

Phần 1.

Chuyên đề 5: SỰ KHÚC XẠ ÁNH SÁNG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

I. SỰ KHÚC XẠ ÁNH SÁNG

1. Định nghĩa:

- Sự khúc xạ ánh sáng là hiện tượng tia sáng đổi phương khi truyền từ môi trường trong suốt này sang môi trường trong suốt khác.

2. Định luật khúc xạ ánh sáng

- Tia khúc xạ nằm trong mặt phẳng tới và ở bên kia pháp tuyến so với tia tới.

- Đối với một cặp môi trường trong suốt nhất định:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (5.1)$$

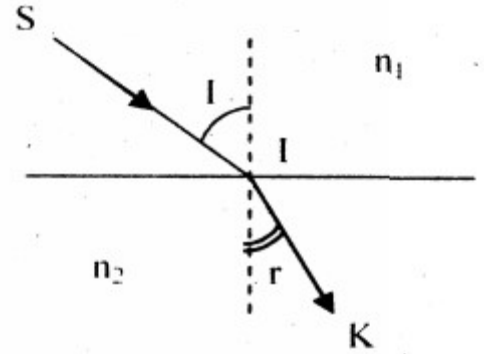
Hay $n_1 \sin i = n_2 \sin r$

+ n_1, n_2 là chiết suất tuyệt đối của môi trường 1 và 2: n_{21} là chiết suất tỉ đối của môi trường 2 đối với môi trường 1.

+ $n_2 > n_1$ ($n_{21} > 1$): môi trường 2 chiết quang hơn môi trường 1.

+ $n_2 < n_1$ ($n_{21} < 1$): môi trường 2 chiết quang kém môi trường 1.

+ $n = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$ (v là vận tốc ánh sáng trong môi trường, $c = 3.10^8$ (m/s) là vận tốc ánh sáng trong chân không).



II. SỰ PHẢN XẠ TOÀN PHẦN

1. Định nghĩa

Sự phản xạ toàn phần là hiện tượng toàn bộ tia tới bị phản xạ trở lại môi trường cũ khi gặp mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt

2. Điều kiện để có sự phản xạ toàn phần

- Môi trường tới phải chiết quang hơn môi trường khúc xạ ($n_1 > n_2$).

- Góc tới phải lớn hơn góc giới hạn phản xạ toàn phần: $i \geq i_{gh}$, với:

$$\sin i_{gh} = \frac{n_2}{n_1} (n_2 < n_1) \quad (5.2)$$

III. LƯỠNG CHẤT PHẪNG

1. Định nghĩa

Lưỡng chất phẳng là một cặp môi trường trong suốt, đồng tính, ngăn cách bởi một mặt phẳng.

2. Ảnh của vật qua lưỡng chất phẳng

- Sự tạo ảnh của vật qua lưỡng chất phẳng tuân theo định luật khúc xạ ánh sáng.
- Ảnh và vật luôn có bản chất khác nhau: vật thật - ảnh ảo; vật ảo - ảnh thật.

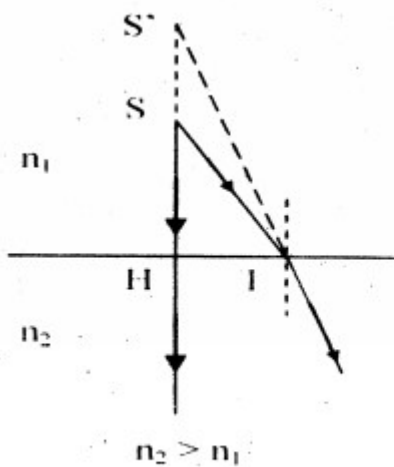
3. Công thức về lưỡng chất phẳng

Với chùm tia sáng hẹp:
$$\frac{HS}{n_1} = \frac{HS'}{n_2} \quad (5.3)$$

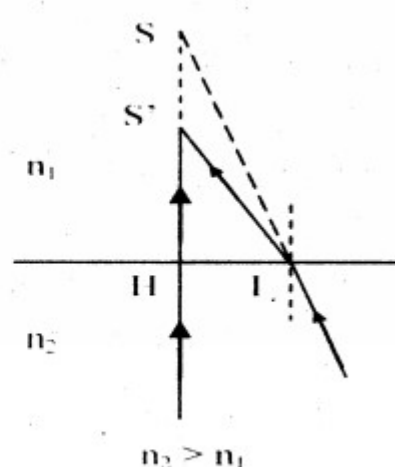
(HS là khoảng cách từ vật S đến mặt phẳng phân cách, HS' là khoảng cách từ ảnh S' đến mặt phân cách; n_1 là chiết suất môi trường tới, n_2 là chiết suất môi trường khúc xạ).

Hay
$$\frac{d_1}{n_1} + \frac{d'}{n_2} = 0 \quad (5.3')$$

(với $d = \overline{HS}$, $d' = \overline{HS'}$; $d > 0$: vật thật; $d < 0$: vật ảo; $d' > 0$: ảnh thật; $d' < 0$: ảnh ảo)



Vật thật - ảnh ảo



Vật ảo - ảnh thật

IV. BẢN MẶT SONG SONG

1. Định nghĩa

Bản mặt song song là một môi trường trong suốt, đồng tính, giới hạn bởi hai mặt song song đặt trong một (hoặc hai) môi trường có chiết suất khác nhau.

2. Đặc điểm ảnh qua bản mặt song song

- Sự tạo ảnh của vật qua bản mặt song song tuân theo định luật khúc xạ ánh sáng.
- Ảnh và vật luôn bằng nhau và có bản chất khác nhau: vật thật - ảnh ảo; vật ảo - ảnh thật.
- Ảnh bị dời đi theo chiều truyền ánh sáng so với vật ($n > 1$).

3. Công thức về bản mặt song song

Khoảng cách vật - ảnh:
$$SS' = e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (5.4)$$

(e là bề dày, n là chiết suất tỉ đối của chất làm bản với môi trường đặt bản)

$$\text{Hay } d + d' = e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (5.4')$$

(với $d = \overline{HS}$, $d' = \overline{HS'}$; $d > 0$: vật thật; $d < 0$: vật ảo; $d' > 0$: ảnh thật; $d' < 0$: ảnh ảo)

V. LĂNG KÍNH

1. Định nghĩa

Lăng kính là một khối chất trong suốt, đồng tính, hình lăng trụ đứng có tiết diện thẳng là hình tam giác:

- Hai mặt của lăng kính được dùng nên mài nhẵn gọi là hai mặt bên (AB, AC); mặt đáy (BC) không dùng đến nên có thể sần sùi hoặc bôi đen.

- Góc nhị diện A tạo bởi hai mặt bên gọi là góc chiết quang A .

- Chiết suất tỉ đối của chất làm lăng kính đối với môi trường đặt lăng kính gọi là chiết suất của lăng kính. Ta chỉ xét trường hợp $n > 1$.

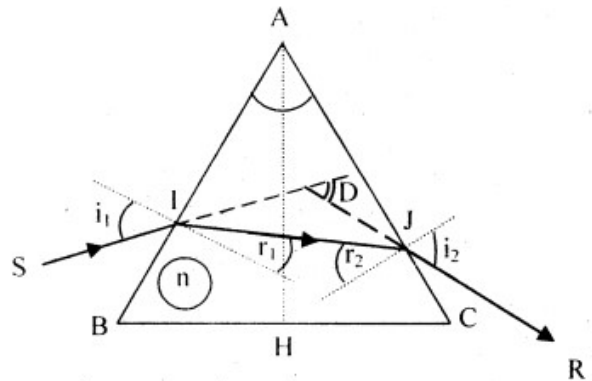
2. Đường đi của tia sáng qua lăng kính

Trường hợp $n > 1$, tia tới đi từ đáy lăng kính lên thì tia ló sẽ lệch về đáy nhiều hơn tia tới.

3. Công thức về lăng kính: Gọi D là góc lệch giữa tia ló và tia tới.

$$\text{- Tổng quát: } \begin{cases} \sin i_1 = n \cdot \sin r_1 \\ \sin i_2 = n \sin r_2 \\ A = r_1 + r_2 \\ D = i_1 + i_2 - A \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\text{- Góc nhỏ: } \begin{cases} i_1 = nr_1 \\ i_2 = nr_2 \\ A = r_1 + r_2 \\ D = (n-1)A \end{cases}$$



4. Góc lệch cực tiểu

$$\text{- Điều kiện: } i_1 = i_2 \text{ hay } r_1 = r_2 = \frac{A}{2} \quad (5.6)$$

$$\text{- Công thức: } D_{\min} = 2i - A \text{ hay } \sin \frac{A + D_{\min}}{2} = n \cdot \sin \frac{A}{2} \quad (5.7)$$

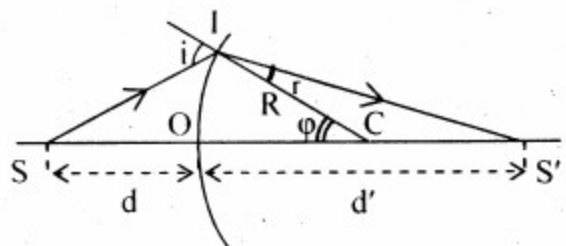
VI. LƯỠNG CHẤT CẦU

1. Định nghĩa:

Lưỡng chất cầu là một cặp môi trường trong suốt, đồng tính, ngăn cách bởi một mặt cầu.

2. Ảnh của vật qua lưỡng chất cầu

- Ảnh của một điểm sáng qua lưỡng chất cầu là một điểm sáng.



- Ảnh của một đoạn thẳng trên trục chính, vuông góc với trục chính qua lưỡng chất cầu là một đoạn thẳng đặt trên trục chính, vuông góc với trục chính.

3. Công thức về lưỡng chất cầu

- Khi thỏa điều kiện tương đương: $\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ (5.8)

($d = \overline{OS}$: vị trí của vật, $d' = \overline{OS'}$: vị trí của ảnh; $d > 0$: vật thật; $d < 0$: vật ảo; $d' > 0$: ảnh thật; $d' < 0$: ảnh ảo; R là bán kính của mặt cầu).

- Khi $R = \infty$: $\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = 0$: công thức về lưỡng chất phẳng.

VII. THẤU KÍNH

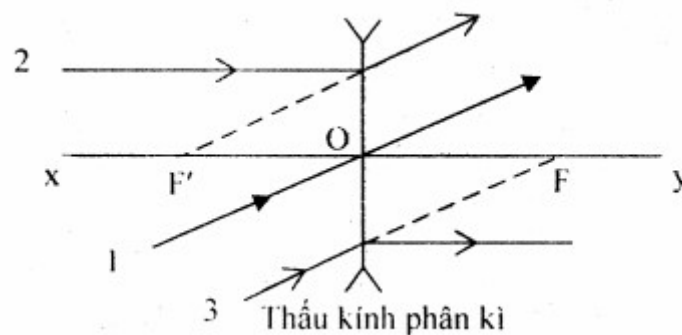
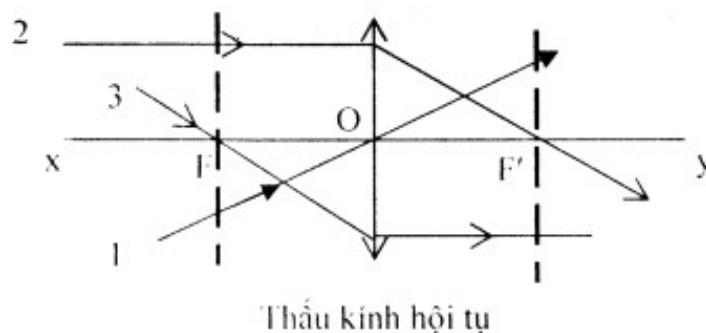
1. Định nghĩa – Phân loại

- Thấu kính là một khối chất trong suốt, đồng tính giới hạn bởi hai mặt cầu (một trong hai mặt có thể là mặt phẳng). Mỗi thấu kính có:

+ một trục chính (xy), vô số trục phụ ($x'y'$), hai tiêu diện (I, II).

+ một quang tâm O , hai tiêu điểm chính F' (ảnh) và F (vật), vô số tiêu điểm phụ F_1 .

- Có hai loại thấu kính: thấu kính hội tụ (thấu kính rìa mỏng) và thấu kính phân kì (thấu kính rìa dày).



2. Đường đi của các tia sáng qua thấu kính

- Ba tia đặc biệt:

+ Tia tới qua quang tâm O : tia ló truyền thẳng.

- + Tia tới song song với trục chính: tia ló (hoặc đường kéo dài của tia ló) qua tiêu điểm chính F' (ảnh).
- + Tia tới (hoặc đường kéo dài của tia tới) qua tiêu điểm chính F (vật): tia ló song song với trục chính.
- Mỗi tia bất kì: Tia tới bất kì: tia ló (hoặc đường kéo dài của tia ló) qua tiêu điểm chính (F_1') tương ứng.

3. Công thức thấu kính

a) Quy ước: Gọi d, d', f, D là vị trí của vật, vị trí của ảnh, tiêu cự và độ tụ của thấu kính; R_1, R_2 là bán kính các mặt cầu; k là độ phóng đại của ảnh; n là chiết suất tỉ đối của chất làm thấu kính đối với môi trường đặt thấu kính; L là khoảng cách giữa vật - ảnh, với quy ước:

- + Vật thật: $d > 0$; vật ảo: $d < 0$; ảnh thật: $d' > 0$; ảnh ảo: $d' < 0$.
- + Thấu kính hội tụ: $f > 0, D > 0$; thấu kính phân kì: $f < 0, D < 0$.
- + Mặt cầu lồi: $R > 0$, mặt cầu lõm: $R < 0$, mặt phẳng: $R = \infty$.

b) Công thức

$$\begin{cases} D = \frac{1}{r} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \\ k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} = \frac{f-d'}{f} \\ L = |d + d'| \end{cases} \quad (5.9)$$

B. NHỮNG CHÚ Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

☞ Về kiến thức và kĩ năng

1. Từ hệ thức: $n_1 v_1 = n_2 v_2$ hay $\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$ ta thấy: nguyên nhân của sự khúc xạ ánh sáng là sự thay đổi đột ngột của vận tốc truyền ánh sáng khi nó đi từ môi trường trong suốt này sang môi trường trong suốt khác.
2. Một điểm sáng chỉ cho ảnh điểm qua lưỡng chất phẳng hoặc lưỡng chất cầu khi thỏa mãn các điều kiện tương điểm:
 - + Với lưỡng chất phẳng là chùm tia tới hẹp.
 - + Với lưỡng chất cầu là góc mở 2φ của mặt cầu phải nhỏ; chùm tia tới là chùm tia hẹp và đi gần song song với trục chính.
3. Với lưỡng chất phẳng. khi ánh sáng đi từ môi trường chiết quang hơn sang môi trường chiết quang kém thì ảnh được nâng lên gần mặt phân cách hơn; khi ánh sáng đi từ môi trường chiết quang kém sang môi trường chiết quang hơn thì ảnh được nâng xa mặt phân cách hơn

4. Nếu vật có dạng một mặt phẳng rộng, song song với mặt bản thì ảnh của vật sẽ là một mặt cong vì độ nâng ảnh của các điểm khác nhau trên vật sẽ khác nhau và phụ thuộc vào phương của chùm tia sáng đi từ điểm đó vào mắt.

☞ Về phương pháp giải

1. Với dạng bài tập về **sự khúc xạ ánh sáng**. Phương pháp giải là:

- Áp dụng công thức định luật khúc xạ ánh sáng cho các trường hợp cụ thể:

+ Trường hợp tổng quát: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

+ Trường hợp góc nhỏ: $n_1 i = n_2 r$.

- Một số chú ý:

+ Trường hợp chiết suất của môi trường biến thiên khi vận dụng định luật khúc xạ ánh sáng cần:

* Chia môi trường thành nhiều lớp vô cùng mỏng theo chiều biến thiên của chiết suất.

* Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng như một định luật bảo toàn tích chiết suất và sin góc tương ứng:

$$n_1 \sin i_1 = \text{const}.$$

+ Cần kết hợp các công thức hình học, công thức lượng giác, các tính chất về góc để biến đổi, tính toán...

2. Với dạng bài tập về **sự phản xạ toàn phần**. Phương pháp giải là:

- Vận dụng các kiến thức:

+ Điều kiện để có phản xạ toàn phần: $n_1 > n_2$; $i > i_{gh}$.

+ Công thức tính góc giới hạn phản xạ toàn phần: $\sin i_{gh} = \frac{n_2}{n_1}$ (1 là môi trường tới; 2 là môi trường khúc

xạ).

+ Công thức định luật phản xạ: $i' = i$.

- Một số chú ý:

+ Khi ánh sáng đi từ môi trường chiết quang hơn sang môi trường chiết quang kém ($n_1 > n_2$):

* Nếu $i < i_{gh}$: tia sáng bị khúc xạ tại mặt phân cách hai môi trường, áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

* Nếu $i \geq i_{gh}$: tia sáng bị phản xạ toàn phần tại mặt phân cách hai môi trường, áp dụng định luật phản xạ ánh sáng: $i' = i$.

+ Cần kết hợp các công thức hình học, công thức lượng giác, các tính chất về góc để biến đổi, tính toán...

3. Với dạng bài tập về **lưỡng chất phẳng**. Phương pháp giải là:

- Sử dụng công thức: $\frac{HS}{n_1} = \frac{HS'}{n_2}$ hay $\frac{d}{n_1} + \frac{d'}{n_2} = 0$

(với $d = \overline{HS}$, $d' = \overline{HS'}$; $d > 0$: vật thật; $d < 0$: vật ảo; $d' > 0$: ảnh thật; $d' < 0$: ảnh ảo; n_1 là chiết suất môi trường tới, n_2 là chiết suất môi trường khúc xạ)

- Một số chú ý:

+ Đặc điểm ảnh của vật qua lưỡng chất phẳng: ảnh - vật luôn khác tính chất; ảnh dời đi theo phương thẳng đứng so với vật đoạn $SS' = |HS' - HS|$

+ Cần kết hợp với các công thức hình học, công thức lượng giác, các tính chất về góc để biến đổi, tính toán...

4. Với dạng bài tập về **bản mặt song song**. Phương pháp giải là:

- Sử dụng các công thức:

+ Khoảng cách vật - ảnh: $SS' = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

+ Độ dời ngang của tia sáng: $d = \frac{e \sin(i - r)}{\cos r} = e \cdot \sin i \left[1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right]$

(n là chiết suất tỉ đối của chất làm bản với môi trường đặt bản)

- Một số chú ý:

+ Đặc điểm ảnh của vật qua bản mặt song song:

* Ảnh - vật luôn khác bản chất.

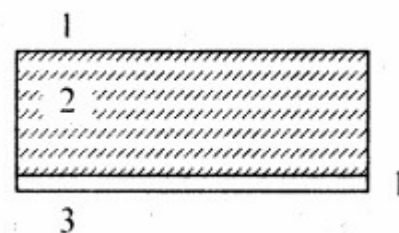
* Ảnh có độ lớn bằng vật.

* Ảnh dời theo chiều truyền ánh sáng so với vật đoạn $SS' (n > 1)$.

+ Trường hợp bản đặt tiếp giáp với hai môi trường trong suốt khác nhau ta có thể coi hệ tương đương với một trong hai trường hợp sau:

* Hệ gồm hai lưỡng chất phẳng ghép liên tiếp nhau: (LCP: 1, 2); (LCP: 2, 3).

* Hệ gồm bản song song ghép với lưỡng chất phẳng: Giữa một lớp tiếp xúc có một lớp môi trường rất mỏng có chiết suất như môi trường còn lại: (BMSS: 1, 2, 1); (LCP: 1,3).



BMSS (1, 2, 1) ghép LCP (1,3).

5. Với dạng bài tập về **lăng kính**. Phương pháp giải là:

- Sử dụng các công thức về lăng kính cho các trường hợp cụ thể:

+ Góc lớn (tổng quát):
$$\begin{cases} \sin i_1 = n \sin r_1; \sin i_2 = n \sin r_2 \\ A = r_1 + r_2 \\ D = i_1 + i_2 - A \end{cases}$$

$D_{\min} = 2i - A$ hay $\sin \frac{A + D_{\min}}{2} = n \sin \frac{A}{2}$, điều kiện: $i_1 = i_2$ hay $r_1 = r_2 = \frac{A}{2}$.

$$+ \text{ Góc nhỏ: } \begin{cases} i_1 = nr_1; i_2 = nr_2 \\ A = r_1 + r_2 \\ D = (n-1)A \end{cases}$$

- Một số chú ý:

+ Các khả năng xảy ra ở mặt bên thứ hai:

* Để có hiện tượng phản xạ toàn phần: $r_2 > i_{gh}$: dùng định luật phản xạ ánh sáng.

* Để có tia ló ra khỏi lăng kính: $r_2 \leq i_{gh}$

$$\Leftrightarrow A \leq 2\gamma_0 \text{ và } i_1 \geq i_0 \text{ với } \sin i_0 = n \cdot \sin(A - \gamma_0); \sin \gamma_0 = \frac{1}{n}$$

* Để có góc lệch cực tiểu: $i_1 = i_2$ hay $r_1 = r_2 = \frac{A}{2}$

+ n là chiết suất tỉ đối của chất làm lăng kính và môi trường đặt lăng kính.

6. Với dạng bài tập về **lưỡng chất cầu**. Phương pháp giải là:

- Sử dụng các công thức về lưỡng chất cầu: $\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$

($d = \overline{OS}$: vị trí của vật, $d' = \overline{OS'}$: vị trí của ảnh; $d > 0$: vật thật; $d < 0$: vật ảo; $d' > 0$: ảnh thật; $d' < 0$: ảnh ảo; R là bán kính của mặt cầu).

- Một số chú ý:

+ Để ảnh của một điểm sáng qua lưỡng chất cầu là một điểm sáng thì lưỡng chất cầu phải thỏa mãn điều kiện tương điểm (về góc mở, về tia sáng qua lưỡng chất cầu).

+ Lưỡng chất phẳng là trường hợp riêng của lưỡng chất cầu khi $R = \infty$

7. Với dạng bài tập về **thấu kính**. Phương pháp giải là:

7.1. *Xác định loại thấu kính, các đặc điểm của thấu kính bằng hình vẽ*

- Vẽ ảnh: Dùng hai trong ba tia đặc biệt đã biết, lưu ý rằng trong nhiều trường hợp phải dùng đến tia bất kì.

- Xác định loại thấu kính

+ Dựa vào quan hệ giữa tia tới và tia ló: Tia ló đi gần trục chính hơn tia tới: thấu kính hội tụ; tia ló đi xa trục chính hơn tia tới: thấu kính phân kì.

+ Dựa vào quan hệ giữa vật và ảnh: Vật thật cho ảnh thật: thấu kính hội tụ; vật thật cho ảnh ảo lớn hơn vật: thấu kính hội tụ, vật thật cho ảnh ảo nhỏ hơn vật: thấu kính phân kì...

- Xác định các đặc điểm của thấu kính:

+ Điểm vật, điểm ảnh và quang tâm O luôn thẳng hàng.

+ Tia tới (qua vật) song song với trục chính, tia ló có phương (qua ảnh) và qua tiêu điểm chính F' (ảnh).

+ Tia tới có phương (qua ảnh) và qua tiêu điểm chính F (vật), tia ló có phương song song với trục chính.

+ Tiêu điểm chính I (vật) và tiêu điểm chính F' (ảnh) đối xứng nhau qua quang tâm O .

7.2. Giải bài toán về thấu kính bằng công thức

- Sử dụng các công thức:

$$+ \text{Độ tụ: } D = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(n là chiết suất tỉ đối của chất làm thấu kính đối với môi trường đặt thấu kính; R_1, R_2 là bán kính các mặt cong).

$$+ \text{Công thức Đê-các: } \frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

$$+ \text{Số phóng đại: } k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} = \frac{f-d'}{f}$$

$$+ \text{Khoảng cách vật - ảnh: } L = |d + d'|$$

- Một số chú ý:

+ Khi thấu kính được giữ cố định, dời vật (Δd) thì ảnh cùng dời ($\Delta d'$) theo chiều dời của vật:

$$* \text{ Trước khi dời vật: } \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d'_1}; k_1 = -\frac{d'_1}{d_1} = \frac{f}{f-d_1} = \frac{f-d'_1}{f}$$

$$* \text{ Sau khi dời vật: } \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1 + \Delta d} + \frac{1}{d'_1 + \Delta d'};$$

$$k_2 = -\frac{d'_1 + \Delta d'}{d_1 + \Delta d} = \frac{f}{f-(d_1 + \Delta d)} = \frac{f-(d'_1 + \Delta d')}{f}$$

+ Khi vật được giữ cố định, dời thấu kính, để xác định chiều và độ dời của ảnh ta cần tính khoảng cách L giữa vật - ảnh.

+ Khi hai vật đặt hai bên một thấu kính thì hai vật sẽ cho hai ảnh qua thấu kính. Với mỗi ảnh ta dùng các công thức thấu kính để xác định các đặc điểm của ảnh (vị trí, tính chất, độ lớn, độ phóng đại...).

+ Khi một vật đặt giữa hai thấu kính, vật sẽ cho hai ảnh qua hai thấu kính. Với mỗi ảnh ta cũng dùng các công thức thấu kính để xác định các đặc điểm của ảnh...

C. CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. SỰ KHÚC XẠ ÁNH SÁNG

5.1. Ba môi trường trong suốt (1), (2), (3) có thể đặt tiếp giáp nhau. Với cùng góc tới $i = 60^\circ$:

- Nếu ánh sáng truyền từ (1) vào (2) thì góc khúc xạ là 45° .

- Nếu ánh sáng truyền từ (1) vào (3) thì góc khúc xạ là 30° .

Hỏi nếu ánh sáng truyền từ (2) vào (3) thì góc khúc xạ là bao nhiêu?

Bài giải

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng cho các trường hợp, ta có:

$$+ \text{ Nếu ánh sáng truyền từ (1) vào (2) thì } \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu ánh sáng truyền từ (1) vào (3) thì } \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{n_3}{n_1} \quad (2)$$

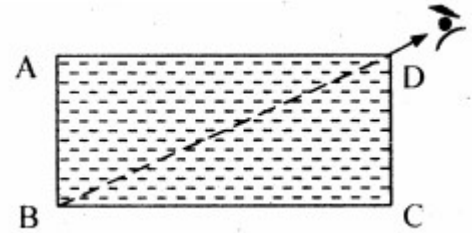
$$+ \text{ Nếu ánh sáng truyền từ (2) vào (3) thì } \frac{\sin 60^\circ}{\sin x} = \frac{n_3}{n_2} \quad (3)$$

$$\text{- Từ (1), (2) và (3) suy ra: } \frac{\sin 60^\circ}{\sin x} = \frac{\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}}{\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = 38^\circ.$$

Vậy: Nếu ánh sáng truyền từ (2) vào (3) thì góc khúc xạ là 38° .

5.2. Một chậu hình hộp chữ nhật đựng chất lỏng. Biết $AB = a$; $AD = 2a$. Mắt nhìn theo phương BD nhìn thấy được trung điểm M của BC . Tính chiết suất của chất lỏng.



Bài giải

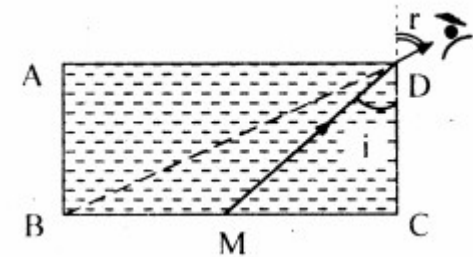
- Khi mắt nhìn theo phương BD thấy được điểm M nghĩa là tia sáng từ M qua D sẽ đến được mắt, hay tia tới theo phương MD và tia khúc xạ theo phương BD .

$$\text{- Theo định luật khúc xạ ánh sáng, ta có: } \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{\sin r}{\sin i}.$$

$$\text{Với: } \sin i = \frac{MC}{MD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin r = \sin BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = 1,27$$



Vậy: Chiết suất của chất lỏng là 1,27.

5.3. Một cái gậy dài 2m cắm thẳng đứng ở đáy hồ. Gậy nhô lên khỏi mặt nước 0,5m. Ánh sáng Mặt Trời chiếu xuống hồ theo phương hợp với pháp tuyến của mặt nước góc 60° .

Tính chiều dài bóng của cây gậy in trên đáy hồ.

Bài giải

- Theo đề, ta có: $i = 60^\circ$; $AB = 0,5\text{m}$; $BH = 2 - 0,5 = 1,5\text{ m}$.

- Theo định luật khúc xạ ánh sáng: $\frac{\sin i}{\sin r} = n$.

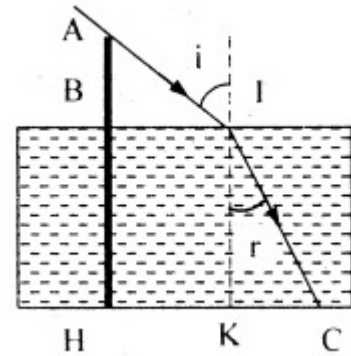
$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \tan r = 0,855.$$

- Tam giác IKC cho: $KC = IK \cdot \tan r = 1,5 \cdot 0,855 = 1,28\text{ m}$.

- Tam giác ABI cho: $BI = AB \cdot \tan i = AB \cdot \tan 60^\circ = 0,5 \cdot \sqrt{3} = 0,866\text{ m}$.

$$\Rightarrow HC = HK + KC = BI + KC = 0,866 + 1,28 = 2,15\text{ m}.$$

Vậy: Chiều dài bóng gậy in trên mặt hồ là $HC = 2,15\text{ m}$.



5.4. Hai tia sáng song song, có khoảng cách giữa chúng là R , được chiếu đến một xilanh hình trụ trong suốt chiết suất n , bán kính R . Các tia sáng đều nằm trong một mặt phẳng của tiết diện thẳng góc và đối xứng với nhau qua đường kính của tiết diện thẳng góc song song các tia sáng. Cho biết hai tia sáng giao nhau trên bề mặt hình trụ.

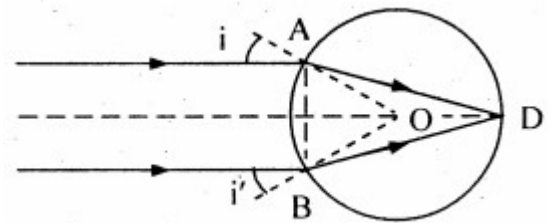
Tính n .

Bài giải

- Do tính đối xứng nên giao điểm của hai tia khúc xạ bên trong xilanh nằm trên trục đối xứng.

- Vì hai tia sáng giao nhau trên bề mặt hình trụ nên chúng chỉ khúc xạ một lần.

$$\text{Ta có: } \sin i = \frac{AB}{R} = \frac{2}{R} = \frac{1}{2}; \quad \sin i = n \sin r.$$



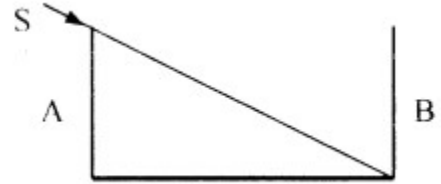
- Hai tia sáng cắt nhau trên bề mặt hình trụ nên: $r = \frac{i}{2}$ (hệ thức giữa góc trong và ngoài của tam giác cân OBD).

$$\Rightarrow \sin r = \sin \frac{i}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin i}{n} = \sin \frac{i}{2} \Leftrightarrow n = \frac{\sin i}{\sin \frac{i}{2}} = 2 \cos \frac{i}{2} \quad (\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a)$$

$$\Rightarrow n = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos i}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 i}}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,93$$

Vậy: chiết suất của chất làm khối trụ là $n = 1,93$.

5.5. Một cái máng nước sâu 20 cm, rộng 40 cm có hai thành bên thẳng đứng. Đúng lúc máng cạn nước thì bóng râm của thành A kéo dài tới đúng chân thành B đối diện. Người ta đổ nước vào máng đến một độ cao h thì bóng của thành A ngắn bớt đi 7 cm so với trước. Biết chiết suất của nước là $n = 4/3$.



Hãy tính h ; vẽ tia sáng giới hạn bóng râm của thành máng khi có nước.

Bài giải

- Trước khi đổ nước, bóng của thành A là AB ; sau khi đổ nước, bóng của thành A là AJ .

