_2$

Có $\Delta(I\omega) = I_2 \omega_2$; $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$.

$\Rightarrow M \cdot \Delta\tau = FR_2 \Delta\tau = I_2 \omega_2$.

Cũng trong thời gian $\Delta\tau$ phản lực $F' = F$ của trụ m_2 tác dụng lên trụ m_1 làm vận tốc góc của trụ m_1 giảm từ $\omega_0 \rightarrow \omega_1$.

Suy ra: $FR_1 \Delta\tau = I_1 (\omega_0 - \omega_1)$; $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$

$\Rightarrow F \cdot \Delta\tau = \frac{I_2 \omega_2}{R_2} = \frac{I_1 (\omega_0 - \omega_1)}{R_1}$.

$\Rightarrow \omega_1 = \frac{m_1 \omega_0}{m_1 + m_2}$; $\omega_2 = \frac{m_1 R_1 \omega_0}{(m_1 + m_2) R_2}$.

b. Nhiệt lượng tỏa ra do sự trượt:

Động năng ban đầu của trụ m_1 : $W_0 = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \omega_0^2$.

Động năng các trụ lúc sau:

$$W_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{m_1 R_1^2}{4} \omega_0^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{m_2 R_2^2}{4} \omega_0^2$$

Vậy nhiệt lượng tỏa ra $Q = W_0 - W_1 - W_2 \Rightarrow Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{R}{4} \omega_0^2$.

Bài 5.

a) Động năng quay của M ngay trước va chạm:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M g L \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{M g L}{I}} = \sqrt{\frac{3 g}{L}}$$

Động năng của m_1 và M ngay sau va chạm: $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega'^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ (1)

Mômen động lượng sau va chạm: $M v L + I \omega' = I \omega$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $v = \frac{2 M \sqrt{3 g L}}{M + 3 m} = 3 m / s$

b) Sau va chạm, khối tâm G của hệ $(m_1 + m_2)$ chuyển động với vận tốc V mà:

$$2 m V = m v \rightarrow V = \frac{1}{2} v = 1,5 m / s .$$

Trong HQC gắn với khối tâm G, vì hai vật có khối lượng bằng nhau nên ta có thể xem như dao động của m_1, m_2 là dao động của m gắn với một lò xo có đầu G cố định và có độ cứng là $k' = 2k$.

Gọi A là biên độ dao động của mỗi vật, theo định luật bảo toàn cơ năng ta có:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 2 m V^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} k' A^2 \rightarrow A = 0,03 m$$

Bài 6.

+ Tổng các mô men ngoại lực tác dụng lên hệ (hai quả cầu) theo phương MN bằng không nên mô men động lượng theo phương này bảo toàn: $L_Z = \text{const}$.

+ Khi m_1 có tọa độ x thì m_2 có tọa độ $(x + l)$, ống có vận tốc góc là ω

$$L = \frac{m(3l)^2}{3} \cdot \omega + m x^2 \omega + m(l + x)^2 \omega = 2m(x^2 + lx + 2l^2) \omega.$$

Khi: $x=0$, $L(0) = 4ml^2 \omega_0$.

Khi m_2 đến A cách O là $3l$ thì m_1 đến vị trí $x = 2l$.

+ Gọi vận tốc góc của hệ khi đó là ω_A thì: $L(2l) = 16ml^2 \omega_A$.

Từ $L(0) = L(2l)$ suy ra vận tốc góc của ống khi m_2 đến đầu A của ống: $\omega_A = \omega_0/4$.

+ Vận tốc góc của hệ tại thời điểm m_1 ở vị trí x :

$$\omega = \frac{L}{2m(2l^2 + xl + x^2)} = \frac{L(0)}{2m(2l^2 + xl + x^2)} = \frac{2l^2 \omega_0}{2l^2 + xl + x^2};$$

$$\Rightarrow \text{gia tốc góc là: } \gamma = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2L^2(2x+L)\omega_0}{(2L^2 + xL + x^2)^2} \cdot x'$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng: Cơ năng ở O bằng ở A: $E_0 = E_A$

$$E_0 = I \frac{\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot 9l^2}{2 \cdot 3} \omega_0^2 + \frac{ml^2}{2} \omega_0^2 = 2ml^2 \omega_0^2.$$

Vận tốc của các quả cầu tại vị trí bất kỳ là: $v_1^2 = v_{1n}^2 + v_{1t}^2 = (x')^2 + (x \cdot \omega)^2$,

$$v_2^2 = v_{2n}^2 + v_{2t}^2 = (x')^2 + ((x+l) \cdot \omega)^2$$

(Chú ý là do dây không giãn nên $v_{1n} = v_{2n} = x'$)

$$E_A = \frac{m(3L)^2}{2 \cdot 3} \omega^2 + \frac{1}{2} m(x_A'^2 + 9l^2 \omega^2) + \frac{1}{2} m(x_A'^2 + 4l^2 \omega^2)$$

$$= \frac{mL^2}{2} \omega_0^2 + \frac{1}{2} m x_{An}'^2 + \frac{1}{2} m x_A'^2$$

$$E_A = E_0 \Rightarrow \frac{mL^2}{2} \omega_0^2 + \frac{1}{2} m x_{An}'^2 + \frac{1}{2} m x_A'^2 = 2ml^2 \omega_0^2 \Rightarrow v_{Ax} = \sqrt{\frac{3}{2}} l \omega_0 \Rightarrow$$

Gia tốc khi quả cầu m_2 tới A là:

$$\gamma_A = -\frac{5\sqrt{6}}{64} \omega_0^2 \approx -0,2 \omega_0^2$$

Xét trong hệ quay chiều không quán tính gắn với ống OA, chiều dương của Ox hướng ra ngoài.

Phương trình chuyển động của quả cầu m_2 :

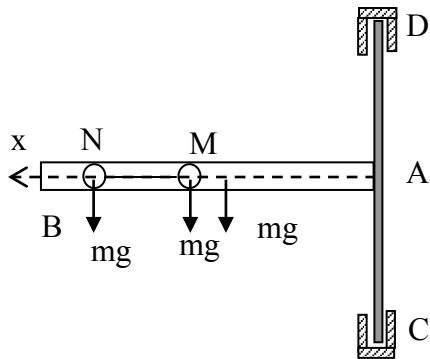
$$m x_2'' = -T + m(x+l)\omega^2.$$

Phương trình chuyển động của hệ:

$$m(x_1'' + x_2'') = m x \omega^2 + m(x+l)\omega^2$$

$$\text{Vì } x_N'' = x_M'' \Rightarrow T = \frac{mL\omega^2}{2}.$$

$$\text{Khi quả cầu tới A: } \omega = \omega_A \Rightarrow T_A = \frac{mL\omega_0^2}{32}$$



Bài 7.

Áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 - \frac{1}{2} I_A \omega_0^2 = -mgl - mgx$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2mg(l+x)}{I_A}$$

$$+) \text{ Tính } I_A = \frac{1}{3}m \times (2l)^2 + mx^2 = \frac{m(4l^2 + 3x^2)}{3}$$

$$+) \text{ Tìm được: } \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{6g(l+x)}{4l^2 + 3x^2}$$

$$+) \omega \text{ cực đại khi } y = \frac{(l+x)}{4l^2 + 3x^2} \min$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{4l^2 + 3x^2 - (l+x) \times 6x}{(4l^2 + 3x^2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6lx - 4l^2 = 0$$

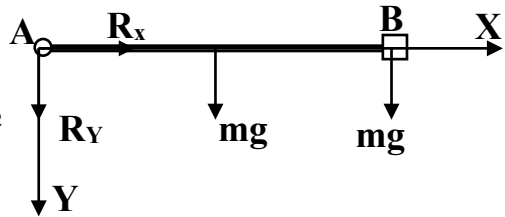
$$\text{Tìm được: } x = \left(\frac{\sqrt{21}}{3} - 1 \right) l \approx 0,53l$$

b- Khi thanh đến vị trí nằm ngang. Phương trình ĐLH viết cho chuyển động của thanh ở thời điểm này:

$$- mgl - mg \times 2l = I_A \gamma \Rightarrow \gamma = - \frac{3mgl}{I_A}$$

$$+) \text{ Với } I_A = \frac{m(4l^2 + 3x^2)}{3} = \frac{16}{3}ml^2$$

$$\text{Tìm được: } \gamma = - \frac{9g}{16l}$$



$$+) \text{ Vận tốc góc: } \omega^2 = \frac{15g}{8l} - \frac{6g(l+2l)}{4l^2 + 12l^2} = \frac{3g}{4l}$$

Khối tâm thanh chuyển động tròn với các thành phần gia tốc:

$$+) \text{ Gia tốc tiếp tuyến: } a_t = \gamma \cdot AG, \text{ với } AG = \frac{m \cdot l + m \cdot 2l}{2m} = \frac{3}{2}l$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{9g}{16l} \times \frac{3}{2}l = \frac{27}{32}g. \quad \vec{a_t} \text{ thẳng đứng hướng xuống.}$$

$$+) \text{ Gia tốc pháp tuyến: } a_n = \omega^2 \times AG = \frac{3g}{4l} \times \frac{3l}{2} = \frac{9}{8}g$$

+) Phương trình ĐLH viết cho chuyển động của khối tâm:

$$\vec{R} + 2m\vec{g} = 2m\vec{a}$$

+) Theo phương tiếp tuyến:

$$2mg + R_y = 2ma_t = \frac{27}{16}mg \Rightarrow R_y = -\frac{5}{16}mg$$

+) Theo phương pháp tuyến:

$$R_x = -2ma_n = -\frac{9}{4}mg$$

$$\text{Từ đó: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \approx 5,16mg$$

Bài 8.

1. Khi hệ thống cân bằng:

- Chọn mốc thế năng là mặt phẳng ngang qua A.

Đặt $IJ = l$, thế năng của hệ là:

$$U = -P_1 l \cos \alpha \sin 30^\circ - P_2 l \sin \alpha \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow U = -\frac{P_1 l}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3} P_2 l}{2} \sin \alpha$$

- Đạo hàm U theo α ta có:

$$\frac{dU}{d\alpha} = \frac{l}{2} [P_1 \sin \alpha - \sqrt{3} P_2 \cos \alpha]$$

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} = \frac{l}{2} [P_1 \cos \alpha + \sqrt{3} P_2 \sin \alpha]$$

- Khi thanh cân bằng thì

$$\frac{dU}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3} P_2}{P_1} (*)$$

2. Khảo sát sự cân bằng:

- Khi $P_1 = P_2$, thay vào (*) ta được: $\tan \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ \rightarrow \left. \frac{d^2 U}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=60^\circ} > 0$ nên

cân bằng bền.

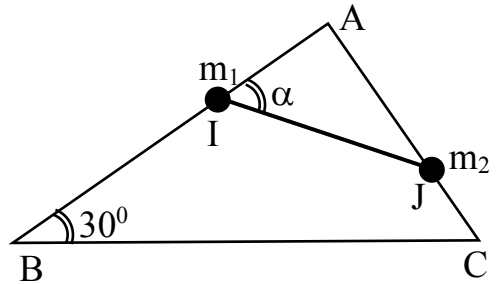
- Khi $P_2 = 3P_1$, thay vào (*) ta được: $\tan \alpha = 3\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 79^\circ \rightarrow \left. \frac{d^2 U}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=79^\circ} > 0$

nên cân bằng bền.

Bài 9.

1. + Trước hết ta có nhận xét chuyển động quay của thanh AB và chuyển thành phần quay của thanh BC tại mọi thời điểm đều có cùng tốc độ góc.

+ Xét chuyển động quay của thanh AB:



$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}; \vec{a}_B = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

+ Ngay sau khi thả $V_B = 0$, $\omega = 0$:

nên $a_n = 0$; và $a_B = a_t = L\gamma$, $\vec{a}_B$ có hướng BC

+ Gọi F_1, F_2 là hai thành phần lực do thanh BC tác dụng lên thanh AB. Phương trình mô men cho thanh AB đối với trục quay tại A:

$$-F_1 L + P \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} M L^2 \gamma \Rightarrow F_1 = Mg \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{M a_B}{3} \quad (1)$$

+ Xét chuyển động tịnh tiến của BC:

$$\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{P} + \vec{N} = M \vec{a}_G$$

+ Chiếu phương trình trên lên BC thì hình chiếu của $\vec{a}_G$ sẽ bằng $\vec{a}_B$

$$(\vec{a}_G = \vec{a}_{G/B} + \vec{a}_{B(n)} + \vec{a}_{B(t)})$$

$$\text{Ta có: } F_1 + Mg \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{N\sqrt{2}}{2} = M a_B \quad (2).$$

+ Xét chuyển động quay của BC quanh trục quay tức thời O:

$$F_1 \cdot L + Mg \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = [I_G + M(OG)^2] \frac{a_B}{L}$$

$$\Rightarrow F_1 + \frac{Mg\sqrt{2}}{4} = \frac{4}{3} M a_B \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $N = 7Mg/10$.

