Moon.vn
Học để khẳng định mình

Series bài học

ĐẶNG VIỆT HÙNG - LÊ VĂN TUẤN
NGUYỄN THẾ DUY - VŨ VĂN BẮC

Pro S
TOÁN HỌC
Tập 1: Hình học không gian

- Nội dung bám sát chương trình luyện thi THPTQG.
- Phân loại kiến thức từ nhận biết tới vận dụng cao.
- video bài giảng online kèm theo sách miễn phí.
- online kèm theo sách.
- chi tiết (tra ID).

VD:0123

ĐHQG HÀ NỘI

Pro S Toán - Tập 1 - Hình học không gian

Moon.vn

Lời giới thiệu

Các em học sinh thân mến! Các em đang cầm trên tay một cuốn sách tham khảo đặc biệt dành cho học sinh THPT – một cuốn sách vô cùng hữu ích để giúp các em ôn thi kỳ thi THPT QG.

Trong 10 năm qua, Moon.vn luôn là cổng luyện thi trực tuyến tin cậy giúp nhiều thế hệ học sinh ôn tập và đạt được kết quả cao trong các kỳ thi tuyển sinh vào đại học. Moon.vn luôn tiên phong trong việc cập nhật cấu trúc lại bài giảng phù hợp với những đổi mới của Bộ Giáo dục & Đào tạo. Đặt vào tâm thế của người học, Moon.vn hiểu rõ những khó khăn và trở ngại mà học sinh đang gặp phải trong việc ôn thi, đặc biệt là về tài liệu ôn tập. Những file bài giảng và đề luyện đính kèm dạng PDF rất khó cho việc theo dõi, sử dụng (phải in ấn, đóng tập) và không thống nhất để tra cứu, ôn luyện.

Với mong muốn giúp các học sinh tiếp cận những cuốn sách tham khảo: Chất lượng – Khoa học – Chuẩn hóa – Mô phạm, đồng thời tiếp cận với phương pháp giảng dạy trực tuyến tiên tiến của các trường đại học hàng đầu trên thế giới như Harvard, MIT, Cambrige... Moon.vn cho ra mắt dự án sách Moonbooks song song với các khóa học trực tuyến của Moon. Một sự kết hợp hoàn hảo giữa sách tham khảo truyền thống và giải pháp công nghệ, giúp các em chủ động học tập ở mọi lúc, mọi nơi.

Các video bài giảng, bài tập luyện tập sẽ được mã hoá và gắn một mã số gọi là ID, mã số này được in vào các đề mục trong cuốn sách các em chỉ cần nhập mã ID của bài tập lên App hoặc website là sẽ có ngay lời giải chi tiết của bài tập đó. Đối với các em đang sở hữu các khóa học tương ứng, thì có thể theo tra cứu được video bài giảng ở các mục lý thuyết được mã hóa theo sách.

Các bài giảng theo chủ đề trong sách sẽ tương ứng với chủ đề trong khóa học trực tuyến trên website Moon.vn, được biên soạn một cách chi tiết, khoa học, bám sát theo khung chuẩn chương trình thi của Bộ Giáo dục và Đào tạo do các chuyên gia giàu kinh nghiệm biên soạn.

Đây là dự án mới, lần đầu tiên tích hợp nguồn tư liệu học tập khổng lồ được lưu trữ trên Internet vào cuốn sách của các em. Hi vọng rằng, cuốn sách này sẽ là "Tài liệu tham khảo ôn thi THPT Quốc gia" của em và đồng hành cùng các em trong suốt quá trình ôn luyện.

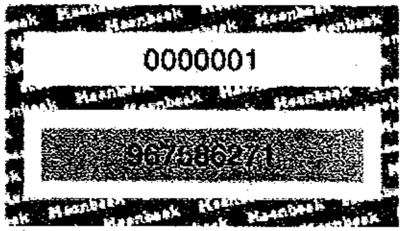
MOON.VN –HỌC ĐỂ KHẲNG ĐỊNH MÌNH

MỤC LỤC

HƯỚNG DẪN TRA MÃ ID

Mỗi bài tập trong sách đều được gán 1 mã ID để có thể tra lời giải/video tương ứng trên website Moon.vn và App trên điện thoại thông minh.

Để tra cứu được mã ID trước hết cần có tài khoản đăng nhập trên moon.vn, sau đó sử dụng mã cào ở bìa sau cuốn sách (cào vào phần tráng bạc để có mã kích hoạt)



Sau đó truy cập vào link http://www.moon.vn/tracuuid và làm theo hướng dẫn để kích hoạt tài khoản

Sau đây là cách xem ID đơn giản và nhanh chóng:

CÁCH 1: TRA MÃ TRỰC TIẾP TRÊN MOON.VN

Bước 1:
Đăng ký tài khoản Moon.vn

Ghi chú: Ấn vào phần đăng ký,
điền đầy đủ thông tin để tạo tài khoản
Bỏ qua bước 1 nếu đã có tài khoản;

↓

Bước 2:
Đăng nhập tài khoản → **Bước 3:** **Điền mã ID ở mục TÌM ID** → **Bước 4:** **Xem lời giải chi tiết**

CÁCH 2: TRA MÃ TRÊN APP

Bước 1:

Tải Moon.vn tại Google Play hoặc App Store

Ghi chú: Tải ứng dụng và cài đặt vào máy;

Tiến hành đăng ký nếu chưa có tài khoản;

Bỏ qua bước 1 nếu đã cài;

Bước 2: **Đăng nhập tài khoản** → **Bước 3:** **Điền mã ID ở phần Nhập mã ID** → **Bước 4:** **Xem lời giải chi tiết**

Ký hiệu viết tắt mã ID:

ID video ký hiệu: TV đứng đầu

ID bài tập Online: TT đứng đầu

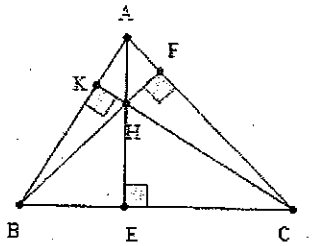
ID câu hỏi bất kỳ: chỉ có mã số

KIẾN THỨC NỀN TẢNG HÌNH HỌC CẦN NHỚ

I. TAM GIÁC VÀ CÁC ĐƯỜNG CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

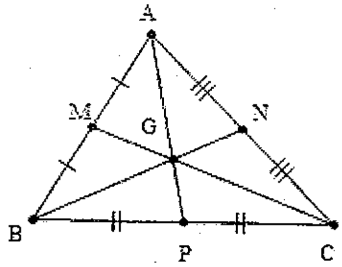
1. Đường cao: Là đường thẳng nối mỗi đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện của nó. Một tam giác có 3 đường cao và chúng đồng quy tại 1 điểm, điểm đó được gọi là ***trực tâm*** của tam giác.

Ví dụ: Trong tam giác ABC có các đường cao AE, BF và CK đồng quy tại điểm H. Khi đó H được gọi là trực tâm tam giác ABC.



2. Đường trung tuyến: Là đường thẳng kẻ từ đỉnh và đi qua trung điểm cạnh đối diện của đỉnh đó. Một tam giác có 3 đường trung tuyến và chúng đồng quy tại 1 điểm, điểm đó được gọi là trọng tâm tam giác.

Ví dụ: Trong tam giác ABC có các đường trung tuyến AP; BN và CM đồng quy tại trọng tâm G.

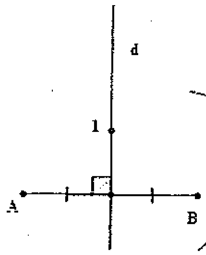


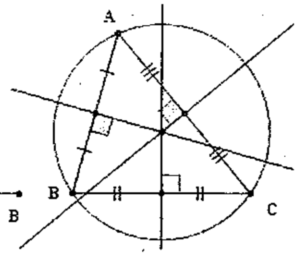
Khi đó ta có: $\frac{BG}{BN}=\frac{AG}{AP}=\frac{CG}{CM}=\frac{2}{3}$; $\frac{GN}{BN}=\frac{GP}{AP}=\frac{GM}{CM}=\frac{1}{3}$ và $\frac{GN}{GB}=\frac{GP}{GA}=\frac{GM}{GC}=\frac{1}{2}$.

Từ đó chúng ta suy ra: $\overline{MA}=-\overline{MB}; \overline{NA}=-\overline{NC}$; $\overline{AG}=2\overline{GP}; \overline{BG}=2\overline{GN}; \overline{CG}=2\overline{GM}$

3. Đường trung trực:

Là đường thẳng vuông góc với một cạnh tại trung điểm của cạnh đó. Một tam giác có 3 đường trung trực đồng quy tại 1 điểm, điểm đó được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

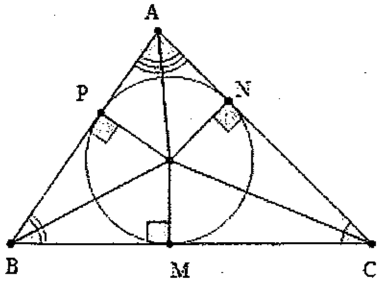




Ví dụ: Điểm I là giao điểm của 3 đường trung trực tam giác ABC và điểm I được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $IA=IB=IC=R$.

4. Đường phân giác: Là đường thẳng chia một góc trong tam giác thành 2 góc có số đo bằng nhau. Một tam giác có 3 đường phân giác đồng quy tại 1 điểm và điểm đó được gọi là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

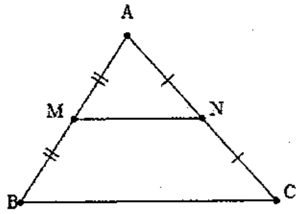
Ví dụ: Trong tam giác ABC có I là giao điểm của 3 đường phân giác khi đó điểm I cách đều các cạnh AB, BC và CA và I được gọi là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có: $IN=IM=IP$.



5. Đường trung bình : Là đường thẳng nối trung điểm 2 cạnh của một tam giác.

Hình bên : MN là đường trung bình của tam giác ABC .

Khi đó ta có : $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.



II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.

1. Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Đặt $AB = c; AC = b; BC = a$; $AH = h$; $HB = c'$ và $HC = b'$ như hình 1. Ta có các công thức sau:

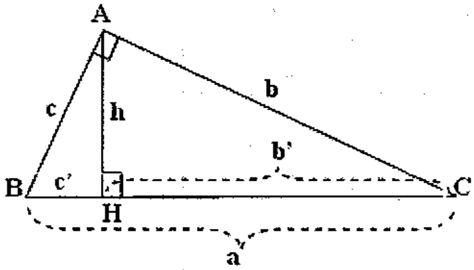
+) Định lý Pytago: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

hay $a^2 = b^2 + c^2$

+) $b^2 = ab'; c^2 = ac'$

+) $h^2 = b'c'; bc = ah = 2S_{ABC}$

+) $\frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$



Chú ý: Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy.

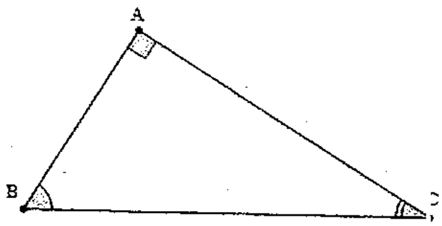
2.Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

Trong tam giác ABC vuông tại A. Ta có:

+) $\sin B = \frac{AC}{BC}; \cos B = \frac{AB}{BC}$;

+) $\tan B = \frac{AC}{AB}; \cot B = \frac{AB}{AC}$

+) $\sin C = \frac{AB}{BC}; \cos C = \frac{AC}{BC}; \tan C = \frac{AB}{AC}; \cot C = \frac{AC}{AB}$



3. Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

a) Cạnh huyền nhân sin góc đối hoặc cosin góc kề.

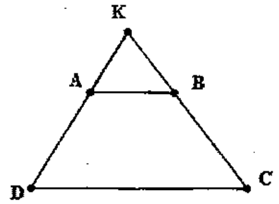
b) Cạnh góc vuông kia nhân với tan góc đối hoặc nhận với cotan góc kề. Ta có:

$$\boxed{\begin{array}{l} b = a\sin B = a\cos C \text{ ; } c = a\sin C = a\cos B \\ b = c\tan B = c\cot C \text{ ; } c = b\tan C = c\cot B \end{array}}$$

III. ĐỊNH LÝ TALET.

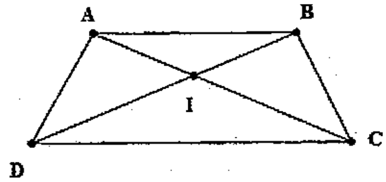
1) Cho tam giác KCD như hình vẽ điểm A và B lần lượt thuộc các cạnh KD và KC sao cho $AB \parallel CD$

Khi đó theo định lý Talet ta có: $\dfrac{KA}{KD} = \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{DC}$.



2) Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, gọi $I = AC \cap BD$.

Khi đó theo định lý Talet ta có : $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{AB}{DC}$



IV. CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ.

1. Một số hệ thức cần nhớ trong tam giác.

Cho tam giác ABC có $AB = c; BC = a; CA = b$; $h_a; h_b; h_c$ lần lượt là độ dài đường cao hạ từ A, B, C xuống các cạnh đối diện, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC khi đó ta có các công thức sau:

+) Diện tích: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c = p.r = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$

+) Hệ thức Herong: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

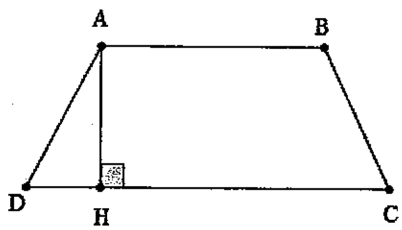
+) Định lý hàm cos: $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ tương tự cho $\cos\widehat{B}; \cos\widehat{C}$.