- Ta có: $\tan i = \frac{HB}{HI} \Rightarrow HB = HI \cdot \tan i = h \cdot \tan i$.

$$\tan r = \frac{HJ}{HI} \Rightarrow HJ = HI \cdot \tan r = h \cdot \tan r.$$

- Theo đề: $AB - AJ = HB - HJ = 7 \text{ cm}$

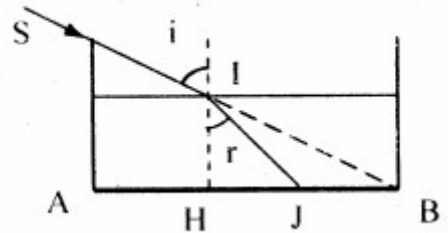
$$\Leftrightarrow h \cdot \tan i - h \cdot \tan r = h(\tan i - \tan r) = 7$$

$$\Rightarrow h = \frac{7}{\tan i - \tan r}$$

- Mặt khác: $\sin i = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 0,8$.

$$\Rightarrow \cos i = 0,6 \text{ và } \tan i = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$$

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = 0,8 \cdot \frac{3}{4} = 0,6 \Rightarrow \cos r = 0,8 \text{ và } \tan r = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{7}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = 12 \text{ cm}.$$

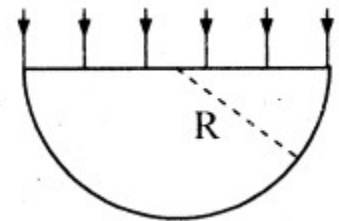


Vậy: Chiều cao của lớp nước trong máng là $h = 12 \text{ cm}$.

5.6. Cho một khối thủy tinh hình bán cầu, chiết suất $n = \sqrt{2}$. Chiếu một chùm tia sáng song song vào mặt phẳng, theo phương vuông góc với mặt đó và phủ kín mặt đó.

a) Chứng minh rằng chùm sáng ló ra khỏi mặt cầu không phải là một chùm đồng quy mà nó tạo ra một vết sáng có dạng một đoạn thẳng sáng nằm dọc theo đường kính của mặt cầu vuông góc với mặt phẳng.

b) Xác định vị trí và chiều dài của đoạn thẳng sáng nói trên. Cho bán kính của hình bán cầu là $R = 4 \text{ cm}$.



Bài giải

a) Chứng minh rằng chùm sáng ló ra khỏi mặt cầu là một vệt sáng có dạng một đoạn thẳng: Xét đường đi của tia sáng bất kì qua bán cầu và ló ra ngoài:

+ Tại I : Tia sáng truyền thẳng (góc tới bằng 0).

+ Tại J : Tia sáng có góc tới i , góc khúc xạ r .

- Để tia sáng ló ra ngoài thì: $i \leq i_{gh}$, với $\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow i_{gh} = 45^\circ$.

Gọi F là giao điểm của tia ló JK và trục của bán cầu. Trong tam giác OJF , ta có:

$$\frac{OF}{\sin r} = \frac{OJ}{\sin(r-i)} \Rightarrow OF = \frac{OJ \cdot \sin r}{\sin(r-i)}$$

Với $OJ = R$, $\sin r = n \sin i$, $\sin(r-i) = \sin r \cdot \cos i - \sin i \cdot \cos r$

$$\Rightarrow OF = \frac{nR \sin i}{n \sin i \cdot \cos i - \sin i \cdot \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}} = \frac{nR}{n \cdot \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}$$

$$\Leftrightarrow OF = \frac{nR(n\sqrt{1 - \sin^2 i} + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i})}{n^2(1 - \sin^2 i)^2 - (1 - n^2 \sin^2 i)^2} = \frac{nR}{n^2 - 1} \cdot (n\sqrt{1 - \sin^2 i} + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i})$$

- Từ hệ thức trên ta thấy:

$$\text{Khi } i = 0 \text{ thì } OF = OF_{\max} = OF_1 = \frac{nR(n+1)}{n^2 - 1} = \frac{nR}{n-1} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}-1} = R(2 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Khi } i = 45^\circ \text{ thì } OF = OF_{\min} = OF_2 = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}-1} = R\sqrt{2}.$$

Vì tính đối xứng nên các tia tới qua mặt cầu sẽ cùng hội tụ tại F (từ F_1 đến F_2), như vậy tia ló sẽ tạo ra một vệt sáng nằm dọc theo trục đối xứng của bán cầu từ F_1 đến F_2 .

b) Vị trí và chiều dài của vệt sáng

- Vị trí: Từ F_1 đến F_2 , trên trục đối xứng của bán cầu.

- Chiều dài: $F_1F_2 = |OF_2 - OF_1| = |R\sqrt{2} - R(2 + \sqrt{2})| = 2R = 2.4 = 8 \text{ cm}$.

5.7. Kẻ trên hai đường thẳng song song cách nhau khoảng $d_1 = 2,1 \text{ cm}$. Đặt một bản mặt song song trong suốt có bề dày $d_2 = 4,5 \text{ cm}$ lên tờ giấy. Nhìn qua tấm kính dưới góc $\alpha = 45^\circ$ lên một đường kẻ, ta có ảo giác nếu nối dài đường này ra ngoài bản song song thì nó trùng với đường kia. Tính chiết suất của bản.

Bài giải

Ta có: $\tan i = \frac{HM}{HI} \Rightarrow HM = HI \cdot \tan i = d_2 \cdot \tan i$

$\tan r = \frac{HR}{HI} \Rightarrow HR = HI \cdot \tan r = d_2 \cdot \tan r$

Mặt khác: $d_1 = MR = HM - HR = d_2 (\tan i - \tan r)$

$\Rightarrow \tan r = \frac{d_2 \tan i - d_1}{d_2} = \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}}$

$\Rightarrow \sin r = \frac{d_2 \tan i - d_1}{\sqrt{d_2^2 + (d_2 \tan i - d_1)^2}} \quad (1)$

- Theo định luật khúc xạ ánh sáng, ta có: $n = \frac{\sin i}{\sin r} \quad (2)$

$\Rightarrow n = \frac{\sin i \sqrt{d_2^2 + (d_2 \tan i - d_1)^2}}{d_2 \tan i - d_1} = \frac{\sin 45^\circ \sqrt{4,5^2 + (4,5 \cdot \tan 45^\circ - 2,1)^2}}{4,5 \cdot \tan 45^\circ - 2,1} = 1,5$

Vậy: Chiết suất của bản là $n = 1,5$.

5.8. Quả cầu trong suốt bán kính R có chiết suất phụ thuộc khoảng cách r từ tâm theo công thức:

$$n(r) = \frac{R+a}{r+a} \quad (a > 0)$$

Chiếu tới quả cầu tia sáng dưới góc tới i .

Hãy định khoảng cách ngắn nhất $d_{\min}$ từ tâm quả cầu tới tia sáng.

Bài giải

- Chia quả cầu thành các lớp cầu rất mỏng bằng những mặt cầu đồng tâm O , mỗi lớp cầu được giới hạn bởi hai mặt cầu có bán kính r và $r + dr$, chiết suất $n(r)$. Coi tia khúc xạ trong mỗi lớp cầu là một đoạn thẳng.

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại mặt cầu thứ j :

$$n(r_j) \sin i_j = n(r_{j+1}) \sin r_j \quad (1)$$

- Áp dụng định lý hàm sin cho tam giác OAB (AB là tia khúc xạ giới hạn bởi mặt cầu thứ j và $j+1$):

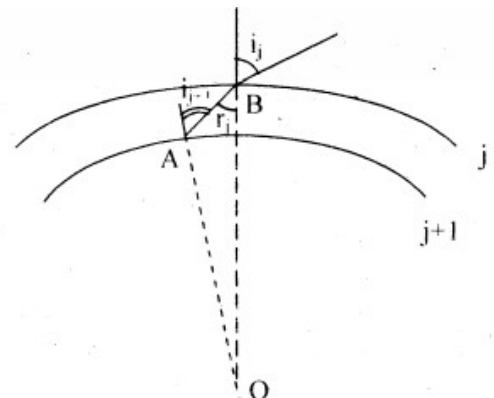
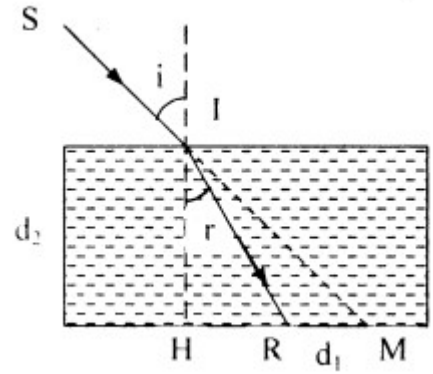
$$\frac{\sin r_{j+1}}{r_j} = \frac{\sin r_j}{r_{j+1}} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra: $n(r_j) r_j \sin i_j = n(r_{j+1}) r_{j+1} \sin i_{j+1}$

Mở rộng: $n_0 R \sin i = n(r_j) r_j \sin i_j = n(r_{j+1}) r_{j+1} \sin i_{j+1} \dots$

($i, i_1, i_2, \dots$ là góc tới tại các lớp cầu ngoài cùng, lớp cầu thứ 1, 2, ...

có bán kính $R, r_1, r_2, \dots$)



- Từ công thức $n(r) = \frac{R+a}{r+a}$, suy ra $n_0 = 1$, $n_0 < n(r_1) < n(r_2) < \dots \Rightarrow i < i_1 < i_2 < \dots$, nghĩa là tia khúc xạ uốn cong dần về phía tâm O , đến khi góc tới bằng 90° thì tia khúc xạ lại tiếp tục truyền theo hướng ngày càng xa tâm O . Do tính đối xứng nên tia khúc xạ khi ló ra khỏi quả cầu cùng với góc ló bằng i . Tại điểm mà góc tới bằng 90° thì khoảng cách từ tâm O của quả cầu đến tia khúc xạ là nhỏ nhất và bằng bán kính tại đó: $d_{\min} = r$. Lúc đó:

$$R \sin i = n(d_{\min}) d_{\min} \sin 90^\circ \Rightarrow R \sin i = \left(\frac{R+a}{d_{\min}+a} \right) d_{\min}$$

$$\Leftrightarrow R \sin i (d_{\min} + a) = (R+a) d_{\min} \Rightarrow d_{\min} = \frac{aR \sin i}{a + R(1 - \sin i)}$$

Vậy: Khoảng cách ngắn nhất $d_{\min}$ từ tâm quả cầu tới tia sáng là $d_{\min} = \frac{aR \sin i}{a + R(1 - \sin i)}$ ứng với trường hợp góc tới tại lớp cầu đó bằng 90° .

5.9. Một người thợ lặn đứng ở đáy nằm ngang của một bể bơi có lớp nước dày 3m và ở cách tường 3m (tường thẳng đứng). Mắt của người ấy ở độ cao 1,5m so với đáy bể.

a) Người ấy nhìn thấy tường ở trên mặt nước có chiều cao bằng nửa chiều cao của phần tường ở dưới nước.

Tính độ cao thực BC của tường $\left(BC' = \frac{AB}{2} \right)$.

b) Người ấy di chuyển để nhìn thấy được đỉnh C của tường theo tia làm góc 60° so với đường nằm ngang, mắt vẫn giữ ở độ cao 1,5m. Người ấy thấy tường cao bao nhiêu?

c) Người ấy cầm đèn pin (loại đèn pin thợ lặn) chiếu một chùm sáng làm với đường nằm ngang một góc 40° . Vệt sáng nằm ở đâu? Giải thích hiện tượng?

Chiết suất của nước $n = \frac{4}{3}$.

(Trích Đề thi học sinh giỏi Quốc gia, Năm học 1990 – 1991)

Bài giải

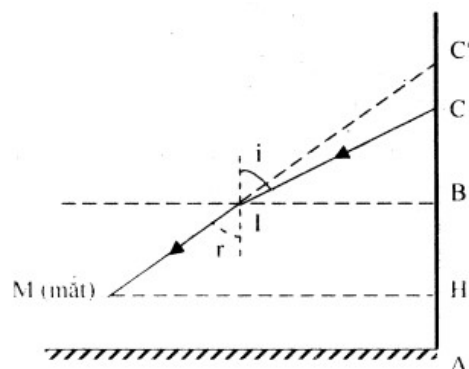
a) Độ cao thực của tường

- Hai tam giác $\triangle IBC'$ và $\triangle MHC'$ đồng dạng cho:

$$\frac{IB}{MH} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \widehat{ICB} = 45^\circ$$

- Mặt khác: $\frac{\sin i}{\sin r} = n$

$$\Leftrightarrow \sin i = n \sin r = \frac{4}{3} \sin 45^\circ$$



Hình a

2. SỰ PHẢN XẠ TOÀN PHẦN

5.10. Có ba môi trường (1), (2), (3). Với cùng một góc tới, nếu ánh sáng đi từ (1) vào (2) thì góc khúc xạ là 30° , nếu ánh sáng đi từ (1) vào (3) thì góc khúc xạ là 45° .

a) Hai môi trường (2) và (3), môi trường nào chiết quang hơn?

b) Tính góc giới hạn phản xạ toàn phần giữa (2) và (3).

Bài giải

a) Môi trường nào chiết quang hơn?

- Khi ánh sáng truyền từ môi trường (1) vào môi trường (2):

$$\frac{\sin i}{\sin 30^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

- Khi ánh sáng truyền từ môi trường (1) vào môi trường (3):

$$\frac{\sin i}{\sin 45^\circ} = \frac{n_3}{n_1} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{n_2}{n_3} \Rightarrow \frac{n_2}{n_3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

Vậy: Môi trường (2) chiết quang hơn môi trường (3).

b) Góc giới hạn phản xạ toàn phần giữa (2) và (3): Khi ánh sáng truyền từ môi trường (2) vào môi trường (3) thì:

$$\sin i_{gh} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow i_{gh} = 45^\circ$$

Vậy: Góc giới hạn phản xạ toàn phần giữa môi trường (2) và (3) là 45° .

5.11. Một thợ lặn đứng ở đáy sông nhìn lên mặt nước thì thấy ảnh của những vật ở đáy sông cách mình kể từ khoảng $R = 15 \text{ m}$.

a) Giải thích.

b) Cho biết mắt người này ở độ cao 1,5 m. Tính độ sâu của sông.

Bài giải

a) Giải thích:

Tia sáng từ vật A ở đáy sông đến mặt nước bị phản xạ toàn phần và đi vào mắt người, mắt người sẽ nhìn thấy ảnh A' của vật A .

b) Độ sâu của sông:

Theo đề thì $NA = R = 15 \text{ m}$; $MN = h = 1,5 \text{ m}$.

Ta có: $\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{3}{4} = 0,75$

$$\Rightarrow \tan i_{gh} = 1,134.$$

$$\Leftrightarrow \tan i_{gh} = \frac{BA}{BI} = \frac{DN + R}{2H} \quad (1)$$

- Hai tam giác đồng dạng DIB và DMN cho:

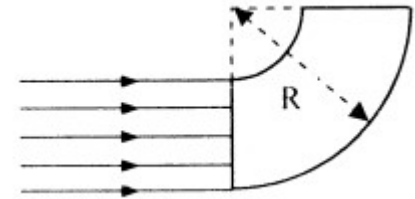
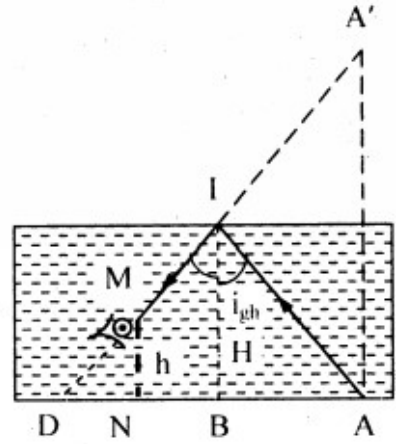
$$\frac{h}{H} = \frac{DN}{DB} = \frac{2DN}{DN + R} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra: } H = \frac{h}{2} + \frac{R}{2 \tan i} = \frac{1,5}{2} + \frac{15}{2 \cdot 1,134} = 7,36 \text{ m.}$$

Vậy: Độ sâu của sông là $H = 7,36 \text{ m}$.

5.12. Chùm tia sáng song song chiếu vuông góc tới mặt phẳng tiết diện của một đoạn ống dẫn sáng trong suốt, chiết suất n , đường kính của tiết diện tròn là l .

Định điều kiện về bán kính ngoài R của ống để chùm tia sáng vào không bị khúc xạ ra ngoài không khí qua thành bên của ống.



Bài giải

- Chùm tia sáng đến thành bên của ống giới hạn từ điểm M đến N . Từ M đến N góc tới i giảm dần:

$$i = i_{\min} = i_N.$$

$$\text{- Ta có: } \sin i_{gh} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

- Để không có tia sáng nào đến thành bên của ống bị khúc xạ ra ngoài thì: $i \geq i_{gh}$.

$$\Rightarrow i_N > i_{gh} \Leftrightarrow \sin i_N \geq \sin i_{gh} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

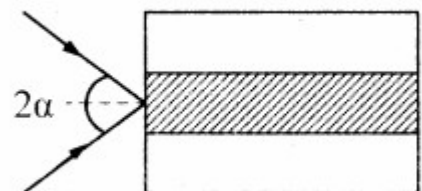
$$\text{Với: } \sin i_N = \frac{OK}{ON} = \frac{R-l}{R} \quad (3)$$

$$\text{- Từ (2) và (3): } \frac{R-l}{R} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow R \geq \frac{nl}{n-1}.$$

Vậy: Để chùm tia sáng vào không bị khúc xạ ra ngoài không khí qua thành bên của ống thì $R \geq \frac{nl}{n-1}$.

5.13. Một ống dẫn sáng hình trụ với lõi có chiết suất $n_1 = 1,5$ và phần bọc ngoài có chiết suất $n_2 = 1,41$. Chùm tia tới hội tụ tại mặt trước của ống với 2α .

Định α để tia sáng trong chùm đều truyền đi được trong ống.



Bài giải

- Xét đường đi của một tia sáng: $SIJK$. Để mọi tia sáng đều truyền đi được trong ống (phản xạ toàn phần trên mặt ngoài của lõi) thì góc tới tại J phải thỏa mãn:

$$i \geq i_{gh} \Leftrightarrow \sin i \geq \sin i_{gh} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,41}{1,5} = 0,94$$

- Vì $i + r = 90^\circ \Rightarrow \sin i = \cos r$

$$\Leftrightarrow \cos r \geq 0,94 \Rightarrow \sin r \leq 0,34.$$

- Áp dụng định luật khúc xạ tại điểm tới I :

$$\sin \alpha = n_1 \sin r \leq 1,5 \cdot 0,34 = 0,51$$

$$\Rightarrow \alpha \leq 30^\circ$$

Vậy: Để tia sáng trong chùm đều truyền đi được trong ống thì $\alpha \leq 30^\circ$.

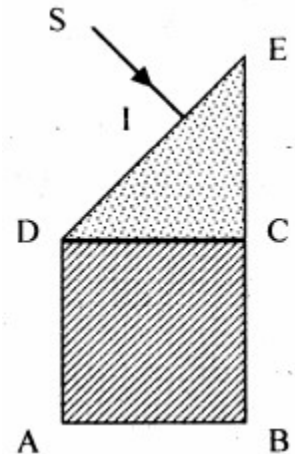
5.14. Một khối thủy tinh có tiết diện thẳng như hình vẽ, đặt trong không khí ($ABCD$: hình vuông; CDE : tam giác vuông cân). Trong mặt phẳng của tiết diện thẳng, chiếu một chùm tia sáng đơn sắc hẹp SI vuông góc với DE ($IE < ID$).

a) Chiết suất của thủy tinh là $n = 1,5$. Vẽ đường đi của tia sáng trong khối thủy tinh. Nêu rõ phương tia ló.

b) Chùm tia ló được giữ nguyên. Giả sử phần CDE có chiết suất $n_1 = 1,5$ và phần $ABCD$ có chiết suất $n_2 \neq n_1$. Hãy tính n_2 để tia khúc xạ trong thủy tinh tới mặt AD sẽ ló ra không khí:

- theo phương vuông góc với SI .

- theo phương hợp với SI góc 45° .



Bài giải

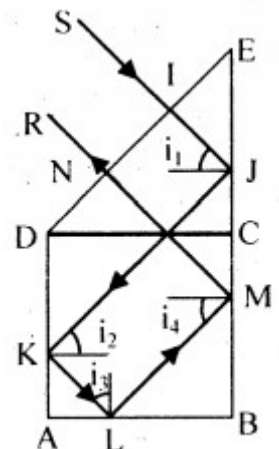
a) Đường đi của tia sáng trong khối thủy tinh

- Góc giới hạn phản xạ toàn phần:

$$\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,5} = 0,667 \Rightarrow i_{gh} = 41^\circ 48'$$

- Tia tới SI vuông góc với mặt DE sẽ truyền thẳng đến mặt EC tại J với góc tới $i_1 = 45^\circ > i_{gh}$ nên sẽ phản xạ toàn phần tại mặt EC (tia JK).

- Tia JK đến mặt bên AD cũng dưới góc tới $i_2 = 45^\circ > i_{gh}$ nên cũng phản xạ toàn phần tại mặt AD (tia KL).



- Tia KL đến mặt bên AB cũng dưới góc tới $i_3 = 45^\circ > i_{gh}$ nên cũng phản xạ toàn phần tại mặt AB (tia LM).
- Tia LM đến mặt bên BC cũng dưới góc tới $i_4 = 45^\circ > i_{gh}$ nên cũng phản xạ toàn phần tại mặt BC (tia MN).
- Tia MN đến mặt bên DE dưới góc tới bằng 0 nên ló thẳng ra ngoài theo phương song song với tia tới (tia NR).

b) Tính n_2 để tia khúc xạ trong thủy tinh tới mặt AD sẽ ló ra không khí

- Trường hợp tia ló vuông góc với tia tới: Lúc đó góc ló $i_3 = 45^\circ$.

Tại các điểm tới J, K ta có: $i_2 = i_3 = 45^\circ$ và:

$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2 \quad (1)$$

$$n_2 \sin r_3 = \sin i_3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\sin r_2}{\sin r_3} = n_1$ (3)

$$\text{Mà: } r_2 + r_3 = 90^\circ \Rightarrow r_3 = 90^\circ - r_2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{\sin r_2}{\cos r_2} = \tan r_2 = n_1$

$$\Rightarrow r_2 = \arctan n_1 = \arctan 1,5 = 56^\circ 18'$$

Và $r_3 = 90^\circ - 56^\circ 18' = 33^\circ 42'$.

+ Từ (2) suy ra:

$$n_2 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 33^\circ 42'} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0.548} = 1,29.$$

Vậy: Để tia ló vuông góc với tia tới thì $n_2 = 1,29$.

- Trường hợp tia ló hợp với tia tới góc 45° : Lúc đó góc ló $i_3 = 90^\circ$.

Tại các điểm tới J, K ta có:

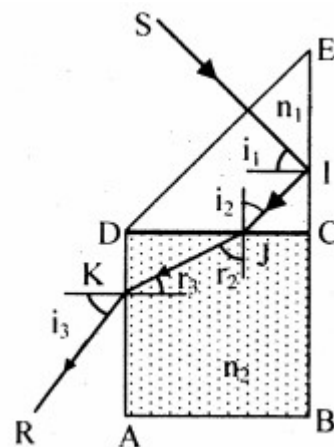
$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2 \quad (5)$$

$$n_2 \sin r_3 = \sin i_3 = 1 \quad (6)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\sin r_2}{\sin r_3} = n_1 \sin i_2 = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,06$ (7)

Tương tự: $\tan r_2 = 1,06 \Rightarrow r_2 = \arctan 1,06 = 46^\circ 41'$.

Và: $r_3 = 90^\circ - 46^\circ 41' = 43^\circ 19'$.



Từ (6) suy ra: $n_2 = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 43^\circ 19'} = \frac{1}{0,686} = 1,46$.

Vậy: Để tia ló hợp với tia tới góc 45° thì $n_2 = 1,46$.

5.15. Một khối cầu trong suốt, bán kính R làm bằng chất có chiết suất n_2 được đặt trong một môi trường trong suốt chiết quang hơn có chiết suất n_1 ($n_2 < n_1$). Một tia sáng đơn sắc SI trong môi trường n_1 tới mặt cầu. Gọi l là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến tia sáng SI .

- Tìm điều kiện mà l phải thỏa để tia sáng khúc xạ được qua khối cầu.
- Giả sử điều kiện này được thỏa, hãy tính góc lệch D của tia sáng.

Áp dụng số: $R = 2 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ cm}$, $n_1 = \sqrt{3}$, $n_2 = 1$.

Bài giải

a) Điều kiện mà l phải thỏa để tia sáng khúc xạ được qua khối cầu

- Để tia SI khúc xạ vào trong khối cầu thì: $i < i_{gh} \Leftrightarrow \sin i < \sin i_{gh} = \frac{n_2}{n_1}$

Với: $\sin i = \frac{IH}{IO} = \frac{l}{R} \Rightarrow \frac{l}{R} < \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow l < \frac{n_2}{n_1} R$

Vậy: Để tia sáng khúc xạ được qua khối cầu thì $l < \frac{n_2}{n_1} R$.

b) Góc lệch của tia sáng:

- Dễ thấy: $r_1 = r_2 = r \Rightarrow i_2 = i_1 = i$.

- Tam giác cân DIJ cho: $D = 2\widehat{DIJ} = 2(r - i)$ (liên hệ giữa góc ngoài và góc trong tam giác).

- Tam giác vuông OHI cho: $\sin \widehat{HOI} = \sin i = \frac{IH}{IO} = \frac{l}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow i = 30^\circ$.

- Theo định luật khúc xạ ánh sáng:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i = \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow r = 60^\circ.$$

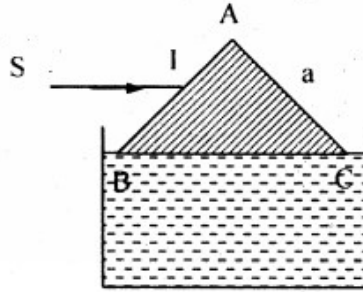
$$\text{Từ đó: } D = 2 \cdot (60^\circ - 30^\circ) = 60^\circ.$$

Vậy: Góc lệch của tia sáng là $D = 60^\circ$.

5.16. Một lăng kính có tiết diện thẳng là một tam giác vuông cân ABC ($A = 90^\circ$) được đặt sao cho mặt huyền BC tiếp xúc với mặt nước trong một cái chậu. Nước có chiết suất $1,330 = 4/3$.

- Một tia sáng (đơn sắc) SI tới mặt AB theo phương nằm ngang. Chiết suất n của chất làm lăng kính và khoảng cách AI phải thỏa mãn điều kiện gì để tia sáng phản xạ toàn phần ở mặt BC ?

b) Giả sử AI thỏa mãn điều kiện tìm được và cho biết $n = 1,414$, hãy vẽ đường đi của tia sáng qua lăng kính.



Bài giải

a) Điều kiện để tia sáng phản xạ toàn phần ở mặt BC : Để tia sáng phản xạ toàn phần ở mặt BC thì tia khúc xạ tại mặt AB phải đi đến BC .

- Điều kiện của AI

Gọi I_0 là điểm tới của tia tới để tia khúc xạ đến mặt BC tại C . Ta có:

$$+ \text{ Tại } I_0: \sin r = \frac{\sin i}{n}; \quad \cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

$$\Rightarrow \tan r = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (i = 45^\circ)$$

$$AI_0 = AC \cdot \tan r = \frac{a \cdot \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n^2 - \frac{\sqrt{2}^2}{2^2}}} = a \sqrt{\frac{2}{2n^2 - 1}}.$$

- Điều kiện của n : Xét các điểm tới I, J :

$$\text{Tại } I: \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

$$\text{Tại } J: j = 45^\circ + r.$$

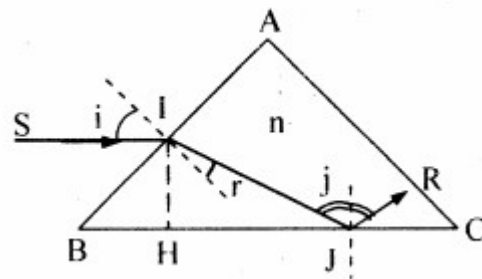
Để có phản xạ toàn phần tại J thì:

$$j > j_{gh} \text{ với } \sin j_{gh} = \frac{4}{3n}.$$

$$\Leftrightarrow \sin j = \sin(45^\circ + r) > \frac{4}{3n} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin r + \cos r) > \frac{4}{3n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2n} + \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} \right) > \frac{4}{3n} \Rightarrow n > \frac{\sqrt{17}}{3} = 1,37$$

Vậy: Điều kiện để tia sáng phản xạ toàn phần ở mặt BC là:



$$AI > a\sqrt{\frac{2}{2n^2-1}} \text{ và } n > 1,37.$$

b) Vẽ đường đi của tia sáng:

- Tại I : Vì $\sin r = \frac{\sqrt{2}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1,414} = \frac{1}{2}$

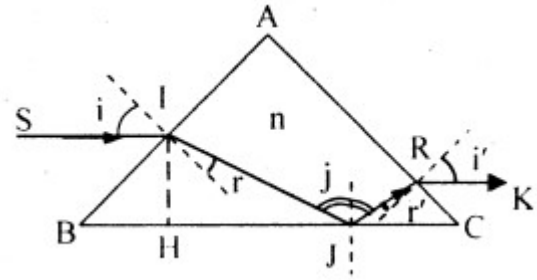
$$\Rightarrow r = 30^\circ.$$

- Tại J : $j = 45^\circ + r = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Vì $\sin j_{gh} = \frac{4}{3n} = \frac{4}{3 \cdot 1,414} = 0,943 \Rightarrow j_{gh} = 70^\circ 30' \Rightarrow j > j_{gh}$

nên có phản xạ toàn phần tại mặt BC .

- Tại R : $r' = 30^\circ \Rightarrow i' = 45^\circ$: Tia ló song song với tia tới (hình vẽ).



5.17.

a) Chứng minh rằng nếu một môi trường có chiết suất n giảm theo độ cao z thì tia sáng tạo với trục z một góc α_0 ở độ cao ứng với chiết suất n_0 sẽ bị phản xạ toàn phần ở một độ cao ứng với chiết suất n_k nào đó.

Tìm liên hệ giữa n_k, n_0 và α_0 . Quỹ đạo của tia sáng trong môi trường ấy như thế nào?

b) Ngồi ô-tô đi trên đường nhựa lúc trời nắng, có lúc ta thấy ở phía trước trên đường hình như có nước nhưng xe lại gần thì biến mất. Giải thích hiện tượng này.

c) Mắt ở độ cao 1,5m và hình như thấy có nước ở cách 300m. Giả thiết không khí có nhiệt độ tăng dần khi càng gần mặt đường và từ lm trở lên thì có nhiệt độ không đổi bằng 30°C . Biết rằng chiết suất tuyệt đối của

không khí phụ thuộc vào nhiệt độ tuyệt đối T của nó theo định luật $n = 1 + \frac{0,0795}{T}$, ước tính nhiệt độ không

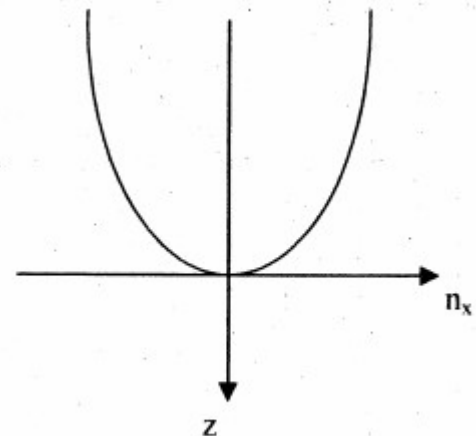
khí ở sát mặt đường (tính đến 6 chữ số lẻ).

(Trích Đề thi học sinh giỏi Quốc gia, Năm học 1989-1990)

Bài giải

a) Hệ thức giữa n_k, n_0 và α_0

- Chia môi trường thành những lớp nằm ngang mỏng, sát nhau có chiết suất hầu như không đổi trong lớp đó. Theo định luật khúc xạ ánh sáng, tia sáng mỗi khi đi qua mỗi lớp lại bị lệch đi với góc khúc xạ lớn hơn góc tới vì chiết suất giảm. Góc ló của tia sáng ra khỏi lớp này gọi là góc tới của tia sáng đối với lớp kế tiếp. Đến lúc nào đó góc tới bằng góc giới hạn sẽ có phản xạ toàn phần. Ta có:



Hình a

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_0}; \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}; \dots$$

- Tại lớp thứ K , ta có: $\frac{\sin \alpha_{K1}}{\sin \alpha_K} = \frac{n_K}{n_{K1}}$.

