SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM	**KỲ THI OLYMPIC 24/3 TỈNH QUẢNG NAM NĂM 2021**
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi : **TOÁN 10** Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi : **20/03/2021**

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Giải phương trình $3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}-4\sqrt{-x^2+4x-3}-2=0.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y-2x-\sqrt{xy}=0 \\ x^2+2x-y+3-2(y-3x-2)\sqrt{2x-1}=0 \end{cases}$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho hàm số $y=\begin{cases} -x+1+\sqrt{3-x} & \text{khi } x\le 3 \\ x^2-6x+12 & \text{khi } x>3 \end{cases}$ có đồ thị (C).

Tìm tất cả các điểm trên đồ thị (C) có tung độ bằng 4.

b) Cho parabol (P): $y=x^2+bx+c$. Tìm các hệ số b,c để (P) đi qua $A(2;1)$ và cắt trục hoành tại hai điểm B,C sao cho tam giác IBC đều, với I là đỉnh của (P).

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=3x+\dfrac{1}{2x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y+xy=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}$.

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC, N nằm trên cạnh CD sao cho $NC=2ND$, K là trung điểm của AB. Hai điểm I, J lần lượt là trọng tâm của hai tam giác AMN, BCN.

Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{IJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ và chứng minh IJ vuông góc với DK.

b) Cho tam giác ABC có $AB=2\sqrt{3}, AC=4, \widehat{BAC}=150^0$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM}=120^0$. Tính độ dài các đoạn thẳng MB, MC.

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$ và đường thẳng (d) có phương trình $2x-y+1=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại $B(1;3)$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại B. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và $I(7;3)$ là trọng tâm của tam giác ABN. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $IE=IA$ (E khác A) và đường thẳng IE có phương trình $x+2y-13=0$. Điểm M thuộc đường thẳng $(d_1): x+3y-12=0$, B thuộc đường thẳng $(d_2): x+y+2=0$ và A có hoành độ lớn hơn 5. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

——————— Hết ———————

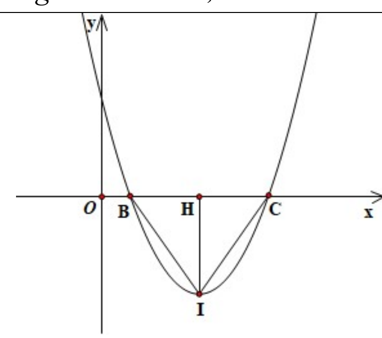
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ……………………………………… Số báo danh: ………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

KỲ THI OLYMPIC 24/3 TỈNH QUẢNG NAM
NĂM 2021
ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
Môn thi: TOÁN 10
(*Đáp án – Thang điểm gồm 06 trang*)

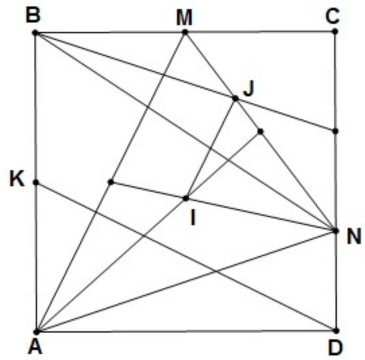
Câu	Đáp án	Điểm
	a) Giải phương trình $3\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}-4\sqrt{-x^2+4x-3}-2=0$	**<u>2,5</u>**
	Điều kiện: $1\le x\le 3$.	
	$3\sqrt{x-1}-4\sqrt{-x^2+4x-3}+3\sqrt{3-x}-2=0$ $\Leftrightarrow 3(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})-4\sqrt{(x-1)(3-x)}-2=0$ (1)	
	Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ $(t\ge 0)\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{(x-1)(3-x)}$	
	Phương trình (2) trở thành: $3t-2(t^2-2)-2=0$	
	$\Leftrightarrow -2t^2+3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{1}{2}\ \text{(loai)}\end{array}\right.$	
	$t=2\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2\Leftrightarrow x=2$ (thỏa).	
Câu 1 (5,0 điểm)	*b) Giải hệ phương trình* $\begin{cases} y-2x-\sqrt{xy}=0 \\ x^2+2x-y+3-2(y-3x-2)\sqrt{2x-1}=0\end{cases}$	**<u>2,5</u>**
	Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2},\ y\ge 0$	
	$y-2x-\sqrt{xy}=0\Leftrightarrow (y-x)-(x+\sqrt{xy})=0\Leftrightarrow (\sqrt{y}-2\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})=0$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{y}-2\sqrt{x}=0\ \ (\sqrt{y}+\sqrt{x}>0)\Leftrightarrow y=4x$	
	Khi đó pt thứ hai viết lại: $x^2-2x+3-2(x-2)\sqrt{2x-1}=0$	
	$\left(x^2-4x+4\right)-2(x-2)\sqrt{2x-1}+(2x-1)=0$	
	$\Leftrightarrow \left(x-2-\sqrt{2x-1}\right)^2=0$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-6x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5$	
	Suy ra được nghiệm của hệ: (5 ; 20).	