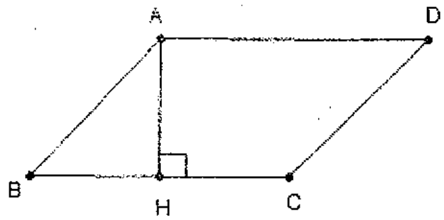
+) Công thức đường trung tuyến hạ từ đỉnh A: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

+) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

2. Diện tích tứ giác.

a) Diện tích hình thang có $AB \parallel CD$ và chiều cao AH là: $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.AH$





b) Hình bình hành $ABCD$ (hình bên) có

Diện tích là: $S_{ABCD} = AH.BC$

c) Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$

(công thức này đúng cho mọi tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo vuông góc với nhau)

d) Diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$

e) Diện tích hình chữ nhật có độ dài 2 canh là a và b là: $S = ab$

f) Diện tích hình tròn bán kính R: $S = \pi R^2$, chu vi đường tròn $C = 2\pi R$

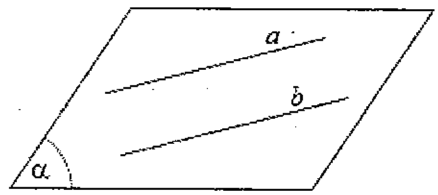
Chủ đề 1:
[TV6000] QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1.Hai đường thẳng song song

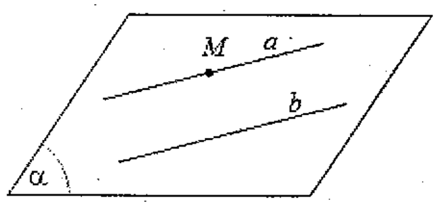
Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.

Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng ký hiệu là $\text{mp}(a;b)$

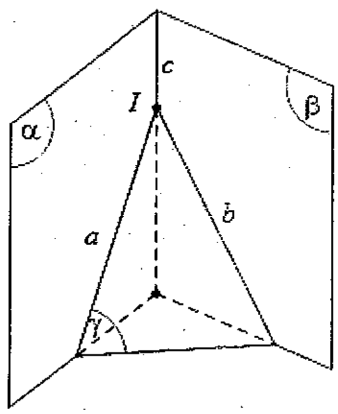


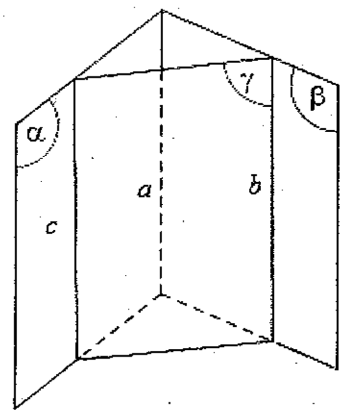
$a \parallel b$

Trong không gian qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

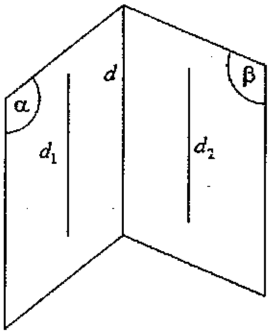


Nếu 3 mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

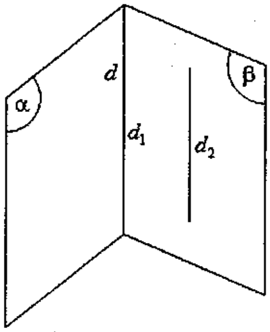




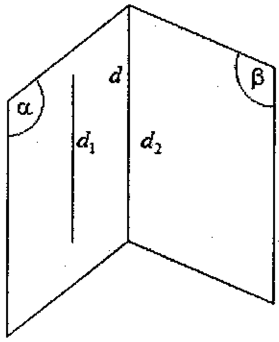
Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng nói trên sẽ song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



$d \parallel d_1 \parallel d_2$



$d \equiv d_1$



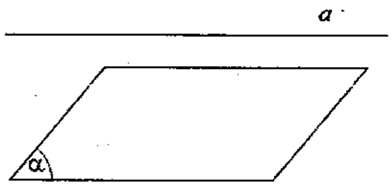
$d \equiv d_2$

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

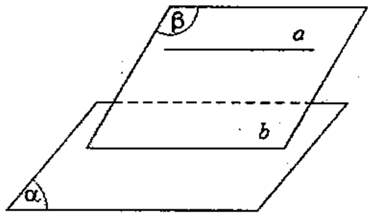
2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Định nghĩa: Một đường thẳng được gọi là song song với một mặt phẳng, nếu chúng không có điểm chung.

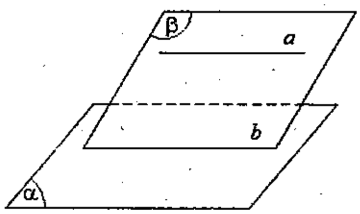
Hình bên ta có: $a \parallel (\alpha)$



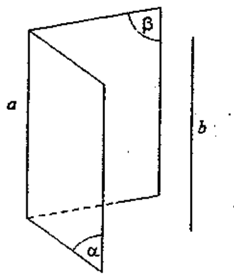
Nếu một đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (α) và song song với một đường thẳng b nằm trên (α) thì a song song với (α)



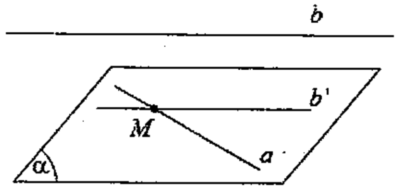
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khi đó nếu một mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì a song song với b.



Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cùng song song với một đường thẳng b thì giao tuyến (nếu có) của chúng cũng song song với b.



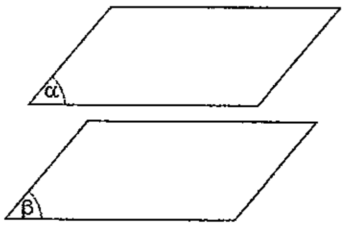
Với 2 đường thẳng a và b chéo nhau cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (α) chứa a và song song với b b'



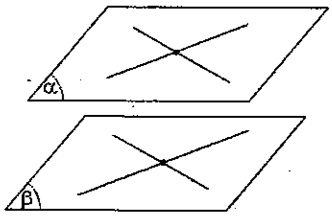
Với 2 đường thẳng phân biệt a và b không song song với nhau, và một điểm O cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (α) qua O và song song với (hoặc chứa) a và b.

3. Hai mặt phẳng song song.

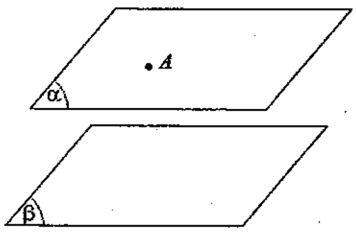
Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.



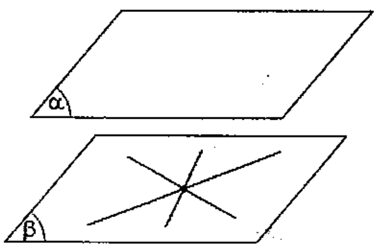
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với (β) thì (α) song song với (β).



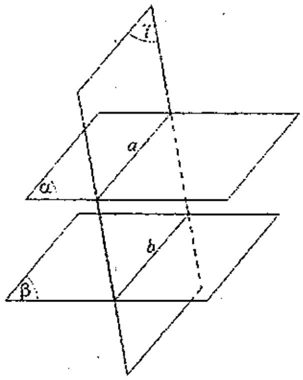
Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α) cho trước, có duy nhất một mặt phẳng (β) song song với (α).



Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Khi đó các đường thẳng đi qua A và song song với (α) cùng nằm trên mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).



Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khi đó một mặt phẳng nếu cắt (α) và (β) lần lượt theo các giao tuyến a, b thì a song song với b.



4. Phương pháp giải:

a) Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta sẽ chứng minh đường thẳng d song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

b) Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau ta chứng minh hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) song song với lần lượt hai đường thẳng a' và b' cắt nhau nằm trong mặt phẳng (Q)

Ngoài ra chúng ta cần vận dụng linh hoạt các định lý và hệ quả trong phần lý thuyết về quan hệ song song để giải toán.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ACD. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $IJ \parallel BC$ **B.** $IJ \parallel BD$ **C.** $IJ \parallel CD$ **D.** $IJ \parallel SC$

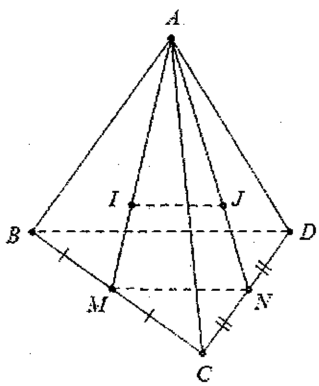
Lời giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Do I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ACD nên ta có $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$

Mặt khác MN là đường trung bình trong tam giác BCD suy ra $MN \parallel BC$

Do đó $IJ \parallel MN \parallel BD$. **Chọn B.**



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,CD và SA. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. $SC\parallel(MNP)$ **B.** $BC\parallel(MNP)$ **C.** $DP\parallel(SBC)$ **D.** $PN\parallel(SBC)$

Lời giải:

Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với SD

khi đó $PQ=(MNP)\cap(SAD)$

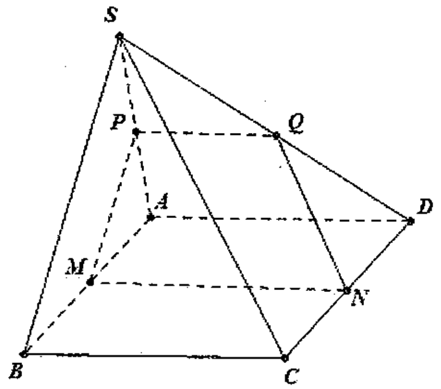
Mặt khác $MN\parallel AD$ nên $PQ\parallel AD\parallel MN$

Lại có $MP\parallel SB$ (đường trung bình)

Mặt khác $MN\parallel BC$ và $\begin{cases}MN\cap MP=M\\BC\cap SB=B\end{cases}$

Do đó $(MNPQ)\parallel(SBC)$

Vậy đáp án **C** là đáp án sai. **Chọn C.**



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. $(OMN)\parallel(SBC)$ **B.** $(OMN)\parallel AB$ **C.** $(OMN)\parallel BC$ **D.** $(OMN)\parallel SC$

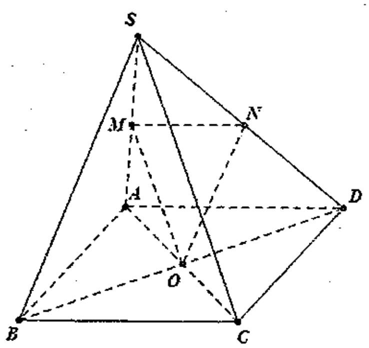
Lời giải:

Xét tam giác SAC ta có: $OM\parallel SC$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Tương tự ta có $ON\parallel SB$.

Khi đó ta có: $(OMN)\parallel(SBC)$

Suy ra các đáp án **A, C,D** đều đúng, **B** sai. **Chọn B.**



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M,P,Q lần lượt là trung điểm của BC,SB và AD. Khẳng định nào sau đây là đúng.

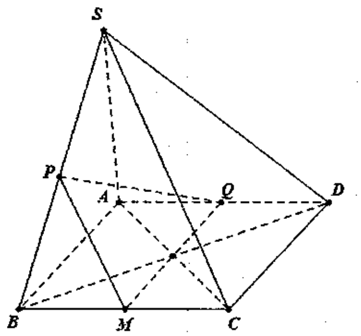
A. $(MPQ)\parallel(SAC)$ **B.** $(MPQ)\parallel(SCD)$ **C.** $(MPQ)\parallel SA$ **D.** $(MPQ)\parallel(SBD)$

Lời giải:

Xét tam giác SBC ta có: $MP//SC$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Lại có : $MQ \parallel AB \parallel CD$

Do đó $(MPQ) \parallel (SCD)$. **Chọn B.**



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD và P,Q lần lượt là trung điểm của MB và NB. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $PQ \parallel (SAD)$ **B.** $PQ \parallel BC$ **C.** $PQ \parallel SD$ **D.** Tất cả đều sai

Lời giải:

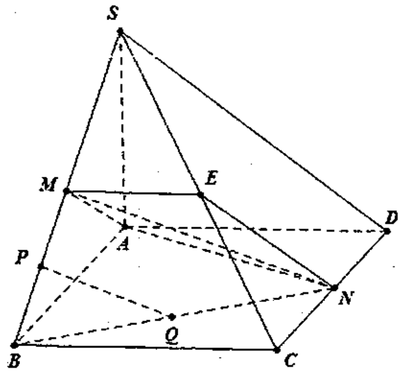
Gọi E là trung điểm của SC khi đó:

$ME//BC//AD$ (tính chất đường trung bình)

Lại có: $NE//SD$ do vậy ta có $(MEN)//(SAD)$.

Mặt khác $PQ \parallel MN$ (đường trung bình trong tam giác BMN)

Suy ra $PQ//(MEN)//(SAD)$. **Chọn A.**



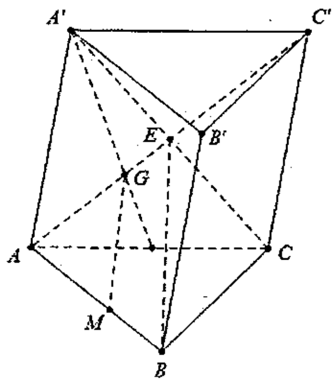
Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'AC$ và M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 2MB$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $MG \parallel B'C$ **B.** $MG \parallel (A'BC)$ **C.** $MG \parallel (BCC'B')$ **D.** $MG \parallel A'B$

Lời giải:

Gọi E là trung điểm của $A'C$ khi đó ta có:

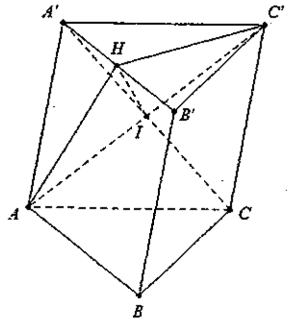
$\dfrac{AG}{GE} = 2 = \dfrac{AM}{MB}$ (tính chất trọng tâm tam giác) suy ra $MG//BE$. Do đó $MG \parallel (A'BC)$.**Chọn B.**



Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi H là trung điểm của $A'B'$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $CB' \parallel (AHC')$ **B.** $A'C \parallel (AHC')$ **C.** $BB' \parallel (AHC')$ **D.** Tất cả đều sai.