- Nhân các vế các đẳng thức trên với nhau, về theo vế ta được:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \dots \frac{\sin \alpha_{K1}}{\sin \alpha_K} = \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{n_2}{n_1} \dots \frac{n_K}{n_{K1}}$$

hay: $\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_K} = \frac{n_K}{n_0} \Leftrightarrow n_0 \sin \alpha_0 = n_K \cdot \sin \alpha_K$

- Tại lớp thứ K có phản xạ toàn phần nên: $\sin \alpha_K = 1 \Leftrightarrow n_K = n_0 \sin \alpha_0$.

- Quỹ đạo của tia sáng trong môi trường là đường parabol có dạng như hình a vì chiết suất giảm theo độ cao. Đỉnh của parabol là điểm phản xạ toàn phần. Do tính đối xứng, tia sáng sau khi ra khỏi môi trường thì góc ló cũng bằng α_0 .

b) Giải thích hiện tượng

- Khi trời nắng, không khí gần mặt đường bị đốt nóng, càng gần mặt đường nhiệt độ không khí càng lớn, chiết suất càng nhỏ, nghĩa là chiết suất không khí giảm theo độ cao. Ánh sáng mặt trời xuyên qua một đám mây chứa hơi nước sẽ tới mặt đường và sẽ phản xạ toàn phần tại lớp không khí sát mặt đường như câu a. Lúc này lớp không khí có xảy ra phản xạ toàn phần giống một gương phẳng cho ta ảnh ảo của đám mây. Mắt ta hứng được chùm phản xạ toàn phần sẽ thấy ảnh này nên ta sẽ thấy hình như trên đường phía trước có nước.

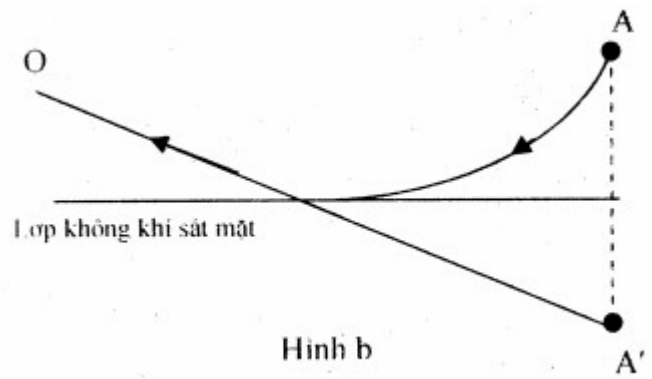
- Hiện tượng này xảy ra khi các đám mây ở xa xe ta ngồi, có như vậy góc tới mới lớn có phản xạ toàn phần. Khi đến gần nước biển mất, vì lúc này các tia phản xạ không vào mắt người quan sát. Người này có thể thấy lại hiện tượng tương tự từ một đám mây khác.

c) Ước tính nhiệt độ không khí ở sát mặt đường

Gọi α_0 là góc tới lớp không khí có chiết suất biến đổi theo nhiệt độ. Theo câu a ta thấy sau khi có phản xạ toàn phần tia ló khỏi lớp không khí có chiết suất biến đổi cùng dưới một góc α .

Tại lớp không khí có phản xạ toàn phần nên: $n = n_0 \sin \alpha_0$.

Với: $n_0 = 1 + \frac{0,0795}{273 + 30} \approx 1,000262$



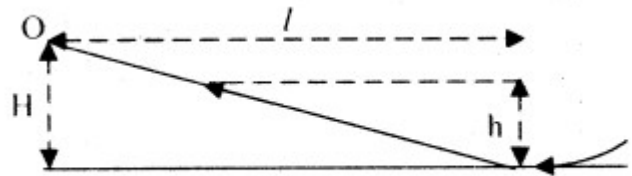
$$l = 300\text{m} \gg H = 1,5\text{m}$$

- Trên hình vẽ bên, ta có: $\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + H^2}} = \frac{300}{\sqrt{300^2 + 1,5^2}} = 0,999987$

- Mặt khác: $n = 1 + \frac{0,0795}{T}$

$$\Rightarrow T = \frac{0,0795}{n-1} = \frac{0,0795}{n_0 \sin \alpha_0 - 1}$$

$$= \frac{0,0795}{1,000262 \cdot 0,999987 - 1} \approx 319,28^\circ\text{K}$$



Hình c

Hay $t = 319,28 - 273 = 46,28^\circ\text{C}$

Vậy: Nhiệt độ không khí sát mặt đường là $t = 46,28^\circ\text{C}$.

3. LƯỢNG CHẤT PHẪNG

5.18. Mắt người quan sát và cá ở hai vị trí đối xứng nhau qua mặt thoáng và cách nhau 1,20m. Nước có chiết suất $n = 4/3$.

a) Người thấy cá cách mắt mình bao xa?

b) Cá thấy mắt người cách mắt nó bao xa?

Bài giải

Gọi M là vị trí của mắt người, M' là ảnh của mắt người do cá nhìn thấy, S là vị trí mắt của cá, S' là ảnh của cá do người nhìn thấy.

a) Người thấy cá cách mắt mình bao xa? Ảnh S' của cá được mô tả trên hình a.

- Mắt người quan sát và cá đối xứng nhau qua mặt thoáng và cách nhau 1,20m nên ta có: $HS = HM = 0,60\text{ m}$

- Áp dụng công thức về lượng chất phẳng, ta có:

$$\frac{HS}{n} = \frac{HS'}{1} \Rightarrow HS' = \frac{HS}{n}$$

$$\Rightarrow HS' = \frac{0,60}{4/3} = 0,45\text{ m}$$

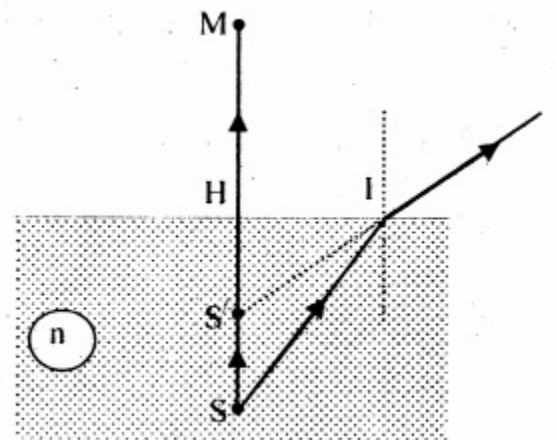
- Khoảng cách từ mắt người M đến ảnh S' của cá là:

$$MS' = MH + HS' = 0,60 + 0,45 = 1,05\text{ m}$$

Vậy: Người thấy cá cách mắt mình 1,05 m.

b) Cá thấy người cách mắt nó bao xa? Ảnh M' của người được mô tả trên hình b.

- Áp dụng công thức về lượng chất phẳng, ta có:



Hình a

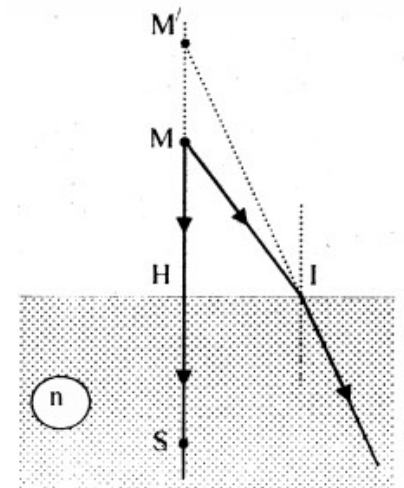
$$\frac{HM}{1} = \frac{HM'}{n} \Rightarrow HM' = n.HM$$

$$\Rightarrow HM = \frac{4}{3} \cdot 0,60 = 0,80 \text{ m}$$

- Khoảng cách từ cá S đến ảnh M' của mắt người là;

$$MS = MH + HS = 0,80 + 0,60 = 1,40 \text{ m}.$$

Vậy: Cá thấy mắt người cách nó 1,40 m.



Hình b

5.19. Vật S trong không khí và ảnh S' của nó do một thợ lặn dưới nước nhìn lên theo hướng thẳng đứng cách nhau 2 m. Cho chiết suất của nước là $4/3$. Xác định vị trí của S và S' .

Bài giải

Ảnh S' của S được mô tả trên hình vẽ.

- Áp dụng công thức về lưỡng chất phẳng, ta có:

$$\frac{HS}{1} = \frac{HS'}{n} \Rightarrow HS' = n.HS$$

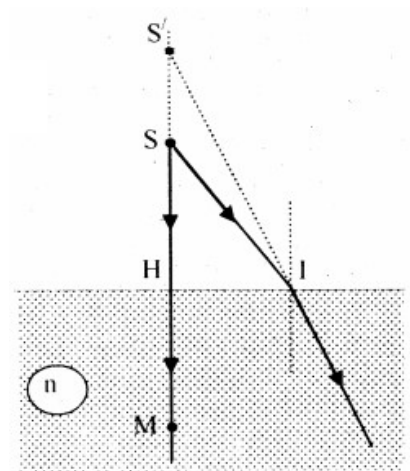
- Mặt khác, ta có:

$$SS' = HS' - HS = (n-1)HS$$

$$\Rightarrow HS = \frac{SS'}{n-1} = \frac{2}{\frac{4}{3}-1} = 6 \text{ m}$$

$$\text{Và } HS' = HS + SS' = 6 + 2 = 8 \text{ m}.$$

Vậy: Khoảng cách từ vật S và ảnh S' đến mặt thoáng của nước là 6 m và 8 m.



5.20. Một chậu hình hộp đáy phẳng, chứa chất lỏng có chiết suất $n = 1,732 = \sqrt{3}$, chiều cao $h = 4 \text{ cm}$. Một tia sáng phát ra từ điểm vật S ở đáy chậu tới I ở mặt thoáng với góc tới i .

a) Định i để tia khúc xạ và tia phản xạ vuông góc với nhau.

b) Dựng ảnh S' của S tạo bởi một chùm tia sáng hẹp qua I theo phương vuông góc. Tính khoảng cách từ S đến mặt thoáng.

c) Thay chất lỏng trên bằng một chất lỏng khác có cùng chiều cao, Đặt trên mặt thoáng một màn chắn tròn bán kính $R = 3 \text{ cm}$ có tâm nằm trên đường thẳng đứng qua S . Phải đặt mắt sát mặt thoáng mới nhìn thấy ảnh S' . Tính chiết suất của chất lỏng sau.

Bài giải

a) Định i để tia khúc xạ và tia phản xạ vuông góc với nhau

- Theo định luật phản xạ ánh sáng, ta có: $i' = i$.

- Theo định luật khúc xạ ánh sáng, ta có: $n \sin i = \sin r$ (1)

- Vì tia khúc xạ vuông góc với tia phản xạ nên ta có:

$$i' + r = 90^\circ \Rightarrow \sin r = \cos i' = \cos i$$

- Từ (1) và (2) ta có: $n \sin i = \cos i$

$$\Rightarrow \tan i = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow i = 30^\circ$$

Vậy: Để tia khúc xạ và tia phản xạ vuông góc với nhau thì $i = 30^\circ$.

b) Khoảng cách từ S' đến mặt thoáng:

Ảnh S' của S được mô tả trên hình a.

- Theo định luật khúc xạ ánh sáng, ta có:

$$\sin r = n \cdot \sin i = \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 60^\circ$$

- Mặt khác, ta có: $HS' \tan r = HS \tan i$

$$\Rightarrow HS' = \frac{HS \cdot \tan i}{\tan r} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = 1,33 \text{ cm}.$$

Vậy: Khoảng cách từ ảnh S' đến mặt thoáng là 1,33 cm.

c) Chiết suất của chất lỏng sau

- Phải đặt mắt sát mặt thoáng mới nhìn thấy ảnh S' có nghĩa là không có tia phản xạ ló ra không khí, suy ra có phản xạ toàn phần tại điểm tới I (hình b).

- Áp dụng công thức xác định góc tới giới hạn phản xạ toàn phần, ta có:

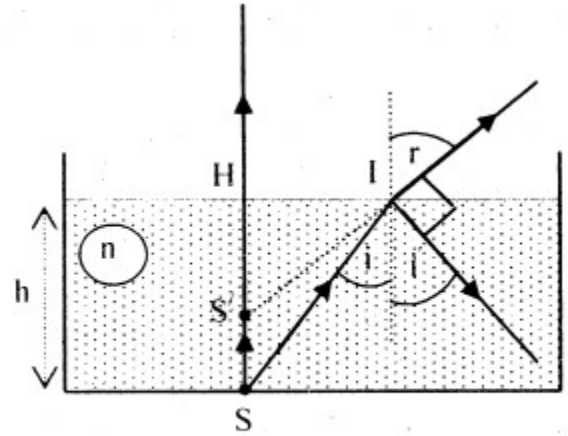
$$\sin i_{gh} = \frac{1}{n'} \quad (1)$$

- Từ hình vẽ, ta có:

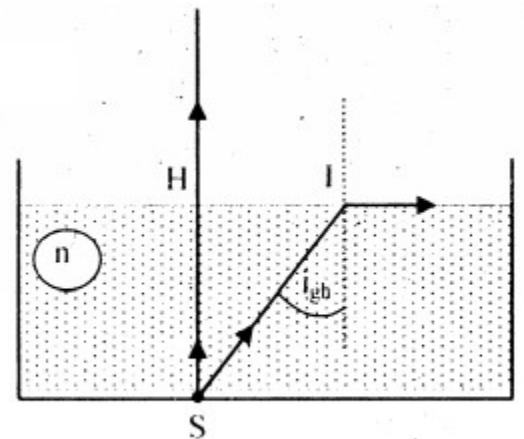
$$\sin i_{gh} = \frac{HI}{SI} = \frac{HI}{\sqrt{HI^2 + HS^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2), ta có:

$$\frac{1}{n'} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Rightarrow n' = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R}$$



Hình a



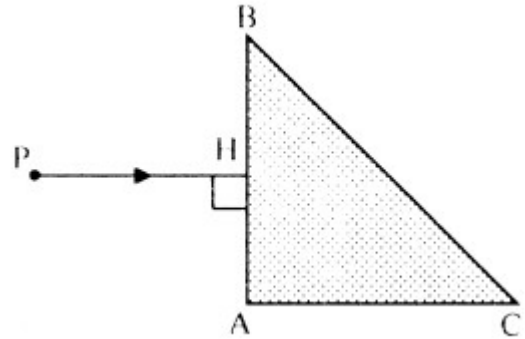
Hình b

$$\Rightarrow n' = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{3} = 1,67.$$

Vậy: Chiết suất của chất lỏng sau là $n' = 1,67$.

5.21. Một khối lăng trụ thẳng là tam giác vuông cân có hai cạnh bằng nhau là 2 cm và chiết suất 1,6. Một chùm tia sáng hẹp nằm trong mặt phẳng của một tiết diện vuông góc phát ra từ điểm P . Ở trên đường thẳng vuông góc với mặt AB và qua trung điểm H của mặt AB (hình vẽ). Cho $PH = 50$ cm.

- Xác định ảnh P_1 của P tạo bởi lưỡng chất phẳng AB .
- Chứng tỏ mọi tia sáng từ P tới mặt BC đều có $i > i_{gh}$.
Xác định ảnh P_2 của P tạo bởi mặt BC .
- Xác định ảnh sau cùng P' của P tạo bởi lăng kính.
- Thay lăng kính bằng gương phẳng đặt theo BC . Điểm sáng P có ảnh P'' qua gương này. Tính khoảng cách $P'P''$.



Bài giải

a) Ảnh P_1 của P tạo bởi lưỡng chất phẳng AB

- Áp dụng công thức về lưỡng chất phẳng tại mặt AB , ta có:

$$\frac{HP}{1} = \frac{HP_1}{n} \Rightarrow HP_1 = n \cdot HP = 1,6 \cdot 50 = 80 \text{ cm}$$

Vậy: Ảnh P_1 cách mặt AB 80cm.

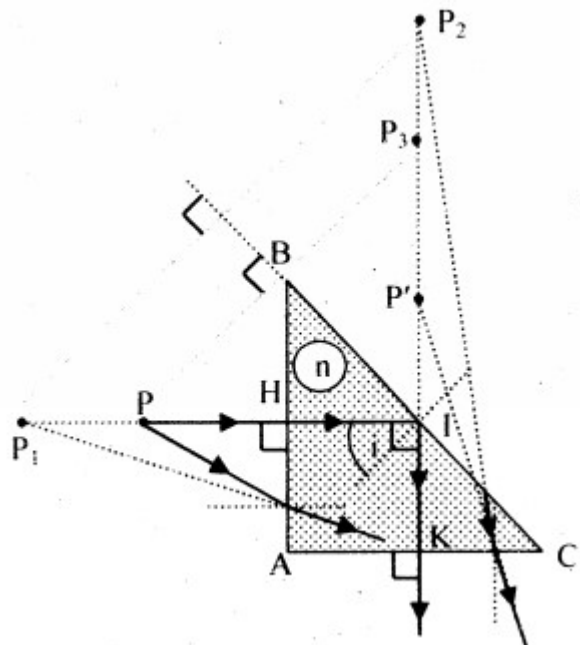
b) Chứng tỏ mọi tia sáng từ P tới mặt BC đều có $i > i_{gh}$

Ta thấy: Mọi tia sáng phát ra từ P nằm trong chùm tia tới hẹp PH vuông góc với mặt AB đều truyền thẳng qua AB , gặp mặt BC tại I với góc tới $i = B = 45^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

- Mặt khác, góc tới giới hạn khi ánh sáng truyền từ lăng kính ra không khí là:

$$\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,6} \Rightarrow i_{gh} = 38^\circ 41'$$

- Suy ra, mọi tia sáng phát ra từ P nằm trong chùm tia tới hẹp PH vuông góc với mặt AB , tới mặt BC đều có góc tới $i > i_{gh}$, tức là chùm sáng bị phản xạ toàn phần tại I trên mặt BC . Trong trường hợp này mặt BC có tác dụng như một gương phẳng.



- Vì mặt BC có tác dụng như một gương phẳng nên ảnh P_2 của P_1 qua mặt BC đối xứng với P_1 qua BC .

Ta có: $IP_2 = IP_1 = IH + HP_1 = 81 \text{ cm}$

$\Rightarrow KP_2 = KI + IP_2 = 1 + 81 = 82 \text{ cm}$

Vậy: Ảnh P_2 cách mặt AC 82cm (cách trung điểm I trên mặt BC 81 cm).

c) Ảnh cuối cùng P' của P tạo bởi lăng kính

Áp dụng công thức về lưỡng chất phẳng tại mặt AC , ta có:

$$\frac{KP_2}{n} = \frac{KP'}{1} \Rightarrow KP' = \frac{KP_2}{n} = \frac{82}{1,6} = 51,25 \text{ cm}$$

Vậy: Ảnh cuối P' cách mặt AC 51,25cm.

d) Tính khoảng cách $P'P_3$

- Khi thay lăng kính bằng gương phẳng, ảnh P_3 đối xứng với P qua gương phẳng (mặt BC):

$$IP_3 = IP = IH + HP = 51 \text{ cm}$$

- Dễ dàng chứng minh rằng P'' và P' nằm trên đường thẳng IK . Suy ra:

$$P'P_3 = KP_3 - KP' = (KI + IP_3) - KP' = (1 + 51) - 51,25 = 0,75 \text{ cm}$$

Vậy: Hai ảnh P' và P_3 cách nhau 0,75cm.

4. BẢN MẶT SONG SONG

5.22. Có một bình hộp chữ nhật thành mỏng trong suốt chứa không khí đặt trong nước (chiết suất n).

a) Vẽ đường đi của tia sáng xuyên qua hai mặt hộp đối diện ứng với góc tới bất kì.

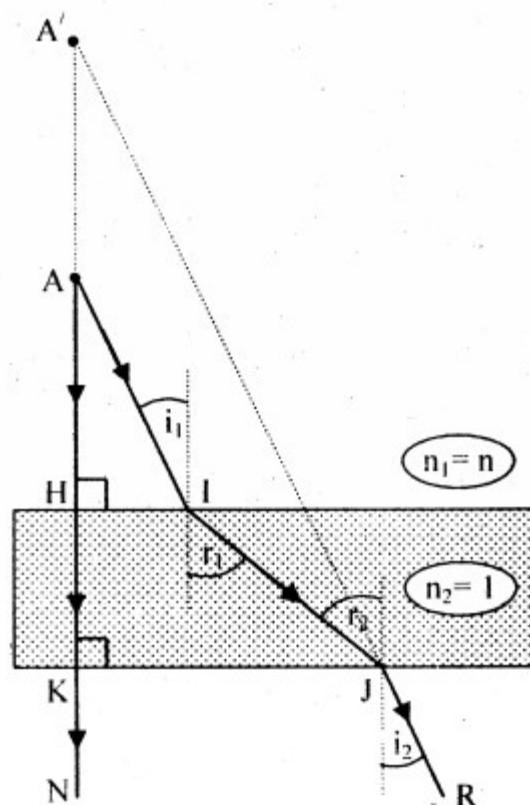
b) Vẽ ảnh tạo bởi bản song song này. Nêu nhận xét.

Bài giải

a) Đường đi của tia sáng xuyên qua hai mặt hộp đối diện

- Vì thành hộp mỏng, trong suốt nên tia sáng truyền qua thành hộp coi như truyền thẳng, tức là bề dày của thành hộp không làm dịch chuyển tia sáng truyền qua thành hộp.

- Từ điểm sáng A trong nước, vẽ tia tới AI từ nước truyền đến mặt trên của hộp với góc tới i_1 bất kì, khúc xạ truyền vào không khí với góc khúc xạ r_1 . Tia khúc xạ trong không khí IJ truyền đến mặt dưới của hộp với góc tới r_2 , khúc xạ lần hai, truyền ra nước với góc tới i_2 cho tia ló JR (hình vẽ).



Gọi n_1 là chiết suất của nước; n_2 là chiết suất của không khí.

Ta có: $n_1 = n$; $n_2 = 1$.

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng cho hai lần khúc xạ tại I và J , ta được:

$$\begin{cases} n \sin i_1 = \sin r_1 \\ n \sin i_2 = \sin r_2 \\ r_1 = r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 \\ r_1 = r_2 > i_1 = i_2 \end{cases}$$

Như vậy, tia ló JR song song với tia tới AI .

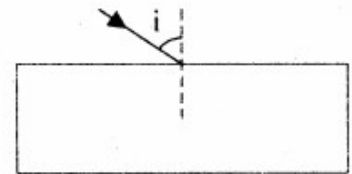
b) Ảnh tạo bởi bản song song

- Từ A , vẽ tia tới thứ hai AH vuông góc tia ló KN .

- Kéo dài hai tia ló JR và KN về phía sau cắt nhau tại A' . A' là ảnh ảo của A qua hộp.

* **Nhận xét:** Hộp có tác dụng như bản mặt song song (làm cho tia sáng dời ngang một đoạn nhưng không làm thay đổi phương truyền).

5.23. Một bản song song được làm bằng một chất trong suốt có chiết suất biến thiên đều theo bề dày từ n_1 đến n_2 . Một tia sáng tới mặt trên với góc tới i . Tia sáng rời bản với góc ló ra sao?



Bài giải

- Chia bản thành nhiều bản rất mỏng sao cho chiết suất trong mỗi bản hầu như không đổi: $n_1, n'_2, n'_3, \dots, n'_k, n_2$.

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại các mặt phân cách của các bản mỏng liên tiếp, ta có:

$$\sin i = n_1 \sin r_1 \quad (1)$$

$$n_1 \sin r_1 = n'_2 \sin r_2 \quad (2)$$

$$n'_2 \sin r_2 = n'_3 \sin r_3 \quad (3)$$

.....

$$n'_k \sin r_k = n_2 \sin r'_2 \quad (k+1)$$

$$n_2 \sin r'_2 = \sin i' \quad (k)$$

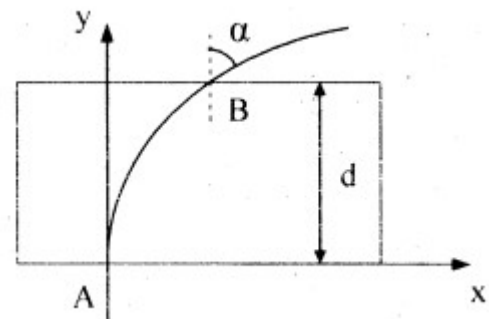
- Cộng k phương trình trên lại với nhau ta được: $\sin i = \sin i' \Rightarrow i = i'$.

Vậy: Khi tia sáng tới mặt trên với góc tới i thì tia ló rời mặt dưới với góc ló $i' = i$.

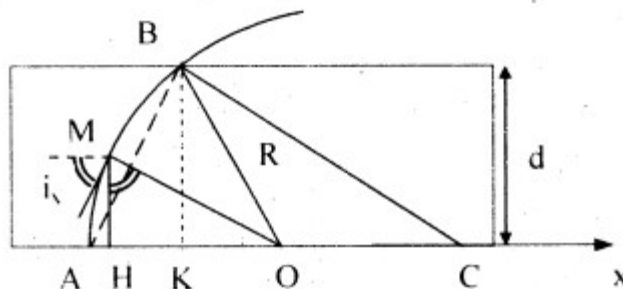
5.24. Một chùm tia sáng hẹp tới đập vuông góc với một bản hai mặt song song ở điểm $A(x=0)$. Chiết suất của bản biến đổi theo công thức:

$$n_x = \frac{n_A}{1 - \frac{x}{R}} \quad (n_A, R \text{ là những hằng số})$$

Chùm tia tới rời bản ở điểm B theo góc α . Hãy tính:



Áp dụng số: $n_A = 1,2$; $R = 13 \text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$.



- Xét tại M , ta có: $\sin i_x = 1 - \frac{x}{R}$

$$= \frac{R-x}{R} = \sin \widehat{OMH}$$

$\Rightarrow OM$ là một bán kính của cung AB và O là tâm của cung AB .

- Lấy điểm C trên Ax với $AC = 2R$. Vì $OB = R$, $AC = 2R$ nên tam giác ABC vuông tại B , do đó:

$$d^2 = BK^2 = AK.KC = x_B(2R - x_B) = 1(2.13 - 1) = 25$$

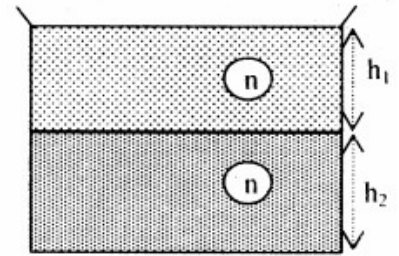
$$\Rightarrow d = 5 \text{ cm}$$

Vậy: Bề dày của bản là $d = 5 \text{ cm}$.

5.25. Một chậu chứa hai chất lỏng trong suốt, không hòa tan vào nhau (hình vẽ). Chiết suất và bề dày của các chất lỏng là:

$$n_1 = 1,3; h_1 = 3 \text{ cm}; n_2 = 1,5; h_2 = 5 \text{ cm}.$$

Xác định ảnh của đáy chậu khi nhìn theo phương vuông góc mặt thoáng.



Bài giải

* **Cách 1.** Coi hệ gồm hai lưỡng chất phẳng nối tiếp nhau

- Áp dụng công thức về lưỡng chất phẳng cho hai lần khúc xạ tại I và J (hình a), ta có:

$$+ \text{Tại } I: \frac{HA}{n_2} = \frac{HA_1}{n_1}$$

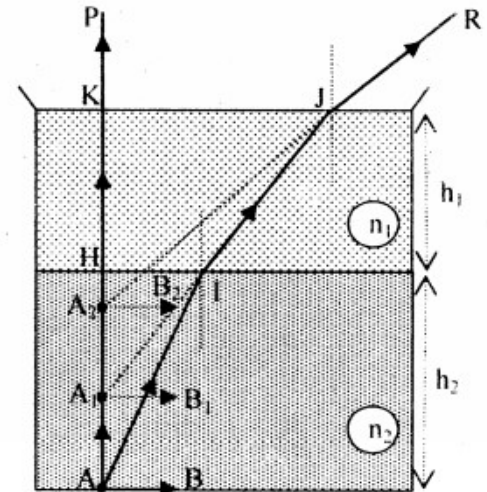
$$\Rightarrow HA_1 = \frac{n_1}{n_2} HA = \frac{n_1}{n_2} h_2$$

$$+ \text{Tại } J: \frac{KA_1}{n_1} = \frac{KA_2}{1}$$

$$\Rightarrow KA_2 = \frac{KA_1}{n_1} = \frac{KH + HA_1}{n_1}$$

$$\Rightarrow KA_2 = \frac{h_1 + \frac{n_1}{n_2} h_2}{n_1} = \frac{h_2}{n_1} + \frac{h_2}{n_2}$$

$$\Rightarrow KA_2 = \frac{3}{1,3} + \frac{5}{1,5} = 5,64 \text{ cm}.$$



Hình a

* **Cách 2:** Coi hệ gồm hai bản mặt song song nối tiếp nhau

Coi rằng sát đáy chậu và giữa hai lớp chất lỏng có một lớp không khí *rất mỏng*.

Khi đó có thể coi hệ gồm hai bản mặt song song (h_2, n_2) và (h_1, n_1) nối tiếp nhau.

- Áp dụng công thức xác định khoảng cách *vật - ảnh* qua bản mặt song song, ta có:

$$AA_1 = h_2 \left(1 - \frac{1}{n_2} \right) \text{ và } A_1A_2 = h_1 \left(1 - \frac{1}{n_1} \right)$$

$$\Rightarrow AA_2 = AA_1 + A_1A_2$$

$$= h_2 \left(1 - \frac{1}{n_2} \right) + h_1 \left(1 - \frac{1}{n_1} \right)$$

$$\Rightarrow AA_2 = (h_1 + h_2) - \left(\frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} \right)$$

Và

$$KA_2 = KA - AA_2 = \left(\frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} \right) = \frac{3}{1,3} + \frac{5}{1,5} = 5,64 \text{ cm}.$$

Vậy: Ảnh A_2B_2 của đáy chậu AB cách mặt thoáng đoạn $KA_2 = 5,64 \text{ cm}$.

5.26. Giữa hai môi trường trong suốt chiết suất n_0 và n_1 ($n_0 > n_1 > 1$) có một bản hai mặt song song bề dày e .

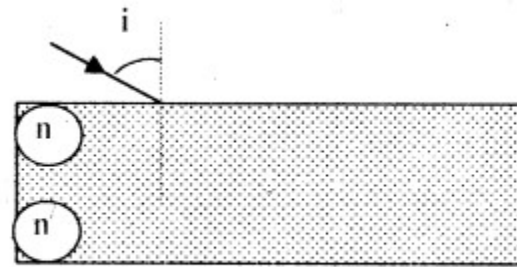
Bản mặt được đặt dọc theo trục Ox của hệ tọa độ Oxy như hình vẽ. Chiết suất của bản mặt chỉ thay đổi theo phương vuông góc với bản mặt theo quy luật $n = n_0 \sqrt{1 - ky}$, với

$$k = \frac{n_0^2 - n_1^2}{en_0^2}.$$

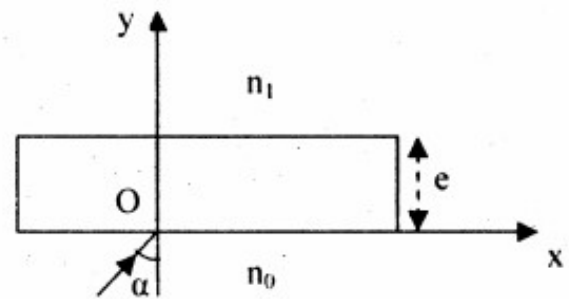
Từ môi trường chiết suất n_0 có một tia sáng đơn sắc chiếu tới điểm O trên bản mặt, theo phương hợp với Oy một góc α .

a) Lập phương trình xác định đường truyền của tia sáng trong bản mặt.

b) Xác định vị trí điểm tia sáng ló ra khỏi bản mặt.