2. Chọn mốc thế năng ở vị trí thấp nhất

Thế năng của hệ lúc đầu:

$$W_t = MgL \sin 45^\circ = E_d. \quad (1)$$

Cơ năng của hệ lúc sau:

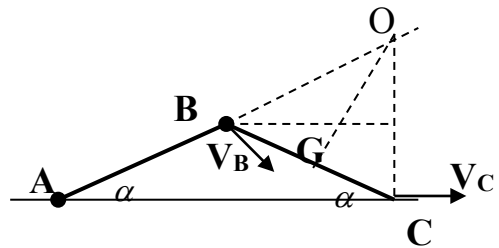
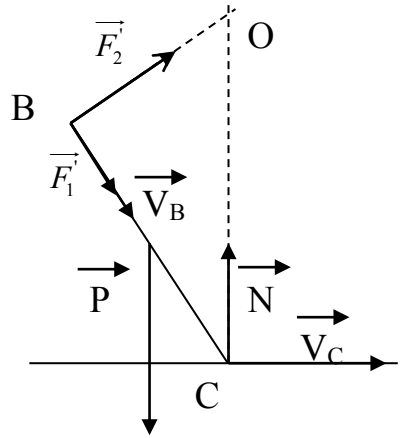
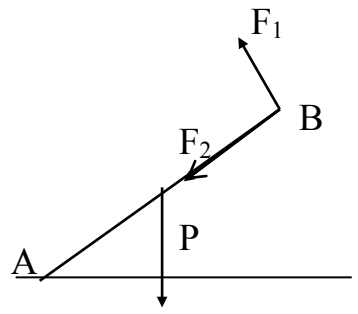
$$E_s = MgL \sin \alpha + I_{1A} \cdot \omega^2 / 2 + I_{2O} \cdot \omega^2 / 2 \quad (2)$$

Do B chuyển động tròn nên V_B luôn vuông góc với AB, nên tâm quay tức thời O nằm trên đường kéo dài của AB.

Dễ thấy $BC = OB = L$.

$$\text{Ta có: } I_{1A} + I_{2O} = M L^2 (5/3 - \cos 2\alpha) \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) và áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta suy ra:



$$\omega = \sqrt{\frac{2g(\sin 45^\circ - \sin \alpha)}{L\left(\frac{5}{3} - \cos 2\alpha\right)}}$$

Bài 10.

- Gọi $\vec{v}'$ và $\vec{v}_G$ lần lượt là vectơ vận tốc của viên bi nhỏ và khối tâm của thanh ngay sau va chạm.

- Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng cho hệ thanh và viên bi nhỏ ngay trước và sau va chạm, ta có:

$$\begin{cases} mv = 2mv_G + mv' \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2v_G + v' \\ v^2 = 2v_G^2 + \frac{l^2}{6}\omega^2 + v'^2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

- Độ biến thiên momen động lượng của thanh bằng momen xung lượng của lực mà thanh nhận được ngay khi va chạm: $I_G\omega = 2mv_Gx \Rightarrow \omega = 12\frac{v_Gx}{l^2}$ (3)

Giải các phương trình (1), (2) và (3), ta được:

$$v_G = \frac{2v}{3+12n^2}, \text{ với } n = \frac{x}{l}.$$

- Khối tâm của thanh ngay sau va chạm có vận tốc cực đại khi:

$$n = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow v_{G_{\max}} = \frac{2v}{3}; \text{ điểm va chạm có vị trí ngay khối tâm của thanh.}$$

Khối tâm của thanh ngay sau va chạm có vận tốc cực tiểu khi:

$$n = \frac{x}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{G_{\min}} = \frac{v}{3}; \text{ điểm va chạm ngay đầu thanh.}$$

Để ngay sau va chạm viên bi nhỏ đứng yên thì ta có :

$$v' = 0 \Rightarrow v_G = \frac{v}{2} = \frac{2v}{3+12n^2} \Rightarrow n^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow x = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Điểm va chạm cách khối tâm của thanh một khoảng là $\frac{l}{2\sqrt{3}}$.

Bài 11.

- Dây không dẫn, công của nội lực bằng 0, ngoại lực tác dụng vào dây là lực ma sát $F = kQ$.

- Khối tâm của các bánh xe và dây không dịch chuyển nên công của trọng lực bằng 0.

Động năng của bánh xe O là $K_0 = \frac{I\omega_0^2}{2}$ mà $I = \frac{MR^2}{2}$ nên $K_0 = \frac{MR^2}{4} \omega_0^2$

Động năng của bánh xe O' là $K_{0'} = \frac{M'r'^2}{4} \omega_0'^2$, do $\omega_0 R = \omega_0' r \Rightarrow K_{0'} = \frac{M'}{4} R^2 \omega_0^2$

Động năng của dây $K_d = \frac{m}{2} R^2 \omega_0^2$ (do $V = R\omega_0$)

Vậy động năng của cả hệ $K = K_0 + K_{0'} + K_d = \frac{1}{4} (M + M' + 2m) R^2 \omega_0^2$ (*)

Động năng của hệ chuyển thành công của lực ma sát trên n vòng quay

$$\frac{1}{4} (M + M' + 2m) R^2 \omega_0^2 = n.k.Q.2\pi R$$

$$\text{Vậy } n = \frac{(M + M' + 2m)R\omega_0^2}{8\pi kQ}$$

Từ (*) ta thấy : Hệ tương đương với 1 bánh xe có bán kính R và khối lượng $(M + M' + 2m)$ và mô men quán tính tương đương là I_{td} , ta có: $I_{td} = (M + M' + 2m) \frac{R^2}{2}$.

Gọi γ là gia tốc góc, ta có phương trình: $kQR = I_{td} |\gamma|$

$$\gamma = - \frac{kQR}{I_{td}} = - \frac{kQR}{(M + M' + 2m) \frac{R^2}{2}} = - \frac{2kQ}{(M + M' + 2m)R}$$

Dạng 4. DAO ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

A. phương pháp giải

Cách 1. Phương pháp năng lượng

Giải theo cách 1 thì phải chọn gốc thế năng cho phù hợp (thường sử dụng cho các bài toán có hệ lực phức tạp)

Cách 2. Phương pháp động lực học

Giải theo cách 2 thì phải phân tích lực và chọn một trục quay (thường sử dụng cho các bài toán có hệ lực đơn giản).

B. VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho cơ hệ như hình vẽ, quả cầu đặc có khối lượng m , bán kính r lăn không trượt trong máng có bán kính R . Máng đứng yên trên mặt phẳng nằm ngang. Tìm chu kì dao động nhỏ của quả cầu. Cho biết

momen quán tính của quả cầu đặc $I_G = \frac{2}{5}mr^2$.

Hướng dẫn

Phương pháp năng lượng.

Chọn gốc thế năng hấp dẫn tại tâm O của máng cong.

Quả cầu lăn không trượt nên K là tâm quay tức thời.

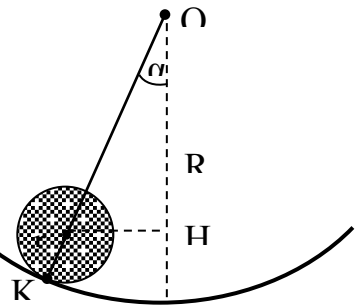
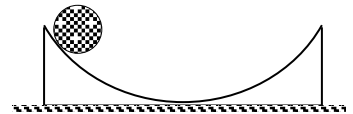
Cơ năng của quả cầu tại li độ góc α .

$$W = -mg(R - r)\cos\alpha + I_K \frac{\omega_K^2}{2} = \text{const} (*)$$

$$\text{Với: } \begin{cases} I_K = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 \\ V_G = \omega_O(R - r) = \omega_K r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega'_O(R - r) = \omega'_K r = \alpha''(R - r)$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (*) ta được:



$$\begin{cases} mg(R-r)\sin\alpha.\alpha' + \frac{7}{5}mr^2 \frac{2.\omega_K.\omega'_K}{2} = 0 \\ \omega'_K = \frac{\alpha''(R-r)}{r}; \sin\alpha \approx \alpha; \end{cases}$$

$$\Rightarrow mg(R-r)\alpha.\alpha' + \frac{7}{5}mr^2 \frac{\omega_o(R-r)}{r} \frac{\alpha''(R-r)}{r} = 0$$

$$\text{Vậy: } g\alpha + \frac{7}{5}(R-r)\alpha'' = 0 \Leftrightarrow \alpha'' + \frac{5g}{7(R-r)}\alpha = 0.$$

$$\text{Vậy quả cầu dao động điều hòa với biên độ nhỏ với chu kì: } T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

Phương pháp động lực học.