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của $A'C$ và AC'

Khi đó I là trung điểm của $A'C$

Mặt khác ta có H là trung điểm của $A'B'$

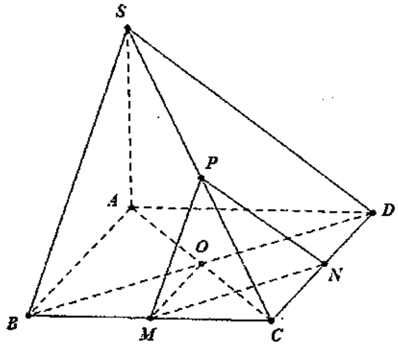
Suy ra $IH // CB'$

Khi đó $CB' // (AHC')$. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SC. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. $(MNP) \parallel (SBD)$. **B.** $SO \parallel (MNP)$. **C.** $OM \parallel (SCD)$. **D.** $SA \parallel (MPD)$

Lời giải:



Dễ thấy theo tính chất đường trung bình ta có:

$$\begin{cases} MP // SB \\ MN // BD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBD)$$

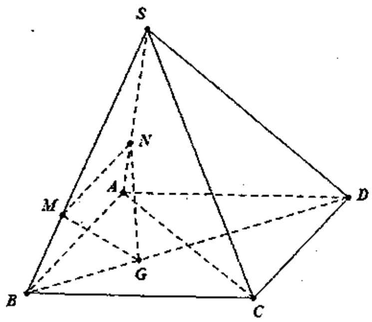
Đường thẳng SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên ta cũng có: $SO \parallel (MNP)$

Mặt khác $OM \parallel CD \Rightarrow OM \parallel (SCD)$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và N là điểm thoả mãn $\overrightarrow{SN} = 2\overrightarrow{NA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $GN \parallel (SBC)$. **B.** $GN \parallel SD$. **C.** $SN \parallel CD$. **D.** $GN \parallel (SCD)$.

Lời giải:



Gọi M là điểm thuộc SB sao cho $SM = 2MB$ khi đó $MN \parallel AB \parallel CD$

Lại có $\frac{BG}{BD} = \frac{BM}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow GM \parallel SD$

Do vậy $(MNG) \parallel (SCD)$

Do vậy $GN \parallel (SCD)$. **Chọn D.**

Chủ đề 2:
[TV6001] VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

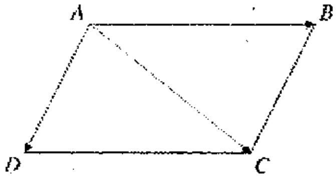
1. Định nghĩa:

Véctơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ véctơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn đc kí hiệu là $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ ....

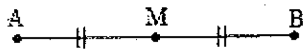
2. Các quy tắc về vectơ.

+) Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ hoặc: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

+) Quy tắc hình bình hành: cho hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



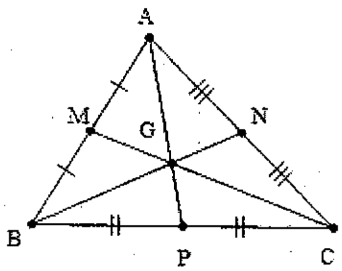
+) Quy tắc trung điểm: Nếu M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$



+) Quy tắc trung tuyến: Nếu AP là trung tuyến của tam giác ABC thì: $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

+) Quy tắc trọng tâm: Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Khi đó với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$



+) Quy tắc hình hộp: cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thì: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+) Nếu G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

3. Sự đồng phẳng của các véctơ, điều kiện để ba véctơ đồng phẳng.

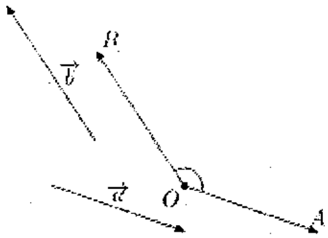
Định nghĩa: Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

Định lí 1: Điều kiện cần và đủ để ba véctơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ đồng phẳng là hoặc $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hoặc tồn tại các số $m;n$ duy nhất sao cho $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$.

Định lí 2: Nếu $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi véctơ $\vec{d}$ trong không gian, ta tìm được các số m,n,p duy nhất sao cho $\vec{d}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$.

4. Tích vô hướng của 2 vecto.



Góc giữa 2 vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ được định nghĩa bằng góc $\widehat{AOB}$ với $\overrightarrow{OA}=\vec{a};\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

Nếu $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước góc giữa chúng có thể nhận một giá trị tuỳ ý.

Tích vô hướng giữa 2 vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, được ký hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ và được xác định bởi.

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ từ đó suy ra cosin góc giữa 2 vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0.$

Cho 3 vecto $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ và số thực k. Khi đó ta có:

i) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$; **ii)** $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

iii) $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$ **iv)** $|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$, gọi $I;J$ lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

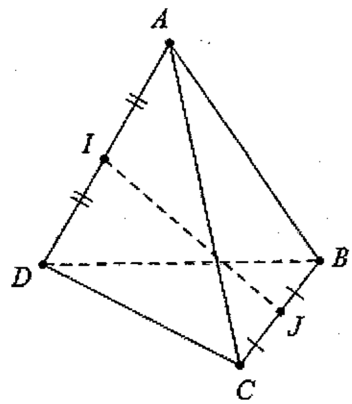
A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ **D.** $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ do đó đáp án **B** sai.



A đúng vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}$

D đúng vì: $\begin{cases}\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IJ}\\\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{JI}\end{cases}$ do đó $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

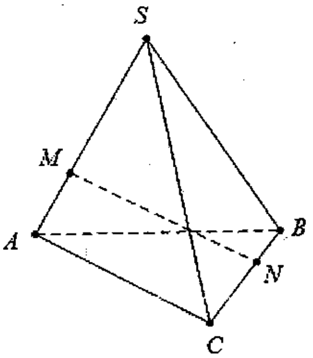
C đúng (tính chất trọng tâm). **Chọn B**

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA và BC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Ba vecto $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng. **B.** Ba vecto $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{SC}$ không đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** Cả **A** và **C** đều đúng

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Lại có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC}$ nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AB}$

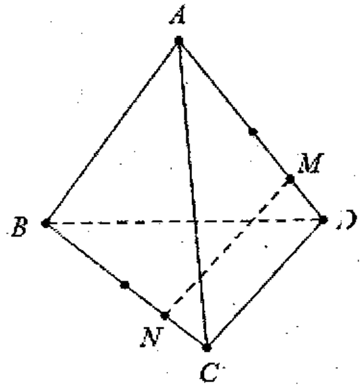
Khi đó: $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AB}}{3} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{SC}}{3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ do đó ba vecto $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng suy ra cả **A** và **C** đều đúng.

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{MN} = \vec{a} - 3.\vec{b}$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}.\vec{b}$ **D.** $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3.\vec{b}$

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\ (1)$

Lại có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\ (2)$

Mặt khác : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$

Lấy $(2) + 3.(1)$ ta được $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{DC}$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ **B.** $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} = 4\overrightarrow{A'O}$ **D.** $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$

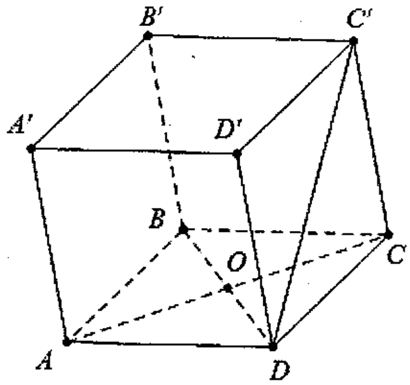
Do vậy **A** đúng.

Lại có: $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{D'D}$

$=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC}$ suy ra **B** đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{A'O}$ và $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'D}=2\overrightarrow{A'O}$

Do đó **C** đúng, **D** là đáp án sai. **Chọn D.**



Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$, điểm K thuộc $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC'}=-2\overrightarrow{KB'}$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AK}=m\overrightarrow{AI}+n\overrightarrow{AJ}$, giá trị của $m+n$ là.

A. $m+n=\frac{4}{3}$ **B.** $m+n=1$ **C.** $m+n=2$ **D.** $m+n=\frac{2}{3}$

Lời giải:

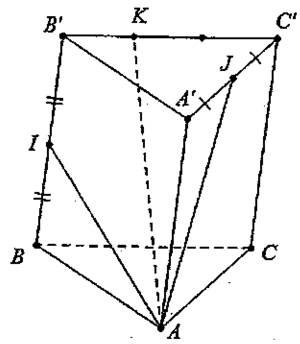
Ta có: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}\ (1)$; $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JC'}+\overrightarrow{C'K}\ (2)$

Lấy $2.(1)+(2)$ ta được :

$3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{JC'}+\underbrace{2\overrightarrow{B'K}+\overrightarrow{C'K}}_{\vec{0}}$

$=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'J}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AJ}$

Do đó $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right)\Rightarrow m+n=\frac{4}{3}$. **Chọn A.**



Ví dụ 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}; \overrightarrow{BB'}=\vec{b}; \overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $\overrightarrow{MC}=n\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{C'N}=m\overrightarrow{C'D}$. Tìm m và n biết rằng $MN \parallel BD'$.

A. $m=\frac{1}{3}; n=\frac{2}{3}$ **B.** $m=n=\frac{1}{3}$ **C.** $m=n=\frac{2}{3}$ **D.** $m=\frac{2}{3}; n=\frac{1}{3}$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

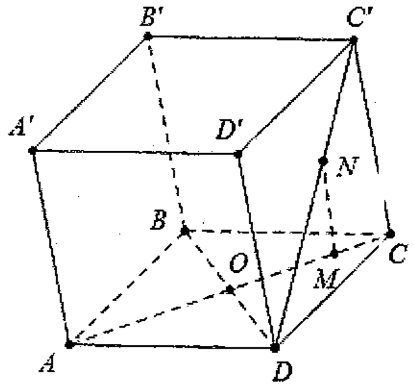
Lại có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'N}=n\overrightarrow{AC}+\vec{b}+m\overrightarrow{C'D}$

$= n.\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) + \vec{b} + m\left(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= n.\left(\vec{c} - \vec{a}\right) + \vec{b} + m\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}$

Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'}$

$\dfrac{m-n}{1} = \dfrac{1-m}{1} = \dfrac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2}{3} \\ n = \dfrac{1}{3} \end{cases}$. **Chọn D.**



Ví dụ 7: Trong không gian, cho 2 tia Ax và By chéo nhau sao cho AB vuông góc với cả 2 tia đó. Các điểm M và N lần lượt thay đổi trên Ax và By sao cho độ dài đoạn thẳng MN không đổi và luôn bằng a ($a > AB$). Gọi φ là góc giữa 2 tia Ax và By. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2AM.BN$ là:

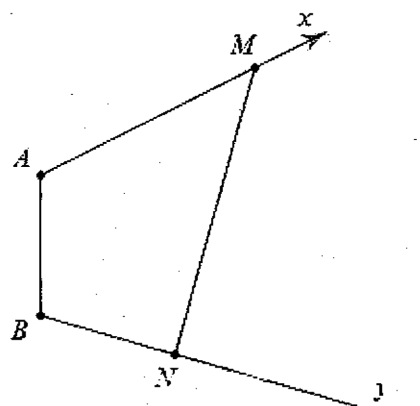
A. $T_{\max} = \dfrac{a^2 - AB^2}{1+\cos\varphi}$ **B.** $T_{\max} = \dfrac{a^2 - AB^2}{2+\cos\varphi}$ **C.** $T_{\max} = \dfrac{a^2 - AB^2}{1-\cos\varphi}$ **D.** $T_{\max} = \dfrac{a^2 - AB^2}{2-\cos\varphi}$

Lời giải:

Ta có: $a^2 = MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)^2$

$= \left[\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NB}\right) + \overrightarrow{AB}\right]^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NB}\right)^2 + AB^2$.

[Ở đây ta có $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{NA} \perp \overrightarrow{AB}$ nên $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$]



$\Rightarrow a^2 = MA^2 + NB^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$

Suy ra $a^2 = MA^2 + NN^2 - 2MA.NB\cos\varphi + AB^2$

$\geq 2.MA.NB + AB^2 - 2MA.NB\cos\varphi$

Do đó $a^2 - AB^2 \geq 2MA.NB(1-\cos\varphi)$

Suy ra $T = 2.MA.NB \leq \dfrac{a^2 - AB^2}{1-\cos\varphi}$. **Chọn C.**

Nhận xét: Đây là câu hỏi khá hay và khó, có thể dùng để phân loại học sinh khá giỏi. Tuy nhiên bằng cách sử dụng khéo léo công cụ vecto trong không gian ta có thể giải quyết bài toán một cách dễ dàng.

III.[TT6002] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [302218] Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b};\ \vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b};\ \vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương. **D.** Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: [302223] Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

C. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Câu 3: [302225] Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 4: [302227] Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng. **B.** Hai vectơ $\vec{x};\vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{b}$ cùng phương. **D.** Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 5: [302231] Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

A. $k=4$ **B.** $k=1$ **C.** $k=0$ **D.** $k=2$

Câu 6: [302233] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u},\overrightarrow{CA'}=\vec{v},\ \overrightarrow{BD'}=\vec{x},\ \overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$ **B.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$ **D.** $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

Câu 7: [302236] Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ **D.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

Câu 8: [302239] Cho hình hộp *ABCD.EFGH*. Gọi *I* là tâm hình bình hành *ABEF* và *K* là tâm hình bình hành *BCGF*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

D. Các khẳng định trên đều sai.

Câu 9: [302370] Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Tìm giá trị của *k* thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

A. $k=\frac{1}{2}$ **B.** $k=\frac{1}{3}$ **C.** $k=3$ **D.** $k=2$

Câu 10: [302245] Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$

Câu 11: [302250] Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

B. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp *S.ABCD*. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác *ABCD* là hình bình hành

D. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Câu 12: [302252] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các đường chéo *BD* và *AD* của các mặt bên lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho *DM = AN*. *MN* song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (ADB') **B.** $(A'D'BC)$ **C.** $(A'AB)$ **D.** $(BB'C)$

Câu 13: [302260] Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A, B, C, D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Câu 14: [302264] Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Gọi *I* và *K* lần lượt là tâm của hình bình hành *ABB'A'* và *BCC'B'*. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Bốn điểm *I, K, C, A* đồng phẳng **B.** $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IK};\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Câu 15: [302268] Cho tứ diện *ABCD*. Trên các cạnh *AD* và *BC* lần lượt lấy *M, N* sao cho $AM=3MD;BN=3NC$. Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của *AD* và *BC*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng. **B.** Các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng. **D.** Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 16: [302271] Cho tứ diện *ABCD* có các cạnh đều bằng *a*. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ **D.** $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Câu 17: [302274] Cho tứ diện *ABCD*. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi *G* là trọng tâm của tam giác *BCD*. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

Câu 18: [302275] Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi *M* là trung điểm *AD*. Chọn đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$ **B.** $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ **D.** $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$

Câu 19: [302276] Cho tứ diện *ABCD* và điểm *G* thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (*G* là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của *GA* và mặt phẳng (*BCD*). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$ **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$ **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$ **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$

Câu 20: [302278] Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD, BC*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 21: [302369] Cho lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 22: [302296] Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi *O* là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$

Câu 23: [302299] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì *B* là trung điểm đoạn *AC*.

