

§ I. BẤT ĐẲNG THỨC



Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Nhân hai vế	một số dương: $c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
	một số âm: $c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều		$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$	(3)
Nhân từng vế BĐT khi biết nó dương		$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac > bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	Mũ chẵn	$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
Lấy căn hai vế	$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)
Nghịch đảo	Nếu a, b cùng dấu: $ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(7a)
	Nếu a, b trái dấu: $ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(7b)

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (AM – GM)

① $\forall a \geq 0; b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

② $\forall a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXSKI (CAUCHY SCHWARZ)

① $\forall x; y; a; b \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ |a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, ($a; b \neq 0$).

② $\forall x; y; z; a; b; c \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ |a.x + b.y + c.z| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ($a; b; c \neq 0$).

③ $\forall x; y \in \mathbb{R}$ và $a > 0, b > 0$ thì $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

④ $\forall x; y; z \in \mathbb{R}$ và $a > 0, b > 0, c > 0$ thì $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Câu 1. Cho bất đẳng thức $|a - b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

A. $a = b$.

B. $ab \leq 0$.

C. $ab \geq 0$.

D. $ab = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 3|x| \geq 0.$

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) \geq 0$ và $f(1) = 0$; $f(x) \leq 1$ và $f(0) = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.

B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.

D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $0 < f(x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Vậy $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 5. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$.

B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.

C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$.

D. không có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì a và b là hai số bất kì nên không xác định được giá trị lớn nhất của tích ab .

Câu 6. Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn đồng thời: $a+b-c > 0$; $b+c-a > 0$; $c+a-b > 0$. Để ba số $a; b; c$ là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

A. Cần có cả $a, b, c \geq 0$.

B. Cần có cả $a, b, c > 0$.

C. Chỉ cần một trong ba số a, b, c dương

D. Không cần thêm điều kiện gì.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 7. Trong các hình chữ nhật có cùng chi vi thì

A. Hình vuông có diện tích nhỏ nhất.

B. Hình vuông có diện tích lớn nhất.

- C. Không xác định được hình có diện tích lớn nhất.
 D. Cả A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ý nghĩa hình học của bất đẳng thức Cô si.

Câu 8. Tìm mệnh đề đúng?

- A. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
 B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
 C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.
 D. $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 9. Suy luận nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.
 B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.
 C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$.
 D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 10. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
 B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.
 C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
 D. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
 B. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
 C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
 D. Cả A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
 B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
 C. $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.
 D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b, (c > 0)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tính chất của bất đẳng thức.

Câu 13. Cho biểu thức $P = -a + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.
 B. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$.
 C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$.
 D. P đạt giá trị lớn nhất tại $a = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $P = -a + \sqrt{a} = -(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

- A. $\frac{11}{4}$. B. $\frac{4}{11}$. C. $\frac{11}{8}$. D. $\frac{8}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}; \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \frac{8}{11}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{8}{11}$.

Câu 15. Cho $f(x) = x - x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$. D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$f(x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Câu 16. Bất đẳng thức $(m+n)^2 \geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

- A. $n(m-1)^2 - m(n-1)^2 \geq 0$. B. $m^2 + n^2 \geq 2mn$.
C. $(m+n)^2 + m - n \geq 0$. D. $(m-n)^2 \geq 2mn$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$(m+n)^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + 2mn + n^2 \geq 4mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn$.

Câu 17. Với mọi $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- A. $a - b < 0$. B. $a^2 - ab + b^2 < 0$. C. $a^2 + ab + b^2 > 0$. D. $a - b > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0; \forall b \neq 0$.

Câu 18. Với hai số x, y dương thoả $xy = 36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12$. B. $x + y \geq 2xy = 72$. C. $4xy \leq x^2 + y^2$. D. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy = 36$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho hai số không âm x, y . Ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{36} = 12$.