Vì quả cầu lăn không trượt nên K là tâm quay tức thời.

Phương trình động lực học vật rắn đối với tâm K.

$$-mgr\sin\alpha = I_K\gamma$$

$$I_K = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2;$$

Với

$$\gamma = \frac{R-r}{r}\alpha''$$

Kết quả thu được phương trình:

$$\alpha'' + \frac{5g}{7(R-r)}\alpha = 0. \text{ Ta lại có kết quả}$$

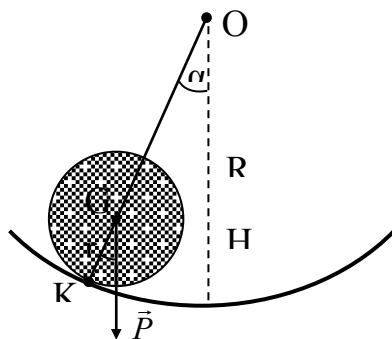
trên.

Ví dụ 2. Cho cơ hệ gồm ròng rọc hình trụ khối lượng M bán kính R và lò xo có độ cứng k, vật có khối lượng m. Dây không giãn, khối lượng không đáng kể, đầu A cố định, dây không trượt trên ròng rọc. Tìm chu kì dao động của vật m.

Hướng dẫn

Phương pháp động lực học.

Xét cơ hệ tại vị trí cân bằng: $F_{dh} = 2P_m + P_M = Mg + 2mg = k\Delta\ell_o$



Phương trình động lực học khi vật m ở dưới vị trí cân bằng đoạn x.

$$m : P_m - T_B = ma_B = mx''(1)$$

$$\mathbf{M}: \begin{cases} (T_B - T_A)R = I\gamma = \frac{MR^2}{2}\gamma(2) \\ Mg + T_A + T_B - k(\Delta\ell_o + \frac{x}{2}) = Ma_c(3) \end{cases}$$

Mặt khác: $V_B = V_C + \omega R = 2V_C$ nên $x'' = a_B =$

$2\gamma R = 2a_c$. Thay vào (1),(2),(3) ta được:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow T_B = mg - mx'' \\ (2) \Leftrightarrow T_B - T_A = \frac{M}{4}x'' \Rightarrow T_A = mg - mx'' - \frac{M}{4}x'' \\ (3) \Leftrightarrow Mg + 2mg - k\Delta\ell_o - 2mx'' - \frac{M}{4}x'' - k\frac{x}{2} = \frac{M}{2}x'' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x'' + \frac{2k}{8m + 3M} x = 0 (*)$$

$$\text{Đặt: } \omega^2 = \frac{2k}{8m+3M} \Rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{2(8m+3M)}{k}}$$

Phương pháp năng lượng.

Chọn gốc thế năng hấp dẫn qua tâm C của rỗng rọc khi ở vị trí cân bằng.

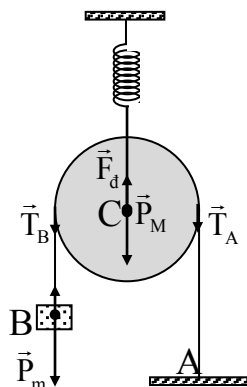
Xét hệ tại vị trí cân bằng: $Mg + 2mg = k\Delta\ell_0$

Xét cơ năng của hệ.

$$W = -mgx - Mg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_0 + \frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2}mV^2 + I_K\frac{\omega^2}{2} = \text{const}$$

Lấy đạo hàm hai vế với $x' = V = V_C + \omega R = 2\omega R$; $\omega = \alpha'$ ta được:

$$-mgx' - Mg\frac{x'}{2} + \frac{1}{2}k2(\Delta\ell_o + \frac{x}{2})\frac{x'}{2} + \frac{1}{2}m2VV' + I_k\frac{2\omega\omega'}{2} = 0$$



$$\Leftrightarrow -mgV - Mg\frac{V}{2} + k(\Delta\ell_o + \frac{x}{2})\frac{V}{2} + mVx'' + \frac{3}{2}M\frac{V}{2}\frac{x''}{2} = 0 (*)$$

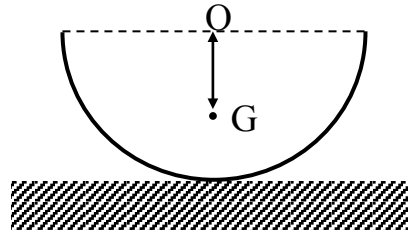
Với: vật m đi xuống đoạn x thì M đi xuống x/2 và quay thêm được cung có độ dài

x/2 ứng với góc quay α nên: $\frac{x}{2} = \alpha R$ hay $x = 2\alpha R$ hay $x'' = 2\omega'R$.

$$(*) \Leftrightarrow k\frac{x}{4} + (m + \frac{3}{8}M)x'' = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{2k}{8m + 3M}x = 0. \text{ Ta thu được kết}$$

quả như trên.

Ví dụ 3. Một nửa vòng xuyến mảnh bán kính R, khối lượng m thực hiện các dao động (không trượt) trên mặt nhám nằm ngang. Ở vị trí cân bằng khối tâm G của nửa vòng xuyến ở dưới tâm O đoạn $d = 2R/\pi$.



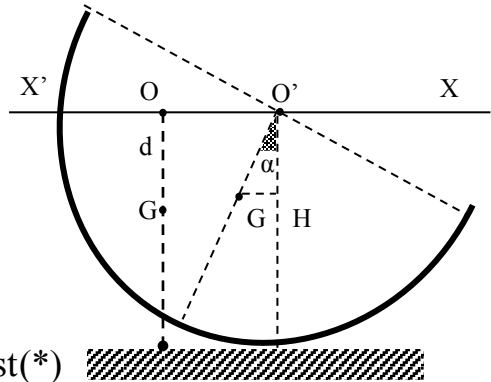
Tìm chu kì dao động T_1 ứng với các biên độ nhỏ?

Hướng dẫn

Khi vòng xuyến dao động với biên độ nhỏ thì tâm O của nó di chuyển trên đường nằm ngang XX' . Chọn gốc thế năng tại đường thẳng XX' .