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm *A, B, C, D* đồng phẳng

D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$

Câu 24: [302300] Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, CD* và *G* là trung điểm của *MN*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

Câu 25: [302374] Cho lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'* có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 26: [302376] Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 27: [302377] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$

C. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$

D. M là trung điểm CC'

Câu 28: [302382] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Câu 29: [302383] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$

Câu 30: [302389] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

B. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

C. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn MP.

D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Câu 31: [302400] Cho hình tứ diện *ABCD* có trọng tâm *G*. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Câu 32 [302301]: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành tâm *O*. Gọi *G* là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. *G, S, O* không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$ **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	**02. B**	**03. C**	**04. A**	**05. B**	**06. A**	**07. C**	**08. B**	**09. A**	**10. C**
11. C	**12. B**	**13. C**	**14. C**	**15. C**	**16. C**	**17. B**	**18. B**	**19. C**	**20. C**
21. D	**22. B**	**23. C**	**24. A**	**25. D**	**26.C**	**27. A**	**28. B**	**29.D**	**30. B**
31. A	**32. B**								

Chủ đề 3
[TV6003] QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI .

1. Hai đường thẳng vuông góc.

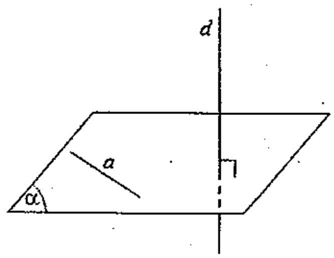
Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua điểm O và lần lượt song song với a và b

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0

Nếu $a \perp b$ và $b \| b'$ thì $a \perp b'$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

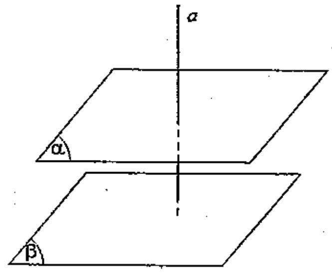
Định nghĩa: Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).



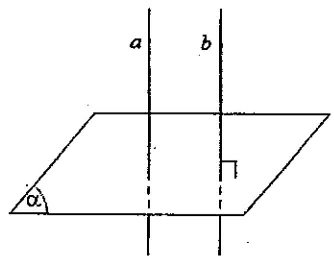
Định lý: Nếu đường thẳng Δ vuông góc với hai đường thẳng không cùng phương a và b mà mỗi đường thẳng này nằm trong (α) hoặc song song với (α) thì Δ vuông góc với mặt phẳng (α)

Cho 2 mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



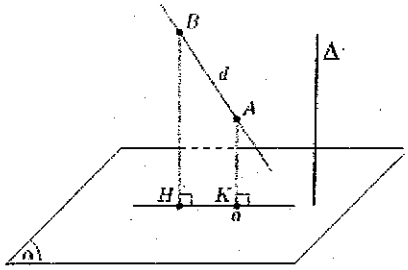
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



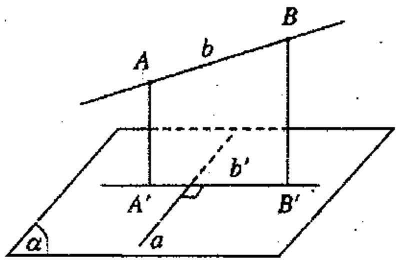
Qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng Δ cho trước. Tất cả các đường thẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) nói trên.

Qua điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với một mặt phẳng (α) cho trước.

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương Δ vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (α)



Cho đường thẳng b không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng a nằm trong (α). Khi đó điều kiện cần và đủ để a vuông góc với b là a vuông góc với hình chiếu b' của b trên (α).

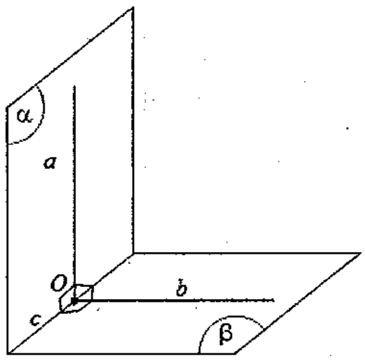


3. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì 2 mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

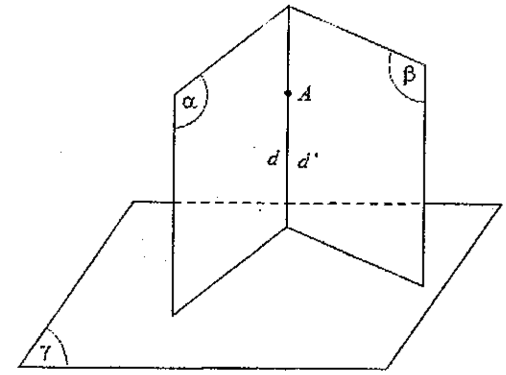


Nếu 2 mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (α), vuông góc với giao tuyến của (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (β)

Nếu 2 mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (α) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (β) sẽ nằm trong (α).

Nếu 2 mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) có duy nhất mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (α).



4. Phương pháp giải.

a) Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta sẽ chứng minh $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \end{cases}$ trong đó a và b là 2 đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).

b) Để chứng minh 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P).

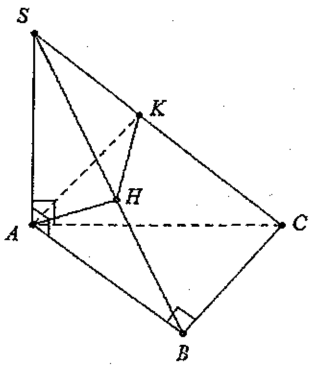
Ngoài ra chúng ta nên vận dụng linh hoạt kiến thức về quan hệ song song, quan hệ vuông góc trong không gian để giải toán.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Khẳng định nào sau đây là **sai**.

A. $BC \perp (SAB)$ **B.** $AH \perp (SBC)$ **C.** $AK \perp (SBC)$ **D.** $HK \perp AH$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ nên **A** đúng

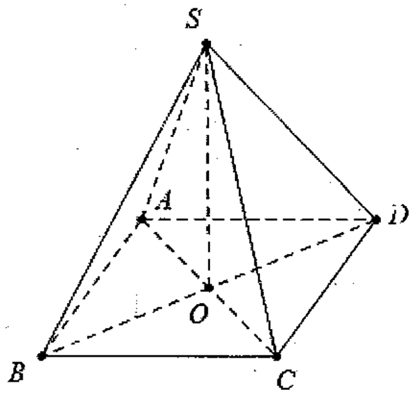
Suy ra $BC \perp AH$ [lại có $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$ nên **B** đúng]. Khi đó $AH \perp HK$ nên **D** đúng.

Khẳng định sai là **C. Chọn C.**

Ví dụ 2 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. $SO \perp (ABCD)$ **B.** $AC \perp SD$ **C.** $(SBD) \perp (SAC)$ **D.** $(SAB) \perp (SCD)$

Lời giải:



Do tam giác SAC và SBD cân tại S, do đó ta có:

$SO \perp AC; SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

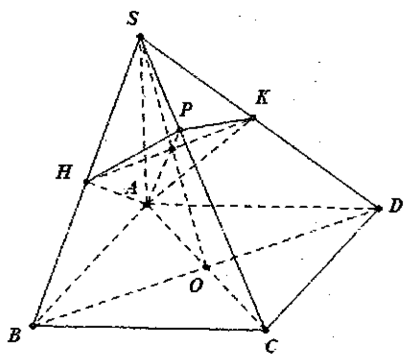
Lại có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp SD$ và $AC \perp (SBD)$

Do đó $(SBD) \perp (SAC)$ do đó các khẳng định **A, B** và **C** là các khẳng định đúng. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A lần lượt lên SB và SD. Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại P. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. $SC \perp (AHK)$ **B.** $AH \perp (SBC)$ **C.** $HK \perp (SAC)$ **D.** $BC \perp (SCD)$

Lời giải:



Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Do đó $BC \perp AH$, lại có $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Tương tự $AK \perp (SCD)$

Suy ra $\begin{cases} AH \perp SC \\ AK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Do tính chất đối xứng nên dễ ràng suy ra $HK \parallel BD$

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC)$ nên **C** đúng.

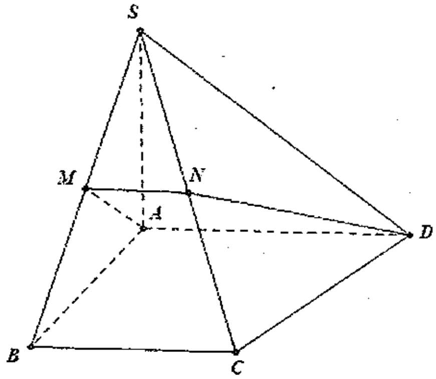
Đáp án sai là **D. Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$. Dựng $AM \perp SB$, mặt phẳng (AMD) cắt hình chóp theo một thiết diện là hình gì.

A. Hình thang vuông **B.** Hình thang cân

C. Hình thoi **D.** Hình bình hành

Lời giải:



Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (AMD) và đường thẳng SC. Do $BC \parallel AD$, mặt khác MN là giao tuyến của mặt phẳng (AMD) và (SBC) nên $MN \parallel BC \parallel AD$

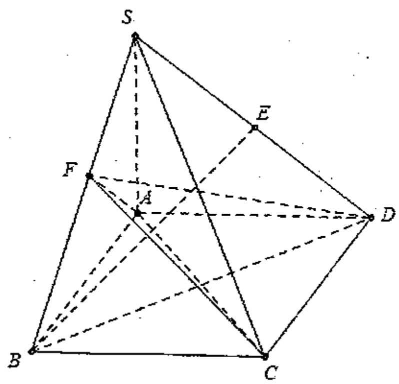
Mặt khác $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp AM$ do vậy $AMND$ là hình thang vuông tại A và M. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD. Khẳng định nào sau đây là **đúng.**

A. $(SAC) \perp (SBD)$ **B.** $AF \perp (SBC)$

C. $(AEF) \perp (SAC)$ **D.** Cả 3 khẳng định trêu đều đúng.

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ do đó $(SAC) \perp (SBD)$ như vậy **A** đúng.

Do tính chất đối xứng dễ thấy $EF \,//\, BD$.

Suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$ do đó **C** đúng.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp SB$.

Lại có $DF \perp SB \Rightarrow SB \perp (AFD) \Rightarrow SB \perp AF$

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AF$. Do đó $AF \perp (SBC)$. **Chọn D**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Biết rằng I là trung điểm của AB. Khẳng định nào dưới đây là **sai.**

A. $(SAC) \perp (SBD)$ **B.** $(SOI) \perp (ABCD)$

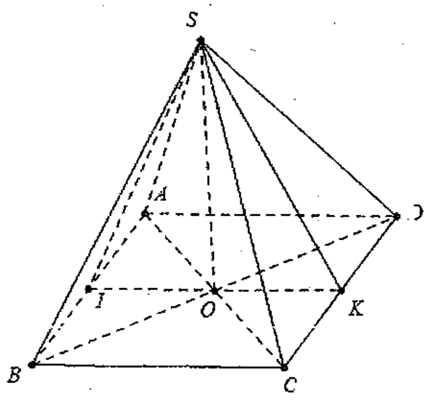
C. $(SIO) \perp (SCD)$ **D.** $(SAB) \perp (SCD)$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ do đó $(SAC) \perp (SBD)$ như vậy **A** đúng.

Do OI là đường trung bình trong tam giác ABC nên ta có $OI \parallel BC \parallel AD$ khi đó $OI \perp CD$

Lại có $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SCD)$ do đó **C** đúng. **Chọn D.**



Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, DE là đường cao của tam giác BCD, BF và BK lần lượt là đường cao trong các tam giác ABC và BCD. Khẳng định nào sau đây là **sai**.

A. $(ADE) \perp (ABC)$ **B.** $(BFK) \perp (BCD)$

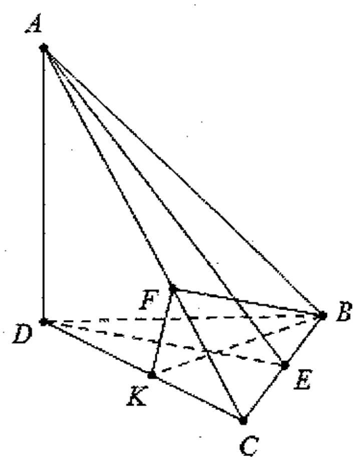
C. $BF \perp (ADC)$ **D.** $BC \perp AE$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} BC \perp DE \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADE)$ do đó **A** và **D** đúng

Lại có $\begin{cases} BK \perp CD \\ BK \perp AD \end{cases} \Rightarrow BK \perp (ACD)$

Do đó $(BFK) \perp (BCD)$ suy ra **B** đúng. **Chọn C.**



III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN 1:[TT6004] Bài tập đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Câu 1: [304190] Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. Vô số **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 2: [304260] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

Câu 3: [304192] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(IJK) // (SAC)$ **B.** Góc giữa SC và BD có số đo 60^0

C. $BD \perp (IJK)$ **D.** $BD \perp (SAC)$

Câu 4: [304193] Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(SBH) \cap (SCH) = SH$ **B.** $(SAH) \cap (SBH) = SH$

C. $AB \perp SH$ **D.** $(SAH) \cap (SCH) = SH$

Câu 5: [304195] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trung điểm của AC. **B.** H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC. **D.** H trùng với trung điểm của BC

Câu 6: [304196] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các ΔABC và ΔSBC. Các đường thẳng AH, SK, BC thỏa mãn:

A. Đồng quy. **B.** Đôi một song song.

C. Đôi một chéo nhau. **D.** Đáp án khác.

Câu 7: [304197] Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 8: [304198] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $SA \perp BD$ **B.** $SC \perp BD$ **C.** $SO \perp BD$ **D.** $AD \perp SC$

Câu 9: [304199] Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 1 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 2

Câu 10: [304201] Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O, $SA\perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $BD\perp SC$ **B.** $IO\perp (ABCD)$.