Hình b



(Trích Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia, Năm 2006)

Bài giải

a) Phương trình xác định đường truyền của tia sáng trong bản mặt

Chia môi trường thành nhiều lớp mỏng bề dày dy bằng các mặt phẳng vuông góc với Oy . Giả sử tia sáng tới điểm $M(x, y)$ dưới góc tới i và tới điểm $M'(x + dx, y + dy)$ trên lớp tiếp theo. coi tia sáng truyền từ M đến M' theo đường thẳng (hình vẽ). Ta có:

$$n_0 \sin \alpha = \dots = n \sin i. \tan i \Rightarrow \sin i = \frac{n_0 \sin \alpha}{n}$$

$$\text{Và } \frac{dx}{dy} = \tan i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{n_0 \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow x = \int_0^y \frac{n_0 \sin \alpha dy}{\sqrt{n^2(y) - n_0^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^y \frac{\sin \alpha dy}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2(y) - \sin^2 \alpha}}$$

$$\Leftrightarrow x = \int_0^y \frac{\sin \alpha dy}{\sqrt{(1 - ky) - \sin^2 \alpha}} = \int_0^y \frac{\sin \alpha dy}{\sqrt{\cos^2 \alpha - ky}}$$

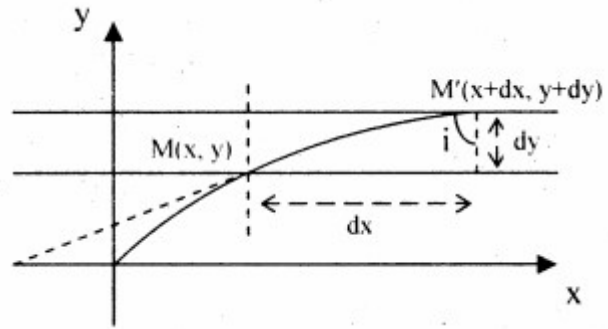
$$\left(n = n_0 \sqrt{1 - ky}, k = \frac{n_0^2 - n_1^2}{en_0^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \frac{\sin \alpha}{k} \sqrt{\cos^2 \alpha - ky} \Big|_0^y$$

$$= 2 \frac{\sin \alpha}{k} \left(\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - ky} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos^2 \alpha - ky} = \cos \alpha - \frac{kx}{2 \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{k}{4 \sin^2 \alpha} x^2 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x$$



Vậy: Phương trình xác định đường truyền của tia sáng trong bản mặt là $y = -\frac{k}{4 \sin^2 \alpha} x^2 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x$. Đường đi

của tia sáng là một parabol quay bề lõm về phía dưới (vì hệ số $a < 0$).

b) Vị trí điểm tia sáng ló ra khỏi bản mặt

- Biến đổi biểu thức của y , ta được:

$$y = -\frac{k}{4 \sin^2 \alpha} x^2 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x = -\frac{k}{4 \sin^2 \alpha} \left(x - \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{k} \right)^2 + \frac{\cos^2 \alpha}{k}$$

- Tung độ cực đại của parabol là: $y_{\max} = \frac{\cos^2 \alpha}{k} = \frac{en_0^2 \cos^2 \alpha}{(n_0^2 - n_1^2)}$

+ Nếu $\frac{\cos^2 \alpha}{k} < e$, hay $\cos^2 \alpha < \left(1 - \frac{n_1^2}{n_0^2} \right)$ thì tia sáng ló ra khỏi bản mặt tại điểm có tung độ bằng 0 (mặt

dưới bản), có hoành độ x là nghiệm khác 0 của phương trình: $y = 0$. Đó là điểm có tọa độ:

$$x_1 = \frac{2 \sin 2\alpha}{k}, y_1 = 0.$$

+ Nếu $\frac{\cos^2 \alpha}{k} > e$, hay $1 > \cos^2 \alpha > \left(1 - \frac{n_1^2}{n_0^2}\right)$ thì tia sáng ló ra khỏi bản mặt tại điểm có tung độ $y = e$, có

có hoành độ x là nghiệm khác 0 của phương trình: $y = y_2 = e$.

$$y = -\frac{kx^2}{4\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x = e \Leftrightarrow x^2 - \frac{4\sin \alpha \cos \alpha}{k} x + \frac{4e\sin^2 \alpha}{k} = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\sin 2\alpha}{k} - \frac{\sin \alpha}{k} \sqrt{\cos^2 \alpha - ke} = \frac{en_0^2 \sin 2\alpha}{(n_0^2 - n_1^2)} - \frac{en_0^2 \sin \alpha}{(n_0^2 - n_1^2)} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \alpha}.$$

(Chỉ chọn nghiệm ứng với dấu $-$, ứng với giao điểm đầu tiên của parabol và đường thẳng $y = e$).

Vậy: Tọa độ của điểm ló là:

$$x_2 = \frac{en_0^2 \sin 2\alpha}{(n_0^2 - n_1^2)} - \frac{en_0^2 \sin \alpha}{(n_0^2 - n_1^2)} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \alpha} \text{ và } y_2 = e.$$

5. LĂNG KÍNH

5.27. Một lăng kính có tiết diện vuông góc là một tam giác đều ABC . Một chùm tia sáng đơn sắc hẹp SI được chiếu tới mặt AB trong mặt phẳng của tiết diện vuông góc và theo phương vuông góc với đường cao AH của ABC . Chùm tia ló khỏi mặt AC theo phương sát với mặt này.

Tính chiết suất của lăng kính.

Bài giải

- Áp dụng các công thức về lăng kính, ta có:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \quad (1)$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2 \quad (2)$$

$$r_1 + r_2 = A \quad (3)$$

- Vì tia tới SI vuông góc với đường cao AH nên ta có:

$$i_1 = \frac{A}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).}$$

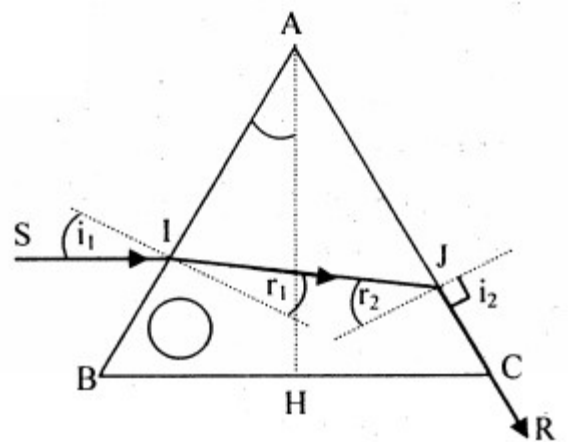
- Tia ló JR theo phương sát với mặt AC nên $i_2 = 90^\circ$.

$$\text{- Từ (1) ta có: } \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{n} = \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \cos r_1 = \sqrt{1 - (\sin r_1)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2n} \sqrt{4n^2 - 1}$$

$$\text{- Từ (2) ta có: } \sin r_2 = \frac{\sin i_2}{n} = \frac{\sin 90^\circ}{n} = \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\text{- Từ (3) ta có: } r_2 = A - r_1$$



$$\Rightarrow \sin r_2 = \sin(A - r_1) = \sin A \cos r_1 - \cos A \sin r_1 = \sin 60^\circ \cos r_1 - \cos 60^\circ \sin r_1$$

$$\Rightarrow \sin r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2n} \sqrt{4n^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n} [\sqrt{3(4n^2 - 1)} - 1] \quad (5)$$

- Từ (4) và (5), ta có: $\frac{1}{4n} [\sqrt{3(4n^2 - 1)} - 1] = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{3(4n^2 - 1)} - 1 = 4 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{7}{3}} = 1,53.$$

Vậy: Chiết suất của lăng kính là $n = 1,53$.

5.28. Lăng kính thủy tinh có $n = 1,5$ góc $A = 60^\circ$. Chiếu một chùm tia sáng hẹp đơn sắc tới lăng kính trong mặt phẳng của tiết diện vuông góc.

a) Tính i_1 để tia ló và tia tới đối xứng nhau qua mặt phẳng phân giác của A .

b) Tính góc lệch.

Bài giải

a) Tính i_1 để tia ló và tia tới đối xứng nhau qua mặt phẳng phân giác của A

- Khi tia ló và tia tới đối xứng nhau qua mặt phẳng phân giác của A thì:

$$r_1 = r_2 = \frac{A}{2} = 30^\circ$$

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại I (hình vẽ), ta có:

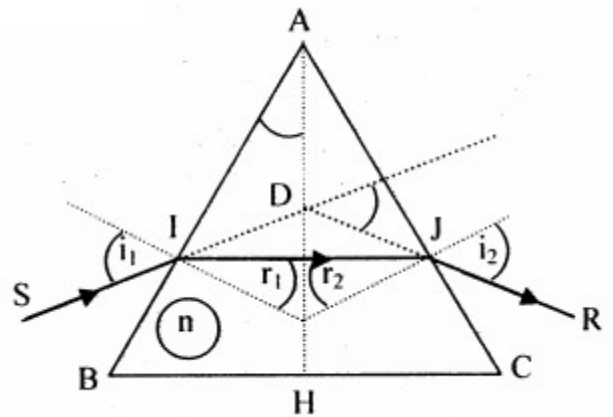
$$\sin i_1 = n \sin r_1 = 1,5 \cdot \sin 30^\circ = 0,75 \Rightarrow i_1 = 48,59^\circ = 48^\circ 35'.$$

Vậy: Để tia ló và tia tới đối xứng nhau qua mặt phẳng phân giác của A thì $i_1 = 48^\circ 35'$.

b) Góc lệch D

$$\text{Ta có: } D = i_1 + i_2 - A = 2i_1 - A = 2 \cdot 48^\circ 35' - 60^\circ = 37^\circ 10'.$$

Vậy: Góc lệch giữa tia ló và tia tới là $D = 37^\circ 10'$.



5.29. Một lăng kính thủy tinh chiết suất $n = 1,41 = \sqrt{2}$, góc chiết quang $A = 60^\circ$. Tia sáng SI từ đáy truyền lên tới mặt lăng kính ở I với góc tới i .

a) Xác định giá trị của i :

- ứng với góc lệch cực tiểu.

- để không có tia ló.

b) Nếu $A = 90^\circ$ thì có kết quả gì?

(Cho: $\sqrt{2} \sin 15^\circ = \sin 21^\circ 28'$)

Bài giải

a) Giá trị của góc tới i

* Khi góc lệch cực tiểu

Khi góc lệch có giá trị cực tiểu thì tia sáng đối xứng qua mặt phẳng phân giác AH của góc chiết quang A (hình vẽ).

$$\text{Ta có: } r_1 = r_2 = \frac{A}{2} = 30^\circ$$

$$\text{Và } \sin i_1 = n \sin r_1 = \sqrt{2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow i_1 = 45^\circ.$$

* Khi không có tia ló:

$$\text{Ta có: } \sin i_1 - n \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n}$$

$$\Rightarrow r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

$$\text{Và } r_2 = A - r_1 = A - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

$$\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow i_{gh} = 45^\circ$$

- Để không có tia ló thì phải có phản xạ toàn phần tại J trên mặt AC , suy ra:

$$r_2 > i_{gh} \Leftrightarrow A - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) > i_{gh}$$

$$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) < A - i_{gh} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin i_1}{n} < \sin 15^\circ \Rightarrow \sin i_1 < n \sin 15^\circ = \sqrt{2} \sin 15^\circ = \sin 21^\circ 28' \Rightarrow i_1 < 21^\circ 28'.$$

Vậy: Giá trị của góc tới i ứng với góc lệch cực tiểu là $i_1 = 45^\circ$ và để không có tia ló là $i_1 < 21^\circ 28'$.

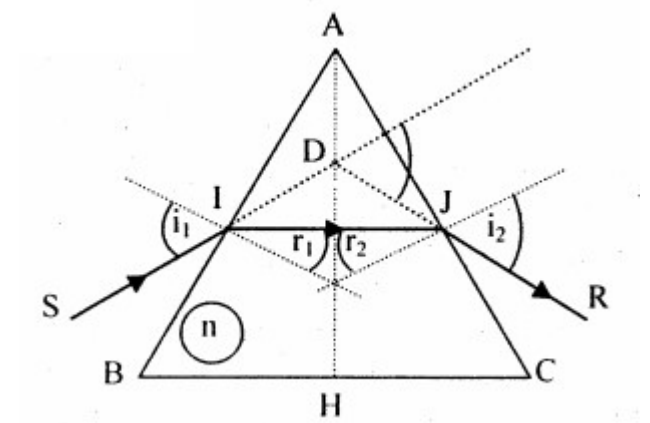
b) Trường hợp $A = 90^\circ$

* Khi góc lệch cực tiểu:

$$\text{Ta có: } r_1 = r_2 = \frac{A}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow \sin i_1 = n \sin r_1 = \sqrt{2} \sin 45^\circ = 1 \Rightarrow i_1 = 90^\circ$$

Trường hợp này tia tới SI đi sát (lướt) trên mặt AB .

* Khi không có tia ló



Tương tự, để không có tia ló thì phải có phản xạ toàn phần tại J trên mặt AC , suy ra:

$$r_2 > i_{gh} \Rightarrow A - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) > i_{gh}$$

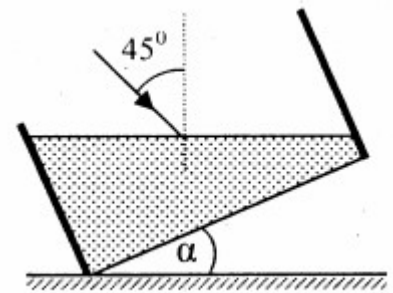
$$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) < A - i_{gh} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin i_1}{n} < \sin 45^\circ \Rightarrow \sin i_1 < n \sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin 45^\circ = 1 \Rightarrow i_1 < 90^\circ.$$

Như vậy, chỉ có một trường hợp duy nhất có tia ló khi $i_1 = 90^\circ$. Khi đó tia tới đi sát mặt AB cho tia ló đi sát mặt AC .

5.30. Chậu chứa chất lỏng chiết suất $n=1,5$. Tia tới chiếu đến mặt thoáng với góc tới 45° .

- Tính góc lệch khi ánh sáng khúc xạ vào chất lỏng.
- Đáy chậu nằm ngang. Chất lỏng có bề dày $e = 20$ cm. Tính khoảng cách giữa tia tới và tia ló ra khỏi đáy chậu.
- Tia tới cố định. Nghiêng đáy chậu góc α (hình vẽ). Tính α để có góc lệch giữa tia tới và tia ló có giá trị như ở câu a.



Bài giải

a) Góc lệch khi ánh sáng khúc xạ vào chất lỏng

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng (hình a), ta có:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1,5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow r_1 = 28^\circ 08'.$$

- Góc lệch khi ánh sáng khúc xạ vào chất lỏng:

$$D = i_1 - r_1 = 45^\circ - 28^\circ 08' = 16^\circ 52'.$$

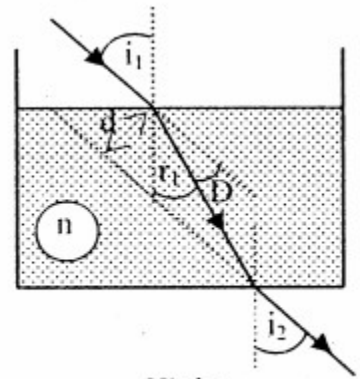
b) Khoảng cách giữa tia tới và tia ló ra khỏi đáy chậu khi đáy chậu nằm ngang:

- Bỏ qua bề dày của đáy chậu so với bề dày của khối chất lỏng, ta coi khối chất lỏng như một bản mặt song song (hình a).

- Độ dời ngang của tia sáng (khoảng cách giữa tia tới và tia ló) là:

$$d = e \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right) = 20 \sin 45^\circ \left(1 - \frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{1,5^2 - \sin^2 45^\circ}} \right) = 6,58 \text{ cm}$$

c) Góc phải nghiêng đáy chậu



Hình a

- Bỏ qua bề dày của đáy chậu so với bề dày của khối chất lỏng, ta coi khối chất lỏng như một lăng kính có góc chiết quang $A = \alpha$ (hình b).

- Áp dụng các công thức về lăng kính, ta có: $\sin i_1 = n \sin r_1$

$$\Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1,5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow r_1 = 28^\circ 08'$$

$$\text{Và } r_2 = A - r_1 = \alpha - r_1 = \alpha - 28^\circ 08'$$

- Góc lệch: $D = i_1 + i_2 - A = i_1 + i_2 - \alpha$

$$\Rightarrow i_2 = D + \alpha - i_1 = 16^\circ 52' + \alpha - 45^\circ = \alpha - 28^\circ 08' = r_2$$

- Mặt khác, ta có: $\sin i_2 = n \sin r_2$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha - 28^\circ 08') = 1,5 \sin(\alpha - 28^\circ 08')$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - 28^\circ 08') = 0 \Rightarrow \alpha = 28^\circ 08'.$$

Vậy: Để góc lệch giữa tia tới và tia ló như ở câu a thì $\alpha = 28^\circ 08'$.

5.31. Một lăng kính có tiết diện vuông góc là tam giác vuông ABC (vuông góc ở B , $\widehat{A} < \widehat{C}$).

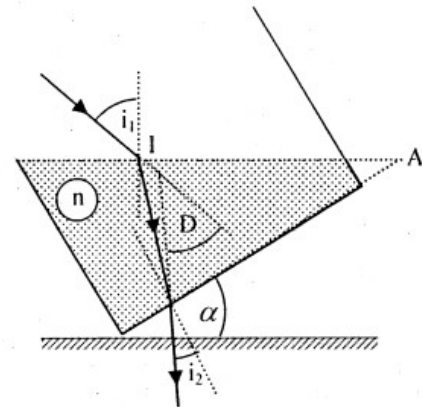
a) Tia tới SI được chiếu tới mặt AB với góc tới i_1 trong điều kiện góc lệch cực tiểu (hình a). Quay lăng kính quanh pháp tuyến IN của mặt AB góc 180° , tia tới được giữ nguyên. Lúc đó có phản xạ toàn phần trên mặt AC và phương của tia ló $I'B'$ vuông góc với tia tới SI . Tính $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$.

b) Chiếu tia tới SI đến mặt BC với góc tới 60° . Phản xạ toàn phần xảy ra trên mặt AB và góc ló trên mặt AC là 60° (hình b). Tính chiết suất n của lăng kính. Tính góc tới i_1 và góc lệch cực tiểu $D_{\min}$ trong vị trí đầu tiên của lăng kính ở câu a.

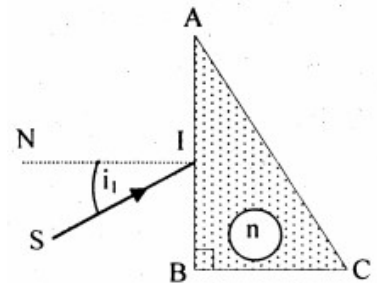
c) Tia SI được chiếu tới mặt AB với góc tới 60° (SI ở trong góc $\widehat{A'IN}$). Xác định đường đi của tia sáng qua lăng kính. Tính góc hợp bởi tia ló và tia tới. Làm lại câu c nếu:

* $SI \perp AB$

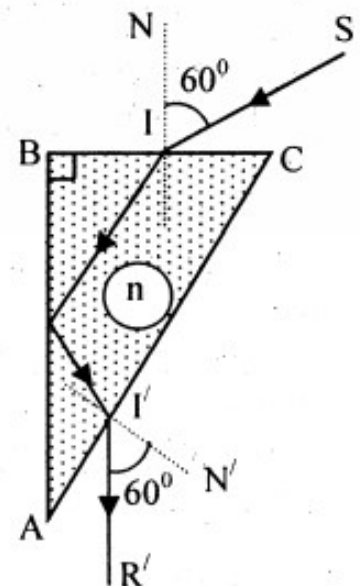
* SI có góc tới 60° nhưng ở trong góc $\widehat{BIN}$.



Hình b



Hình a



Hình b

Bài giải

a) Tính các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$

- Tia tới SI được chiếu tới mặt AB trong điều kiện góc lệch cực tiểu, suy ra góc khúc xạ tại mặt AB là:

$$r_1 = \frac{\widehat{A}}{2} \quad (1)$$

- Khi quay lăng kính quanh pháp tuyến IN của mặt AB góc 180° và tia tới được giữ nguyên thì góc tới i_1 và góc khúc xạ r_1 không thay đổi.

- Xét tam giác AIJ , ta có: $J_1 = 90^\circ - \widehat{A} - r_1$

- Do có phản xạ toàn phần tại J trên mặt AC nên:

$$J_4 = J_1 = 90^\circ - \widehat{A} - r_1$$

- Xét tam giác $I'JC$, ta có:

$$\widehat{I}'_1 = 180^\circ - \widehat{C} - \widehat{J}_4 \Rightarrow \widehat{I}'_2 = 90^\circ - \widehat{C} + \widehat{A} + r_1$$

- Góc tới tại I' là:

$$\widehat{I}'_2 = 90^\circ - \widehat{I}'_1 = \widehat{C} - \widehat{A} - r_1 \quad (2)$$

- Tia ló $I'B'$ vuông góc với tia tới SI nên $i_1 = i_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra:

$$I'_2 = r_1 \quad (3)$$

- Từ (2) và (3) ta có: $\widehat{C} - \widehat{A} - r_1 = r_1$

$$\Rightarrow \widehat{C} - \widehat{A} = 2r_1 \quad (4)$$

- Từ (1) và (4) ta có: $\widehat{C} = 2\widehat{A}$ (5)

- Mặt khác, ta lại có: $\widehat{C} + \widehat{A} = 90^\circ$ (6)

- Từ (5) và (6), suy ra: $\widehat{A} = 30^\circ$ và $\widehat{C} = 60^\circ$.

b) Tính chiết suất n của lăng kính và góc tới i_1 , góc lệch cực tiểu $D_{\min}$

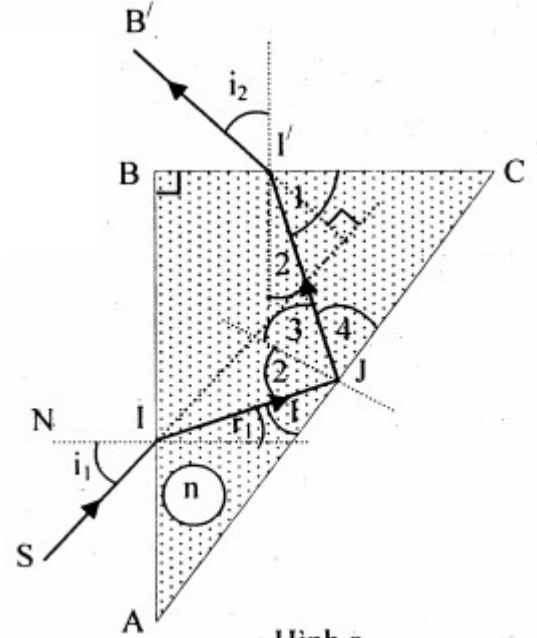
* Chiết suất n của lăng kính

- Vì $i_1 = i_2 = 60^\circ$ nên: $r_1 = \widehat{I}'_1$

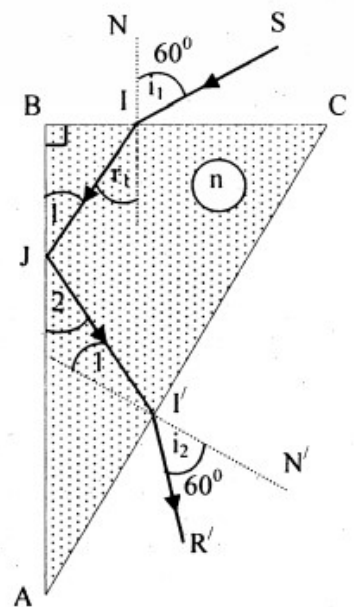
- Do có phản xạ toàn phần tại J trên mặt AB nên ta có:

$$r_1 = \widehat{J}_1 = \widehat{J}_2 \Rightarrow \widehat{J}_2 = \widehat{I}'_1$$

- Xét tam giác JII' , ta có:



Hình a



Hình b

$$\widehat{I'_1} = 90^\circ - \widehat{A} - \widehat{J_2} = 90^\circ - 30^\circ - \widehat{I'_1} = 60^\circ - \widehat{I'_1}$$

$$\Rightarrow r_1 = \widehat{I'_1} = 30^\circ$$

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại I , ta được: $\sin i_1 = n \sin r_1$

$$\Rightarrow n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3} = 1,732$$

* Góc tới i_1 và góc lệch cực tiểu $D_{\min}$

- Từ câu a, ta có: $\sin i_1 = n \sin r_1$

$$\text{Với: } n = \sqrt{3} \text{ và } r_1 = \frac{\widehat{A}}{2} = 15^\circ \Rightarrow \sin i_1 = \sqrt{3} \cdot \sin 15^\circ = 0,4483 \Rightarrow i_1 = 26^\circ 38'$$

- Góc lệch cực tiểu: $D_{\min} = 2i_1 - \widehat{A} = 2 \cdot 26^\circ 38' - 30^\circ = 23^\circ 16'$

c) Đường đi của tia sáng qua lăng kính và góc hợp bởi tia ló và tia tới

* Góc tới $i_1 = 60^\circ$

- Khi góc tới $i_1 = 60^\circ = \widehat{C} \Rightarrow SI \parallel AC$.

- Áp dụng định luật khúc xạ tại I , ta có:

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 60^\circ$$

Suy ra tia khúc xạ tại I đi qua C (góc $\widehat{BCI} = 30^\circ$).

$$\text{Mặt khác: } \sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow i_{gh} = 35^\circ 15'$$

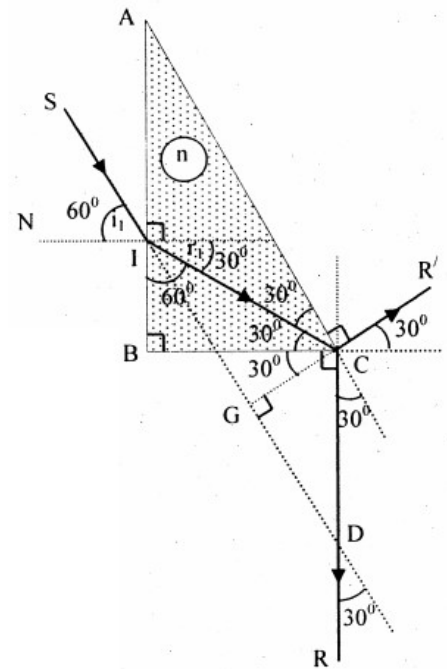
- Tại C , tia sáng tách thành hai tia:

Tia thứ nhất coi như tới mặt AC với góc tới 60° lớn hơn i_{gh} nên xảy ra phản xạ toàn phần (với góc phản xạ bằng 60°) cho tia ló CR vuông góc với BC , tức là nghiêng với AC góc 30° .

Tia thứ hai coi như tới mặt BC với góc tới 60° lớn hơn i_{gh} nên xảy ra phản xạ toàn phần (với góc phản xạ bằng 60°) cho tia ló CR' vuông góc với AC , tức là nghiêng với BC góc 30° .

Góc hợp bởi tia ló và tia tới là $\widehat{G} = 90^\circ$ (ứng với tia ló CR') và $\widehat{D} = 30^\circ$ (ứng với tia ló CR).

* $SI \perp AB$ (hình d)



Hình c

Tia tới SI vuông góc với AB truyền thẳng, gặp mặt AC tại J với góc tới $\widehat{J_1} = \widehat{A} = 30^\circ < i_{gh}$ nên có khúc xạ tại J với góc khúc xạ $\widehat{J_2}$, cho tia ló JR .

$$\text{Ta có: } \sin J_2 = n \sin J_1 = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{J_2} = 60^\circ$$

Vậy: Góc lệch giữa tia ló và tia tới là $\widehat{J_3} = 30^\circ$.

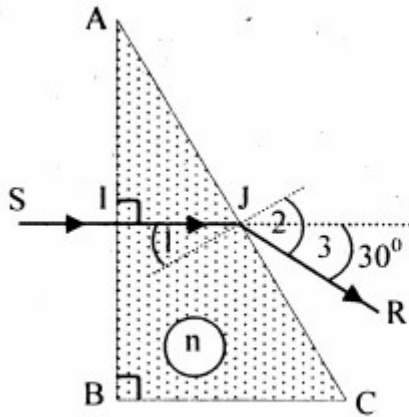
* SI có góc tới 60° nhưng ở trong góc $\widehat{BIN}$ (hình e)

Theo định luật khúc xạ ánh sáng (tại I), ta có: $\sin i = n \sin r$

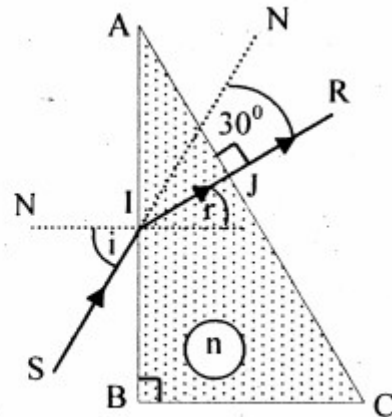
$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 30^\circ$$

Suy ra tia khúc xạ IJ vuông góc với AC , truyền thẳng ra không khí cho tia ló JR .

Vậy: Góc hợp bởi tia ló và tia tới là $\widehat{JIN} = 30^\circ$.



Hình d



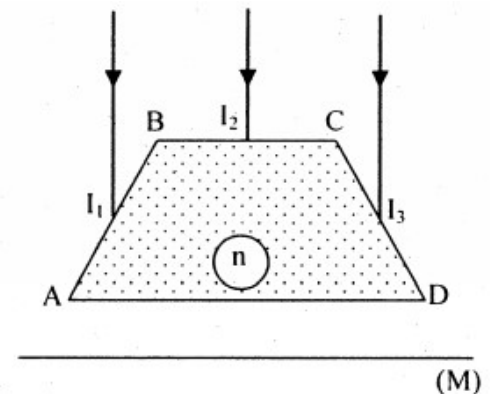
Hình e

5.32. Một lăng kính thủy tinh có tiết diện thẳng là một hình thang cân $ABCD$ có góc ở đáy $\widehat{A} = 60^\circ$, ba cạnh AB, BC, CD cùng bằng $a = 4 \text{ cm}$. Cho ba chùm tia sáng đơn sắc song song, hẹp, rọi vào trung điểm I_1, I_2, I_3 của ba mặt AB, BC, CD theo phương vuông góc với đáy nhỏ BC (hình vẽ).

Chiết suất của thủy tinh đối với ánh sáng này là $n = 1,732 = \sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách giữa ba vệt sáng do ba chùm tia trên tạo ra trên một màn (M) đặt song song với mặt AD , cách mặt đó một khoảng $d = 20 \text{ cm}$.

b) Vị trí ba vệt sáng đó thay đổi thế nào khi xoay lăng kính một góc nhỏ quanh một trục qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$.



Bài giải

a) Khoảng cách giữa ba vệt sáng trên màn (M) (hình a):

- Tia sáng S_2I_2 vuông góc với BC , truyền thẳng tạo nên vệt sáng I'_2 trên màn (M).

- Tia sáng S_1I_1 chiếu tới AB với góc tới $i_1 = A = 60^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), cho tia khúc xạ I_1J với góc khúc xạ r_1 .

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại I_1 , ta có:

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_1 = 30^\circ$$

- Mặt khác: $\sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow i_{gh} = 35^\circ 15'$

- Tam giác AI_1J là tam giác đều (vì góc $\widehat{AI_1J} = \widehat{A} = 60^\circ$) $\Rightarrow \widehat{J_1} = 60^\circ$ và $\widehat{J_2} = 30^\circ$.

Vì góc tới tại J là $\widehat{J_2} = 30^\circ < i_{gh}$ nên có khúc xạ tại J cho tia ló ra khỏi lăng kính JI'_1 với góc khúc xạ J_3 tạo nên vệt sáng I'_1 trên màn (M).

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại J , ta có:

$$\sin J_3 = n \sin J_2 = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow J_3 = 60^\circ$$

- Ta có:

$$KI'_1 = JK \cdot \tan J_3 = 20 \tan 60^\circ$$

$$= 20\sqrt{3} = 34,64 \text{ cm}$$

$$AD = BC + 2HD = BC + 2CD \cdot \cos D$$

$$\Rightarrow AD = 4 + 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8 \text{ cm}$$

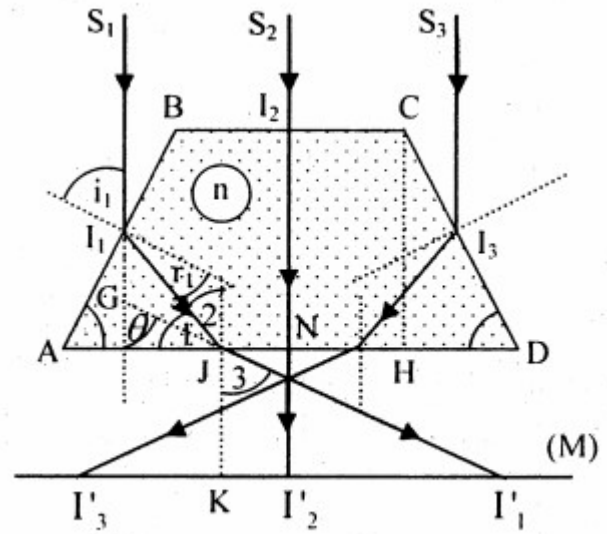
$$AJ = AI_1 = \frac{AB}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$KI'_2 = JN = AN - AJ = \frac{AD}{2} - AJ$$

$$= \frac{8}{2} - 2 = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra: } I'_2I'_1 = KI'_1 - KI'_2 = 34,64 - 2 = 32,64 \text{ cm}$$

Vậy: Vệt sáng I'_1 do tia sáng S_1I_1 tạo ra trên màn (M) cách I'_2 đoạn 32,64 cm về bên trái.