Cơ năng của vòng xuyến tại li độ góc α .

$$W = -mgd \cos \alpha + I_k \frac{\omega^2}{2} = \text{const} (*)$$



$$\text{Với: } \begin{cases} \omega = \alpha' \Rightarrow \omega' = \alpha'' \\ I_o = I_G + mOG^2 \Rightarrow I_G - I_o = mR^2 - md^2 = m(R^2 - d^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_K = I_G + m(R - d)^2 = m2R(R - d)$$

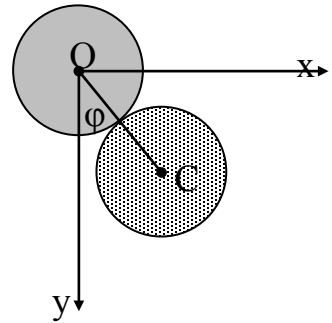
Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (*)

$$mg \sin \alpha \cdot \alpha' + I_K \frac{2\omega \alpha''}{2} = mg \frac{2R}{\pi} \alpha + 2mR^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \alpha'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha'' + \frac{g}{R(\pi - 2)} \alpha = 0$$

Vậy vòng xuyên dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R(\pi - 2)}{g}}$

Ví dụ 4. Cho cơ hệ như hình vẽ, thanh đồng chất OC khối lượng m, chiều dài 2R có thể quay quanh trục Oz nằm ngang của một khối hình trụ cố định bán kính R. Đầu C của thanh gắn với trục của một đĩa mỏng đồng chất có bán kính R, khối lượng 2m; đĩa tiếp xúc với khối trụ. Khi cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng xOy vuông góc với Oz, đĩa lăn không trượt trên khối trụ. Kéo thanh OC lệch góc nhỏ φ_0 so với phương thẳng đứng rồi buông nhẹ. Tính chu kì dao động của cơ hệ. Bỏ qua ma sát ở các ổ trục và ma sát lăn giữa đĩa mỏng và khối trụ.



Hướng dẫn

Chọn gốc thế năng hấp dẫn trùng với trục Ox. Năng lượng của cơ hệ gồm thanh OC và đĩa tại li độ góc φ .

$$\text{Động năng: } W_d = I_O \frac{\omega_O^2}{2} + I_K \frac{\omega_K^2}{2}$$

$$\text{Với } I_O = m \frac{(2R)^2}{12} + mR^2 = \frac{4}{3}mR^2 \text{ là momen quán tính của thanh OC đối}$$

với trục quay qua O và ω_O là vận tốc góc của thanh OC quay quanh O.

$I_K = 2m \frac{R^2}{2} + 2mR^2 = 3mR^2$ là momen quán tính của đĩa C quanh tâm quay

tức thời K, ω_K là vận tốc góc của đĩa C quanh tâm quay tức thời K.

$$\text{Mối liên hệ giữa } \omega_O \text{ và } \omega_K: V_C = \omega_O \cdot 2R = \omega_K \cdot R \Rightarrow \begin{cases} \omega_K = 2\omega_O \\ \omega_O = \varphi' \\ \omega'_K = 2\omega'_O = 2\varphi'' \end{cases} \quad (*)$$

Thế năng hấp dẫn: $W_t = -2m \cdot 2R \cos \varphi - mgR \cos \varphi = -5mgR \cos \varphi$

Cơ năng của hệ:

$$W = \frac{4}{3}mR^2 \cdot \frac{\omega_O^2}{2} + 3mR^2 \frac{(2\omega_O)^2}{2} - 5mgR \cos \varphi$$

$$\Rightarrow W = \frac{20}{3}mR^2 \omega_O^2 - 5mgR \cos \varphi = \text{const} \quad (**)$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình (**):

$$\frac{20}{3}mR^2 2\omega_O \omega'_O + 5mgR \sin \varphi \cdot \varphi' = 0 \quad (***)$$

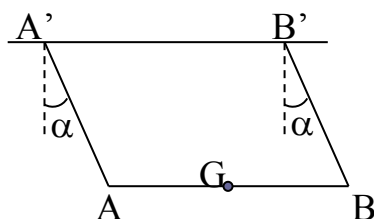
Thế (*) vào (***) ta được: $\varphi'' + \frac{3g}{8R} \varphi = 0$.

Vậy cơ hệ dao động điều hòa với chu kỳ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{8R}{3g}}$

Ví dụ 5. Một thanh AB đồng nhất, có tâm G, khối lượng m được treo trên hai dây nhẹ giống nhau AA' và BB' có chiều dài b. Thanh dao động trong mặt phẳng thẳng đứng, hai dây AA' và BB' luôn song song với nhau.

a) Tính động năng của thanh theo đạo hàm α' của góc nghiêng α của các dây ở một thời điểm cho trước.

b) Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh.



Hướng dẫn

a) Định lý Koenig đối với động năng:

$$K = \frac{1}{2}mv^2(G) + K^*(G)$$

Trong HQC $R^*(G, x, y, z)$ thanh đứng yên và $K^*(G) = 0$

$$\text{Suy ra: } K = \frac{1}{2}mv^2(G) = \frac{1}{2}mb^2\alpha'^2 \quad (1)$$

b) Chọn mốc thế năng tại vị trí thấp nhất của thanh trong quá trình dao động

$$+ \text{ Thế năng của thanh là: } U = mgb(1 - \cos\alpha) \quad (2)$$

+ Cơ năng của hệ là:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mb^2\alpha'^2 + mgb(1 - \cos\alpha) = mgb(1 - \cos\alpha_0) = \text{const} \quad (3)$$

$$\text{Đạo hàm theo thời gian hai vế của (3) ta được: } \alpha''b + g \sin\alpha = 0 \quad (4)$$

$$\text{Với } \alpha < 10^\circ \rightarrow \sin\alpha \approx \alpha(\text{rad})$$

$$\text{thì phương trình (4) trở thành: } \alpha'' + \omega^2\alpha = 0 \text{ với } \omega^2 = \frac{g}{b}$$

$$\text{Vậy chu kỳ dao động nhỏ của thanh là: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

Ví dụ 6. Một tấm gỗ được đặt nằm ngang trên hai trục máy hình trụ có cùng bán kính, quay đều ngược chiều nhau với cùng tốc độ góc. Khoảng cách giữa hai trục của hình trụ là $2l$. Hệ số ma sát giữa hai hình trụ và tấm gỗ đều bằng k . Tấm gỗ đang cân bằng nằm ngang, đẩy nhẹ nó khỏi vị trí cân bằng theo phương ngang một đoạn nhỏ và để tự do.

Hãy chứng minh tấm gỗ dao động điều hòa.