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD **D.** $SA = SB = SC$.

Câu 11: [304204] Cho hình chóp $SABC$ có các mặt bên nghiêng đều trên đáy. Hình chiếu H của S trên (ABC) là:

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

C. Trọng tâm tam giác ABC.

D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD

Câu 12: [304206] Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α)

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$

Câu 13: [304219] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 14: [304221] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. AE và AF là các đường cao của tam giác SAB và SAD, Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $SC \perp (AFB)$ **B.** $SC \perp (AEC)$ **C.** $SC \perp (AED)$ **D.** $SC \perp (AEF)$

Câu 15: [304226] Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a // b$. **B.** Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$ **D.** Nếu $a \perp b$ thì $b // (P)$.

Câu 16: [304229] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.

D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Câu 17: [304232] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (ABC)$ **B.** $BC \perp AD$ **C.** $CD \perp (ABD)$ **D.** $AC \perp BD$

Câu 18: [304235] Cho tứ diện $SABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mp(ABC). Đối với ΔABC ta có điểm H là :

A. Trực tâm **B.** Tâm đường tròn nội tiếp

C. Trọng tâm **D.** Tâm đường tròn ngoại tiếp

Câu 19: [304237] Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. H là trực tâm tam giác ABC. **B.** $OA \perp BC$.

C. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ **D.** $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Câu 20: [304209] Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P). đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp(*P*) nếu:

A. Vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mặt phẳng (*P*).

B. Vuông góc với đường thẳng *a* mà *a* song song với mặt phẳng (*P*).

C. Vuông góc với đường thẳng *a* nằm trong mặt phẳng (*P*).

D. Vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (*P*).

Câu 21: [304211] Cho *a, b, c* là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu *a* vuông góc với mặt phẳng (α) và b // (α) thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và *a* cắt *c* thì *b* vuông góc với mặt phẳng (*a*, *c*).

Câu 22: [304213] Cho tứ diện *SABC* có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Số các mặt của tứ diện *SABC* là tam giác vuông là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 23: [304247] Cho hai đường thẳng *a, b* và mặt phẳng (*P*). Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu *a* song song với mặt phẳng (*P*) và $b \perp a$ thì b song song với mặt phẳng (*P*).

B. Nếu *a* song song với mặt phẳng (*P*) và $b \perp$ mặt phẳng (*P*) thì $a \perp b$.

C. Nếu *a* song song với mặt phẳng (*P*) và $b \perp a$ thì $b \perp$ mặt phẳng (*P*).

D. Nếu *a* song song với mặt phẳng (*P*) và $b // a$ thì $b //$ mặt phẳng (*P*).

Câu 24: [304249] Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở *B*. *AH* là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $SA \perp BC$ **B.** $AH \perp BC$ **C.** $AH \perp AC$ **D.** $AH \perp SC$

Câu 25: [304251] Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA \perp (ABC)$ và đáy *ABCD* là hình chữ nhật. Gọi *O* là tâm của *ABC* và *I* là trung điểm của *SC*. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $IO \perp (ABCD)$ **B.** $BC \perp SB$

C. (*SAC*) là mặt phẳng trung trực của đoạn *BD* **D.** Tam giác *SCD* vuông ở *D*.

Câu 26: [304253] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo một giao tuyến thì giao tuyến ấy vuông góc với cả (α) và (β)

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau

D. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d

Câu 27: [304257] Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mp thì song song với nhau.

C. Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 28: [304258] Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc. Điểm cách đều A, B, C, D là:

A. Trung điểm BC. **B.** Trung điểm AD.

C. Trung điểm AC. **D.** Trung điểm AB.

Câu 29: [304191] Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $HA = HB = HC = HD$

B. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

C. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Câu 30: [304244] Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. H là trực tâm tam giác ABC.

B. H là trọng tâm tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 31: [304189] Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. $36\sqrt{2}$ **B.** 40 **C.** $36\sqrt{3}$ **D.** 36

Câu 32: [304194] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là:

A. Hình thang vuông | **B.** Tam giác đều

C. Tam giác cân | **D.** Tam giác vuông

Câu 33: [304200] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình thang cân | **B.** Hình thang vuông

C. Hình bình hành | **D.** Tam giác vuông

Câu 34: [304216] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB, cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang vuông | **B.** Hình thang cân

C. Hình bình hành | **D.** Hình chữ nhật

Câu 35: [304240] Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM = b$ $(0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng?

A. $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{16}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{8}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	**02. B**	**03. B**	**04. A**	**05. A**	**06. A**	**07. B**	**08. D**	**09. A**	**10. D**
11. A	**12. C**	**13. A**	**14. D**	**15. D**	**16. A**	**17. B**	**18. D**	**19. C**	**20. D**
21. A	**22. D**	**23. B**	**24. C**	**25. C**	**26. C**	**27. A**	**28. B**	**29.D**	**30.C**
31. D	**32. D**	**33. A**	**34. A**	**35. C**					

PHẦN 2:[TT6005] Hai mặt phẳng vuông góc.

Câu 1: [304741] Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $SC \perp (ABC)$.

B. $(SAC) \perp (ABC)$.

C. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $A' \in SB$.

D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK \perp (SAC)$.

Câu 2: [306045] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$ Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45^0.

C. Hai mặt phẳng $AA'B'B$ và $BB'C'$ vuông góc nhau.

D. Đáy ABC là tam giác vuông.

Câu 3: [304743] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi và chỉ khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi và chỉ khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) (hoặc $(Q) \equiv (R)$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Câu 4: [304744] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 5: [304745] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 6: [304746] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 7: [304747] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: [304748] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 9: [304749] Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không** đúng?

A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **B.** $(AA'H) \perp (A'B'C')$

C. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$ **D.** $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$

Câu 10: [304750] Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC, ABD cùng vuông góc với đáy BCD. Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD. Khẳng định nào **sai**?

A. $AB \perp (BCD)$. **B.** $(DFK) \perp (ACD)$.

C. $(ABE) \perp (ACD)$. **D.** $(ACD) \perp (ABC)$.

Câu 11: [304751] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là tâm hình vuông $ABCD$, $AB = a$, $SO = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang vuông **B.** Hình thang cân

C. Hình bình hành **D.** Tam giác cân

Câu 12: [304752] Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$ **B.** Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$ **D.** Nếu $c \,//\, m$ thì $c \,//\, (\alpha)$ hoặc $c \,//\, (\beta)$

Câu 13: [304753] Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

D. Ba mệnh đề trên đều sai

Câu 14: [304754] Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD), (α) cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. hình bình hành **B.** hình thang vuông

C. hình thang không vuông **D.** hình chữ nhật

Câu 15: [304755] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng không cắt nhau, không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Câu 16: [306068] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A. H là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

B. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.

C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.

D. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC.

Câu 17: [304757] Cho *a, b, c* là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$

C. Cho $a \perp b$ nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b)

Câu 18: [304758] Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Mặt phẳng (Q) chứa b và đường vuông góc chung của a và b thì mặt phẳng $(Q) \perp a$

B. Mặt phẳng (R) chứa b và chứa đường thẳng $b' \perp a$ thì mặt phẳng $(R) \parallel a$

C. Mặt phẳng (α) chứa a, mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$

D. Mặt phẳng (P) chứa b thì mặt phẳng $(P) \perp a$

Câu 19: [304759] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 20: [304760] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SAB) \perp (SAC)$

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là $\widehat{SCB}$.

C. Vẽ $AH \perp BC, H \in BC \Rightarrow \widehat{ASH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

D. $(SAB) \perp (ABC)$

Câu 21: [304761] Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m. Gọi a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$.

B. Nếu $c \perp m$ thì $d \perp (Q)$.

C. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$.

D. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$.

Câu 22: [304742] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông; $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. $(SAC) \perp (SBD)$

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$ (với O là tâm hình vuông $ABCD$)

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Câu 23: [304763] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(SBC) \perp (SAC)$.

B. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB.

C. (SDC) tạo với (BCD) góc 60^0.

D. (SBC) tạo với đáy góc 45^0.

Câu 24: [304764] Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a$, $c \perp b$. Mọi mp(α) chứa c thì đều vuông góc với mp(a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 25: [304765] Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE) \perp (ADC)$.

B. $(ABD) \perp (ADC)$.

C. $(ABC) \perp (DFK)$.

D. $(DFK) \perp (ADC)$.

Câu 26: [304767] Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là $\widehat{CBD}$

B. Góc giữa hai mặt phẳng $(ACD$ và (BCD) là $\widehat{AIB}$.

C. $(BCD) \perp (AIB)$.

D. $(ACD) \perp (AIB)$.

Câu 27: [306071] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $AC \perp BD'$.

B. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

D. Bốn đường chéo AC', $A'C$, BD', $B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$.

Câu 28: [306093] Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

I. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$.

II. Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

III. Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

IV. Nếu $(\gamma) \perp d$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.

Các mệnh đề đúng là :

A. I, II và III. **B.** III và IV. **C.** II và III. **D.** I, II và IV.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	**02. A**	**03. B**	**04. D**	**05. A**	**06. C**	**07. B**	**08. C**	**09. D**	**10. D**
11. B	**12. C**	**13. D**	**14. B**	**15. B**	**16. B**	**17. C**	**18. A**	**19. B**	**20. B**
21. A	**22. D**	**23. C**	**24. B**	**25. B**	**26. A**	**27. B**	**28. D**		

Chủ đề 4
[TV6006] KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Lý thuyết

Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (α) bằng độ dài đoạn thẳng MH với H là hình chiếu vuông góc của M trên (α).

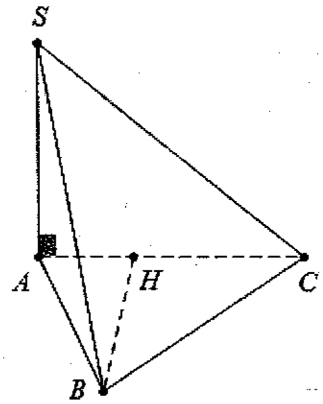
Kí hiệu $d(M;(\alpha))=MH$ (đvkc : đơn vị khoảng cách).

2. Phương pháp xác định khoảng cách

Xây dựng các bài toán gốc và phát triển các bài toán khó

Bài toán gốc 1. *Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng chứa chân đường cao (ta gọi điểm này là điểm M dễ, kí hiệu $M_{(e)}$).*

Bài toán. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác bất kỳ. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B hoặc điểm C đến hai mặt phẳng (SAC) hoặc mặt phẳng (SAB).



Lời giải. Từ B kẻ $BH \perp AC$, với $H \in AC$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BH \subset (ABC)$.

Khi đó $SA \perp BH;\ AC \perp BH \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $d(B;(SAC))=BH=h$. Tương tự, điểm C đến mặt phẳng ...

→ Bản chất bài toán là tính đường cao của tam giác ABC.

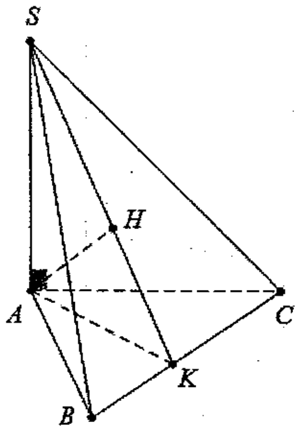
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BH.AC$.
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}$.

Dựa vào diện tích tam giác ABC để tính h.

Bài toán gốc 2. *Tính khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt phẳng bất kỳ (ta gọi điểm này là điểm điểm M dễ, kí hiệu $M_{(e)}$).*

Bài toán. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác bất kỳ. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

***Lời giải.* " Phương pháp kẻ đường phụ "**



Từ A kẻ $AK \perp BC$. Mà $SA \perp BC \subset (ABC)$.

Suy ra $BC \perp (SAK)$. Kẻ $AH \perp SK$, $H \in SK$.

$\Rightarrow BC \perp AH \subset (SAK) \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SK \end{cases}$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AH = h$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow h = \frac{SA.AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}}.$$

Chú ý: *Hệ thức lượng trong tam giác vuông mà ta xét ở đây là tam giác SAK, với đường cao là AH.*

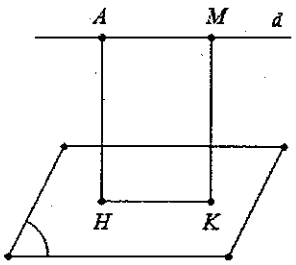
Bài toán gốc 3. *Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ (không là hai điểm được nói đến ở bài toán gốc 1, 2) đến một mặt phẳng bất kỳ (ta gọi điểm này là điểm M khó, kí hiệu $M_{(h)}$).*

Bài toán. Đưa điểm $M_{(h)}$ *khó* về các điểm $M_{(e)}$ *dễ* ở một trong hai bài toán gốc được đưa ra ở trên gọi là *phương pháp đổi điểm về bài toán gốc*, ta có một số phương pháp tính như sau:

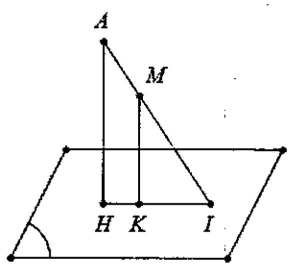
Cách 1: Tìm đường thẳng $(d): \begin{cases} A, M \in (d) \\ d \parallel (\alpha) \end{cases}$. Khi đó $d\left(A;(\alpha)\right) = d\left(M;(\alpha)\right)$.