Câu 19. Cho hai số x, y dương thoả $x + y = 12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\sqrt{xy} \leq 6$. B. $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 36$.
C. $2xy < x^2 + y^2$. D. $\sqrt{xy} \geq 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x, y . Ta có: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 6$.

- Câu 20.** Cho x, y là hai số thực bất kỳ thỏa $xy = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$.
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số không âm x^2 và y^2 . Ta có:

$$A = x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2\sqrt{(xy)^2} = 4. \text{ Đẳng thức xảy ra } x = y = \sqrt{2}.$$

- Câu 21.** Cho $a > b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x > y$. B. $x < y$.
C. $x = y$. D. Không so sánh được.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a+1} \text{ và } \frac{1}{y} = b + \frac{1}{b+1}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = (a-b) \left[1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)} \right]$$

$$\text{Do } a > b > 0 \text{ nên } a+1 > 1 \text{ và } b+1 > 1 \text{ suy ra: } \frac{1}{(a+1)(b+1)} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)} > 0.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \text{ do } x > 0 \text{ và } y > 0 \text{ nên } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Leftrightarrow x < y.$$

- Câu 22.** Với $a, b, c, d > 0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề sai?

- A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$. B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.
C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a-b)c}{b(b+c)} \text{ suy ra A, B đúng.}$$

- Câu 23.** Hai số a, b thỏa bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

- A. $a < b$. B. $a > b$. C. $a = b$. D. $a \neq b$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\frac{a^2+b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2 \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=b.$$

- Câu 24.** Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Một học sinh làm như sau:

$$\text{I) } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \quad (1)$$

$$\text{II) } (1) \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

$$\text{III) và } (a-b)^2 \geq 0 \text{ đúng } \forall a, b > 0 \text{ nên } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Cách làm trên :

- A. Sai từ I).
C. Sai ở III).

- B. Sai từ II).
D. Cả I), II), III) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 25. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức sau:

$$I) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \quad II) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3. \quad III) (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

Bất đẳng thức nào đúng?

- A. Chỉ I) đúng. B. Chỉ II) đúng. C. Chỉ III) đúng. D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow (I) \text{ đúng; } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow (II) \text{ đúng;}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{array} \right\} \Rightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 26. Cho các bất đẳng thức: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (I), $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ (II), $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (III) (với $a, b, c > 0$). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

- A. chỉ I đúng. B. chỉ II đúng. C. chỉ III đúng. D. I, II, III đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \Rightarrow (I) \text{ đúng; } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \Rightarrow (II) \text{ đúng;}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{array} \right. \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 27. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

$$I) a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad II) (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad III) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 9.$$

Bất đẳng thức nào đúng:

- A. Chỉ I) và II) đúng. B. Chỉ I) và III) đúng.
C. Chỉ I) đúng. D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

• $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (I) \text{ đúng;}$

• $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{array} \right. \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow (II) \text{ đúng;}$

• $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow (III) \text{ sai.}$

Câu 28. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

$$I) \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{a} \right) \geq 8. \quad II) \left(\frac{2}{a} + b + c \right) \left(\frac{2}{b} + c + a \right) \left(\frac{2}{c} + a + b \right) \geq 64.$$

III) $a+b+c \leq abc$. Bất đẳng thức nào đúng?

- A. Chỉ I) đúng. B. Chỉ II) đúng.
C. Chỉ I) và II) đúng. D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}; 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}; 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{abc}{bca}} = 8 \Rightarrow (I) \text{ đúng.}$$

$$\frac{1}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{a} + c \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{2}{a} + b + c \geq 2\sqrt{4\frac{bc}{a^2}} = 4\sqrt{\frac{bc}{a^2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{b} + c + a \geq 4\sqrt{\frac{ac}{b^2}}; \frac{2}{c} + a + b \geq 4\sqrt{\frac{ab}{c^2}}.$$

$$\text{Suy ra: } \left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64 \Rightarrow (II) \text{ đúng.}$$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c \leq abc \Leftrightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Leftrightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (III) \text{ sai.}$$

Câu 29. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba bất đẳng thức (I) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$; (II) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{x+y+z}$; (III)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3. \text{ Bất đẳng thức nào là đúng?}$$

A. Chỉ I đúng.

B. Chỉ I và III đúng.

C. Chỉ III đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3xyz \Rightarrow (I) \text{ đúng;}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \\ x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow (II) \text{ sai;}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3 \Rightarrow (III) \text{ đúng.}$$

Câu 30. Cho $a, b > 0$ và $ab > a + b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + b = 4$.