Hướng dẫn

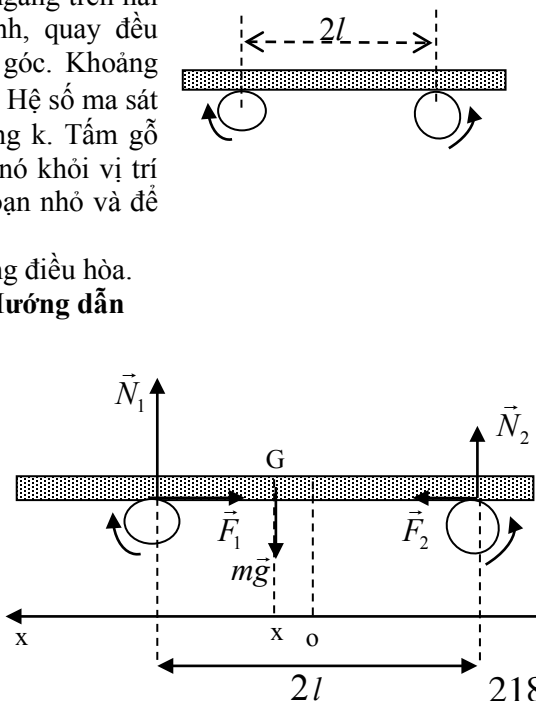
Các lực tác dụng lên tấm gỗ như gồm có: Trọng lực $m\vec{g}$; Các phản

lực: $\vec{N}_1; \vec{N}_2$ và các lực ma sát

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \quad (F_1 = kN_1, F_2 = kN_2).$$

Ta luôn có: $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow N_1 + N_2 = mg \quad (1)$$



Ở VTCB $\sum \vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} = \vec{0}$ Suy ra $N_{01} = N_{02}$ nên khối tâm G cách đều hai trục quay.

Chọn trục ox như hình vẽ, góc O ở VTCB, xét tấm gỗ ở vị trí có tọa độ x ,lệch khỏi VTCB một đoạn nhỏ(xem hình vẽ). $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Tấm gỗ không quay quanh G nên $M_{\vec{N}_1} = M_{\vec{N}_2}$ hay $N_1(l-x) = N_2(l+x)$ (2)

Suy ra $N_1 > N_2$, do đó $F_1 > F_2$ nên $\sum \vec{F}$ có chiều của $\vec{F}_1$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có thể viết } \frac{N_1}{l+x} = \frac{N_2}{l-x} = \frac{mg}{2l} \quad (3)$$

Áp dụng định luật 2 Newton ta có:

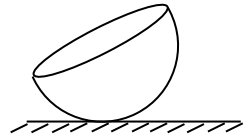
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_2 - F_1 = ma \Rightarrow k(N_2 - N_1) = ma.$$

Thay N_1, N_2 từ (3) và thay $a=x''$ ta có $-k \frac{mg}{l} x = mx'' \Leftrightarrow x'' + \frac{kg}{l} x = 0$

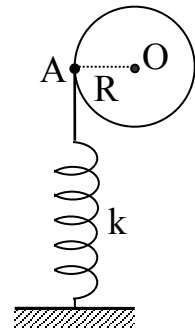
Điều đó chứng tỏ tấm gỗ dao động điều hòa.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho một bán cầu đặc đồng chất, khối lượng m, bán kính R, tâm O. Biết khối tâm G của khối cầu cách tâm O 1 khoảng $d = 3R/8$. Đặt bán cầu trên mặt phẳng nằm ngang. Đẩy bán cầu sao cho trục đối xứng của nó nghiêng một góc nhỏ so với phương thẳng đứng rồi buông nhẹ cho dao động (Hình vẽ). Cho rằng bán cầu không trượt trên mặt phẳng này và ma sát lăn không đáng kể. Hãy tìm chu kì dao động của bán cầu.



Bài 2. Một đĩa tròn đồng chất, khối lượng m, bán kính R, có thể quay quanh một trục cố định nằm ngang đi qua tâm O của đĩa (hình vẽ). Lò xo có độ cứng k, một đầu cố định, một đầu gắn với điểm A của vành đĩa. Khi OA nằm ngang thì lò xo có chiều dài tự nhiên. Xoay đĩa một góc nhỏ α_0 rồi thả nhẹ. Coi lò xo luôn có phương thẳng đứng và khối lượng lò xo không đáng kể.



a) Bỏ qua mọi sức cản và ma sát. Tính chu kì dao động của đĩa.

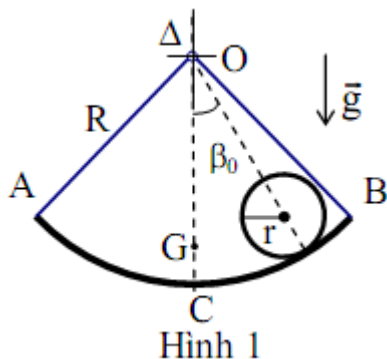
b) Thực tế luôn tồn tại sức cản của không khí và ma sát ở trục quay. Coi

mômen cản M_C có biểu thức là $M_C = \frac{kR^2}{200}$. Tính số dao động của đĩa

trong trường hợp $\alpha_0 = 0,1 \text{ rad}$.

Bài 3. Cho vật 1 là một bản mỏng đều, đồng chất, được uốn theo dạng lòng máng thành một phần tư hình trụ AB cứng, ngắn, có trục Δ , bán kính R và được gắn với điểm O bằng các thanh cứng, mảnh, nhẹ. Vật 1 có thể quay không ma sát quanh một trục cố định (trùng với trục Δ) đi qua điểm O.

Trên Hình 1, OA và OB là các thanh cứng cùng độ dài R, OAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục Δ , chứa khối tâm G của vật 1, C là giao điểm của OG và lòng máng.



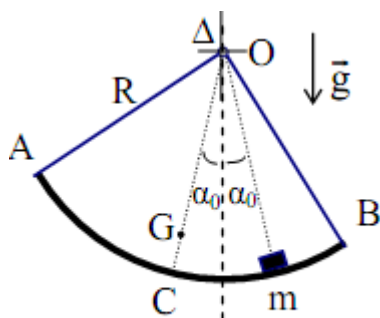
1. Giữ cho vật 1 luôn cố định rồi đặt trên nó vật 2 là một hình trụ rỗng, mỏng, đồng chất, cùng chiều dài với vật 1, bán kính r ($r < R$), nằm dọc theo đường sinh của vật 1. Kéo vật 2 lệch ra khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ β_0 rồi thả nhẹ.

a) Tìm chu kì dao động nhỏ của vật 2. Biết rằng trong quá trình dao động, vật 2 luôn lăn không trượt trên vật 1.

b) Biết μ là hệ số ma sát nghỉ giữa vật 1 và vật 2. Tìm giá trị lớn nhất của góc để trong quá trình dao động điều hoà, vật 2 không bị trượt trên vật 1.

2. Thay vật 2 bằng một vật nhỏ 3. Vật 3 nằm trong mặt phẳng OAB. Kéo cho vật 1 và vật 3 lệch khỏi vị trí cân bằng sao cho G và vật 3 nằm

về hai phía mặt phẳng thẳng đứng chứa Δ , với các góc lệch đều là α_0 như Hình 2, rồi thả nhẹ. Bỏ qua ma sát. Tìm khoảng thời gian nhỏ nhất để vật 3 đi tới C.