Cách 2: Tìm đường thẳng $(d): \begin{cases} A, M \in (d) \\ d \cap (\alpha) = I \end{cases}$. Khi đó $\dfrac{d\left(A;(\alpha)\right)}{d\left(M;(\alpha)\right)} = \dfrac{AI}{MI}$.

Chú ý: Điểm A là điểm ở bài toán gốc. Hình vẽ minh họa.



Hình 1 (cách 1).



Hình 2 (cách 2).

Chú ý: Ngoài phương pháp kẻ thêm đường phụ hay gọi là cách tính trực tiếp, ta có thể ứng dụng thể tích của khối chóp để tính khoảng cách.

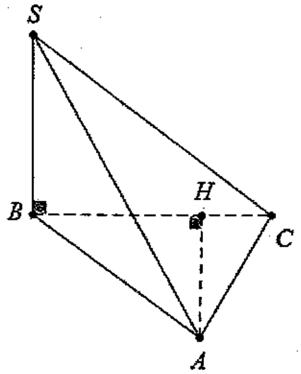
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.d\left(A;(SBC)\right).S_{\Delta ABC} \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = \frac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}$$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cạnh $BC = a,\ AC = 2a\sqrt{2}$, góc $\widehat{ACB} = 45^0$. Cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{8a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



Từ A kẻ $AH \perp BC,\ H \in BC$ (1)

Ta có $SB \perp (ABC) \Rightarrow SB \perp AH$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

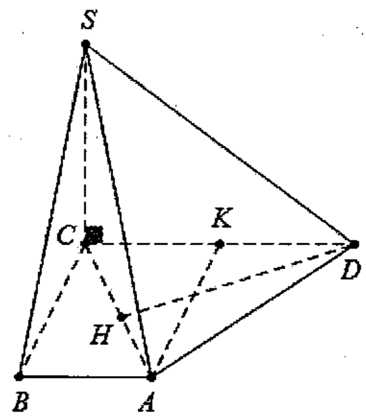
Tam giác AHC vuông tại H, có $\sin\widehat{HCA} = \frac{AH}{AC}$.

$\Rightarrow AH = \sin\widehat{HAC}.AC = \sin 45^0.AC = 2a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2a$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B và C, $BC = a$, $CD = a\sqrt{3}$, $\widehat{ACB} = 45^0$, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Kẻ DH vuông góc với AC $\Rightarrow DH \perp AC$ (1).

Bài ra có $SC \perp (ABCD) \Rightarrow SC \perp DH$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $DH \perp (SAC) \Rightarrow d(D;(SAC)) = DH$.

Tam giác ABC vuông có $\widehat{ACB} = 45^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại $B \Rightarrow AC = AB.\sqrt{2} = BC.\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên CD.

$\Rightarrow ABCK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AK = a$.

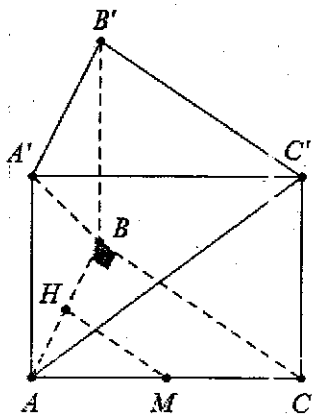
$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}.AK.CD = \frac{1}{2}.DH.AC \Rightarrow DH = \frac{AK.CD}{AC}$.

$\Rightarrow DH = \frac{a.a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d(D;(SAC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $A'C = 2a\sqrt{2}$, $A'B = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ trung điểm M của đường thẳng AC đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Từ M kẻ MH song song với BC cắt AB tại H.

$\Rightarrow MH \parallel BC$ mà $AB \perp BC$ (ΔABC vuông) $\Rightarrow MH \perp AB$ (1).

$ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp BC$ (2).

Từ (1), $(2) \Rightarrow MH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(M;(ABB'A')) = MH$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = 2a$.

Tam giác $A'AC$ vuông tại A có $AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = 2a$.

Tam giác ABC vuông tại B có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

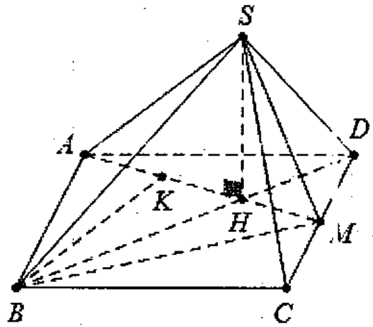
Mặt khác $\frac{MH}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(M;(ABB'A')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng 2, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. Gọi M là trung điểm của CD, hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải



Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MAB} = 2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MAB} = 1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = a^2 \Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ADM, ta có:

$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2.AD.DM.\cos\widehat{ADM} = 1 \Rightarrow AM = 1$.

Gọi H là giao điểm của AM và $BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ BK vuông góc với AM, $K \in AM \Rightarrow BK \perp AM$ (1).

Ta có $(SAM) \cap (SBD) = SH \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BK$ (2).

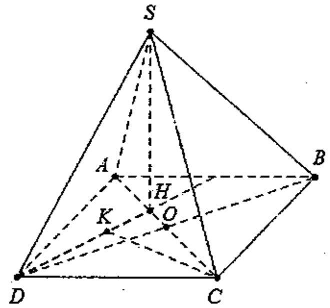
Từ $(1),(2) \Rightarrow BK \perp (SAM) \Rightarrow d(B;(SAM)) = BK$.

Mặt khác $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}.BK.AM \Rightarrow BK = \frac{2.S_{\Delta MAB}}{AM} = \frac{2}{1} = 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABD. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SDH) bằng $\sqrt{5}$. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

Đặt $AB = x \Rightarrow AC = BD = x\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Vì H là trọng tâm của $\Delta ABD \Rightarrow OH = \frac{OA}{3} = \frac{x\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow HC = OH + OC = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{6} = \frac{2x\sqrt{2}}{3}$.

Kẻ CK vuông góc với $DH \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow d(C;(SDH)) = CK = \sqrt{5}$ (1).

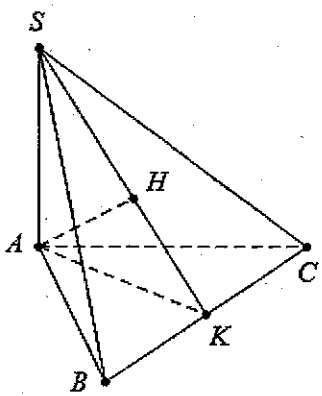
Tam giác DHC có $OD \perp HC \Rightarrow CK.DH = OD.HC \Rightarrow CK = \frac{OD.HC}{DH} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{2x\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{5}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có : $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

Kẻ $AH \perp SK$, $H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A.

$\Rightarrow AH = \frac{SK}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \rightarrow d(A;(SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **Chọn D.**

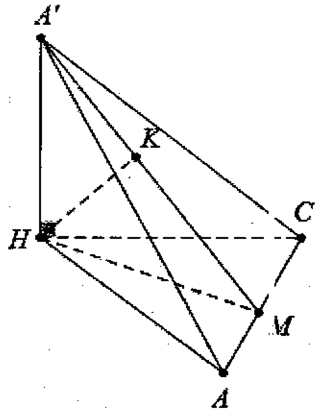
Nhận xét: *Nếu tam giác ABC vuông tại B thì K trùng với B, vậy ta chỉ cần kẻ $AH \perp BC$ thì khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $d(A;(SBC)) = AH$ và nếu tam giác ABC vuông tại A thì SA, AB, AC đôi một vuông góc, khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) được tính theo công thức* $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = 3a$. Điểm A' cách đều ba đỉnh A, B, C. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC sao cho $A'H = a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $(A'AC)$.

A. $\frac{3a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{22}}{11}$. **D.** $\frac{6a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Theo bài ra, ta có: $A'A = A'B = A'C$ (*ΔABC đều $\to A'.ABC$ là hình chóp đều*) $\Rightarrow$ hình chiếu của A' trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.



Tam giác $A'BH$ vuông tại H, có $\tan \widehat{A'BH} = \frac{A'H}{BH}$

$\Rightarrow BH = A'H.\tan 60^0 = 3a\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2BH = 6a\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3a$

Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow HM \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHM)$.

Kẻ HK vuông góc với $A'M$ với $M \in AC$.

$\Rightarrow HK \perp (A'AC) \Rightarrow d(H;(A'AC)) = HK$.

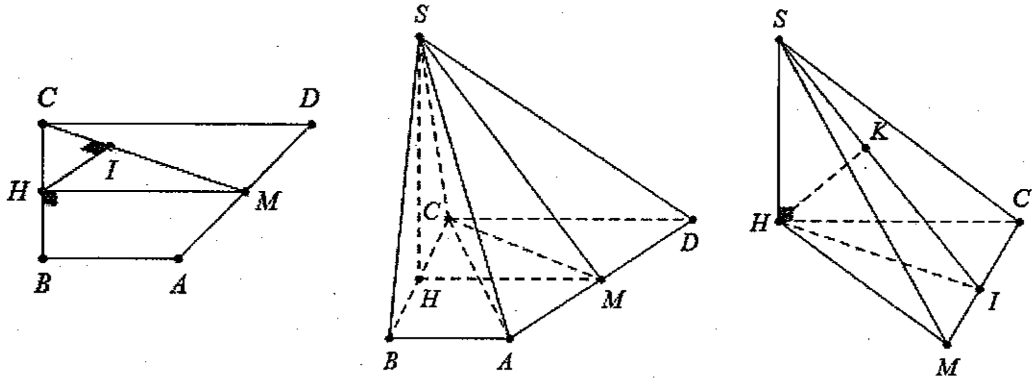
Tam giác $A'HM$ vuông tại H, có

$HK = \frac{A'H.HM}{\sqrt{A'H^2 + HM^2}} = \frac{3a\sqrt{22}}{11}$. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B, C, $AB = BC = a$, $CD = 2a$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của BC, AD. Cạnh bên SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $S_{\Delta SHM} = \frac{3a^2}{4}$. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCM).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Từ H kẻ HI vuông góc với CM, $I \in CM$. (1).

Ta có : $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CM$ (2). Từ $(1),(2)$ suy ra $CM \perp (SHI)$.

Kẻ HK vuông góc với $SI \Rightarrow \begin{cases} CM \perp HK \\ SI \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCM) \Rightarrow d(H;(SCM)) = HK$.

Bài ra ta có : $ABCD$ là hình thang vuông và $HM \parallel AB \Rightarrow HM = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Tam giác SHM vuông tại $H \Rightarrow S_{\Delta SHM} = \dfrac{1}{2}.SH.HM = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow SH = a$.

Tam giác CMH vuông tại H, có $HI = \dfrac{HC.HM}{\sqrt{HC^2+HM^2}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{10}}$.

Tam giác SHI vuông tại H, có $HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2+HI^2}} = \dfrac{3a}{7} \Rightarrow d(H;(SCM)) = \dfrac{3a}{7}$. **Chọn C.**

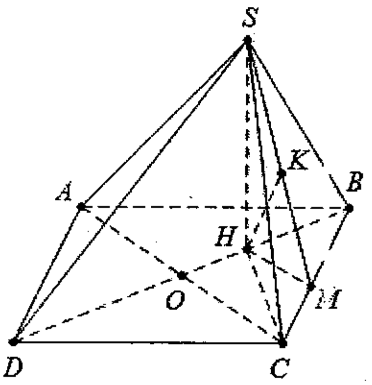
Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^0$. Hình chiếu vuông góc của S là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $BD = 3BH$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) biết $SC = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm của BC

$\Rightarrow BD = 2BO = 3BH \Rightarrow BH = \dfrac{2}{3}BO$.



Mà tam giác ABC đều $\Rightarrow H$ là trọng tâm của ΔABC.

$\Rightarrow H \in AM \perp BC \Rightarrow HM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SHC vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Từ H kẻ HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Ta có : $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp HM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H;(SBC)) = HK$

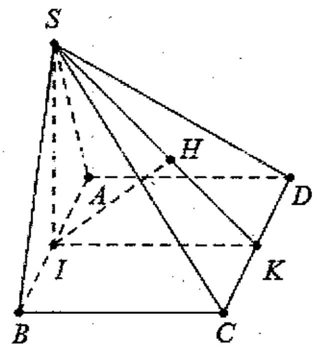
Tam giác SHM vuông tại H, có $SH = HM = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{2}SM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Suy ra $SI \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} I \in AB \\ AB \parallel (SCD) \end{cases} \Rightarrow d(A;(SCD)) = d(I;(SCD))$.

Từ I kẻ IH vuông góc với SK với $H \in SK$.

Lại có $\begin{cases} SI \perp CD \\ IK \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIK) \Rightarrow CD \perp IH$.

Suy ra $IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I;(SCD)) = IH$.

Xét ΔSIK vuông tại I, có $\begin{cases} SI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ IH = a \end{cases} \Rightarrow IH = \frac{SI.IK}{\sqrt{SI^2 + IK^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn A.**

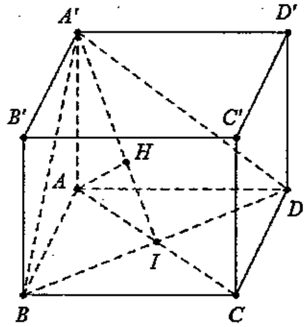
Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác ABD đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(A'BD)$ biết $AA'=a$.

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Gọi I là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow AI \perp BD$ mà $AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (AA'I)$.

Vì G là trọng tâm $\Delta BCD \Rightarrow d\left(G;(A'BD)\right)=\frac{1}{3}.d\left(A;(A'BD)\right)$.



Từ A kẻ AH vuông góc với $A'I$, $H \in A'I$.

Mà $BD \perp (AA'I) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (A'BD)$.