Hình a

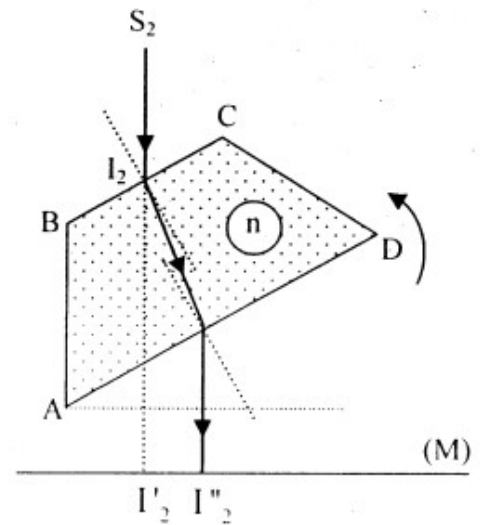
- Xét tương tự cho tia sáng S_3I_3 chiếu tới CD với góc tới $i_3 = \widehat{A} = 60^\circ$. Dễ dàng chứng tỏ rằng đường đi của tia sáng S_3I_3 đối xứng với đường đi của tia sáng S_1I_1 qua S_2N . Suy ra vết sáng I'_3 do tia sáng S_3I_3 tạo ra trên màn (M) cách I'_2 đoạn 32,64cm về bên phải, ta có I'_3 đối xứng với I'_1 qua I'_2 .

b) Khi xoay lăng kính một góc nhỏ quanh một trục qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$

- Khi chưa xoay lăng kính $ABCD$, ta có thể coi rằng các tia sáng S_1I_1 và S_3I_3 chiếu vào hai lăng kính tam giác có góc chiết quang lần lượt là A và D (với $A = D = 60^\circ$), trong điều kiện góc tới i_1 , bằng góc ló J_3 bằng 60° . Suy ra lúc này góc lệch θ giữa tia ló JI' và tia tới S_1I_1 là cực tiểu.

- Khi xoay lăng kính $ABCD$ một góc nhỏ quanh một trục qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ thì góc lệch θ tăng lên, suy ra hai vết sáng I'_1 và I'_3 dịch ra xa vị trí ban đầu của vết sáng giữa I''_2 .

- Với tia sáng S_2I_2 thì khi xoay lăng kính, ta coi như tia sáng truyền qua bản mặt song song với tia tới cố định, cho tia ló song song với tia tới. Suy ra vết sáng I''_2 cũng dịch ra xa vị trí ban đầu của nó tới I'_2 . Nếu xoay lăng kính ngược chiều kim đồng hồ thì I''_2 dịch, sang phải (hình b).



Hình b

5.33. Một lăng kính thủy tinh có chiết suất $n = 1,6$. Chiếu một tia sáng theo phương vuông góc mặt bên của lăng kính. Tia sáng phản xạ toàn phần ở mặt bên thứ hai. Tính giá trị nhỏ nhất của A .

Bài giải

- Tia tới SI vuông góc AB , truyền thẳng gặp mặt AC tại J với góc tới $i = A$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Ta có: $\sin i_{gh} = \frac{1}{n}$

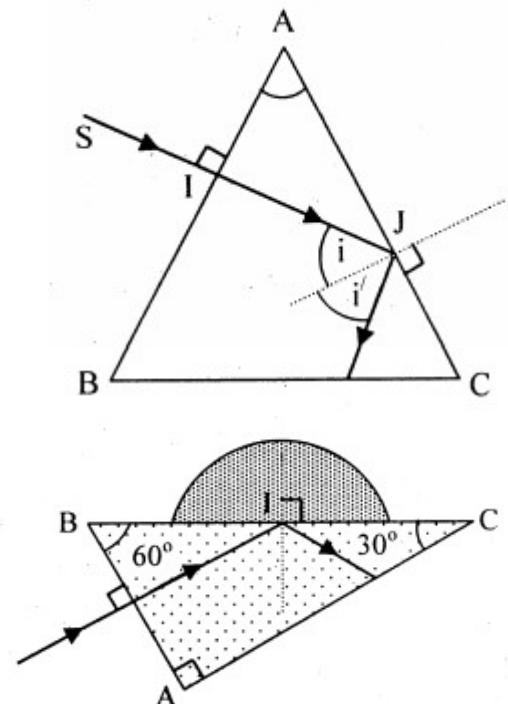
- Vì tia sáng phản xạ toàn phần tại J nên $i \geq i_{gh}$

$$\Rightarrow \sin A = \sin i \geq \sin i_{gh} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

$$\Rightarrow \sin A \geq \sin 38^\circ 41'$$

$$\Rightarrow A \geq 38^\circ 41' \Rightarrow A_{\min} = 38^\circ 41'.$$

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của A là $A_{\min} = 38^\circ 41'$.



5.34. Một lăng kính thủy tinh ($n = 1,5$) có tiết diện vuông góc như hình vẽ. Trên mặt huyền có một giọt chất lỏng trong suốt. Chùm tia sáng hẹp SI được chiếu tới mặt bên theo phương vuông góc và gặp chất lỏng ở I . Tính giá trị lớn nhất của chiết suất chất lỏng để có phản xạ toàn phần ở I .

Bài giải

Gọi n' là chiết suất (tuyệt đối) của chất lỏng. Ta có:

- Góc tới tại I trên mặt BC là: $i = B = 60^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Và: $\sin i_{gh} = \frac{n'}{n}$

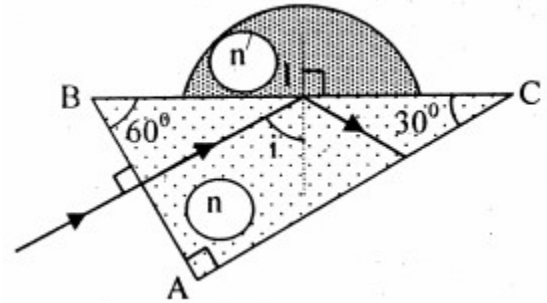
- Điều kiện để có phản xạ toàn phần tại I là:

$$i \geq i_{gh} \Rightarrow \sin i \geq \sin i_{gh} = \frac{n'}{n}$$

$$\Rightarrow n' \leq n \sin i = 1,5 \cdot \sin 60^\circ = 1,3$$

$$\Rightarrow n'_{\max} = 1,3$$

Vậy: Giá trị lớn nhất của chiết suất chất lỏng để có phản xạ toàn phần ở I là $n'_{\max} = 1,3$.



5.35. Lăng kính thủy tinh chiết suất n có tiết diện vuông góc là tam giác ABC với $\widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 75^\circ$. Một chùm tia sáng hẹp SI trong mặt phẳng của tiết diện vuông góc chiếu tới mặt AB với góc tới i .

a) Tìm hệ thức giữa i và n để tia khúc xạ II' hợp với BC góc 45° .

b) Tìm điều kiện về n để tia khúc xạ II' phản xạ toàn phần ở I' trên BC .

c) Trong điều kiện của câu b, chứng tỏ tia ló JR ra khỏi lăng kính theo phương vuông góc SI .

Bài giải

a) Hệ thức giữa i và n để tia khúc xạ II' hợp với BC góc 45°

- Vì tia khúc xạ II' hợp với BC góc 45° nên góc $\widehat{BI'I} = I'_1 = 45^\circ$.

- Xét tam giác BII' , ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{BI'I'_1} = I_1 &= 180^\circ - B - I'_1 \\ &= 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ \end{aligned}$$

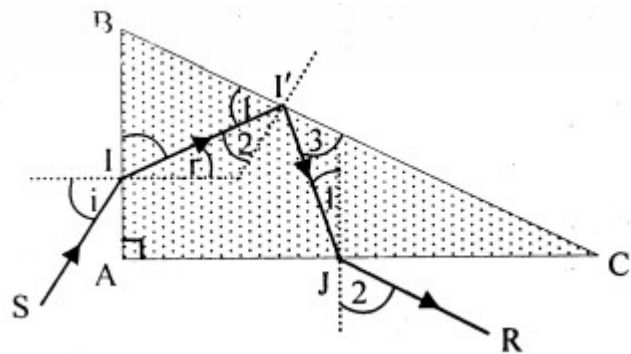
$$\Rightarrow r = 90^\circ - I_1 = 30^\circ$$

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại I , ta có:

$$\sin i = n \sin r = n \sin 30^\circ = \frac{n}{2}$$

Vậy: Hệ thức liên hệ giữa i và n là $\sin i = \frac{n}{2}$.

b) Điều kiện về n để tia khúc xạ II' phản xạ toàn phần ở I' trên BC



- Góc tới tại I' là: $I'_2 = 90^\circ - I'_1 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

- Điều kiện để có phản xạ toàn phần tại I' là: $I'_2 \geq i_{gh}$.

$$\Leftrightarrow \sin I'_2 \geq \sin i_{gh} = \frac{1}{n} \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sin I'_2} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

Vậy: Điều kiện để có phản xạ toàn phần tại I' là: $n \geq \sqrt{2}$.

c) Chứng tỏ tia ló $I'R$ vuông góc với tia tới SI

- Với điều kiện câu b, ta có: $\widehat{I'_3} = \widehat{I'_1} = 45^\circ$.

- Tại J , ta có: $\widehat{J_1} = 90^\circ - \widehat{C} - \widehat{I'_3} = 90^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

- Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng tại J , ta có:

$$\sin J_2 = n \sin J_1 = n \sin 30^\circ = \frac{n}{2}$$

- Mặt khác: $\sin i = \frac{n}{2} \Rightarrow J_2 = i \Rightarrow JR \perp SI$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Vậy: Với điều kiện của câu b thì tia ló JR vuông góc với tia tới SI .

5.36. Cho một lăng kính có chiết suất n , tiết diện là một hình tam giác cân ABC , vuông góc ở A , chiều cao $AH = 10$ cm đặt trong không khí. Một tia sáng đơn sắc, song song với đáy BC , tới gặp mặt AB (hình vẽ).

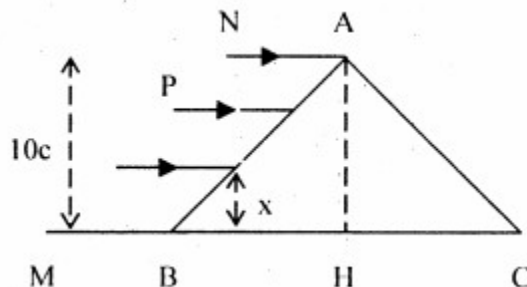
1. Chứng minh rằng nếu độ cao x của tia ấy so với đáy lăng kính bé hơn một giá trị h thì có tia ló đi ra khỏi mặt AC . Tìm phương của tia ló.

2. Nếu $x > h$ thì với điều kiện nào vẫn có tia ló đi ra từ mặt AC ?

3. Cho $n = \sqrt{2}$:

a) Tính h và tính góc lệch của tia ló so với tia tới (trường hợp tia tới có $x > h$).

b) Một chùm sáng đơn sắc song song với đáy BC tới gặp mặt AB . Các tia MB , PQ , NA ứng với $x = 0$, $h = 10$ cm. Xác định đầy đủ chùm ló, vẽ hình.



(Trích Đề thi học sinh giỏi Quốc gia, Năm học 1993-1994)

Bài giải

1. Chứng minh

Ta có: Nếu lăng kính là thủy tinh thì chiết suất của lăng kính là $\sqrt{2} \leq n \leq \sqrt{3}$.

- Xét các tia sáng tới mặt AB , khúc xạ tới gặp mặt AC trước. Các tia sáng này song song, đập vào mặt AC những góc như nhau là r_2 . Ta có:

Đối với tia đỏ: $\sin i_{gh(d)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow i_{gh(d)} = 45^\circ$

Và $\frac{\sin 45^\circ}{\sin r_{1d}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin r_{1d} = \frac{1}{2}$ và $r_{1d} = 30^\circ$

$\Rightarrow r_{2d} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ > 45^\circ$

Vậy: Các tia này sẽ phản xạ toàn phần tại mặt AC và gặp mặt BC dưới các góc tới $r_{3d} = 15^\circ < 45^\circ$, do đó tia ló ra khỏi mặt BC là tia JK .

Đối với tia tím: $\sin i_{gh(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow i_{gh(t)} = 35^\circ 16'$.

Và $\frac{\sin 45^\circ}{\sin r_{1t}} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin r_{1t} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408$ và $r_{1t} = 24^\circ 5'$

$\Rightarrow r_{2t} = 90^\circ - 24^\circ 5' = 65^\circ 55' > i_{gh} = 35^\circ 16'$

Vậy: Các tia này cũng phản xạ toàn phần tại mặt AC và gặp mặt BC dưới các góc tới $r_{3t} = 65^\circ 55' - 45^\circ = 20^\circ 55' < 35^\circ 16'$, do đó sẽ có tia ló ra khỏi mặt BC và đi ra ngoài.

- Xét các tia sáng tới AB , khúc xạ tới gặp mặt BC trước.

Các tia sáng này tới mặt BC với góc tới lớn hơn góc giới hạn và bị phản xạ toàn phần rồi tới mặt AC , ló ra ngoài cùng với góc ló 45° do tính chất đối xứng. Nếu x càng lớn thì điểm tới M của tia sáng trên mặt BC càng tiến lại gần CB .

- Khi $M \equiv C$, ta có $h = x$ với h là độ cao của tia sáng có tia khúc xạ NC .

- Các tia sáng có độ cao $x > h$ thì tia sáng gặp mặt AC trước sẽ bị phản xạ toàn phần nên h là độ cao của tia sáng SNC .

Ta có: $AN = AC \cdot \tan r_0 = AH \cdot \sqrt{2} \cdot \tan r_0$;

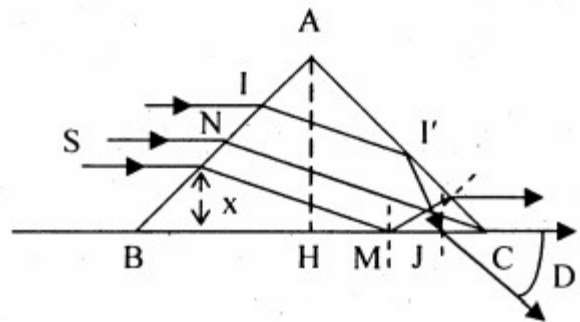
$$\sin r_0 = \frac{\sin 45^\circ}{n} = \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos r_0 = \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n\sqrt{2}}; \tan r_0 = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}}$$

Và $AN = AH \sqrt{2} \tan r_0 = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2n^2 - 1}}$

$$\Rightarrow BN = AB - AN = AH \sqrt{2} - \frac{AH \sqrt{2}}{\sqrt{2n^2 - 1}} = 10\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}} \right)$$

Từ đó: $h = \frac{BN}{\sqrt{2}} = \frac{10(\sqrt{2n^2 - 1} - 1)}{\sqrt{2n^2 - 1}} (\text{cm})$



2. Nếu $x > h$, để có tia ló ra khỏi mặt AC thì $i_{gh} > r_2$.

$$\text{Mà } r_2 = 90^\circ - r_1 \Leftrightarrow i_{gh} > 90^\circ - r_1 \Rightarrow r_1 > 90^\circ - i_{gh} \Leftrightarrow \sin r_1 > \cos i_{gh}$$

$$\text{Hay } \sin r_1 > \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

$$\text{Và } \sin r_1 = \frac{\sin 45^\circ}{n} = \frac{1}{n\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{n\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \Rightarrow n < \sqrt{1,5} \approx 1,225$$

Vậy: Để $x > h$ mà vẫn có tia ló ra ở mặt AC thì $n < 1,225$.

Với $n = \sqrt{2} > 1,225$ chỉ có tia ló khỏi mặt AC khi $x < h$.

3.

a) Tính h và tính góc lệch của tia ló so với tia tới

$$\text{Ta có: } h = \frac{10(\sqrt{2n^2 - 1} - 1)}{\sqrt{2n^2 - 1}} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}} = 10 - \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 4,227 \text{ cm}$$

Với các tia ứng với $x > h$, góc lệch giữa tia tới và tia ló chính là góc giữa tia ló khỏi mặt BC và cạnh BC .

Lúc này: $r_1 = 30^\circ \Rightarrow r_2 = 90^\circ - r_1 = 60^\circ \Rightarrow r_3 = 15^\circ$ và:

$$\frac{\sin i'}{\sin r_3} = n = \sqrt{2} \Rightarrow \sin i' = \sqrt{2} \sin 15^\circ \approx 0,366$$

$$\Rightarrow i' \approx 21^\circ 28' \text{ và } D = 90^\circ - 21^\circ 28' = 68^\circ 32'$$

Vậy: Độ cao $h = 4,227 \text{ cm}$ và góc lệch của các tia sáng là $D = 68^\circ 32'$.

b) Xác định đầy đủ chùm ló

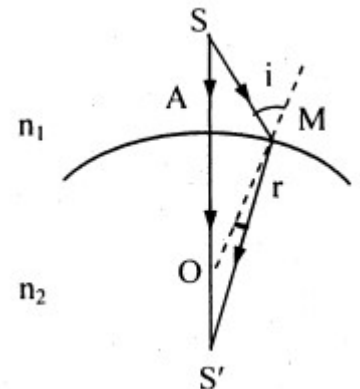
- Tia MB sẽ đi giống như các tia ứng với $x < h$ và phản xạ trên AC tại B tới gặp AC ló ra một góc 45° .
- Tia PQ sẽ đi đến điểm C , đến đây nó sẽ đi phần thứ nhất giống các tia ứng với $x > h$ và phần thứ hai giống các tia ứng với $x < h$.
- Tia NA đi giống như những tia ứng với $x > h$, nó phản xạ toàn phần trên AC tại A , rồi tới BC và ló ra ngoài với góc lệch $D = 68^\circ 32'$.

(Bạn đọc tự vẽ hình)

6. LƯỠNG CHẤT CẦU

5.37. Mặt giới hạn của hai môi trường trong suốt là mặt cầu bán kính R . Chiết suất các môi trường là n_1 và n_2 . Xét chùm tia hẹp như vuông góc với mặt cầu. Điểm vật S có điểm ảnh S' . Hãy chứng minh hệ thức sau:

$$n_1 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{R} \right)$$



với: $d = \overline{AS}$; $d' = \overline{AS'}$ (công thức của lưỡng chất cầu).

Bài giải

- Áp dụng định lý hàm sin cho các tam giác SMO và $S'MO$ ta được:

$$\frac{SO}{SM} = \frac{\sin i}{\sin \widehat{O}}; \quad \frac{S'M}{S'O} = \frac{\sin \widehat{O}}{\sin r}$$

$$\Rightarrow \frac{SO.S'M}{SM.S'O} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{định luật khúc xạ ánh sáng}) \quad (1)$$

- Mặt khác: $\overline{MS'} \approx \overline{AS'} = d'$; $\overline{SM} \approx \overline{SA} = -d$;

$$\overline{SO} = \overline{SA} + \overline{AO} = -d + R; \quad \overline{S'O} = \overline{S'A} + \overline{AO} = -d' + R$$

- Thay vào hệ thức (1) ta được: $\frac{-d+R}{-d} \cdot \frac{-d'}{-d'+R} = \frac{n_2}{n_1}$

$$\Leftrightarrow n_1 d'(-d+R) = n_2 d(-d'+R) \Leftrightarrow n_1(-d'd + d'R) = n_2(-dd' + dR) \quad (2)$$

- Chia hai vế của (2) cho $dd'R$ ta được: $n_1 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{R} \right)$.

Đó là công thức của lưỡng chất cầu cần chứng minh.

5.38. Trên thành của một bể nước có một lỗ tròn được che kín bằng một thấu kính hai mặt cầu lõm cùng bán kính $R = 50 \text{ cm}$. Tìm tiêu cự của thấu kính. Biết chiết suất của thủy tinh làm thấu kính là $n_1 = 1,5$ và chiết suất của nước là $n_2 = 4/3$.

(Trích Đề thi Olympic 30 tháng 4, lần thứ V- 1999)

Bài giải

Gọi n_0, n_1 và n_2 là chiết suất của không khí, thủy tinh và nước. Xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Môi trường tới là không khí, hệ gồm hai lưỡng chất cầu (LCC): LCC(1) (không khí - thủy tinh) và LCC(2) (thủy tinh - nước).

Sơ đồ tạo ảnh: $S \xrightarrow{\text{LCC(1)}} S_1 \xrightarrow{\text{LCC(2)}} S'$

Áp dụng các công thức về lưỡng chất cầu, ta được:

$$\frac{n_0}{d} + \frac{n_1}{d'_1} = \frac{n_1 - n_0}{-R} \quad (1)$$

$$\frac{n_1}{d_2} + \frac{n_2}{d'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2)$$

$$d_2 = d'_1 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), với $d = \infty$, $d' = f$ ta suy ra:

$$f = \frac{n_2 R}{n_2 - 2n_1 + n_0} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 50}{\frac{4}{3} - 2 \cdot 1,5 + 1} = -100 \text{ cm}.$$

- Trường hợp 2: Môi trường tới là nước. Tương tự trường hợp 1, ta được:

$$f = \frac{n_o R}{n_0 - 2n_1 + n_2} = \frac{1 \cdot 50}{1 - 2 \cdot 1,5 + \frac{4}{3}} = -75 \text{ cm}$$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính khi môi trường tới là không khí là $f = -100 \text{ cm}$, còn khi môi trường tới là nước là $f = -75 \text{ cm}$.

7. THẤU KÍNH

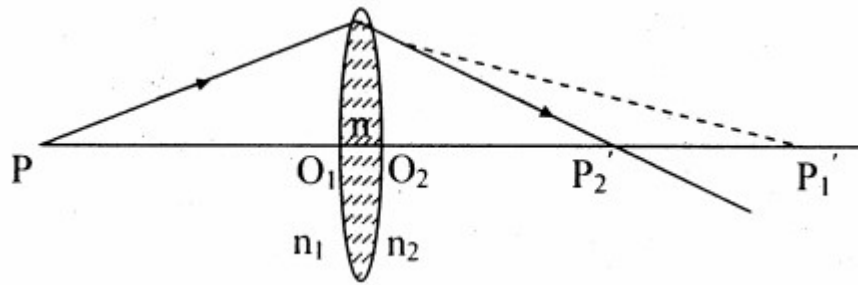
5.39. Hãy thiết lập công thức tính tiêu cự của thấu kính mỏng:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Bài giải

- Xét một thấu kính mỏng giới hạn bởi hai mặt cầu có các đỉnh là O_1, O_2 và có các bán kính cong là R_1, R_2 , chiết suất của chất làm thấu kính là n , của môi trường phía trước và phía sau thấu kính là n_1, n_2 .

- Xét một điểm sáng P nằm trên trục chính và giả thiết điều kiện tương điểm được thỏa mãn. Một chùm tia gần trục phát ra từ P , sau khi khúc xạ qua mặt cầu O_1 sẽ đồng quy tại P'_1 là ảnh của P tạo bởi mặt cầu O_1 .



- Áp dụng công thức của mặt cầu khúc xạ, ta có: $\frac{n}{s'_1} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n - n_1}{R_1}$

với: $s_1 = \overline{O_1 P}$, $s'_1 = \overline{O_1 P'_1}$, $R_1 = \overline{O_1 C_1}$

- Ảnh P'_1 được xem là vật đối với mặt cầu O_2 , mặt cầu này sẽ biến chùm tia đồng quy tại P'_1 thành chùm tia đồng quy tại P'_2 , P'_2 là ảnh của P'_1 tạo bởi mặt cầu O_2 và cũng là ảnh của điểm sáng P tạo bởi thấu kính.

Với mặt cầu O_2 , ta có: $\frac{n_2}{s'_2} - \frac{n}{s_2} = \frac{n_2 - n}{R_2}$

với: $s_2 = \overline{O_2 P'_1}$, $s'_2 = \overline{O_2 P'_2}$, $R_2 = \overline{O_2 C_2}$

- Với thấu kính mỏng, ta có thể xem O_1, O_2 và O trùng nhau, nên:

$$s_2 = s'_1; s'_2 = \overline{O_2 P'_2} = \overline{O P'_2} = s'_1; s_1 = \overline{O_1 P} = \overline{O P} = s$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2}$$

Đặt: $D = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2}$ là độ tụ của thấu kính.

- Nếu thấu kính đặt trong không khí thì $n_1 = n_2 = 1$ nên: $D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

- Tổng quát: $D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, với:

+ $R > 0$: nếu mặt cầu lồi.

+ $R < 0$: nếu mặt cầu lõm.

+ $R = 0$: nếu mặt giới hạn phẳng.

5.40. Một thấu kính thủy tinh có chiết suất $n = 1,5$. Khi đặt trong không khí, thấu kính có tụ số 5dp; khi dìm thấu kính vào chất lỏng chiết suất n' thấu kính có tiêu cự $f' = -1$ m.

Tính chiết suất n' của chất lỏng.

Bài giải

- Nếu thấu kính đặt trong không khí thì: $D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$.

- Nếu thấu kính đặt trong chất lỏng có chiết suất n' :

$$D' = \frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{D'}{D} = \frac{\frac{n}{n'} - 1}{n - 1}$$

$$\Rightarrow n' = \frac{n}{\frac{D'(n - 1)}{D} + 1} = \frac{1,5}{\frac{-1 \cdot (1,5 - 1)}{5} + 1} \approx 1,67$$

Vậy: Chiết suất của chất lỏng là $n' \approx 1,67$.

5.41. Một thấu kính hai mặt lồi. Khi đặt trong không khí, thấu kính có độ tụ D_1 ; khi đặt trong chất lỏng có chiết suất $n' = 1,68$ thấu kính lại có độ tụ $D_2 = -\frac{D_1}{5}$.

a) Tính chiết suất n của thấu kính.

b) Cho $D_1 = 2,5$ dp và biết rằng một mặt có bán kính cong gấp 4 lần bán kính cong của mặt kia. Hãy tính các bán kính cong của hai mặt thấu kính.

Bài giải

- Nếu đặt thấu kính trong không khí thì: $D_1 = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ (1)

- Nếu thấu kính đặt trong chất lỏng có chiết suất n' thì:

$$D_2 = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

a) Chiết suất n của thấu kính

- Từ (1) và (2) ta có: $\frac{D_2}{D_1} = \frac{\frac{n}{n'} - 1}{n - 1} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} = \frac{\frac{n}{1,68} - 1}{n - 1}$

$$\Leftrightarrow 5 \left(\frac{n}{1,68} - 1 \right) = (1 - n) \Leftrightarrow \frac{167}{42} n = 6 \Rightarrow n = 1,5.$$

Vậy: Chiết suất của thấu kính là $n = 1,5$.

b) Bán kính cong của hai mặt thấu kính

Từ: $D_1 = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Leftrightarrow 2,5 = (1,5-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{4R_1} \right)$

$$\Rightarrow R_1 = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm} \text{ và } R_2 = 4R_1 = 4.25 = 100 \text{ cm}.$$

Vậy: Bán kính cong của hai mặt thấu kính là $R_1 = 25 \text{ cm}$ và $R_2 = 100 \text{ cm}$.

5.42. Thấu kính phẳng - lồi có chiết suất $n = 1,6$ và bán kính mặt cong $R = 10 \text{ cm}$.

a) Tính f và D .

b) Điểm vật S trên trục chính cách thấu kính 1 m . Xác định ảnh. Vẽ ảnh.

c) Dìm hệ vào nước có chiết suất $n' = 4/3$. Xác định ảnh. Vẽ ảnh.

Bài giải

a) Tiêu cự và độ tụ của thấu kính

$$D = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,6-1) \left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{\infty} \right)$$

$$\Rightarrow D = 6 \text{ dp}; f = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ m} = 16,7 \text{ cm}$$

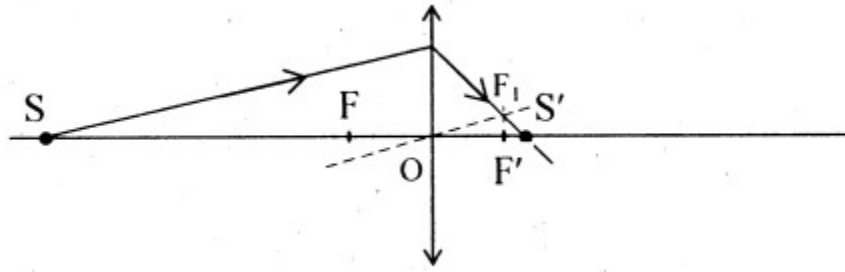
Vậy: Tiêu cự và độ tụ của thấu kính là $f = 16,7 \text{ cm}$ và $D = 6 \text{ dp}$.

b) Khi S đặt cách thấu kính $d = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

Từ công thức thấu kính: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ suy ra:

$$d' = \frac{df}{d-f} = \frac{100.16,7}{100-16,7} \approx 20 \text{ cm} > 0 : \text{ảnh thật.}$$

Vậy: Ảnh của S qua thấu kính là ảnh thật cách thấu kính 20 cm.



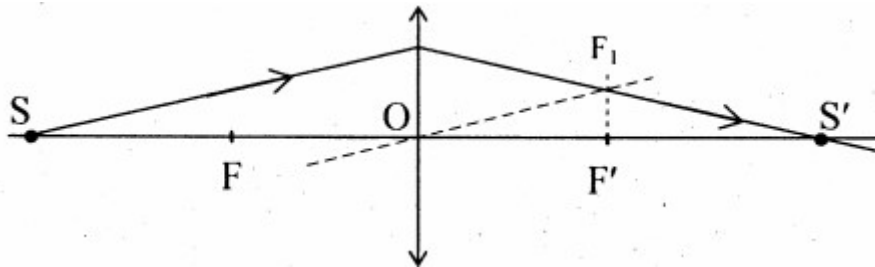
c) Khi chìm hệ vào nước có chiết suất $n' = 4/3$

$$\text{Ta có: } D' = \frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{1,6}{\frac{4}{3}} - 1 \right) \left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{\infty} \right).$$

$$\Rightarrow D' = 2 \text{ dp; } f' = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}.$$

$$\text{- Vị trí của ảnh: } d' = \frac{df'}{d-f'} = \frac{100.50}{100-50} = 100 \text{ cm} > 0 : \text{ảnh thật.}$$

Vậy: Khi chìm hệ vào trong nước thì ảnh của S là ảnh thật, cách thấu kính 100 cm.



5.43. Một thấu kính lồi – lõm. Mặt lồi có bán kính R_1 , mặt lõm có bán kính R_2 . Đặt vật cách thấu kính đoạn d thì có ảnh rõ nét hiện trên màn cách thấu kính d' . Chìm vào chất lỏng chiết suất n' thì thấu kính trở thành phân kì có tiêu cự f' . Tính n' theo R_1, R_2, d, d' và f' .

Bài giải

- Nếu thấu kính đặt trong không khí thì:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \quad (1)$$

- Nếu thấu kính đặt trong chất lỏng có chiết suất n' thì:

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

- Từ (1) ta có:
$$n = \frac{\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + 1 \quad (3)$$

- Từ (2) ta có:
$$n = \left(\frac{\frac{1}{f'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + 1 \right) n' \quad (4)$$

- Từ (3) và (4) ta có:
$$\frac{\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + 1 = \left(\frac{\frac{1}{f'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + 1 \right) n'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n' \Rightarrow n' = \frac{\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Vậy: Giá trị của n' theo R_1, R_2, d, d' và f' là
$$n' = \frac{\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

5.44. Một thấu kính phẳng - lồi có bán kính mặt lồi là 15 cm và chiết suất $n = 1,5$. Vật sáng AB đặt vuông góc trục chính và trước thấu kính. Ảnh là ảnh ảo, cách thấu kính 15 cm và cao 3 cm. Định vị trí và độ cao của vật.