Hình 2

Bài 4. Để đo gia tốc trọng trường g , người ta có thể dùng con lắc rung, gồm một lá thép phẳng chiều dài l , khối lượng m , một đầu của lá thép gắn chặt vào điểm O của giá, còn đầu kia gắn một chất điểm khối lượng M . ở vị trí cân bằng lá thép thẳng đứng. Khi làm lá thép lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ θ (radian) thì sinh ra momen lực $c.\theta$ (c là một hệ số không đổi) kéo lá thép trở về vị trí ấy (xem hình vẽ). Trọng tâm của lá thép nằm tại trung điểm của nó và momen quán tính của riêng lá thép đối với trục quay qua O là $ml^2 / 3$.

a, Tính chu kì T các dao động nhỏ của con lắc.

b, Cho $l = 0,20\text{m}$, $m = 0,01\text{kg}$, $M = 0,10\text{kg}$. Để con lắc có thể dao động, hệ số c phải lớn hơn giá trị nào? Biết g không vượt quá $9,9\text{m/s}^2$.

c, Cho l , m , M có các giá trị như ở mục b, $c = 0,208$. Nếu đo được $T = 10\text{s}$ thì g có giá trị bằng bao nhiêu?

d, Cho l , m , M , c có các giá trị cho ở mục c. Tính độ nhạy của con lắc, xác định bởi $\frac{dT}{dg}$, dT là biến thiên nhỏ của T ứng với biến thiên nhỏ dg của g quanh giá trị

trung bình $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$. Nếu ở gần g_0 , gia tốc g tăng $0,01\text{m/s}^2$ thì T tăng hay giảm bao nhiêu?

e, Xét một con lắc đơn có chiều dài $L = 1\text{m}$ cũng dùng để đo g . Tính độ nhạy của con lắc đơn ở gần giá trị trung bình g_0 ; g tăng $0,01\text{m/s}^2$ thì chu kì T của con lắc đơn tăng hay giảm bao nhiêu? So sánh độ nhạy của hai con lắc.

Bài 5. Tính chu kì dao động thẳng đứng của tâm C của hình trụ đồng nhất khối lượng m , bán kính R , có momen quán tính đối với trục là $\frac{1}{2}mR^2$. Sợi dây không dẫn, không khối lượng, không trượt lên ròng rọc. Lò xo có hệ số đàn hồi là k

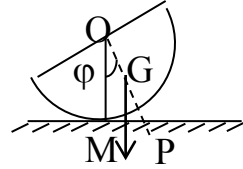
D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

Xét chuyển động quay quanh tiếp điểm M: gọi φ là góc hợp bởi OG và đường thẳng đứng

$$-mgd\varphi = I_M \cdot \ddot{\varphi} \quad (1) \Rightarrow \varphi \text{ biến thiên điều hoà với}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_M}}$$



I_O , I_G , I_M là các mô men quán tính đối với các trục quay song song qua O, G, M. Mô men quán tính đối với bán cầu là:

$$I_O = \frac{2}{5}mR^2; \quad I_O = I_G + md^2$$

$$I_M = I_G + m(MG)^2. \text{ Vì } \varphi \text{ nhỏ nên ta coi } MG = R-d$$

$$\Rightarrow I_M = \frac{2}{5}mR^2 + m(R^2 - 2Rd) = \frac{13}{20}mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_M}} = \sqrt{\frac{15g}{26R}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$$

Bài 2.

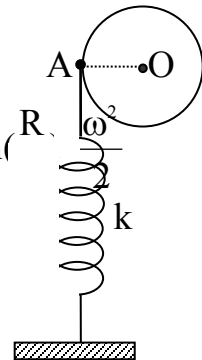
1. Chọn gốc thế năng hấp dẫn qua tâm O của đĩa. Cơ năng của hệ tại li độ góc α nhỏ.

$$W = W_d + W_t = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + I_O \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2}k(R\alpha)^2 + m(R\omega^2)$$

$$= \frac{1}{2}kR^2\alpha^2 + mR^2 \frac{\omega^2}{4} = \text{const} (*)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (*) ta được:

$$\frac{1}{2}kR^2 2\alpha\alpha' + mR^2 \frac{2\omega\omega'}{4} = 0$$

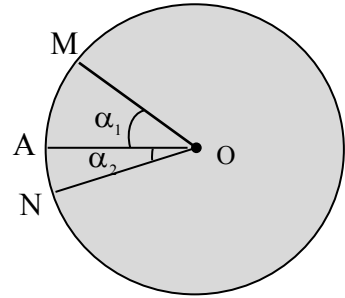


Với: $\alpha' = \omega$; $\omega' = \alpha''$ ta có:

$$\alpha'' + \frac{2k}{m}\alpha = 0$$

Vậy đĩa dao động điều hòa với chu kì:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$



2. Độ giảm biên độ sau mỗi nửa chu kì:

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(R\alpha_1)^2 + \frac{1}{2}k(R\alpha_2)^2 = \frac{1}{2}kR^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$$

Công của momen cản:

$$A = -M_C\Delta\varphi = -M_C(\alpha_2 + \alpha_1)$$

Theo định lí biến thiên cơ năng:

$$\frac{1}{2}kR^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) = -\frac{kR^2}{200}(\alpha_2 + \alpha_1) \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\alpha = \frac{1}{100}(\text{rad})$$

Vậy số nửa chu kì vật thực hiện được: $\frac{\alpha_o}{\Delta\alpha} = 10$ hay số dao động đĩa thực hiện

được là 5.

Bài 3.

1. Xét vật 2 ở vị trí ứng với góc lệch β . Gọi φ là góc mà vật 2 tự quay quanh mình nó. Chọn chiều dương tất cả các chuyển động ngược chiều kim đồng hồ. Lực tác dụng lên vật 2 gồm: trọng lực, phản lực, lực ma sát nghỉ.

Phương trình chuyển động của khối tâm vật

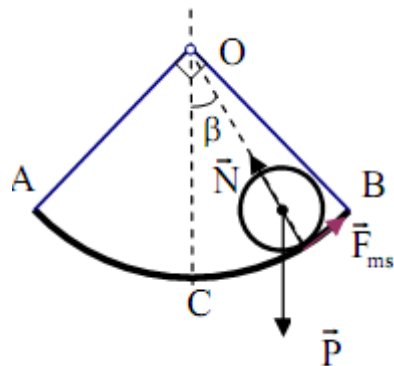
2 xét theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo:

$$m_2a = F_{ms} - m_2g\sin\beta \quad (1)$$

Vì β nhỏ $\Rightarrow \sin\beta \approx \beta$ (rad) $\Rightarrow m_2(R - r)\beta'' =$

$$F_{ms} - m_2g\beta \quad (2)$$

Phương trình chuyển động quay của khối trụ nhỏ quanh khối tâm: $m_2r^2\varphi'' = F_{ms}r$



$$\text{Điều kiện lăn không trượt: } (R-r).\beta' = -r\varphi' \Rightarrow (R-r).\beta'' = -r\varphi'' \quad (3)$$

$$\text{Thay (2) và (3) vào (1) ta được: } \beta'' + \frac{g}{2(R-r)}\beta = 0 \quad (4)$$