$\Rightarrow d\left(A;(A'BD)\right)=AH=\frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2+AI^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

$\Rightarrow d\left(G;(A'BD)\right)=\frac{1}{3}.d\left(A;(A'BD)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{21}$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=AB=a$ và $AD=x.a$. Gọi E là trung điểm của SC. Tìm x, biết khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SBD) bằng $h=\frac{a}{3}$.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $E \in SC$, $SC \cap (SBD)=S \Rightarrow \frac{d\left(E;(SBD)\right)}{d\left(C;(SBD)\right)}=\frac{d\left(E;(SBD)\right)}{d\left(A;(SBD)\right)}=\frac{ES}{CS}=\frac{1}{2}$.

Từ A kẻ $AK \perp BD$ $(K \in BD)$, kẻ $AH \perp SK$ $(H \in SK)$.

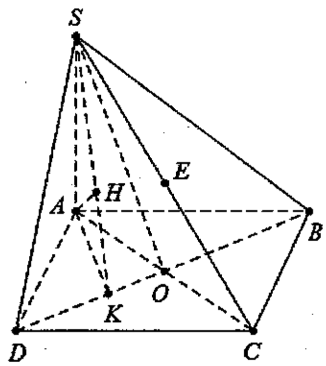
Ta chứng minh được $AH \perp (SBD)$ **(bài toán gốc 2).**

$\rightarrow AH=d\left(A;(SBD)\right)=2.d\left(E;(SBD)\right)=\frac{2a}{3}$.

Mà $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2} \Rightarrow AK=\frac{SA.AH}{\sqrt{SA^2-AH^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác ABD vuông tại A, có đường cao AK.

$\Rightarrow \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2x^2}=\frac{5}{4a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2=4 \end{cases} \Rightarrow x=2$



Chọn C.

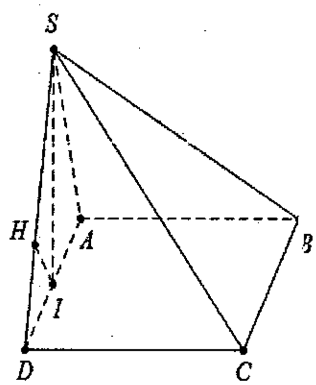
Ví dụ 13 [ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017]: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{8a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AD, ΔSAD cân tại $S \Rightarrow SI \perp AD$.

Mà $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.



$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABCD} = \frac{4a^3}{3} \Rightarrow SI = 2a.$

Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B;(SCD)) = d(A;(SCD))$

Mà $\begin{cases} A, I \in AD \\ AD \cap (SCD) = D \end{cases} \Rightarrow \frac{d(A;(SCD))}{d(I;(SCD))} = \frac{AD}{ID} = 2..$

Từ I kẻ $IH \perp SD$ với $H \in SD$ và $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp IH$.

$\Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I;(SCD)) = IH \Rightarrow d(A;(SCD)) = 2.IH.$

Xét ΔSID vuông tại I, có $IH = \frac{SI.ID}{\sqrt{SI^2 + ID^2}} = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(A;(SCD)) = \frac{4a}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H trùng với trung điểm của AB, biết $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là giao điểm của HD và AC. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD).

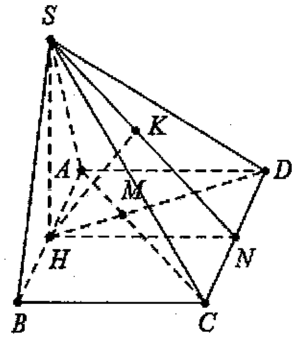
A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** a.

Lời giải

Xét ΔHAD, có AC là tia phân giác của góc $\widehat{HAD}$.

$\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{HM}{MD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HD}{MD} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\begin{cases} H, M \in HD \\ HD \cap (SCD) = D \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d(H;(SCD))}{d(M;(SCD))} = \dfrac{HD}{MD} = \dfrac{3}{2}$..



Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow HN \perp CD$.

Từ H kẻ $HK \perp SN$, $K \in SN \Rightarrow HK \perp (SCD)$.

Khi đó $d(H;(SCD)) = HK = \dfrac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}}$.

$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(H;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(M;(SCD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

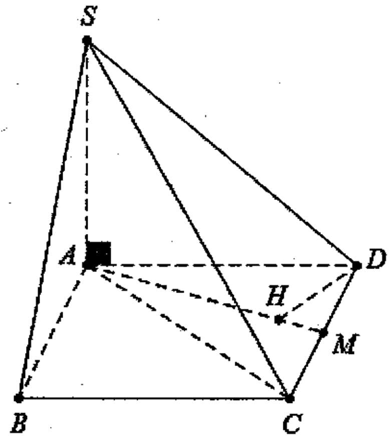
Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SCA} = \widehat{BSC} = 30^0$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAM).

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Đặt $AB = x \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow SA = AC.\tan\widehat{SCA} = \sqrt{\dfrac{x^2 + a^2}{3}}$.

Tam giác SBC vuông tại A, có $SB = \dfrac{BC}{\tan\widehat{BSC}} = a\sqrt{3}$.



Tam giác SAB vuông tại A, có $SA^2 + AB^2 = SB^2$.

$\Rightarrow \dfrac{x^2 + a^2}{3} + x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

Kẻ $DH \perp AM$, ta có $\begin{cases} SA \perp DH \\ AM \perp DH \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAM)$.

Xét ΔAMD vuông tại D, có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{MD^2} = \dfrac{3}{a^2}$.

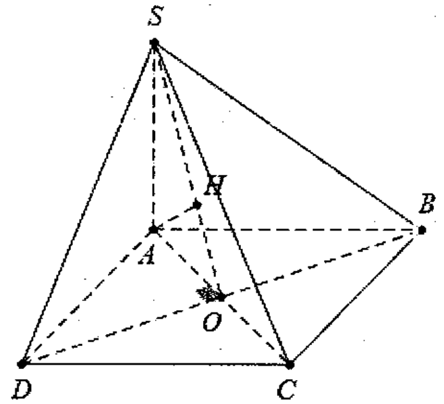
$\Rightarrow DH = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(D;(SAM)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy; $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, góc tại đỉnh D bằng 60^0. Khối chóp có thể tích là $V=\frac{a^3}{4}$. Gọi E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$. Tính khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Công thức tính thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}$. *Với* SA *là chiều cao của khối chóp,* S_{ABCD} *là diện tích hình thoi* $ABCD \Rightarrow SA=\frac{3.V}{S_{ABCD}}=\frac{3a^3}{4}:\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OA=OC$.

Ta có $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC} \Rightarrow AE=2AC \Rightarrow OE=3OA$

$\Rightarrow d\left(E;(SBD)\right)=3.d\left(A;(SBD)\right)$.

Kẻ AH vuông góc với $SO \Rightarrow AH \perp SO$ (1).

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

$\Rightarrow AH \perp BD$ (2). Từ $(1),(2)$ suy ra

$AH \perp (SBD) \Rightarrow d\left(A;(SBD)\right)=AH$

Tam giác SAO vuông tại A, có

$$AH=\frac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d\left(A;(SBD)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy khoảng cách từ điểm $E \to (SBD)$ bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **Chọn C.**

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

A.[TT6007] KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG ĐƯỜNG CAO (Dạng 1)

Câu 1: [323017] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SC lấy điểm M sao cho $MC=2MS$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: [323020] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với cạnh $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: [323022] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $MB = MC$ và $NC = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Khoảng cách từ điểm P đến mặt phẳng (SAB) bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{14}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{10}$.

Câu 4: [323023] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AD và H là trung điểm của AB. Biết rằng $SD = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHM) là.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: [323024] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $6a^2\sqrt{6}$. Cạnh $SA = a\sqrt{\dfrac{110}{3}}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) **gần nhất** với giá trị nào sau đây.

A. $\dfrac{13a}{10}$. **B.** $\dfrac{7a}{5}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{8a}{5}$.

Câu 6: [323025] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng.

A. $\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

Câu 7: [323027] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, cạnh $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM) bằng.

A. $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. B. $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$.

Câu 8: [323030] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2, AB = a\sqrt{2}, BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của CD. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng.

A. $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. B. $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$.

Câu 9: [323031] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ABD. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SDG) bằng $\sqrt{5}$ và $SG = 1$. Thể tích khối chóp đã cho là.

A. $\frac{25}{12}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 4 D. $\frac{12}{25}$.

Câu 10: [323033] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AC. Hình chiếu của S trên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn BM sao cho $HM = 2HB$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC) bằng.

A. $\frac{2a\sqrt{7}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{14}$. C. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. D. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 11: [323034] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân có $AC = BC = 3a$. Đường thẳng $A'C$ tạo với đáy một góc 60^0. Trên cạnh $A'C$ lấy điểm M sao cho $A'M = 2MC$. Biết rằng $A'B = a\sqrt{31}$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(ABB'A')$ là.

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$ C. $3a\sqrt{2}$ D. $2a\sqrt{2}$

Câu 12: [323036] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABD. Biết $SC = 2a\sqrt{2}$ và tạo với đáy một góc 45^0. Khoảng cách từ trung điểm của SD đến mặt phẳng (SAC) là.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{2}a}{3}$

Câu 13: [323038] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AD, H là trung điểm của AB. Biết rằng $SD = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHM) là.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 14 : [323039] Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A có $AC = a$. Tam giác SAB vuông tại S và hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Biết $SH = 2a\sqrt{2}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) là.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$

Câu 15: [323041] Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'ACC')$ là.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 16: [323043] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 17: [323048] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{2}$, $OD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách d từ điểm O đến mặt phẳng (SAB).

A. $d = a$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = 2a$.

Câu 18: [323050] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = k.AB$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là H thoả mãn $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Tỷ số khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDH) và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) là.

A. $\sqrt{\frac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **B.** $\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{2k}$

Câu 19: [323053] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, điểm E thuộc BC sao cho $BC = 3EC$. Biết hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB. Cạnh bên $AA' = 2a$ và tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'HE)$ là

A. $\frac{a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\frac{3a}{5}$ **C.** $\frac{3a}{4}$ **D.** $\frac{4a}{5}$

Câu 20: [323058] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O. Tam giác SAC đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $SA = 2AB = 2a$, khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) là.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	**02. A**	**03. C**	**04. B**	**05. B**	**06. B**	**07. A**	**08. C**	**09. A**	**10. D**
11. B	**12. A**	**13. B**	**14. C**	**15. D**	**16. C**	**17. B**	**18. B**	**19. D**	**20. B**

B. [TT6008] KHOẢNG CÁCH TỪ CHÂN ĐƯỜNG CAO ĐẾN MẶT BÊN (Dạng 2)

Câu 1: [323708] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$

Câu 2: [323714] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Biết SC tạo với đáy một góc 45^0 và cạnh bên $SA = 2a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 3: [323721] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$, ΔSAB là tam giác vuông cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ trung điểm H của AB đến mặt phẳng (SBD) là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 4: [323726] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC)?

A. $2a$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** a **D.** $\frac{3a}{2}$

Câu 5: [323729] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 30°$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$.

Câu 6: [323732] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = a\sqrt{3}, \widehat{ABC} = 30°, \widehat{ACB} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy là trung điểm của BC. Thể tích khối chóp $A'ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'AB)$ bằng.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 7: [323736] Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^o. Tính $\frac{4d}{a}$, biết d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 8: [323739] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$ và $AD = x.a$. Gọi E là trung điểm cạnh SC. Tìm x, biết khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SBD) là $d = \frac{a}{3}$.

A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 4$.

Câu 9: [323743] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{8}$.

Câu 10: [323745] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi F là trung điểm cạnh CD. Tính $\frac{33d}{a}$, biết d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBF).

A. $2\sqrt{33}$. **B.** $4\sqrt{33}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $4\sqrt{11}$.

Câu 11: [323746] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC).

A. $\frac{5a}{12}$ **B.** $\frac{5a}{6}$ **C.** $\frac{12a}{5}$ **D.** $\frac{6a}{5}$

Câu 12: [323750] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, M là trung điểm của CD . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SOM).

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a}{4}$ **D.** $\frac{a}{8}$

Câu 13: [323752] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng (SHC) biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

A. $\frac{a}{\sqrt{17}}$ **B.** $\frac{2a}{\sqrt{17}}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{27}}$ **D.** $\frac{2a}{\sqrt{27}}$

Câu 14: [323753] Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A, cạnh $A'C = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 15: [323754] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Giả sử $AB = BC = 2a$, góc $\widehat{ABC} = 120^0$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $2a$

Câu 16: [323756] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là.

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{3\sqrt{7}a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}a}{3}$

Câu 17: [323759] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cạnh SC hợp với đáy một góc $60°$. Gọi h là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD). Tỉ số $\frac{h}{a}$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{18}}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{78}}{13}$ **C.** $\frac{\sqrt{58}}{13}$ **D.** $\frac{\sqrt{38}}{13}$

Câu 18: [323760] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AD = 2AB = 2BC$; $BC = a$; $SA \perp (ABCD)$ và SB hợp với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Tính tỉ số $\dfrac{d(A;(SCD))}{a}$.

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 19: [323763] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90°$, $BA = BC = a; AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy . Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng $30°$. Tính khhoảng cách từ A đến (SCD).

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

Câu 20: [323765] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và gọi M là trung điểm của BC; biết góc $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính $d(B;(SDC))$?

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	**2. C**	**3. A**	**4. D**	**5. C**	**6. B**	**7. A**	**8. B**	**9. B**	**10. B**
11. C	**12. B**	**13. A**	**14. B**	**15. C**	**16. A**	**17. B**	**18. D**	**19. A**	**20. A**

C.[TT6009] KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG BẤT KỲ (Dạng 3)

Câu 1: [327559] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác MBC, cạnh bên $SC = \dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 2: [327563] Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^0$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^0$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết tam giác SAB cân tại S, tam giác SBC vuông tại S. Tính khoảng cách từ trung điểm của AB đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 3: [327566] Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ là tam giác vuông cân, $A'C = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 4: [327569] Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của SB. Tỷ số $\frac{SA}{a}$ khi khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$ là

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** 1.

Câu 5: [327573] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 4cm, AB = 3cm, AC = 4cm$ và $BC = 5cm.$ Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng (đơn vị cm).