Câu 2 (4,0 điểm)	*a) Cho hàm số* $y=\begin{cases}-x+1+\sqrt{3-x} & \text{khi } x\le 3\\ x^2-6x+12 & \text{khi } x>3\end{cases}$ *có đồ thị (C).* *Tìm tất cả các điểm trên đồ thị (C) có tung độ bằng* 4.	**2,0**
	• $y=-x+1+\sqrt{3-x}\ (x\le 3)$ $y=4\Leftrightarrow -x+1+\sqrt{3-x}=4\Leftrightarrow \sqrt{3-x}=x+3$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3\ge 0\\ 3-x=(x+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x^2+7x+6=0\end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x=-1\vee x=-6\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow A(-1;4)$	
	• $y=x^2-6x+12\ (x>3)$ $y=4\Leftrightarrow x^2-6x+12=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2(\text{loai})\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow B(4;4)$	
	Vậy có hai điểm thỏa đề $A(-1;4),\ B(4;4)$.	
	b) Cho parabol $(P): y=x^2+bx+c$ *. Tìm các hệ số* b,c *để* (P) *đi qua* $A(2;1)$ *và cắt trục hoành tại hai điểm* B,C *sao cho tam giác* IBC *đều, với* I *là đỉnh của* (P).	**2,0**
	 ▪ Parabol $y=x^2+bx+c$ đi qua $A(2;1)$ nên $2b+c=-3$ (1)	
	▪ Phương trình hoành độ giao điểm của *(P)* và trục hoành là $x^2+bx+c=0$ (*) *(P)* cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt *B*, *C* $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow \Delta=b^2-4c>0$ ▪ Parabol *(P)* có đỉnh $I(-\frac{b}{2};\frac{4c-b^2}{4})$	
	▪ Giả sử : $B(x_1;0),\ C(x_2;0)$; trong đó x_1,x_2 là hai nghiệm của pt (*) Tam giác *IBC* đều khi $IH=BC.\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left\|\frac{4c-b^2}{4}\right\|=\|x_1-x_2\|.\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{(4c-b^2)^2}{16}=\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right].\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{(4c-b^2)^2}{16}=(b^2-4c).\frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow (b^2-4c)^2=12(b^2-4c)\Leftrightarrow b^2-4c=12$ (2)	
	Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases}2b+c=-3\\ b^2-4c=12\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ c=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}b=-8\\ c=13\end{cases}$.	

Câu 3 (4,0 điểm)	*a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $f(x)=3x+\frac{1}{2x}$ *trên nửa khoảng* $[1;+\infty)$.	**1,5**
	$f(x)=3x+\frac{1}{2x}=\frac{5x}{2}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)$	
	$\geq\frac{5.1}{2}+2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x}}=\frac{7}{2}$	
	Dấu " = " xảy ra khi $\begin{cases}x=1\\ \frac{x}{2}=\frac{1}{2x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ là $\frac{7}{2}$.	
	b) Cho hai số thực dương x,y *thỏa mãn* $x+y+xy=3$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}}+\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}$.	**<u>2.5</u>**
	Đặt $t=x+y$, $t>0$, ta có: $3=x+y+xy\leq x+y+\frac{(x+y)^2}{4}=t+\frac{t^2}{4}$ $\Rightarrow t^2+4t-12\geq 0\Rightarrow (t+6)(t-2)\geq 0\Rightarrow t\geq 2$. Suy ra $x+y\geq 2$ (dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$).	
	$P=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}}+\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}=\frac{2x^2}{\sqrt{4x(x+3y)}}+\frac{2y^2}{\sqrt{4y(y+3x)}}$ $\geq\frac{4x^2}{5x+3y}+\frac{4y^2}{5y+3x}$ (bất đẳng thức Côsi)	
	$\geq\frac{4(x+y)^2}{8(x+y)}$ (bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$ với $x>0,\ y>0$)	
	$=\frac{x+y}{2}\geq 1$ Suy ra: $P\geq 1$, $P=1\Leftrightarrow x=y=1$. Vậy $\min P=1$ khi $x=y=1$.	