B. $a + b > 4$.

C. $a + b < 4$.

D. $a + b \leq 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có: } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } ab > a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} > a + b \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) > 0 \Leftrightarrow (a+b)(a+b-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow a+b-4 > 0 \text{ (vì } a+b > 0) \Leftrightarrow a+b > 4.$$

Câu 31. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x < y < z$.

B. $y < x < z$.

C. $z < x < y$.

D. $x < z < y$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x - y &= (a+b)(c+d) - (a+c)(b+d) = a(c+d) + b(c+d) - a(b+d) - c(b+d) \\ &= a(c-b) + bd - cd = (d-a)(b-c) < 0. \end{aligned}$$

Suy ra: $x < y$.

$$\text{Tương tự: } x - z = (a-c)(d-b) < 0 \Rightarrow x < z; y - z = (a-b)(d-c) < 0 \Rightarrow y < z.$$

Câu 32. Với $m, n > 0$, bất đẳng thức: $mn(m+n) < m^3 + n^3$ tương đương với bất đẳng thức

A. $(m+n)(m^2+n^2) \geq 0$.

B. $(m+n)(m^2+n^2+mn) \geq 0$.

C. $(m+n)(m-n)^2 > 0$.

D. Tất cả đều sai.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$mn(m+n) < m^3+n^3 \Leftrightarrow m^2n-m^3+mn^2-n^3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2(m-n)+n^2(m-n) < 0 \Leftrightarrow (m-n)^2(m+n) > 0.$$

Câu 33. Bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$, $\forall a, b, c, d$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

A. $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(a-\frac{e}{2}\right)^2 \geq 0$.

B. $\left(b-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(d-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(e-\frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.

C. $\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(c+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(d+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(e+\frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$.

D. $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4}-ae+e^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(b-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(d-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(e-\frac{a}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Câu 34. Cho $x, y > 0$. Tìm bất đẳng thức sai?

A. $(x+y)^2 \geq 4xy$.

B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{4}{x+y}$.

C. $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$.

D. $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x=y.$$

Câu 35. Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S \leq \sqrt{2}$.

B. $S \geq \sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$.

D. $-1 \leq S \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } 1 = x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2xy \leq 1.$$

$$\text{Mặt khác: } S^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}.$$

Câu 36. Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2.

B. giá trị nhỏ nhất của m là 4.

C. giá trị lớn nhất của m là 2.

D. giá trị lớn nhất của m là 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } x+y=2 \Rightarrow y=2-x.$$

Do đó: $m = x^2 + y^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 2.

Câu 37. Với mỗi $x > 2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

- A. $\frac{2}{x}$. B. $\frac{2}{x+1}$. C. $\frac{2}{x-1}$. D. $\frac{x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\frac{2}{x+1} < \frac{2}{x} < \frac{2}{x-1}$ và $\frac{x}{2} < \frac{x+1}{2}$.

Mặt khác: $\frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 + x - 4}{2(x+1)} = \frac{(x-2)(x+2) + x}{2(x+1)} > 0; \forall x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{2}{x+1}$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f(x) \geq 0$ và $[f(x)]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 40. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 41. Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < P \leq \frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2} < P$. C. $\frac{4}{3} \leq P$. D. $\frac{3}{2} \leq P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $P+3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ suy ra: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

Do đó $P+3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$; đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.