Bài giải

- Tiêu cự của thấu kính:

Ta có:
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,5-1) \left(-\frac{1}{15} + \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow f = -30 \text{ cm}$$

- Vì ảnh ảo cách thấu kính 15 cm nên $d' = -15 \text{ cm}$. Vị trí của vật là:

$$d = \frac{d'f}{d' - f} = \frac{-15 \cdot (-30)}{-15 + 30} = 30 \text{ cm}$$

- Số phóng đại của ảnh là:
$$k = -\frac{d'}{d} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Mà:
$$k = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{A'B'}{|k|} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ cm}$$

Vậy: Vật cách thấu kính 30 cm và cao 6cm.

5.45. Vật thật AB đặt trên trục chính và vuông góc trục chính của thấu kính hội tụ có $f = 20 \text{ cm}$. Cho $OA = 30 \text{ cm}$; $AB = 5 \text{ cm}$.

a) Xác định ảnh. Vẽ ảnh.

b) Vật nghiêng 60° so với trục chính. Xác định ảnh. Vẽ ảnh.

Bài giải

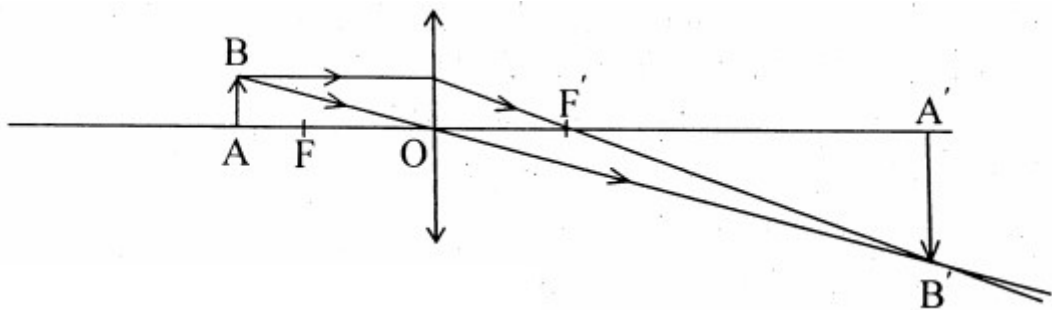
Ta có: $d = OA = 30 \text{ cm}$.

a) Vị trí của ảnh

$$\text{Ta có: } d' = \frac{df}{d-f} = \frac{30 \cdot 20}{30-20} = 60 \text{ cm}$$

$$\text{Và } k = -\frac{d'}{d} = -\frac{60}{30} = -2$$

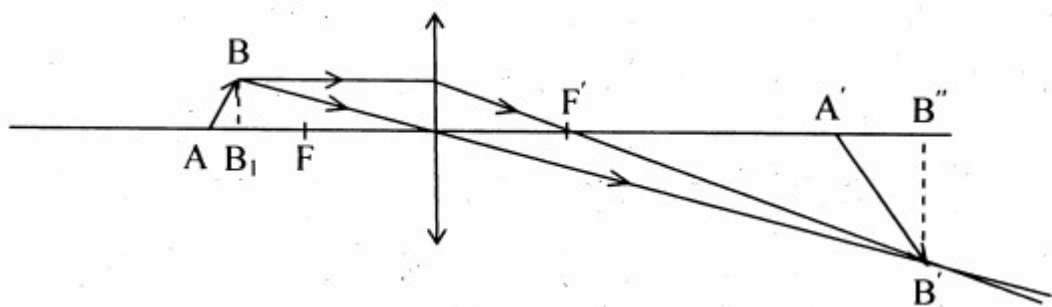
Vậy: Ảnh của vật AB là ảnh thật, ngược chiều, cao gấp 2 lần vật và cách thấu kính 60 cm .



b) Khi vật nghiêng 60° so với trục chính.

- Ta có:

Vì A nằm trên trục chính nên ảnh A' không đổi.



B chiếu xuống trục chính là B_1 ; B' chiếu xuống trục chính là B'' .

- Nếu vật là B_1 thì ảnh là B'' :

$$d = B_1O = AO - AB_1 = 30 - AB \cdot \cos 60^\circ = 30 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 27,5 \text{ cm}.$$

$$\text{Và } d' = \frac{df}{d-f} = \frac{27,5 \cdot 20}{27,5-20} = 73,3 \text{ cm}.$$

$\Rightarrow B''$ cách thấu kính 73,3 cm.

Và $A'B'' = OB'' - OA' = 73,3 - 60 = 13,3$ cm

- Mặt khác: $\frac{BB_1}{B'B''} = \frac{OB_1}{OB''} \Rightarrow B'B'' = \frac{BB_1 \cdot OB''}{OB_1} = \frac{AB \cdot \sin 60^\circ \cdot OB''}{OB_1}$

$$\Rightarrow B'B'' = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 73,3}{27,5} = 11,54 \text{ cm}$$

- Độ cao của ảnh $A'B'$ là: $A'B' = \sqrt{A''B''^2 + B'B''^2} = \sqrt{13,3^2 + 11,54^2} = 17,6$ cm .

Vậy: Khi vật nghiêng 60° so với trục chính thì ảnh $A'B'$ có A' không đổi, B' cách thấu kính 73,3cm và có độ cao là 17,6cm.

5.46. Thấu kính hội tụ có $f = 10$ cm . Điểm sáng S trên trục chính cách thấu kính 15cm.

a) Định ảnh S' .

b) Cưa thấu kính làm hai nửa và tách rời hai nửa theo phương vuông góc trục chính cho đến khi cách nhau 1cm, nhưng vẫn cách đều trục chính. Tính khoảng cách giữa hai ảnh.

c) Từ vị trí ở câu b, tịnh tiến một nửa thấu kính theo phương trục chính, xa vật thêm 5 cm. Tính khoảng cách giữa hai ảnh. Vẽ ảnh.

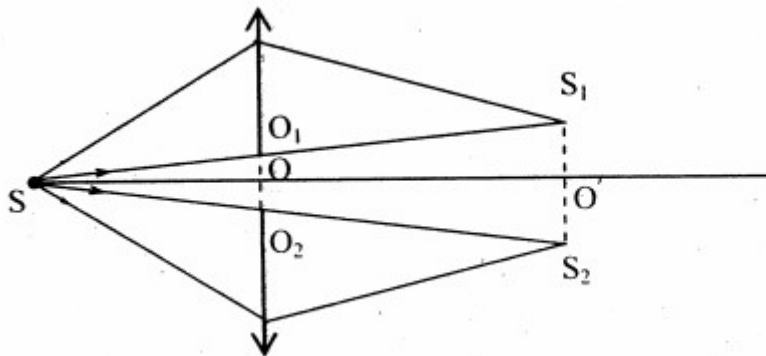
Bài giải

a) Vị trí của ảnh

Ta có: $d = 15$ cm; $d' = \frac{df}{d - f} = \frac{15 \cdot 10}{15 - 10} = 30$ cm > 0 : ảnh thật.

Vậy: Ảnh S' là ảnh thật, cách thấu kính 30 cm.

b) Khi cưa thấu kính làm hai nửa



- Khi cưa thấu kính làm hai nửa và tách rời hai nửa ra thì mỗi nửa là một thấu kính nên qua hai nửa thấu kính, S cho hai ảnh S_1 và S_2 .

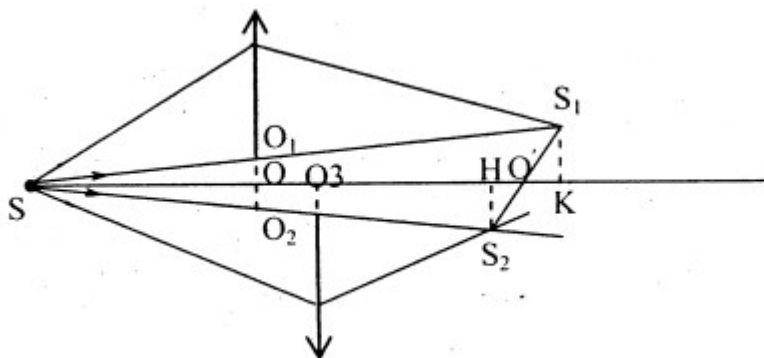
- Từ các tam giác đồng dạng, ta có: $\frac{O_1O_2}{S_1S_2} = \frac{SO}{SO'} \Leftrightarrow \frac{O_1O_2}{S_1S_2} = \frac{d}{d + d'}$

$$\Rightarrow S_1 S_2 = \frac{O_1 O_2 \cdot (d + d')}{d}$$

$$\Rightarrow S_1 S_2 = \frac{O_1 O_2 \left(d + \frac{df}{d-f} \right)}{d} = \frac{O_1 O_2 \cdot d}{d-f} = \frac{1.15}{15-10} = 3 \text{ cm}.$$

Vậy: Khoảng cách giữa hai ảnh S_1, S_2 là $S_1 S_2 = 3 \text{ cm}$.

c) Khi tịnh tiến một nửa xa vật thêm 5 cm theo phương trục chính



Ta có:

Với nửa thấu kính O_1 : $d_1 = 15 \text{ cm}$; $d'_1 = \frac{d_1 f}{d_1 - f} = \frac{15 \cdot 10}{15 - 10} = 30 \text{ cm}$.

Với nửa thấu kính O_2 : $d_2 = 20 \text{ cm}$; $d'_2 = \frac{d_2 f}{d_2 - f} = \frac{20 \cdot 10}{20 - 10} = 20 \text{ cm}$.

Và $HK = OK - OO'' - O''H = |d'_1| - OO'' - |d'_2| = 30 - 5 - 20 = 5 \text{ cm}$

- Các tam giác đồng dạng SKS_1 và SOO_1 cho:

$$\frac{S_1 K}{OO_1} = \frac{SK}{SO} = \frac{|d_1| + |d'_1|}{|d_1|} = \frac{15 + 30}{15} = 3$$

$$\Rightarrow S_1 K = 3 OO_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ cm}$$

- Các tam giác đồng dạng SHS_2 và $SO_3 O_2$ cho:

$$\frac{S_2 H}{O'' O_2} = \frac{SH}{SO''} = \frac{|d_2| + |d'_2|}{|d_2|} = \frac{20 + 20}{20} = 2$$

$$\Rightarrow S_2 H = 2 O'' O_2 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ cm}.$$

- Các tam giác đồng dạng $O'HS_2$ và $O'KS_1$ cho:

$$\frac{O'K}{O'H} = \frac{S_1 K}{S_2 H} = \frac{1,5}{1} = \frac{3}{2} \text{ và } O'K + O'H = HK = 5$$

$$\Rightarrow O'K = 3 \text{ cm}; O'H = 2 \text{ cm}.$$

- Khoảng cách giữa hai ảnh S_1, S_2 là $S_1S_2 = S_1O' + S_2O'$

$$\Rightarrow S_1S_2 = \sqrt{S_1K^2 + O'K^2} + \sqrt{S_2H^2 + O'H^2} = \sqrt{1,5^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 2^2} = 5,6 \text{ cm}.$$

5.47. Ảnh ảo của một vật tạo bởi thấu kính hội tụ bằng 2 lần vật và cách thấu kính 16 cm.

a) Tính tiêu cự của thấu kính.

b) Thấu kính thuộc loại phẳng - cầu có $n = 1,5$. Tính R .

Bài giải

Ta có: Ảnh ảo cách thấu kính 16cm nên $d' = 16 \text{ cm}$; ảnh ảo gấp 2 lần vật nên $k = 2$.

a) Tiêu cự của thấu kính

- Số phóng đại của ảnh là: $k = \frac{f-d'}{f} = 2 \Rightarrow f = -d' = 16 \text{ cm}.$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính là $f = 16 \text{ cm}.$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính là $f = 16 \text{ cm}.$

b) Bán kính của mặt cầu

Ta có: $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, với $R_2 = \infty$ nên: $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right)$

$$\Rightarrow R = (n-1).f = (1,5-1).16 = 8 \text{ cm}.$$

Vậy: Bán kính của mặt cầu là $R = 8 \text{ cm}.$

5.48. Thấu kính hội tụ có tiêu cự 30cm. Định vị trí của vật để có ảnh ảo lớn gấp 5 lần vật.

Bài giải

- **Trường hợp 1:** Vật thật - ảnh ảo: $k_1 = 5$:

Ta có: $k_1 = \frac{f}{f-d} = 5$

$$\Rightarrow 5f - 5d = f \Leftrightarrow 5d = 4f$$

$$\Rightarrow d = \frac{4}{5}f = \frac{4}{5}.30 = 24 \text{ cm} > 0 : \text{ vật thật.}$$

- **Trường hợp 2:** Vật ảo - ảnh ảo $k_2 = -5$:

Ta có: $k_2 = \frac{f}{f-d} = -5$

$$\Rightarrow -5f + 5d = f \Leftrightarrow 5d = 6f$$

$$\Rightarrow d = \frac{6}{5}f = \frac{6}{5}.30 = 36 \text{ cm} > 0 : \text{ vật thật (loại).}$$

Vậy: Để có ảnh ảo lớn gấp 5 lần vật thì vật phải là vật thật, đặt cách thấu kính 24cm.

5.49. Thấu kính hội tụ có tiêu cự 10 cm. Vật sáng đặt vuông góc trục chính. Ảnh trên màn có diện tích bằng 4 lần diện tích vật. Hãy định:

a) Vị trí vật.

b) Khoảng cách vật - màn.

Bài giải

a) Vị trí vật

Gọi S là diện tích của vật, S' là diện tích của ảnh: $S'S = \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2}{4}$; $S' = \frac{\pi \cdot \overline{A'B'}^2}{4}$.

$$\text{Ta có: } \frac{S'}{S} = \frac{\pi \cdot \overline{A'B'}^2}{4} : \frac{\pi \cdot \overline{AB}^2}{4} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} = 4 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 2.$$

- Vì ảnh hứng được trên màn nên là ảnh thật, ngược chiều với vật nên $k = -2$:

$$k = \frac{f}{f-d} = -2 \Leftrightarrow d = 1,5f = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ cm}$$

Vậy: Vật cách thấu kính 15cm.

b) Khoảng cách vật – màn

$$\text{Ta có: } L = |d + d'| = \left| d + \frac{d \cdot f}{d - f} \right| = \left| 15 + \frac{15 \cdot 10}{15 - 10} \right| = 45 \text{ cm}$$

Vậy: Khoảng cách giữa vật và màn là $L = 45 \text{ cm}$.

5.50. Vật AB có độ cao y , đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính hội tụ có ảnh $A'B'$, độ cao y' , cách vật khoảng L . Tính tiêu cự của thấu kính.

Bài giải

- **Trường hợp 1:** Ảnh và vật ngược chiều (cùng tính chất): $k < 0$. Với thấu kính hội tụ ($f > 0$) chỉ có trường hợp vật thật - ảnh thật: $L = d + d'$.

$$\text{Ta có: } k = \frac{y'}{y} = -\frac{d'}{d} \Rightarrow d' = -\frac{d \cdot y'}{y} = L - d$$

$$\Leftrightarrow -dy' = Ly - dy \Rightarrow d = \frac{yL}{y - y'}$$

$$\text{Và } d' = L - d = L - \frac{yL}{y - y'} = -\frac{y'L}{y - y'}$$

$$\Rightarrow f = \frac{d \cdot d'}{d + d'} = \frac{\frac{yL}{y - y'} \left(-\frac{y'L}{y - y'} \right)}{\frac{yL}{y - y'} + \left(-\frac{y'L}{y - y'} \right)} = -\frac{yy'L}{(y - y')^2}.$$

- **Trường hợp 2:** Ảnh và vật cùng chiều (khác tính chất): $k > 0$: vật thật - ảnh ảo, vật ảo - ảnh thật. Cả hai trường hợp ta đều có: $L = -(d + d')$.

$$\text{Ta có: } k = \frac{y'}{y} = -\frac{d'}{d} \Rightarrow d' = -\frac{d \cdot y'}{y} = -(L + d)$$

$$\Leftrightarrow -dy' = -Ly - dy \Rightarrow d = -\frac{yL}{y - y'}$$

$$\text{Và } d' = -(L + d) = -\left(L - \frac{Ly}{y - y'}\right) = +\frac{y'L}{y - y'}$$

$$\Rightarrow f = \frac{d \cdot d'}{d + d'} = \frac{-\frac{yL}{y - y'} \cdot \frac{y'L}{y - y'}}{-\frac{yL}{y - y'} + \frac{y'L}{y - y'}} = +\frac{yy'L}{(y - y')^2}$$

$$\text{Vậy: Tiêu cự của thấu kính là } f = \left| \frac{yy'L}{(y - y')^2} \right|.$$

5.51. Thấu kính hội tụ có tiêu cự 24 cm. Vật AB được đặt cách màn E một đoạn 108 cm. Có hai vị trí của thấu kính trong khoảng giữa vật và màn tạo được ảnh rõ nét của vật trên màn. Xác định hai vị trí của thấu kính.

Bài giải

- Vì thấu kính đặt giữa vật và màn nên vật và ảnh đều thật. Ta có:

$$\begin{cases} d + d' = L = 108 \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{108 - d} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow d^2 - 108d + 2592 = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = 36 \text{ cm}; d_2 = 72 \text{ cm}.$$

Vậy: Có hai vị trí của thấu kính trong khoảng giữa vật và màn tạo được ảnh rõ nét của vật trên màn, cách vật 36 cm hoặc 72 cm.

5.52. Vật đặt trên trục chính và vuông góc trục chính của một thấu kính hội tụ có tiêu cự 20 cm. Ảnh rõ hiện trên màn cách vật đoạn L .

a) Biết $L = 90$ cm. Xác định vị trí của thấu kính.

b) Màn phải đặt cách vật đoạn ngắn nhất là bao nhiêu thì mới thu được ảnh rõ nét của vật?

Bài giải

a) Vị trí của thấu kính

- Ảnh hiện rõ trên màn nên ảnh là ảnh thật: $d + d' = L = 90 \text{ cm}$. Ta có:

$$\begin{cases} d + d' = 90 \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{90-d} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow d^2 - 90d + 1800 = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = 30 \text{ cm}; d_2 = 60 \text{ cm}.$$

Vậy: Thấu kính đặt cách vật 30 cm hoặc 60 cm.

b) Khoảng cách ngắn nhất giữa màn và vật

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d + d' = L \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow d^2 - Ld + 20L = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = L^2 - 4 \cdot 20 \cdot L = L^2 - 80L$$

$$\text{- Để có ảnh hiện rõ nét trên màn thì: } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow L^2 - 80L \geq 0 \Leftrightarrow L(L - 80) \geq 0.$$

$$\Rightarrow L_{\min} = 80$$

Vậy: Màn phải đặt cách vật đoạn ngắn nhất là $L_{\min} = 80 \text{ cm}$.

5.53. Vật phẳng nhỏ AB đặt trước và song song với một màn, cách màn khoảng L . Đặt một thấu kính hội tụ giữa vật và màn, song song với vật và sao cho điểm A của vật ở trên trục chính. Ta tìm được hai vị trí $(O_1), (O_2)$ của thấu kính tạo ảnh rõ nét của vật trên màn, ảnh này gấp k lần ảnh kia. Tính tiêu cự của thấu kính. Áp dụng số: $L = 100 \text{ cm}, k = 2,25$.

Bài giải

$$\text{- Vì ảnh hiện rõ trên màn cách vật đoạn } L \text{ nên ta có: } \begin{cases} d + d' = L \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \end{cases}$$

$$\text{- Số phóng đại của ảnh là: } k_1 = -\frac{d'_1}{d_1} \quad (1)$$

$$k_2 = -\frac{d'_2}{d_2}$$

$$\text{- Theo tính thuận nghịch của chiều truyền ánh sáng thì: } d_2 = d'_1; d'_2 = d_1$$

$$\Rightarrow k_2 = -\frac{d_1}{d'_1} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{k_2}{k_1} = \frac{d_1^2}{d_1'^2} = k \Leftrightarrow \frac{d_1}{L-d_1} = \sqrt{k} \Rightarrow d_1 = \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}$$

- Vị trí của ảnh: $d'_1 = L - d = L - \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = \frac{L}{\sqrt{k} + 1}$.

- Tiêu cự của thấu kính: $f = \frac{d_1 d'_1}{d_1 + d'_1} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{k}}{(\sqrt{k} + 1)^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{L\sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k})^2}$.

- Áp dụng bằng số: $L = 100 \text{ cm}, k = 2,25$ ta được:

$$f = \frac{L\sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k})^2} = \frac{100\sqrt{2,25}}{(1 + \sqrt{2,25})^2} = 24 \text{ cm}$$

5.54. Với mỗi loại thấu kính hãy xác định vị trí của vật để ảnh tạo bởi thấu kính.

- a) là ảnh thật.
- b) là ảnh ảo.
- c) cùng chiều với vật.
- d) ngược chiều với vật.
- e) bằng vật.
- f) lớn hơn vật.
- g) nhỏ hơn vật.
- h) có khoảng cách vật - ảnh cùng bản chất nhỏ nhất.

Bài giải

a) Để ảnh là ảnh thật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0, d' > 0 \Rightarrow d' = \frac{df}{d - f} > 0$.

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức trên luôn được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d > f$.

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0, d' > 0 \Rightarrow d' = \frac{df}{d - f} > 0$.

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d > f$: vật ảo nằm trong khoảng OF .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên không được nghiệm đúng.

b) Để ảnh là ảnh ảo:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0, d' < 0 \Rightarrow d' = \frac{df}{d - f} < 0$.

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức không được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d < f$: vật thật nằm trong khoảng OF .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0, d' < 0 \Rightarrow d' = \frac{df}{d-f} < 0$.

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d < f$: vật ảo nằm ngoài khoảng OF .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên luôn được nghiệm đúng.

c) Để ảnh cùng chiều với vật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > 0$.

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức luôn được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d < f$: vật thật nằm trong khoảng OF .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0, k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > 0$.

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d > f$: vật ảo nằm trong khoảng OF .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên luôn được nghiệm đúng.

d) Để ảnh ngược chiều với vật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 0$.

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức không được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d > f$: vật thật nằm ngoài khoảng OF .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 0$

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d < f$: vật ảo nằm ngoài khoảng OF .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên không được nghiệm đúng.

e) Để ảnh bằng vật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} = -1$

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức không được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d = 2f$: vật thật nằm tại C .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0$; $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} = -1$

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d = 2f$: vật ảo nằm tại C .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên không được nghiệm đúng.

f) Để ảnh lớn hơn vật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0$; $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > 1$ (ảnh - vật cùng chiều)

hoặc $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < -1$ (ảnh - vật ngược chiều).

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức không được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $0 < d < 2f$: vật thật nằm trong khoảng CF .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0$; $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > 1$ (ảnh - vật cùng chiều)

hoặc $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < -1$ (ảnh - vật ngược chiều)

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $2f < d < f$: vật ảo nằm trong khoảng CF .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên không được nghiệm đúng.

g) Để ảnh nhỏ hơn vật:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

Ta có: $f > 0$; $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 1$ (ảnh - vật cùng chiều)

hoặc $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > -1$ (ảnh - vật ngược chiều).

Nếu $d < 0$: bất đẳng thức luôn được nghiệm đúng.

Nếu $d > 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d > 2f$: vật thật nằm ngoài C .

- Trường hợp thấu kính phân kì:

Ta có: $f < 0$; $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 1$ (ảnh - vật cùng chiều)

hoặc $k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} > -1$ (ảnh - vật ngược chiều).

Nếu $d < 0$: để bất đẳng thức trên được nghiệm đúng thì $d < 2f$: vật ảo nằm ngoài C .

Nếu $d > 0$: bất đẳng thức trên luôn được nghiệm đúng.

h) Có khoảng cách vật - ảnh cùng bản chất nhỏ nhất:

- Trường hợp thấu kính hội tụ:

$$\text{Ta có: } f > 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 0.$$

$$\text{Mà: } d + d' = L \Rightarrow -\frac{L-d}{d} = \frac{f}{f-d} \Leftrightarrow d^2 - Ld + Lf = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = L^2 - 4Lf = L(L - 4f)$$

- Để tồn tại d thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow L(L - 4f) \geq 0 \Rightarrow L_{\min} = 4f$ và $d = 2f > 0$: vật thật.

Vậy: Với thấu kính hội tụ, để khoảng cách vật - ảnh cùng bản chất nhỏ nhất thì $d = 2f > 0$.

- Trường hợp thấu kính phân kì:

$$\text{Ta có: } f < 0; k = -\frac{d'}{d} = \frac{f}{f-d} < 0$$

$$\text{Mà: } d + d' = -L \Rightarrow -\frac{-L-d}{d} = \frac{f}{f-d} \Leftrightarrow d^2 + Ld - Lf = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = L^2 + 4Lf = L(L + 4f)$$

- Để tồn tại d thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow L(L + 4f) \geq 0 \Rightarrow L_{\min} = -4f$ và $d = 2f < 0$: vật ảo.

Vậy: Với thấu kính phân kì, để khoảng cách vật - ảnh cùng bản chất nhỏ nhất thì $d = 2f < 0$.

5.55. Chứng tỏ rằng thấu kính phân kì luôn luôn tạo được:

a) ảnh thật lớn hơn vật ảo.

b) ảnh ảo nhỏ hơn vật thật.

Bài giải

a) Chứng minh: ảnh thật qua thấu kính phân kì lớn hơn vật ảo

- Ta có: Thấu kính phân kì: $f < 0$, vật ảo: $d < 0$, ảnh thật: $d' > 0$.

$$\text{Mà: } d' = \frac{df}{d-f} \Leftrightarrow \frac{df}{d-f} > 0 \Rightarrow f < d < 0$$

$$\text{- Số phóng đại: } |k| = \left| -\frac{d'}{d} \right| = \left| \frac{f}{f-d} \right| > 1.$$

Vậy: Vật ảo qua thấu kính phân kì cho ảnh thật lớn hơn vật.

b) Chứng minh: ảnh ảo qua thấu kính phân kì nhỏ hơn vật thật

- Ta có: Thấu kính phân kì: $f < 0$, vật thật: $d > 0$, ảnh ảo: $d' < 0$.

Mà: $d' = \frac{df}{d-f} < 0 \Rightarrow d' < 0$ (với mọi $d > 0$).

- Số phóng đại: $|k| = \left| -\frac{d'}{d} \right| = \left| \frac{f}{f-d} \right| < 1$.

Vậy: Vật thật qua thấu kính phân kì cho ảnh ảo nhỏ hơn vật.

5.56. Chứng tỏ rằng:

- a) Với thấu kính hội tụ, vật và ảnh không thể cùng ảo.
- b) Với thấu kính phân kì, vật và ảnh không thể cùng thật.

Bài giải

a) Chứng tỏ: với thấu kính hội tụ, vật và ảnh không thể cùng ảo

- Ta có: Thấu kính hội tụ: $f > 0$.

Nếu vật ảo: $d < 0$ thì $d' = \frac{df}{d-f} > 0$: ảnh thật.

Nếu ảnh ảo: $d' < 0$ thì $d = \frac{d'f}{d'-f} > 0$: vật thật.

Vậy: Với thấu kính hội tụ, vật ảo thì ảnh thật; ảnh ảo thì vật thật.

b) Chứng tỏ: với thấu kính phân kì, vật và ảnh không thể cùng thật

- Ta có: Thấu kính phân kì: $f < 0$.

Nếu vật thật: $d > 0$ thì $d' = \frac{df}{d-f} < 0$: ảnh ảo.

Nếu ảnh thật: $d' > 0$ thì $d = \frac{d'f}{d'-f} < 0$: vật ảo.

Vậy: Với thấu kính phân kì, vật thật thì ảnh ảo; ảnh thật thì vật ảo.

5.57. Chứng minh rằng thấu kính tạo được:

- ảnh thật cho vật thật.
 - ảnh ảo lớn hơn vật thật.
 - ảnh thật nhỏ hơn vật ảo.
- phải là thấu kính hội tụ.

Bài giải

- **Trường hợp 1:** Ảnh thật cho vật thật: $d > 0$; $d' > 0$.

Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'} > 0$: thấu kính hội tụ.

- **Trường hợp 2:** Ảnh ảo lớn hơn vật thật: $d > 0$, $d' < 0$ và $|d'| > d$.

Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'}$, với $dd' < 0$; $d+d' < 0$.

$\Rightarrow f = \frac{dd'}{d+d'} > 0$: thấu kính hội tụ.

- **Trường hợp 3:** Ảnh thật nhỏ hơn vật ảo: $d < 0$; $d' > 0$ và $d' < |d|$.

Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'}$ với $dd' < 0$; $d+d' < 0$

$\Rightarrow f = \frac{dd'}{d+d'} > 0$: thấu kính hội tụ.

Vậy: Cả ba trường hợp trên đều là thấu kính hội tụ.

5.58. Chứng minh rằng thấu kính tạo được:

- ảnh ảo cho vật ảo.
- ảnh thật lớn hơn vật ảo.
- ảnh ảo nhỏ hơn vật thật, phải là thấu kính phân kì.

Bài giải

- **Trường hợp 1:** Ảnh ảo cho vật ảo: $d < 0$; $d' < 0$.

Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'}$ với $dd' < 0$; $d+d' < 0$.

- **Trường hợp 2:** Ảnh thật lớn hơn vật ảo: $d < 0$, $d' > 0$ và $d' > |d|$.

Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'}$ với $dd' < 0$; $d+d' > 0$.

$\Rightarrow f < 0$: thấu kính phân kì.

- **Trường hợp 3:** Ảnh ảo nhỏ hơn vật thật: $d > 0$, $d' < 0$ và $|d'| > d$.

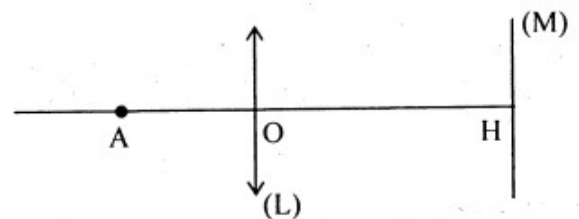
Ta có: $f = \frac{dd'}{d+d'}$ với $dd' < 0$; $d+d' > 0$.

$\Rightarrow f < 0$: thấu kính phân kì.

Vậy: Cả ba trường hợp trên đều là thấu kính phân kì.

5.59. Xét quang hệ như hình vẽ, với $AO = 30$ cm; $OH = 40$ cm; $f = 20$ cm.

- a) Dời A trên trục chính, kích thước vật sáng trên màn thay đổi nhưng tới một vị trí thì vật sáng này có kích thước cũ. Xác định chiều dịch chuyển và độ dời của A .
- b) A phải có vị trí nào thì kích thước vật sáng trên màn bằng kích thước của thấu kính?



c) A cách L đoạn 4cm. Thay L bằng thấu kính phân kì L' cùng kích thước có tiêu cự cùng độ lớn với L . Hỏi phải dời A theo chiều nào, bao nhiêu để vệt sáng trên màn có kích thước như với L ?

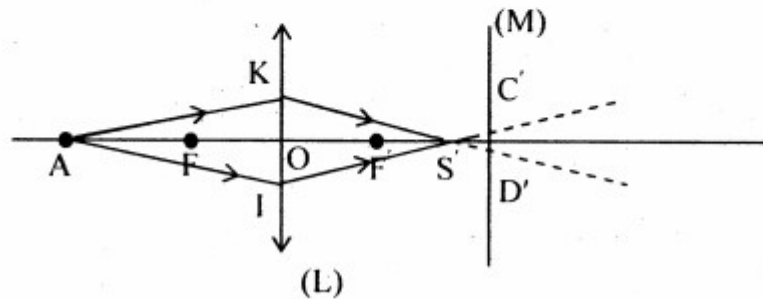
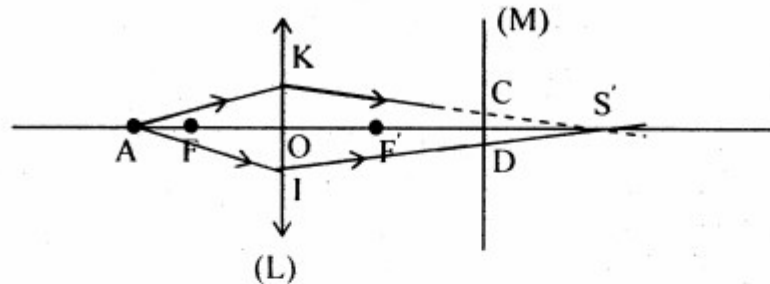
Bài giải

a) Chiều dịch chuyển và độ dời của A

- Vị trí ban đầu của ảnh: $d'_1 = \frac{d_1 f}{d_1 - f} = \frac{30 \cdot 20}{30 - 20} = 60 \text{ cm}$

Vì $d'_1 > OH = 40 \text{ cm}$ nên ảnh sẽ ở sau màn (M) .