Câu 4 (3,0 điểm)

a) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của BC, N nằm trên cạnh CD sao cho $NC = 2ND$, K là trung điểm của AB. Hai điểm I, J lần lượt là trọng tâm của hai tam giác AMN, BCN. Hãy biểu thị $\overrightarrow{IJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$; chứng minh IJ vuông góc với DK. — **1,5**



$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

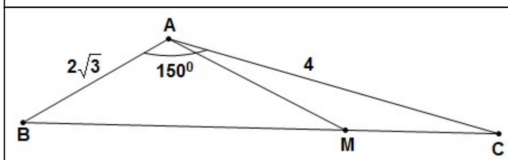
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DK} = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD})(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{6}AB^2 - \frac{1}{6}AD^2 = 0$$

Suy ra IJ vuông góc với DK.

b) Cho tam giác ABC có $AB = 2\sqrt{3}, AC = 4, \widehat{BAC} = 150^0$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 120^0$. Tính MB, MC. — **1,5**



$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AM.\sin\widehat{BAM}}{\frac{1}{2}.AM.AC.\sin\widehat{MAC}} = \frac{3}{2}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}} = 2\sqrt{13}$$

$$MB = \frac{3}{5}BC = \frac{6\sqrt{13}}{5}$$

$$MC = \frac{2}{5}BC = \frac{4\sqrt{13}}{5}$$

Cách khác :

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC}$$

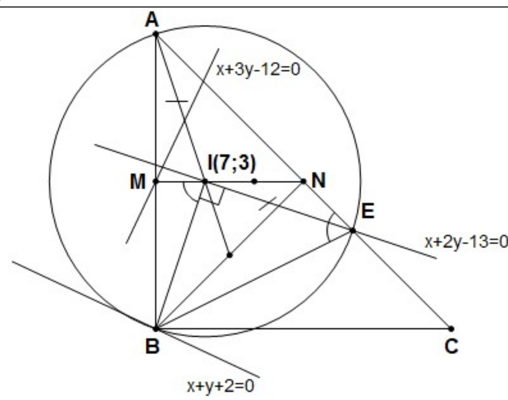
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.AB.AM.\sin\widehat{BAM} + \frac{1}{2}.AM.AC.\sin\widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.4.\sin 150^0 = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.AM.\sin 120^0 + \frac{1}{2}.AM.4.\sin 30^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.4.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.AM.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.AM.4.\frac{1}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2 - 2.AB.AM.\cos\widehat{BAM}} = \frac{6\sqrt{13}}{5}$$

$$MC = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2.AM.AC.\cos\widehat{MAC}} = \frac{4\sqrt{13}}{5}$$

	a) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm* $A(3;1)$ *và đường thẳng (d) có phương trình* $2x-y+1=0$. *Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại* $B(1;3)$.	**1,5**
	+ Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn *(C)*. + $\overrightarrow{BI}=(a-1;b-3)$ + *(d)* có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2)$	
	+ *Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại* $B(1;3)$ *nên* $\overrightarrow{BI}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(a-1)+2(b-3)=0 \Leftrightarrow a+2b=7$ (1)	
	+ *Đường tròn (C) đi qua A(3;1) nên AI = BI* $\Leftrightarrow a-b=0$ (2)	
	Từ (1) và (2) suy ra $a=b=\frac{7}{3}$. Suy ra $I(\frac{7}{3};\frac{7}{3})$.	
	Bán kính của đường tròn là $R=IA=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.	
	Suy phương trình đường tròn (*C*): $(x-\frac{7}{3})^2+(y-\frac{7}{3})^2=\frac{20}{9}$	
	b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông cân tại *B*. Các điểm *M,N* lần lượt là trung điểm của *AB*, *AC* và $I(7;3)$ là trọng tâm của tam giác ABN. Điểm E thuộc cạnh *AC* sao cho $IE=IA$ (E khác A) và đường thẳng IE có phương trình $x+2y-13=0$. Điểm *M* thuộc đường thẳng $(d_1): x+3y-12=0$, *B* thuộc đường thẳng $(d_2): x+y+2=0$ và *A* có hoành độ lớn hơn 5. Tìm tọa độ các điểm *A*, *B*, *C*.	**2,5**
Câu 5 (4,0 điểm)	 (HV: 0,25 điểm)	
	Chứng minh được tứ giác *BINE* nội tiếp và suy ra $\widehat{BIE}=90^0$.	
	Viết được phương trình đường thẳng *BI* là $2x-y-11=0$.	
	Mặt khác B thuộc $(d_2): x+y+2=0$,suy ra $B(3;-5)$.	
	M thuộc $(d_1) \Rightarrow M(12-3m;m)$ $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;3) \\ M(9;1) \end{array}\right.$	
	$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(3;11) \text{ (loai)} \\ A(15;7) \end{array}\right.$. Vậy $M(9;1), A(15;7)$.	
	$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MI} \Rightarrow N(3;7)$	
	Suy ra ptđt *AC* là $y=7 \Rightarrow C(-9;7)$.	

Ghi chú:

▪ Trong những ý chưa phân rã ra 0,25đ thì nếu cần Ban Giám khảo có thể thống nhất rã ra chi tiết 0,25đ, nhưng lưu ý tổng điểm cả ý đó vẫn không đổi ;

▪ Nếu học sinh có cách giải khác đúng, chính xác và logic thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho điểm phù hợp với Hướng dẫn chấm.