Phương trình (4) biểu diễn dao động điều hòa với chu kì :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$$

$$\text{Từ (2) } \Rightarrow F_{ms} = m_2 r \varphi'' = -m_2(R-r)\beta'' = m_2(R-r)\omega^2\beta = \frac{1}{2}m_2 g \beta \quad (5)$$

$$\text{Phản lực } N = m_2 g \cos\beta = m_2 g \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \quad (6)$$

$$\text{Điều kiện lăn không trượt: } \left| \frac{F_{ms}}{N} \right| \leq \mu \text{ với mọi } \beta \quad (7)$$

$$\text{Thay (5) và (6) vào (7) ta có: } \left| \frac{F_{ms}}{N} \right| = f(\beta) = \frac{\beta}{2-\beta^2} \leq \mu \text{ với } 0 \leq \beta \leq \beta_0$$

$$\text{Bất phương trình trên cho nghiệm: } \beta_0 \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{8 + \frac{1}{\mu^2}} - \frac{1}{\mu} \right)$$

Cần chú ý :

để có kết quả này cần có thêm điều kiện giới hạn về β_0 để $\sin\beta_0 \approx \beta_0$ (rad)

2. Xét tại thời điểm khối tâm vật 1 và vật 3 có li độ góc tương ứng là α, θ

Phương trình chuyển động của vật 3 theo phương tiếp tuyến với hình trụ:

$$m_3 R \theta'' = -m_3 g \theta \quad (1)$$

$$\text{Nghiệm của phương trình là: } \theta = \theta_0 \cos \omega_0 t = \alpha_0 \cos \omega_0 t; \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\text{Phương trình quay của G quanh O: } m_1 R^2 \alpha'' = -m_1 g \frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \alpha$$

Nghiệm phương trình này: $\alpha = \alpha_0 \cos \omega_1 t$;

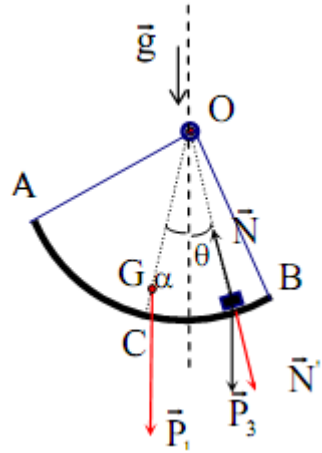
$$\text{với } \omega_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}g}{\pi R}}$$

Góc lệch của vật 3 so với phương OG là:

$$\gamma = \alpha - \theta = 2\alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}t\right)$$

Khi vật 3 tới C thì $\gamma = 0$

$$\Rightarrow t_{\min} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_0}$$



Bài 4.

a) Momen quán tính của con lắc $I = \frac{ml^2}{3} + Ml^2 = l^2(M + \frac{m}{3})$

Momen lực: $\mathcal{M} = mg \frac{l}{2} \sin \theta + Mgl \sin \theta - c\theta \approx \theta \left[gl(M + \frac{m}{2}) - c \right]$

Phương trình $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}$

$$l^2(M + \frac{m}{3})\ddot{\theta} = \theta \left[gl(M + \frac{m}{2}) - c \right] \quad \text{hay} \quad \ddot{\theta} + \frac{c - gl(M + \frac{m}{2})}{l^2(M + \frac{m}{3})} \theta = 0$$

Giả thiết $c > gl(M + \frac{m}{2})$, con lắc dao động nhỏ với chu kì:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2(M + \frac{m}{3})}{c - gl(M + \frac{m}{2})}} \quad (1)$$

b) Điều kiện $c > gl(M + \frac{m}{2})$, với $g_{\max} = 9,9m/s^2$ cho $c > 9,9.0,2.0,105$

hay $c > 0,2079$.

c) Đặt $a = l^2 (M + \frac{m}{3}) = 0,004132$, $b = l(M + \frac{m}{2}) = 0,021$ (đơn vị SI).

(1) $\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c-bg}}$ (2), hay $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a}{c-bg}$, với $T = 10$ s tính được $g = 9,83 m/s^2$.

d) Lấy ln hai vế của (2) $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{2} \ln(c-bg)$

Lấy đạo hàm đối với g , với T là hàm của g :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dg} = \frac{b}{2(c-bg)} \rightarrow \text{độ nhạy } \frac{dT}{dg} = \frac{bT}{2(c-bg)} \quad (3)$$

Với $b = 0,021$, $c = 0,208$ thì với $g \approx 9,8 m/s^2$ và $T \approx 10s$, ta có $\frac{dT}{dg} \approx 48$.

g tăng $0,01 m/s^2$ thì T tăng $0,48s$, dễ dàng đo được.

Chú ý: Nếu tính trực tiếp $\frac{dT}{dg}$ từ (2), không qua ln thì phức tạp. Cũng không cần thay T trong (3) bằng (2), vì ta đã biết với $g \approx g_0$ thì $T \approx 10s$.

e) Với con lắc đơn $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, làm tương tự: $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln g$.

Lấy đạo hàm đối với g $\frac{1}{T} \frac{dT}{dg} = -\frac{1}{2g} \rightarrow \frac{dT}{dg} = -\frac{T}{2g}$.

Con lắc đơn có $L = 1m$ thì $T \approx 2s$. Với $g \approx 9,8 m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0,1$; g tăng

$0,01 m/s^2$ thì T giảm $0,001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhảy hơn con lắc đơn là:

$$\theta = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l} \sin(\omega t) \quad \text{với } \omega = \sqrt{\frac{3g(M+2m)}{2l(M+3m)}}, \text{ tần số } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

và góc lệch cực đại $\theta_{\max} = \theta_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$

Bài 5.

Cách 1 (phương pháp động học, động lực học)

+) Tại vị trí cân bằng ta có:

$$T_{01} = T_{02} = \frac{mg}{2}, \quad T_{02} = k \cdot \Delta l = \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow mg - 2k \cdot \Delta l = 0$$

+) Tại li độ x (của C) lò xo dãn $(\Delta l + 2x)$.

Ta có phương trình động lực học:

$$(T_1 - T_2)R = I\gamma = I \frac{x''}{R}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}mx'' + T_2$$

$$\text{Mà } T_2 = F_d = k(\Delta l + 2x)$$

+) Phương trình động lực II Newton:

$$-(T_2 + T_1) + mg = mx''$$

$$\text{rút ra } x'' + \frac{8k}{3m}x = 0 \text{ với } \omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

$$\text{Chu kì dao động của khối tâm C là : } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$$

Cách 2: Phương pháp năng lượng

Ta có: khi C ở li độ x , lò xo dãn thêm $2x$.

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{k(2x)^2}{2} = \text{const}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{x'}{R}$$

Đạo hàm (4) theo thời gian rồi thay (5) vào ta được:

$$x''(m + \frac{I}{R^2}) + 4kx = 0$$

$$x'' + \frac{8k}{3m}x = 0 \text{ với } \omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

$$\text{Chu kì dao động của khối tâm C là : } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$$