- Khi dời A trên trục chính tới một vị trí mà vệt sáng có kích thước như cũ, lúc đó ảnh sẽ nằm trước màn (M) .



- Khi ảnh nằm trước màn (M) thì d' giảm nên d tăng, do đó vật sẽ dịch chuyển ra xa thấu kính. Theo tính chất đồng dạng của tam giác, ta có:

$$\frac{CD}{KI} = \frac{d'_1 - OH}{d'_1} = \frac{60 - 40}{60} = \frac{1}{3}; \quad \frac{C'D'}{KI} = \frac{OH - d'_2}{d'_2}$$

- Vì kích thước vệt sáng là như nhau nên: $\frac{C'D'}{KI} = \frac{OH - d'_2}{d'_2} = \frac{1}{3}$.

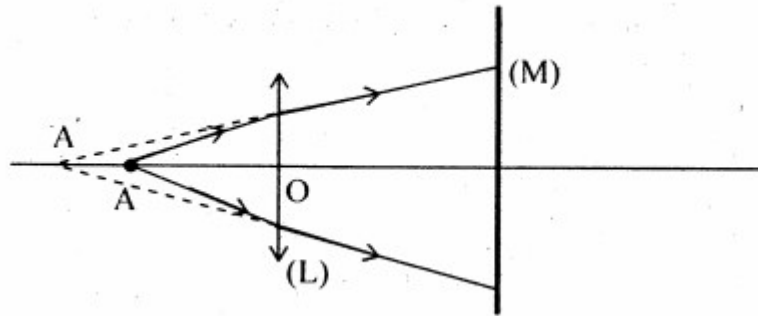
$$\Leftrightarrow \frac{40 - d'_2}{d'_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow d'_2 = 30 \text{ cm}$$

- Vị trí của vật: $d_2 = \frac{d'_2 f}{d'_2 - f} = \frac{30 \cdot 20}{30 - 20} = 60 \text{ cm}$.

Vậy: A dịch chuyển ra xa thấu kính một đoạn 30cm.

b) Vị trí của A để kích thước vệt sáng trên màn bằng kích thước của thấu kính

Để kích thước vật sáng trên màn bằng kích thước của thấu kính thì chùm tia ló ra khỏi thấu kính phải là chùm tia song song. Vậy A phải được đặt tại tiêu điểm F của thấu kính, cách thấu kính 20cm.
c) Chiều và độ dời A để vật sáng trên màn có kích thước như với L



- Đối với thấu kính hội tụ L , vị trí của ảnh: $d'_1 = \frac{df}{d-f} = \frac{4 \cdot 20}{4-20} = -5 \text{ cm}$.

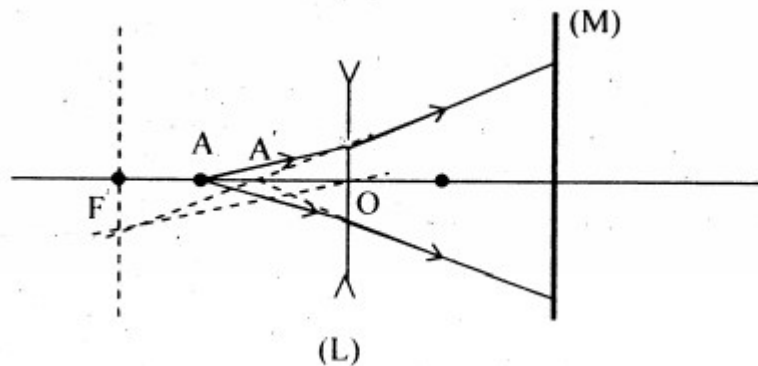
- Đối với thấu kính phân kì L' , để vật sáng trên màn có cùng kích thước thì:

$$d'_2 = d'_1 = -5 \text{ cm}$$

Vị trí của vật là: $d_2 = \frac{d'_2 f}{d'_2 - f} = \frac{-5 \cdot (-20)}{-5 - (-20)} = \frac{20}{3} \text{ cm}$.

Vậy: Phải dịch chuyển vật ra xa thấu kính một đoạn:

$$\Delta d = |d_2 - d_1| = \frac{20}{3} - 4 = \frac{8}{3} = 2,7 \text{ cm}.$$



5.60.

a) Dùng thấu kính hội tụ để quan sát ảnh ảo của một vật AB . Vật đặt trên trục chính và vuông góc trục chính. Giữ vật cố định, dời thấu kính xuống một khoảng nhỏ trong mặt phẳng của nó. Chứng tỏ ảnh của AB chuyển động theo chiều ngược lại.

b) Chứng tỏ nếu thực hiện thí nghiệm với thấu kính phân kì, ảnh của vật sẽ chuyển động cùng chiều với thấu kính.

c) Suy ra một phương pháp xác định loại thấu kính.

Bài giải

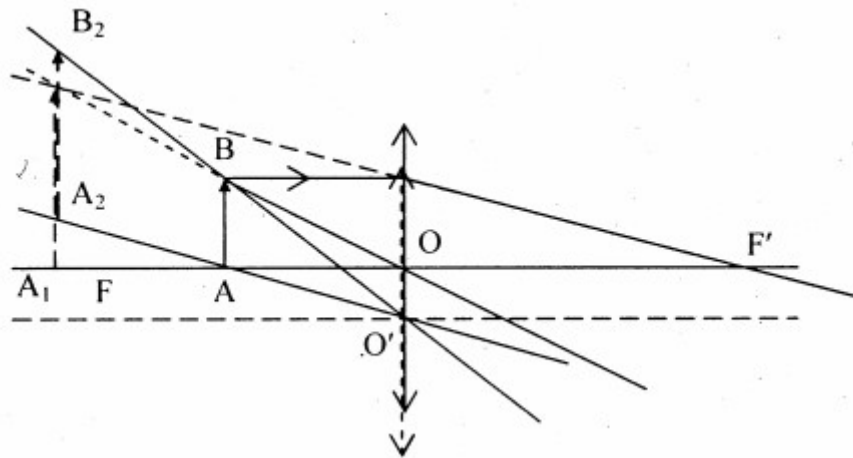
a) Đối với thấu kính hội tụ: Khi vật thật cho ảnh ảo thì:

- + Vật thật nằm trong tiêu điểm chính F .
- + Ảnh ảo cùng chiều, lớn hơn và nằm xa thấu kính hơn vật.

Gọi A_1B_1 là ảnh của AB khi chưa dời thấu kính và A_2B_2 là ảnh của AB khi đã dời thấu kính. Ta có:

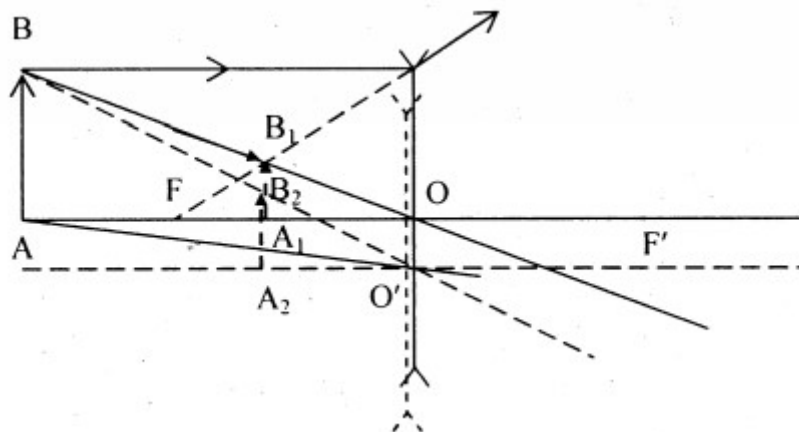
- + Khoảng cách vật đến thấu kính không đổi nên hai ảnh trên sẽ ở cùng vị trí.
- + Ba điểm A_2, A, O thẳng hàng, A_2 và O nằm hai phía so với A nên khi O dịch xuống phía dưới thì A_2 sẽ dịch lên phía trên. Tương tự đối với B_2 .

Vậy: Với thấu kính hội tụ, khi dịch chuyển thấu kính thì ảnh sẽ chuyển động theo chiều ngược lại.



b) Đối với thấu kính phân kì: Vật thật luôn cho ảnh ảo cùng chiều, nhỏ hơn và nằm gần thấu kính hơn vật.

Gọi A_1B_1 là ảnh của AB khi chưa dời thấu kính và A_2B_2 là ảnh của AB khi đã dời thấu kính. Ta có:



- + Khoảng cách vật đến thấu kính không đổi nên hai ảnh trên sẽ ở cùng vị trí.
- + Ba điểm A_2, A, O thẳng hàng, A_2 và O nằm hai phía so với A nên khi O dịch xuống phía dưới thì A_2 cũng sẽ dịch xuống phía dưới. Tương tự cho B_2 .

Vậy: Với thấu kính phân kì, khi dịch chuyển thấu kính thì ảnh sẽ chuyển động cùng chiều với thấu kính.

c) Phương pháp xác định loại thấu kính:

- Đặt vật gần thấu kính (trong tiêu điểm chính F), quan sát ảnh ảo của vật qua thấu kính.
- Dịch chuyển thấu kính xuống phía dưới một khoảng nhỏ, quan sát, chiều di chuyển của ảnh, nếu:
 - + Ảnh di chuyển lên phía trên (ngược chiều với thấu kính) thì đó là thấu kính hội tụ.
 - + Ảnh di chuyển xuống phía dưới (cùng chiều với thấu kính) thì đó là thấu kính phân kì.

5.61. Một thấu kính hội tụ có $f = 12 \text{ cm}$. Điểm sáng A trên trục chính có ảnh A' . Dời A gần thấu kính thêm 6 cm , A' dời 2 cm (không đổi tính chất). Định vị trí vật và ảnh lúc đầu.

Bài giải

- Vì ảnh và vật chuyển động cùng chiều đối với thấu kính, nên:

Độ dời của vật: $\Delta d = d_2 - d_1 = -6 \text{ cm}$.

Độ dời của ảnh: $\Delta d' = d_2' - d_1' = 2 \text{ cm}$.

- Ta có: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1'} \Rightarrow d_1' = \frac{d_1 f}{d_1 - f} = \frac{d_1 \cdot 12}{d_1 - 12}$

Và $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2'} = \frac{1}{d_1 - 6} + \frac{1}{d_1' + 2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{d_1 - 6} + \frac{1}{\frac{12 \cdot d_1}{d_1 - 12} + 2}$$

$$\Leftrightarrow d_1^2 - 30d_1 - 216 = 0 \Rightarrow d_1 = 36 \text{ cm} \text{ và } d_1' = \frac{36 \cdot 12}{36 - 12} = 18 \text{ cm}.$$

Vậy: Vị trí vật và ảnh lúc đầu là 36 cm và 18 cm .

5.62. Thấu kính phân kì có $f = -10 \text{ cm}$. Vật AB trên trục chính, vuông góc trục chính, có ảnh $A'B'$. Dịch chuyển AB lại gần thấu kính thêm 15 cm thì ảnh dịch chuyển $1,5 \text{ cm}$.

Xác định vị trí vật và ảnh lúc đầu.

Bài giải

- Vì ảnh và vật chuyển động cùng chiều đối với thấu kính, nên:

Độ dời của vật: $\Delta d = d_2 - d_1 = -15 \text{ cm}$.

Độ dời của ảnh: $\Delta d' = d_2' - d_1' = 1,5 \text{ cm}$.

Ta có: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1'} \Rightarrow d_1' = \frac{d_1 f}{d_1 - f} = \frac{d_1 \cdot (-10)}{d_1 + 10} = \frac{-10d_1}{d_1 + 10}$

Và $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2'} = \frac{1}{d_1 - 15} + \frac{1}{d_1' + 1,5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(-10)} = \frac{1}{d_1 - 15} + \frac{1}{\frac{(-10)d_1}{d_1 + 10} + 1,5}$$

$$\Leftrightarrow d_1^2 + 5d_1 - 1050 = 0 \Rightarrow d_{11} = 30 \text{ cm (nhận); } d_{12} = -35 \text{ cm (loại)}.$$

$$\text{Và } d_1' = \frac{-10d_1}{d_1 + 10} = \frac{-10 \cdot 30}{30 + 10} = -7,5 \text{ cm}.$$

Vậy: Vị trí vật và ảnh lúc đầu là 30cm và $-7,5$ cm.

5.63. Vật đặt trước thấu kính, trên trục chính và vuông góc trục chính. Ảnh thật lớn bằng 3 lần vật. Dời vật xa thấu kính thêm 3cm thì ảnh vẫn thật và dời 18cm. Tính tiêu cự.

Bài giải

- Ảnh thật lớn bằng 3 lần vật nên $k = -3$:

$$k = -\frac{d_1'}{d_1} = -3 \Rightarrow d_1' = 3d_1$$

- Vì ảnh và vật luôn chuyển động cùng chiều với nhau nên:

$$\text{Độ dời của vật: } \Delta d = d_2 - d_1 = 3 \text{ cm}.$$

$$\text{Độ dời của ảnh: } \Delta d' = d_2' - d_1' = -18 \text{ cm}.$$

- Ta có:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1'} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{3d_1} = \frac{4}{3d_1}$$

$$\text{Và } \frac{1}{f} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2'} = \frac{1}{d_1 + 3} + \frac{1}{d_1' - 18} = \frac{1}{d_1 + 3} + \frac{1}{3d_1 - 18}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3d_1} = \frac{1}{d_1 + 3} + \frac{1}{3d_1 - 18} \Rightarrow d_1 = 24 \text{ cm}$$

$$\text{Và } f = \frac{3d_1}{4} = \frac{3 \cdot 24}{4} = 18 \text{ cm}.$$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính là $f = 18 \text{ cm}$.

5.64. Vật AB đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính hội tụ có ảnh thật A_1B_1 cao 2cm. Dời AB lại gần thấu kính thêm 45cm thì được ảnh thật A_2B_2 cao 20cm và cách A_1B_1 đoạn 18cm.

Hãy xác định:

a) Tiêu cự của thấu kính.

b) Vị trí ban đầu của vật.

Bài giải

- Vì ảnh và vật chuyển động cùng chiều đối với thấu kính nên:

Độ dời của vật: $\Delta d = d_2 - d_1 = -45 \text{ cm}$.

Độ dời của ảnh: $\Delta d' = d_2' - d_1' = 18 \text{ cm}$.

- Vì ảnh thật A_1B_1 cao 2cm, ảnh thật A_2B_2 cao 20cm nên $k_2 = 10k_1$.

$$\text{Với } k_1 = \frac{f}{f - d_1}; k_2 = \frac{f}{f - d_2} = \frac{f}{f - d_1 + 45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f}{f - d_1 + 45} = 10 \cdot \frac{f}{f - d_1} \Leftrightarrow 10(f - d_1 + 45) = f - d_1$$

$$\Leftrightarrow 9(f - d_1) = -450 \Leftrightarrow d_1 = f + 50 \quad (1)$$

$$\text{Với } k_1 = \frac{f - d_1'}{f}; k_2 = \frac{f - d_2'}{f} = \frac{f - d_1' - 18}{f}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f - d_1' - 18}{f} = 10 \cdot \frac{f - d_1'}{f} \Leftrightarrow 10(f - d_1') = f - d_1' - 18$$

$$\Leftrightarrow 9(f - d_1') = -18 \Leftrightarrow d_1' = f + 2 \quad (2)$$

a) Tiêu cự của thấu kính

$$\text{- Ta có: } f = \frac{d_1 d_1'}{d_1 + d_1'}.$$

- Thay (1) và (2) vào biểu thức của f , ta có:

$$f = \frac{(f + 50)(f + 2)}{f + 50 + f + 2} = \frac{(f + 50)(f + 2)}{2f + 52}$$

$$\Leftrightarrow 2f^2 + 52f = f^2 + 5f + 100 \Rightarrow f = 10 \text{ cm}.$$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính hội tụ là $f = 10 \text{ cm}$.

b) Vị trí ban đầu của vật

$$\text{Từ (1) ta có: } d_1 = f + 50 = 10 + 50 = 60 \text{ cm}.$$

Vậy: Vị trí ban đầu của vật là $d_1 = 60 \text{ cm}$.

5.65. Vật cao 5 cm. Thấu kính tạo ảnh cao 15 cm trên màn. Giữ nguyên vị trí thấu kính nhưng dời vật xa thấu kính thêm 1,5 cm. Sau khi dời màn để hứng ảnh rõ của vật, ảnh có độ cao 10 cm.

Tính tiêu cự của thấu kính.

Bài giải

$$\text{- Độ dời của vật: } \Delta d = d_2 - d_1 = 1,5 \text{ cm}.$$

- Vật qua thấu kính tạo ảnh hứng được trên màn thì thấu kính đó là thấu kính hội tụ, ảnh thật nên ảnh và vật ngược chiều:

$$k_1 = \frac{f}{f - d_1} = -3 \Leftrightarrow 3d_1 = 4f \Rightarrow d_1 = \frac{4}{3}f$$

$$\text{Và } k_2 = \frac{f}{f - d_2} = -2 \Leftrightarrow k_2 = \frac{f}{f - d_1 - 1,5} = \frac{f}{f - \frac{4}{3}f - 1,5} = -2$$

$$\Rightarrow f = 2 \cdot \left(\frac{f}{3} + 1,5 \right) \Rightarrow f = 9 \text{ cm}.$$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính là $f = 9 \text{ cm}$.

5.66. Vật AB đặt cách thấu kính hội tụ một đoạn 30 cm . Ảnh A_1B_1 là ảnh thật. Dời vật đến vị trí khác, ảnh của vật là ảnh ảo cách thấu kính 20 cm . Hai ảnh có cùng độ lớn.

Tính tiêu cự.

Bài giải

- Vật qua thấu kính tạo ảnh thật A_1B_1 nên thấu kính là thấu kính hội tụ, ảnh và vật ngược chiều.

$$\text{Ta có: } k_1 = \frac{f}{f - d_1} = \frac{f}{f - 30} < 0$$

- Dời vật đến vị trí khác tạo ảnh ảo cách thấu kính 20 cm , ảnh và vật cùng chiều nên ta có:

$$k_2 = \frac{f - d_2'}{f} = \frac{f + 20}{f} > 0$$

- Vì hai ảnh có cùng độ lớn, khác tính chất nên: $k_2 = -k_1$.

$$\Leftrightarrow \frac{f + 20}{f} = -\frac{f}{f - 30} \Leftrightarrow (f + 20)(f - 30) = -f^2$$

$$\Leftrightarrow f^2 - 5f - 300 = 0 \Rightarrow f = 20 \text{ cm (nhận vì thấu kính hội tụ)} \text{ và } f = -15 \text{ cm (loại)}.$$

Vậy: Tiêu cự của thấu kính là $f = 20 \text{ cm}$.

5.67. Thấu kính hội tụ có chiết suất $n = 1,5$; $R_1 = 10 \text{ cm}$; $R_2 = 30 \text{ cm}$. Vật thật được đặt trên trục chính và vuông góc trục chính tại A . Ảnh thật tạo bởi thấu kính hiện trên màn đặt cách vật đoạn $L = 80 \text{ cm}$. Ảnh lớn hơn vật. Nếu giữ cố định vật và màn thì phải dịch chuyển thấu kính theo chiều nào, bao nhiêu để có được ảnh trên màn nhỏ hơn vật?

Bài giải

Tiêu cự của thấu kính: Từ công thức:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right) = \frac{1}{15} \Rightarrow f = 15 \text{ cm}.$$

- Vì ảnh hứng được trên màn nên là ảnh thật, ta có:

$$L = d_1 + d'_1 = 80 \text{ cm} \Leftrightarrow d_1 + \frac{d_1 f}{d_1 - f} = 80 \Leftrightarrow d_1 + \frac{15d_1}{d_1 - 15} = 80$$

$$\Leftrightarrow d_1^2 - 80d_1 + 1200 = 0 \Rightarrow d_{11} = 60 \text{ cm}; d_{12} = 20 \text{ cm}.$$

$$\text{Và } d'_{11} = L - d_{11} = 80 - 60 = 20 \text{ cm}; d'_{12} = L - d_{12} = 80 - 20 = 60 \text{ cm}.$$

- Vì ảnh lớn hơn vật nên $d'_1 > d_1$ nên ta chọn nghiệm $d_{12} = 20 \text{ cm}; d'_{12} = 60 \text{ cm}$.

- Để ảnh trên màn nhỏ hơn vật thì phải dịch chuyển thấu kính ra xa vật một đoạn:

$$\Delta d = d_2 - d_1 \Rightarrow L = d_2 + d'_2 = 80 \text{ cm}.$$

$$\Leftrightarrow d_2 + \frac{d_2 f}{d_2 - f} = 80 \Leftrightarrow d_2 + \frac{15d_2}{d_2 - 15} = 80 \Leftrightarrow d_2^2 - 80d_2 + 1200 = 0$$

$$\Leftrightarrow d_{21} = 60 \text{ cm}; d_{22} = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Và } d'_{21} = L - d_{21} = 80 - 60 = 20 \text{ cm}; d'_{22} = L - d_{22} = 80 - 20 = 60 \text{ cm}.$$

- Vì ảnh nhỏ hơn vật nên $d'_2 < d_2$ nên ta chọn nghiệm $d_2 = 60 \text{ cm}; d'_2 = 20 \text{ cm}$.

Vậy: Phải dịch chuyển thấu kính ra xa vật một đoạn:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 60 - 20 = 40 \text{ cm}.$$

5.68. Dùng một thấu kính hội tụ để chiếu ảnh của một vật lên màn. Ảnh có độ phóng đại k_1 . Giữ nguyên vị trí thấu kính nhưng dời vật xa thấu kính đoạn a . Dời màn để hứng ảnh lần sau, ảnh có độ phóng đại k_2 . Lập biểu thức của tiêu cự theo k_1, k_2 và a .

Bài giải

$$\text{Ta có: } k_1 = \frac{f}{f - d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{(k_1 - 1)f}{k_1}.$$

$$\text{Và } k_2 = \frac{f}{f - d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{(k_2 - 1)f}{k_2}.$$

- Độ dời của vật: $\Delta d = d_2 - d_1 = a$.

$$\Leftrightarrow d_2 - d_1 = \frac{(k_2 - 1)f}{k_2} - \frac{(k_1 - 1)f}{k_1} = a \Leftrightarrow k_1 k_2 f - k_1 f - k_1 k_2 f + k_2 f = a k_1 k_2$$

$$\Rightarrow f = \frac{a k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

$$\text{Vậy: Tiêu cự của thấu kính là } f = \frac{a k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

5.69. Quả cầu nhỏ đặt trên bề mặt của một thấu kính hội tụ nằm ngang có tụ số (độ tụ) $D = 4 \text{ dp}$. Quả cầu được truyền vận tốc $\vec{v}_0$ thẳng đứng hướng lên ($v_0 = 5 \text{ (m/s)}$).

Hỏi quả cầu có ảnh thật qua thấu kính trong khoảng thời gian bao lâu?

Bài giải

- Nhận xét:

Khi được truyền vận tốc $\vec{v}_0$ thẳng đứng hướng lên, quả cầu sẽ chuyển động chậm dần đều lên trên với gia tốc $-g = -10 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi đạt đến độ cao cực đại, quả cầu lại rơi tự do xuống phía dưới với gia tốc $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Quả cầu có ảnh thật khi khoảng cách giữa quả cầu và thấu kính lớn hơn tiêu cự f (quả cầu nằm ngoài tiêu điểm chính F). Do đó khoảng thời gian quả cầu có ảnh thật là khoảng thời gian quả cầu chuyển động từ F lên đến độ cao cực đại và từ độ cao cực đại về F .

- Tiêu cự của thấu kính: $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$.

- Chọn gốc thời gian lúc ném quả cầu. Các thời điểm quả cầu qua tiêu điểm chính F được xác định bởi phương trình:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \text{ với } s = OF = 0,25 \text{ m}; v_0 = 5 \text{ (m/s)}; g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

$$\Leftrightarrow 0,25 = 5t - 5t^2 \Leftrightarrow t^2 - t + 0,05 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 0,05 \text{ s}; t_2 \approx 0,95 \text{ s}$$

- Khoảng thời gian để quả cầu đi từ tiêu điểm chính F của thấu kính đến khi trở lại F là:

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = |0,95 - 0,05| = 0,9 \text{ s}.$$

Đó chính là khoảng thời gian quả cầu có ảnh thật.

5.70. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 24 \text{ cm}$. Hai điểm sáng S_1, S_2 đặt trên trục chính của thấu kính ở hai bên thấu kính, sao cho các khoảng cách d_1, d_2 từ chúng đến thấu kính thỏa mãn điều kiện $d_1 = 4d_2$. Xác định khoảng cách d_1, d_2 trong hai trường hợp:

a) Ảnh của hai điểm sáng trùng nhau.

b) Ảnh của hai điểm sáng cách nhau 84 cm và ở cùng một bên thấu kính.

Bài giải

a) Ảnh của hai điểm sáng trùng nhau

$$\text{- Sơ đồ tạo ảnh: } S_1 \xrightarrow[\left\{ \begin{smallmatrix} d_1 \\ d_1' \end{smallmatrix} \right\}]{(L)} S_1'; \quad S_2 \xrightarrow[\left\{ \begin{smallmatrix} d_2 \\ d_2' \end{smallmatrix} \right\}]{(L)} S_2'$$

- Khi hai ảnh S'_1 và S'_2 trùng nhau thì một phải là ảnh thật, ảnh kia là ảnh ảo.

$$\text{Do đó: } d'_2 = -d'_1 \Leftrightarrow \frac{d_2 f}{d_2 - f} = -\frac{d_1 f}{d_1 - f} = -\frac{4d_2 f}{4d_2 - f} \quad (d_1 = 4d_2)$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{5f}{8} = \frac{5 \cdot 24}{8} = 15 \text{ cm}; \quad d_1 = 4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}.$$

Vậy: Để ảnh của hai điểm sáng trùng nhau thì $d_1 = 60 \text{ cm}$; $d_2 = 15 \text{ cm}$.

b) Ảnh của hai điểm sáng cách nhau 84 cm và ở cùng một bên thấu kính

Vì hai ảnh của S_1 và S_2 ở cùng một bên của thấu kính và vì $d_1 = 4d_2$ nên ảnh S'_1 của S_1 phải là ảnh thật và ảnh S'_2 của S_2 phải là ảnh ảo.

$$\text{Ta có: } |d'_2 + d'_1| = 84 \Leftrightarrow \left| \frac{d_2 f}{d_2 - f} + \frac{d_1 f}{d_1 - f} \right| = \left| \frac{d_2 f}{d_2 - f} + \frac{4d_2 f}{4d_2 - f} \right| = 84$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{24d_2}{d_2 - 24} + \frac{4 \cdot 24d_2}{4d_2 - 24} \right| = 84 \Leftrightarrow \left| \frac{6d_2}{d_2 - 24} + \frac{24d_2}{4d_2 - 24} \right| = 21$$

$$* \text{ Trường hợp 1: } \frac{6d_2}{d_2 - 24} + \frac{24d_2}{4d_2 - 24} = 21$$

$$\Rightarrow d_{21} = 8 \text{ cm}; \quad d_{22} = 42 \text{ cm} \text{ (loại vì } d_2 > f \text{ nên } S'_2 \text{ của } S_2 \text{ là ảnh thật).}$$

$$\Rightarrow d_2 = 8 \text{ cm}; \quad d_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}.$$

$$* \text{ Trường hợp 2: } \frac{6d_2}{d_2 - 24} + \frac{24d_2}{4d_2 - 24} = -21$$

$$\Rightarrow d_{23} = 20 \text{ cm}; \quad d_{24} = 4,635 \text{ cm} \text{ (loại vì } d_1 = 4 \cdot 4,635 = 18,54 \text{ cm} < f \text{ nên ảnh } S'_1 \text{ của } S_1 \text{ là ảnh ảo).}$$

$$\Rightarrow d_2 = 20 \text{ cm}; \quad d_1 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ cm}.$$

Vậy: Có hai trường hợp để ảnh của hai điểm sáng cách nhau 84 cm và ở cùng một bên thấu kính là:

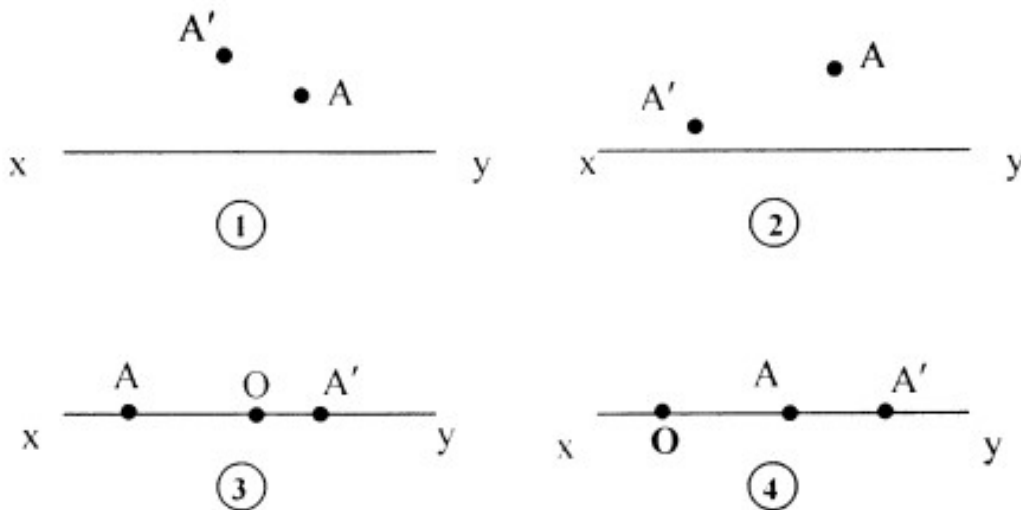
$(d_1 = 32 \text{ cm}; d_2 = 8 \text{ cm})$ và $(d_1 = 80 \text{ cm}; d_2 = 20 \text{ cm})$.

5.71. Trong hình vẽ, xy là trục chính của thấu kính, A là điểm vật thật, A' là ảnh của A tạo bởi thấu kính, O là quang tâm của thấu kính. Với mỗi trường hợp, hãy xác định:

a) A' là ảnh thật hay ảo?

b) Loại thấu kính.

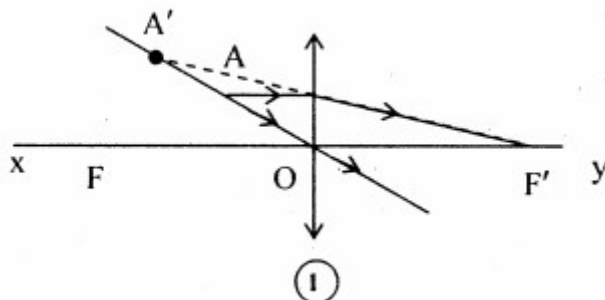
c) Các tiêu điểm chính (bằng phép vẽ).



Bài giải

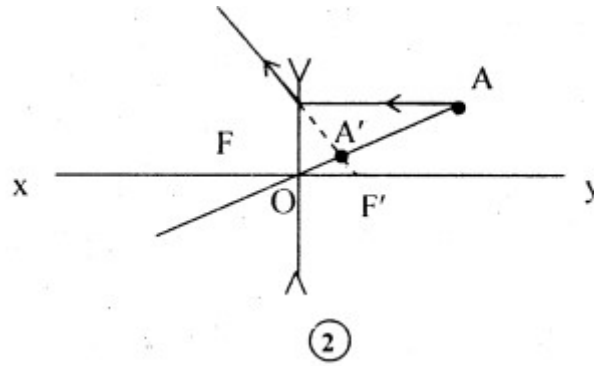
* Hình 1:

- + Vì A và A' nằm cùng phía đối với trục chính nên khi A là điểm vật thật thì A' là ảnh ảo.
- + Vì A' là ảnh ảo nằm xa trục chính hơn điểm vật A nên O là thấu kính hội tụ.
- + Xác định O : Nối AA' cắt trục chính tại O , dựng thấu kính hội tụ vuông góc với trục chính tại O .
- + Xác định F : Vẽ tia AI song song với trục chính, khúc xạ qua ảnh A' cắt trục chính tại F' , lấy F đối xứng với F' qua O .



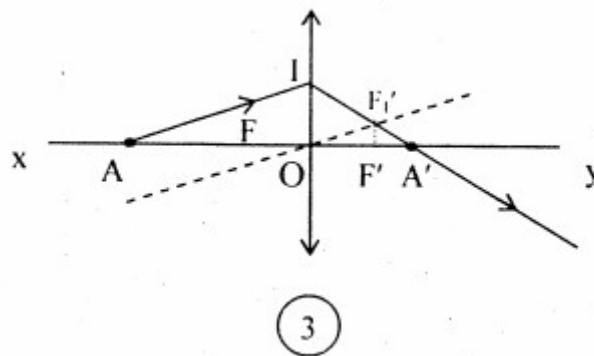
* Hình 2:

- + Vì A và A' nằm cùng phía đối với trục chính nên khi A là điểm vật thật thì A' là ảnh ảo.
- + Vì A' là ảnh ảo nằm gần trục chính hơn điểm vật A nên O là thấu kính phân kì.
- + Xác định O : Nối AA' cắt trục chính tại O , dựng thấu kính phân kì vuông góc với trục chính tại O .
- + Xác định F : Vẽ tia AI song song với trục chính, khúc xạ qua ảnh A' cắt trục chính tại F' , lấy F đối xứng với F' qua O .



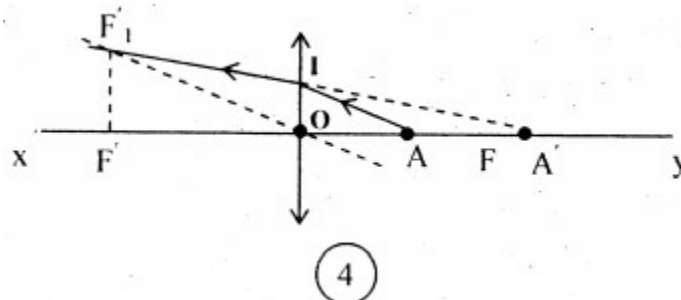
*** Hình 3:**

- + Vì A, A' nằm hai phía của quang tâm O , A là vật thật nên A' là ảnh thật của A nên đây là thấu kính hội tụ.
- + Từ O , dựng thấu kính hội tụ vuông góc với trục chính.
- + Dựng tia sáng bất kì cắt thấu kính tại I , nối IA' cắt trục phụ song song với AI tại tiêu điểm ảnh phụ F'_1 , từ tiêu điểm ảnh phụ hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại tiêu điểm ảnh chính F' .
- + Lấy F đối xứng với F' qua O .

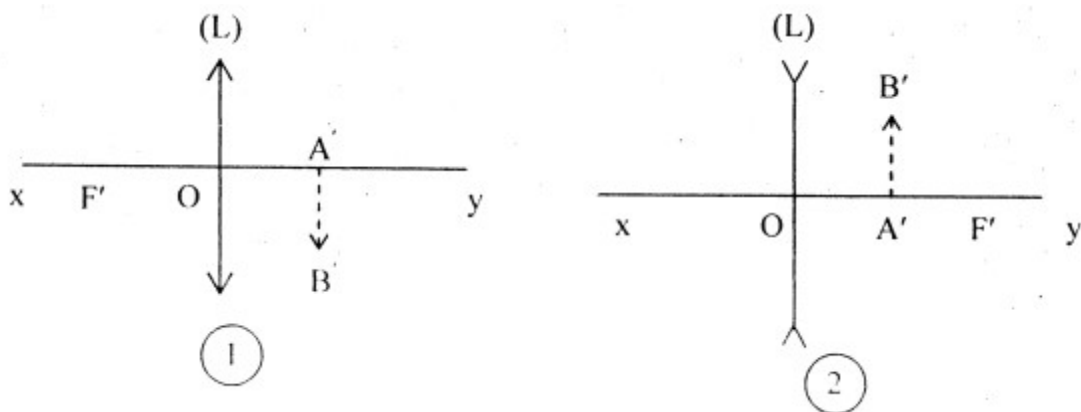


*** Hình 4:**

- + Vì A, A' nằm cùng phía so với quang tâm O , A là vật thật nên A' là ảnh ảo của A , $A'O > AO$ nên đây là thấu kính hội tụ.
- + Từ O , dựng thấu kính hội tụ vuông góc với trục chính.
- + Dựng tia sáng bất kì cắt thấu kính tại I , nối IA' cắt trục phụ song song với AI tại tiêu điểm ảnh phụ F'_1 , từ tiêu điểm ảnh phụ hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại tiêu điểm ảnh chính F' .
- + Lấy F đối xứng với F' qua O .



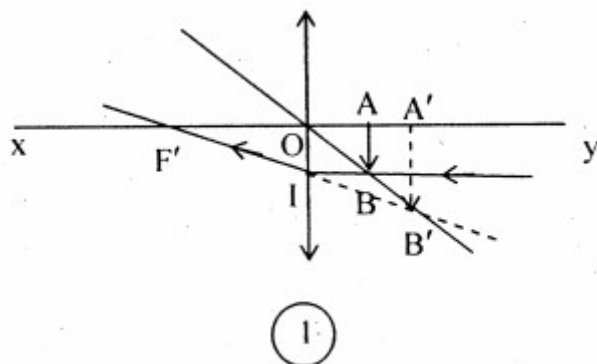
5.72. Trong hình vẽ sau đây, xy là trục chính của thấu kính (L), F' là tiêu điểm ảnh chính của thấu kính, $A'B'$ là ảnh ảo của vật AB . Với mỗi trường hợp, hãy xác định vị trí vật bằng phép vẽ. Nêu cách vẽ.



Bài giải

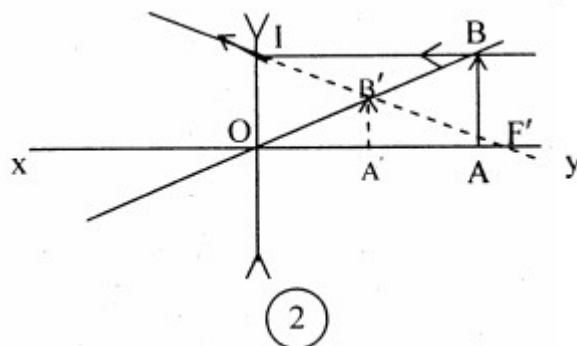
* Hình 1.

- + $A'B'$ là ảnh ảo và nằm khác phía với F' so với thấu kính nên F' nằm bên kia thấu kính so với chiều truyền ánh sáng.
- + Nối $B'F'$ cắt thấu kính tại I , từ I dựng đường thẳng song song với trục chính.
- + Nối $B'O$ cắt đường thẳng song song ở trên tại B .
- + Từ B hạ đường thẳng vuông góc với trục chính và cắt trục chính tại A .



* Hình 2:

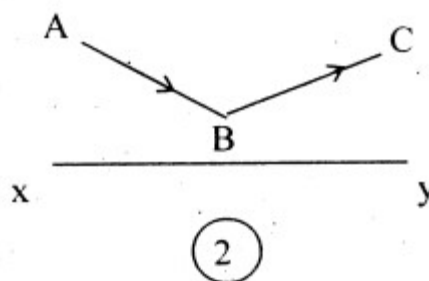
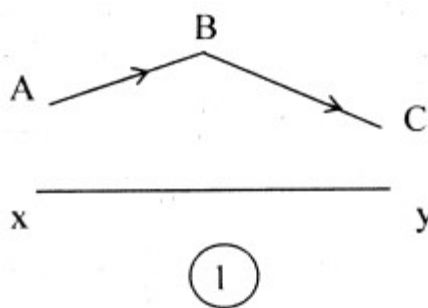
- + $A'B'$ là ảnh ảo và cùng phía với F' so với thấu kính nên F' nằm cùng phía so với chiều truyền ánh sáng.
- + Nối $B'F'$ cắt thấu kính tại I , từ I dựng đường thẳng song song với trục chính.
- + Nối $B'O$ cắt đường thẳng song song ở trên tại B .
- + Từ B hạ đường thẳng vuông góc với trục chính và cắt trục chính tại A .



5.73. Trong hình vẽ sau, xy là trục chính của thấu kính, ABC là đường đi của một tia sáng qua thấu kính. Với mỗi trường hợp, hãy xác định:

a) Loại thấu kính.

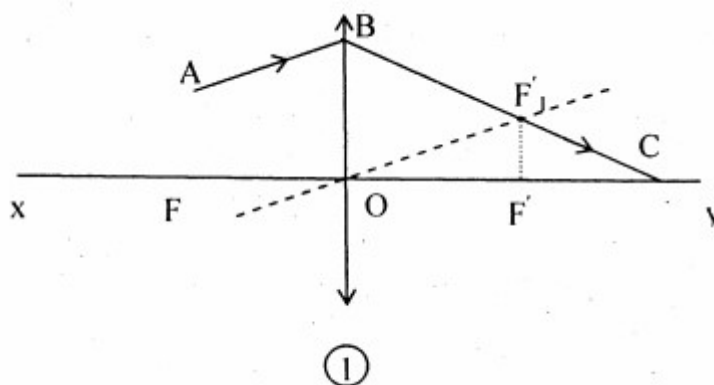
b) Quang tâm, các tiêu điểm chính (bằng phép vẽ).



Bài giải

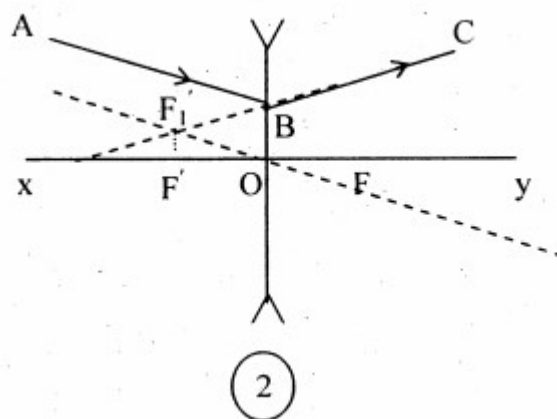
* Hình 1:

- + Từ B, hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại O.
- + Dụng trực phụ song song với AB cắt BC tại F_1' .
- + Từ F_1' hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại F' .
- + Lấy F đối xứng với F' qua O.
- + Vì F' nằm bên kia thấu kính so với tia tới nên thấu kính là thấu kính hội tụ.



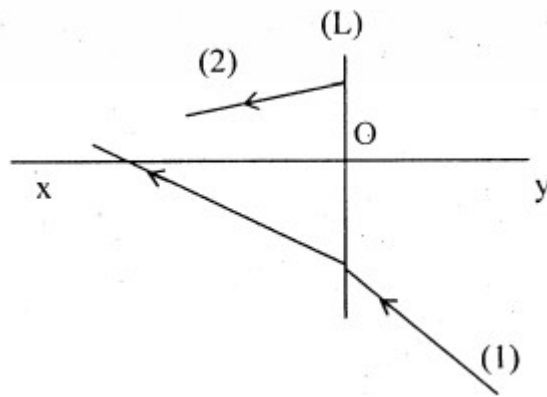
* Hình 2:

- + Từ B, hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại O.
- + Dụng trực phụ song song với AB cắt BC tại F_1' .
- + Từ F_1' hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại F' .
- + Lấy F đối xứng với F' qua O.
- + Vì F' cùng phía với tia tới nên thấu kính là thấu kính phân kì.



5.74. Cho xy là trục chính của thấu kính (L); (1) là đường đi của một tia sáng truyền qua thấu kính. (2) là một phần của tia sáng khác.

Hãy bổ sung phần còn thiếu của (2). Nêu cách vẽ.



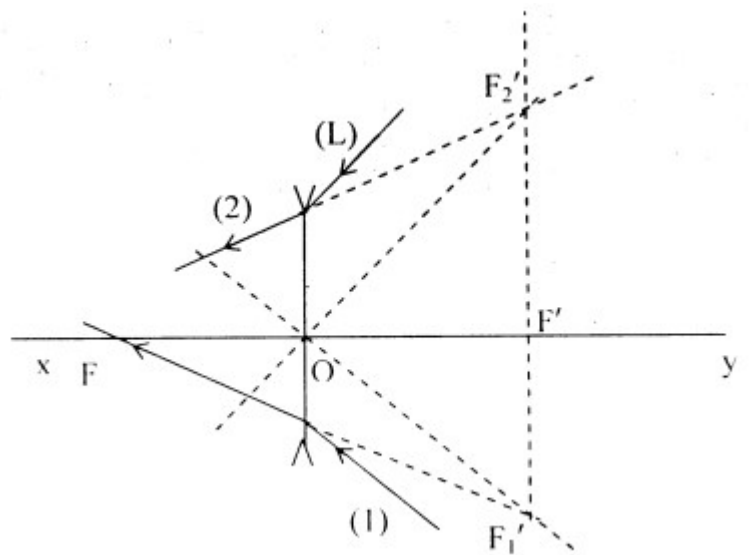
Bài giải

* Xác định F , F' , loại thấu kính:

- + Dụng trục phụ song song với tia tới của (1).
- + Kéo dài tia ló của (1) cắt trục phụ tại F_1' .
- + Từ F_1' hạ đường thẳng vuông góc với trục chính cắt trục chính tại F' .
- + Lấy F đối xứng với F' qua O .
- + Vì F_1' cùng phía với tia tới nên thấu kính là thấu kính phân kì.

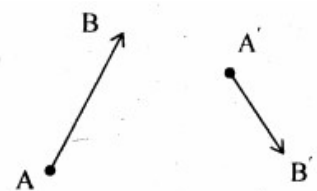
* Vẽ phần còn thiếu của (2):

- + Kéo dài tia ló của (2) cắt tiêu diện ảnh tại F_2' .
- + Nối F_2' và O ta được trục phụ của (2).
- + Vẽ tia tới song song với trục phụ vừa vẽ.



5.75. Trong hình vẽ sau, AB là vật thật, $A'B'$ là ảnh của AB tạo bởi thấu kính. Bằng phép vẽ, hãy xác định:

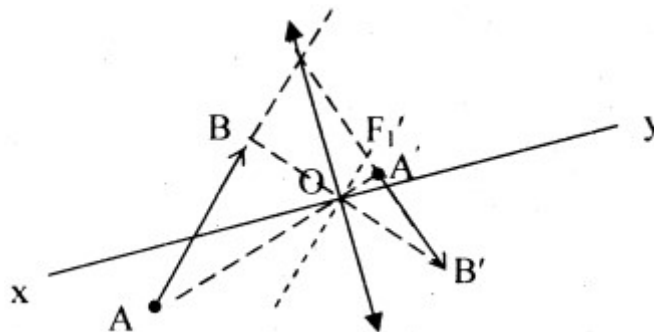
- a) Quang tâm.
- b) Các tiêu điểm chính.



Bài giải

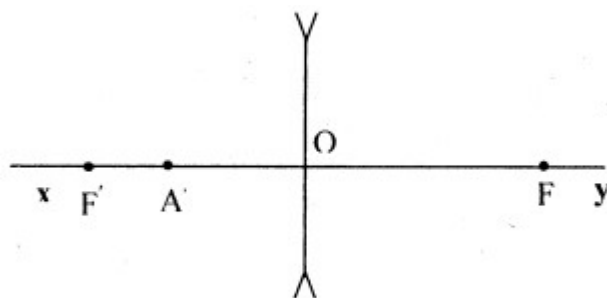
- Nối A với A' , B và B' cắt nhau tại quang tâm O .
- Kéo dài AB và $A'B'$ cắt nhau tại I ; I là một điểm trên thấu kính.
- Dụng thấu kính qua O và I .
- Dụng trục chính qua O , vuông góc với thấu kính.

- Dựng trục phụ tương ứng với tia tới AB , suy ra tiêu điểm phụ tương ứng F'_1 .
- Từ F'_1 hạ đường vuông góc với trục chính, cắt trục chính tại F' : F' là tiêu điểm chính (ảnh).
- Lấy F đối xứng với F' qua quang tâm O : F là tiêu điểm chính (vật).



5.76. Trong hình vẽ dưới, xy là trục chính của thấu kính, A là điểm vật, A' là ảnh của A tạo bởi thấu kính. Bằng phép vẽ, hãy xác định:

- Vị trí của điểm vật A .
- Vị trí của quang tâm O .



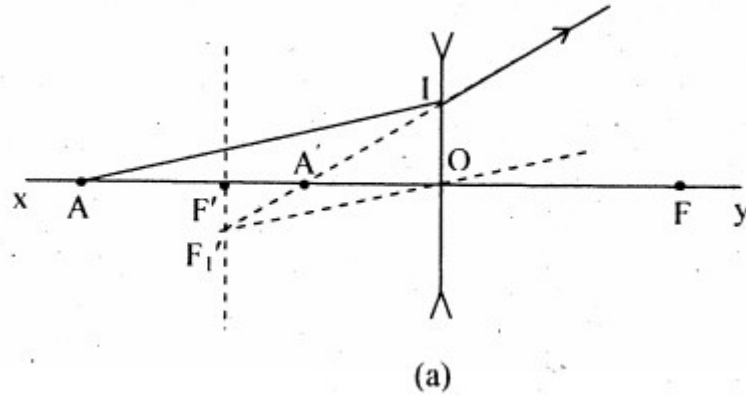
Hình a



Hình b

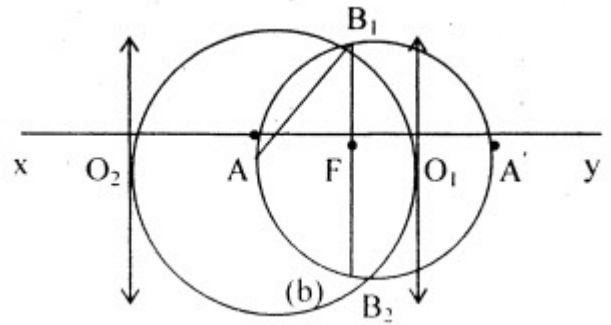
Bài giải

- Xác định vị trí của điểm vật A (hình a):
 - Vì thấu kính phân kì nên F' nằm cùng phía với tia tới so với thấu kính nên tia tới sẽ truyền từ trái sang phải.
 - Vẽ tia ló bất kì qua ảnh A' cắt tiêu diện ảnh tại tiêu điểm ảnh phụ F'_1 , cắt thấu kính tại I .
 - Nối F'_1 và O ta được trục phụ ứng với tia tới tương ứng.
 - Từ I dựng tia tới song song với trục phụ cắt trục chính tại A : A là vị trí của điểm đặt vật.



b) Vị trí của quang tâm O (hình b)

- Vẽ đường tròn đường kính AA' .
- Kẻ đường thẳng vuông góc với AA' qua F cắt đường tròn tại B_1 và B_2 .
- Vẽ đường tròn tâm A bán kính $d = AB_1 = AB_2$ cắt trục chính tại O_1 và O_2 : O_1 và O_2 là vị trí quang tâm của các thấu kính có tiêu cự khác nhau f_1 và f_2 .



5.77. Hãy giải bằng phép vẽ:

- Thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Xác định vị trí của vật để có ảnh ảo bằng 5 lần vật.
- Thấu kính phân kì có tiêu cự $f = -20$ cm. Xác định vị trí của vật để có ảnh thật bằng 4 lần vật.

Bài giải

a) Với thấu kính hội tụ

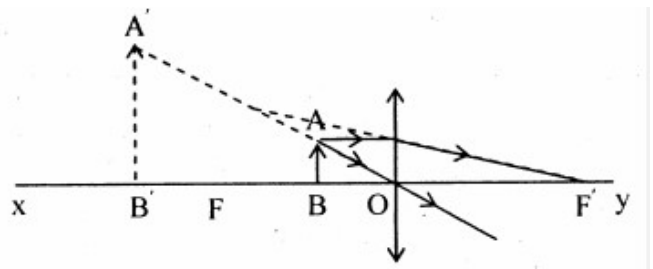
* **Trường hợp 1:** Vật thật cho ảnh ảo bằng 5 lần vật

Ta có: $k = 5$

$$\Leftrightarrow k = \frac{f}{f - d} = \frac{30}{30 - d} = 5$$

$$\Leftrightarrow 30 = 150 - 5d$$

$$\Rightarrow d = 24 \text{ cm.}$$



* **Trường hợp 2:** Vật ảo cho ảnh ảo bằng 5 lần vật

Trường hợp này không xảy ra vì vật ảo qua thấu kính hội tụ luôn luôn cho ảnh thật cùng chiều, nhỏ hơn vật.

Vậy: Với thấu kính hội tụ, để vật cho ảnh ảo bằng 5 lần vật thì vị trí của vật phải là $d = 24$ cm (vật thật).

b) Với thấu kính phân kì

* **Trường hợp 1:** Vật thật cho ảnh thật bằng 4 lần vật

Trường hợp này không xảy ra vì vật thật qua thấu kính phân kì luôn luôn cho ảnh ảo cùng chiều, nhỏ hơn vật.

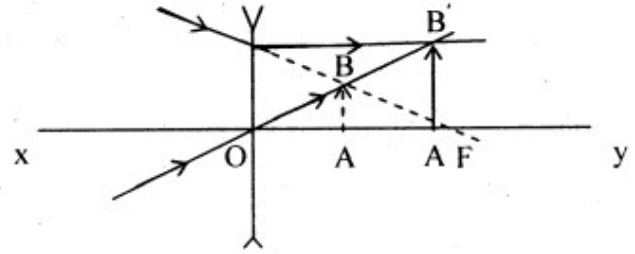
* **Trường hợp 2:** Vật ảo cho ảnh thật bằng 4 lần vật

Ta có: $k = -4$

$$\Leftrightarrow k = \frac{f}{f-d} = \frac{-20}{-20-d} = -4$$

$$\Leftrightarrow 20 = -80 - 4d$$

$$\Rightarrow d = -25 \text{ cm}.$$



Vậy: Với thấu kính phân kì, để vật cho ảnh ảo bằng 4 lần vật thì vị trí của vật phải là $d = -24 \text{ cm}$ (vật ảo).

5.78. Vật thật có ảnh thật bằng $|k_1|$ lần vật tạo bởi một thấu kính. Tịnh tiến vật đoạn l dọc theo trục chính thì ảnh của vật vẫn thật nhưng gấp $|k_2|$ lần vật ($|k_2| > |k_1| > 1$).

a) Xác định loại thấu kính.

b) Xác định chiều tịnh tiến của vật

c) Cho $|k_1| = 2$; $|k_2| = 4$. Bằng phép vẽ hãy xác định O, F, F' .

Bài giải

a) Xác định loại thấu kính

Vì vật thật cho ảnh thật nên thấu kính trên là thấu kính hội tụ.

b) Xác định chiều tịnh tiến của vật

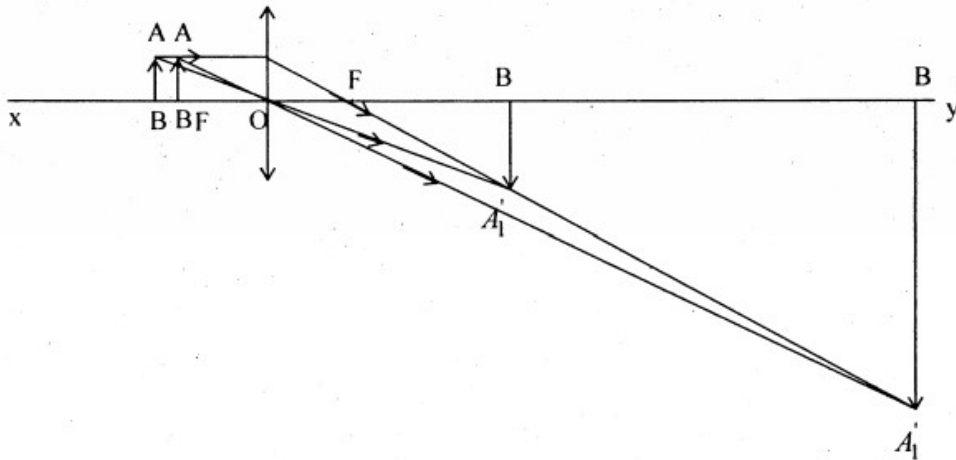
Tịnh tiến vật thì ảnh của vật vẫn thật nhưng gấp $|k_2|$ lần vật ($|k_2| > |k_1| > 1$): ảnh lớn hơn nên ảnh chuyển động ra xa ảnh thấu kính. Vì ảnh và vật chuyển động cùng chiều nên vật sẽ tịnh tiến lại gần thấu kính đoạn l .

c) Xác định O, F, F' bằng phép vẽ

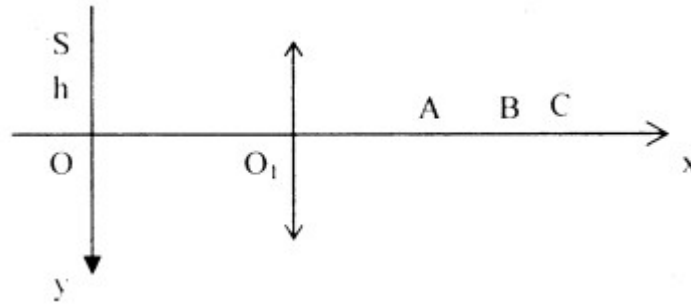
- Nối A_1 và A'_1 , A_2 và A'_2 ta được quang tâm O .

- Nối A_1 và A_2 ta được tia tới song song với trục chính, từ O dựng trục chính song song với A_1A_2 , dựng thấu kính hội tụ qua O vuông góc với trục chính.

- A_1A_2 cắt thấu kính tại I . Nối I với A'_1 cắt trục chính tại F' , lấy F đối xứng với F' qua O .



5.79. Cho hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxy . Một thấu kính hội tụ, quang tâm O_1 , được đặt sao cho trục chính trùng với Ox , S là điểm sáng nằm trước thấu kính. Gọi S' là ảnh của S qua thấu kính.



1. Lúc đầu S nằm trên Oy , cách thấu kính một khoảng bằng tiêu cự của thấu kính, cách O một khoảng bằng h . Giữ S cố định, dịch chuyển thấu kính ra xa dần S sao cho trục chính luôn luôn trùng với Ox .

a) Lập phương trình quỹ đạo $y = f(x)$ của S' . Biết tiêu cự của thấu kính là f . Phác họa quỹ đạo này và chỉ rõ chiều dịch chuyển của ảnh khi thấu kính dịch chuyển ra xa dần S .

b) Trên trục Ox có ba điểm A, B, C (hình vẽ). Biết $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$. Khi thấu kính dịch chuyển từ A tới B thì S' lại gần trục Oy thêm 9 cm , khi thấu kính dịch chuyển từ B tới C thì S' lại gần trục Oy thêm 1 cm . Tìm tọa độ điểm A và tiêu cự của thấu kính.

2. Giả sử điểm sáng S cách thấu kính một khoảng lớn hơn tiêu cự của thấu kính. Giữ thấu kính cố định, ảnh S' sẽ di chuyển thế nào nếu dịch chuyển S lại gần thấu kính theo một đường thẳng bất kì?

(Trích Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia, Năm 2005)

Bài giải

1. Trường hợp S nằm trên Oy

Phương trình quỹ đạo $y = f(x)$ của S'

Gọi k là số phóng đại, d là khoảng cách vật và d' là khoảng cách ảnh (hình a).

Ta có:

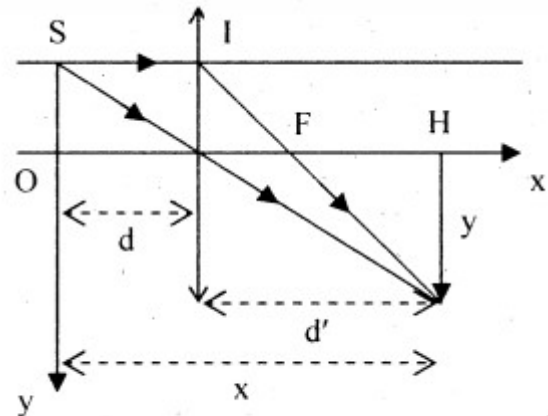
$$\frac{y}{h} = \frac{f}{d-f} \Rightarrow d = f + \frac{hf}{y}$$

$$d' = \frac{df}{d-f} = \frac{\left(f + \frac{hf}{y}\right)f}{\frac{hf}{y}} = \frac{fy}{h} + f$$

$$x = d + d' = 2f + \frac{hf}{y} + \frac{fy}{h}$$

- Quỹ đạo của ảnh là một phần đồ thị của hàm số:

$$x = 2f + \frac{hf}{y} + \frac{fy}{h}.$$



Hình a

Đó là một nhánh của hypebol có tiệm cận ngang $x = 0$; tiệm cận xiên: $x = 2f + \frac{fy}{h}$ (hình b).

- Theo giả thiết, lúc đầu S cách thấu kính một khoảng f , ảnh S' ở xa vô cùng. Sau đó, khi dịch chuyển thấu kính ra xa dần: $d > f$, ảnh luôn là thật và lại gần trục chính nên ảnh dịch chuyển theo chiều mũi tên cho tới khi $d = 2f$ thì x đạt cực tiểu và bằng $4f$ và sau đó ảnh ra xa dần vật và dịch chuyển lại gần trục chính (hình b).

b) Tọa độ điểm A và tiêu cự của thấu kính

- Khi đặt thấu kính tại B , ta có: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$; $f^2 = (d - f)(d' - f) = xx'$.

$$f^2 = xx' \quad (1)$$

- Khi đặt thấu kính tại A , ta có: x giảm 6cm; x' tăng $(6+9) = 15$ cm nên:

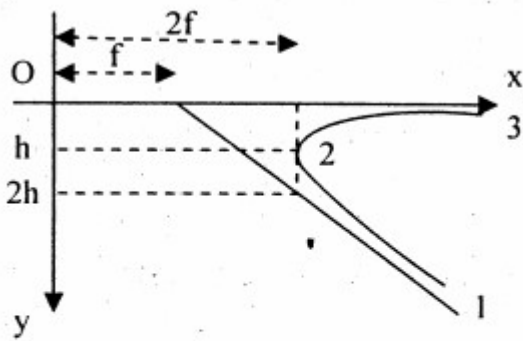
$$f^2 = (x - 6)(x' + 15) \quad (2)$$

- Khi đặt thấu kính tại C , ta có: x tăng 4cm, x' giảm $(4+1) = 5$ cm nên:

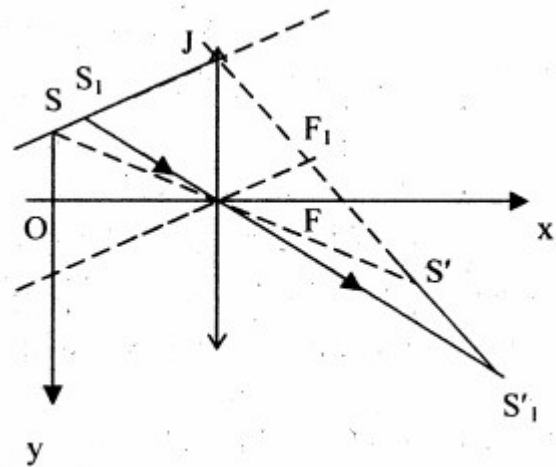
$$f^2 = (x + 4)(x' - 5) \quad (3)$$

- Giải hệ (1), (2) và (3) ta được: $x = 16$ cm; $x' = 25$ cm, $f = 20$ cm.

Vậy: Tọa độ điểm A và tiêu cự của thấu kính là $x = 16$ cm và $f = 20$ cm.



Hình b



Hình c

2. Chiều dịch chuyển của ảnh S' khi dịch chuyển S lại gần thấu kính.

Giữ thấu kính cố định, dịch chuyển S lại gần thấu kính theo một đường thẳng SJ cố định bất kì (J là điểm cắt của đường thẳng với thấu kính). Dụng tiêu điểm phụ F_1 đối với tia SJ . Qua cách dựng ảnh của S , ta thấy rằng, khi $S \rightarrow J$ ở ngoài khoảng tiêu cự, ảnh S' của nó là ảnh thật, nằm trên đường thẳng cố định JF_1 ở phía bên phải thấu kính và tiến đến vô cùng theo chiều JF_1 . Khi $S \rightarrow J$ ở trong khoảng tiêu cự, ảnh S' của nó là ảnh ảo, nằm trên đường thẳng cố định JF_1 ở phía bên trái thấu kính và tiến đến J theo chiều JF_1 (hình c).