A. $d(A;(SBC)) = \frac{2}{17}$ **B.** $d(A;(SBC)) = \frac{\sqrt{72}}{17}$

C. $d(A;(SBC)) = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ **D.** $d(A;(SBC)) = \frac{3}{\sqrt{17}}$

Câu 6: [327575] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $4cm$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt đáy là trung điểm H của AB. Biết rằng $SH = \sqrt{2}\ cm$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là.

A. $1\ cm$ **B.** $2\ cm$ **C.** $3\ cm$ **D.** $4\ cm$

Câu 7: [327579] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Gọi M là trung điểm của SC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SB = 3SN$. Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{4}{3}$ lần khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (ABC)

B. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng một nửa khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

C. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{1}{3}$ khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

D. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{3}{2}$ khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB).

Câu 8: [327582] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thoã mãn $\overrightarrow{SM}+2\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Tỷ số khoảng cách D đến mặt phẳng (SAB) và từ M đến mặt phẳng (SAB) là

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 9: [327586] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy , biết tam giác ABC đều cạnh $20\,cm$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ A đến (SCD) là

A. $20\,cm$ **B.** $10\,cm$ **C.** $15\,cm$ **D.** $30\,cm$.

Câu 10: [327593] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách d từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=\frac{a}{2}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $d=\frac{3a}{2}$.

Câu 11: [327596] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SB=a\sqrt{5}$, khoảng cách từ trung điểm của SA đến mặt phẳng (SBC) là.

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 12: [327599] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a.Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là trung điểm H của cạnh AB. Biết tam giác SAB đều, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{10}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{15}}{15}$.

Câu 13: [327601] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của cạnh AD. Biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Độ dài cạnh SA là:

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $3a$.

Câu 14: [327603] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB=a; BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm của AC. Biết $SB=\frac{3a}{2}$, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) là:

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Câu 15: [327607] Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng:

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 16: [327611] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Biết $SH \perp (ABCD)$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHM) bằng $\frac{a}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) khi ΔSAB là tam giác đều:

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Câu 17: [327614] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2AB$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Biết diện tích tam giác SAB bằng $1\ cm^2$ và $d(B;(SAD)) = \sqrt{2}\ cm$. Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$:

A. 32. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 72.

Câu 18: [327617] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi H nằm trên đoạn AD sao cho $HD = 2HA$. Khi $SA = 3\sqrt{3}$, tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD):

A. $d = \frac{9\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. C	2. B	3. C	4. B	5. C	6. B	7. A	8. B	9. C	10. C
11. C	12. A	13. B	14. B	15. B	16. C	17. A	18. C		

Chủ đề 5

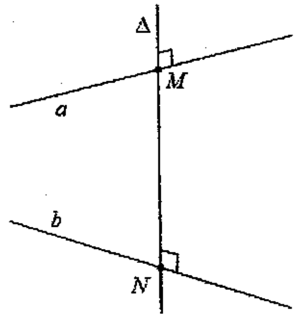
[TV6010] KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Đường vuông góc chung và đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau.

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a,b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b

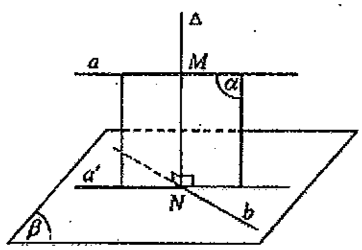
b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt tại M và N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b.



2. Cách xác định đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a, a' là hình chiếu vuông góc của a trên (β).

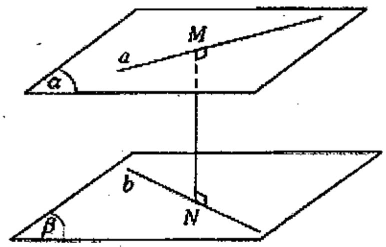
Vì $a \parallel (\beta)$ nên $a \parallel a'$. Gọi $N = a' \cap b$ và (α) là mặt phẳng chứa a và a'. Dựng đường thẳng Δ qua N và vuông góc với (β) , gọi $M = \Delta \cap a$, dễ dàng suy ra Δ là đường vuông góc chung và MN là đoạn vuông góc chung của a và b.



Nhận xét:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

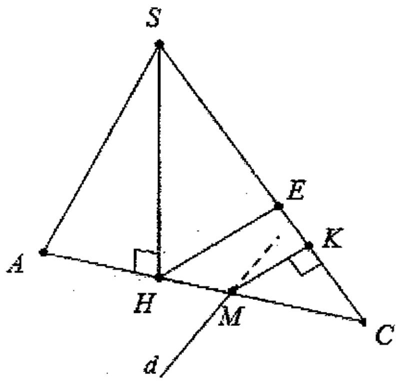
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.



3. Phương pháp giải.

Phương pháp 1: Dựng đường vuông góc chung để tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.

Mô hình: Khảo sát khối chóp đỉnh S có đường cao SH bài toán yêu cầu chúng ta tính khoảng cách giữa haiđường thẳng chéo nhau d (thuộc mặt đáy) và đường thẳng SC thuộc mặt bên của khối chóp trong đó $d \perp SC$.



+) **Dựng hình:** Ta có hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy là HC.

Mặt khác : $\begin{cases} SC \perp d \\ SH \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (SHC)$.

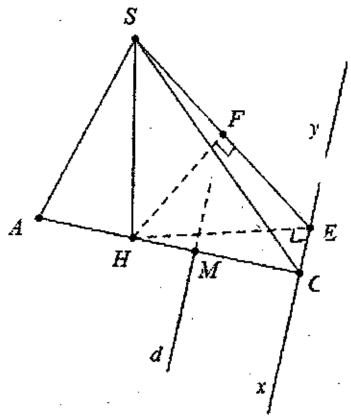
Gọi $M = d \cap HC$, dựng $MK \perp SC$ khi đó MK là đoạn vuông góc chung của AC và SC.

+) **Tính toán:** Dựng $HE \perp SC$ khi đó $\dfrac{MK}{HE} = \dfrac{MC}{HC} \Rightarrow MK = \dfrac{MC}{HC}.HE$.

Xét tam giác vuông SHC ta có: $\dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2} \Rightarrow HE \Rightarrow d$.

Phương pháp 2: Dựng đường thẳng chứa a và song song với b (hoặc đường thẳng chứa b và song song với a) để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Mô hình: Khảo sát khối chóp đỉnh S có đường cao SH bài toán yêu cầu chúng ta tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d (thuộc mặt đáy) và đường thẳng SC thuộc mặt bên của khối chóp tuy nhiên trong trường hợp này d không vuông góc với SC.



+) **Dựng hình:** Tìm giao điểm của SC và đáy (giao điểm của cạnh thuộc mặt bên và mặt đáy) trong trường hợp này giao điểm là điểm C.

Từ C ta dựng đường thẳng $xCy \parallel d$.

Khi đó $d(d;SC) = d(d;(Sxy))$. Gọi $M = d \cap HC$.

Do đó $d = d(M;(Sxy))$ đến đây chúng ta quay về bài toán tìm khoảng cách từ điểm bất kỳ thuộc mặt đáy đến mặt phẳng phẳng bên (SCx) của khối chóp.

<u>**Chú ý 1:**</u> Để tính khoảng cách $d(d;(Sxy))$ ta có thể lấy bất kỳ điểm nào thuộc d (không nhất thiết là điểm M) làm sao để quy khoảng cách cần tìm về khoảng cách từ A đến mặt phẳng (Sxy) nhanh và dễ dàng nhất.

<u>**Chú ý 2:**</u> Trong trường hợp trong hình vẽ đã tồn tại mặt phẳng chứa SC và song song với d hoặc chứa d và song song với SC thì ta nên tận dụng luôn yếu tố đó.

Chú ý 2: Ngoài cách dựng mặt phẳng chứa SC và song song với d để tính khoảng cách giữa d và SC ta có thể dựng đường thẳng chứa d và song song với SC để tính khoảng cách giữa chúng tuy nhiên cách làm này thường khá phức tạp so với cách làm ban đầu. Do đó ta ưu tiên dựng mặt phẳng chứa cạnh bên SC và song song với đường thẳng thuộc mặt đáy.

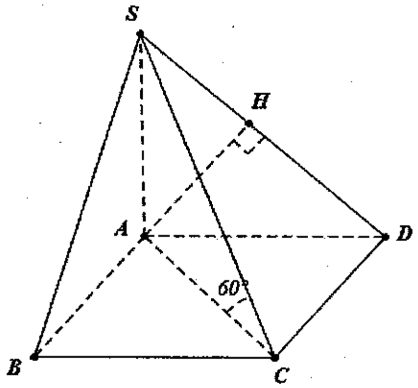
II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Ví dụ cơ bản

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$. Biết rằng SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SD là:

A. $d=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $d=a\sqrt{7}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{7}$.

Lời giải:



Ta có: $AC=a\sqrt{2}$. Do $SA\perp(ABCD)$ và SC tạo với đáy góc 60^0 nên $\widehat{SCA}=60^0$.

Khi đó $SA=AC\tan 60^0=a\sqrt{6}$.

Do $\begin{cases}AB\perp AD\\ AB\perp SA\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)$.

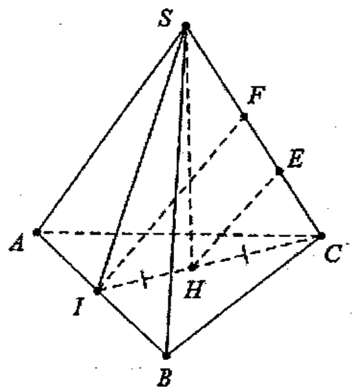
Dựng $AH\perp SD$ suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Ta có: $AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi I là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm của CI. Biết chiều cao của khối chóp là $h=a\sqrt{3}$. Khoảng cách d giữa 2 đường thẳng AB và SC là.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{51}}{17}$ **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{51}}{34}$ **C.** $d=\dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$ **D.** $d=\dfrac{3a\sqrt{51}}{17}$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases}CI\perp AB\\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SIC)$

Dựng $IF\perp SC$ khi đó IF là đoạn vuông góc chung của AB và SC. Dựng $HE\perp SC$ ta có: $HE=\dfrac{1}{2}IF$

Lại có $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

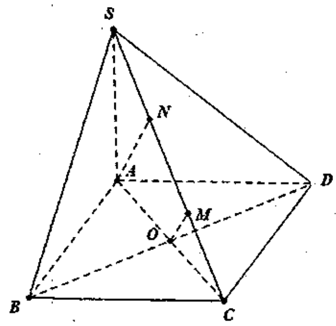
Khi đó $HE=\dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2+CH^2}}=\dfrac{a\sqrt{51}}{17}\Rightarrow IF=\dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA\perp(ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng BD và SC:

A. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$ **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{15}$ **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Khi đó $\widehat{((SBC);(ABCD))}=\widehat{SBA}=60^0$

Suy ra $SA=AB\tan 60^0=a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Dựng $OM\perp SC$ khi đó OM là đường vuông góc chung của BD và SC. Ta có $\Delta CAS\sim\Delta CMO\ (g-g)\Rightarrow \frac{SC}{CO}=\frac{SA}{MO}\Rightarrow OM=\frac{SA.OC}{SC}$

$$=\frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}$$

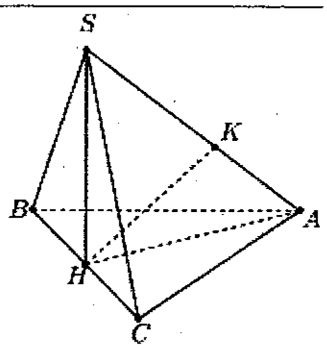
Cách 2: Dựng $AN\perp SC\Rightarrow OM=\frac{1}{2}AN$. Mặt khác $\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow AN=\frac{a\sqrt{30}}{5}$

Khi đó $d=OM=\frac{1}{2}AN=\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng SA và BC.

A. $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $d=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$ **D.** $d=a\sqrt{3}$

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của BC khi đó $SH\perp BC$.

Mặt khác $(SBC)\perp(ABC)$ do đó $SH\perp(ABC)$.

Ta có: $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AB=AC=\frac{a}{\sqrt{2}};AH=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.

Do $\begin{cases} BC\perp AH \\ BC\perp SH \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHA)$. Dựng $HK\perp SA$ khi đó HK là đoạn vuông góc chung của BC và SA.

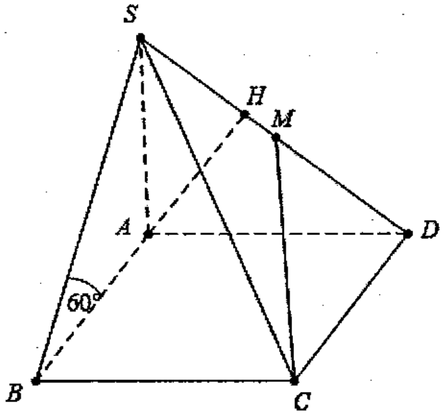
Lại có: $HK=\frac{SH.AH}{\sqrt{SH^2+HA^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0 và M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng AB và CM.

A. $d=a\sqrt{3}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow\widehat{SBA}$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC)



Ta có: $SA=AB\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Do $AB\parallel CD\Rightarrow AB\parallel(CMD)$ do đó :

$d(AB;CM)=d(AB;(CMD))$

Dựng $AH\perp SD$ khi đó $d(A;(SCD))=AH$

Lại có $AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

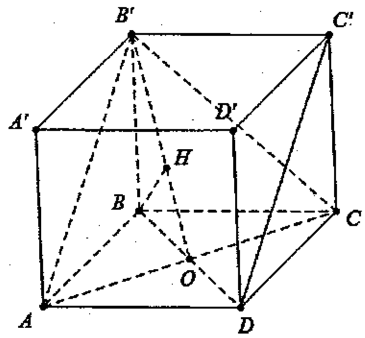
Ví dụ 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi d là khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và $C'D$. Tính tỷ số $\frac{d}{a}$.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

Dễ thấy $AB'\parallel C'D$ do đó $d(AC;C'D)=d(C'D;(ACB'))$

Khi đó $d=d(D;(B'AC))$. Mặt khác $OB=OD$ (với O là tâm hình vuông $ABCD$)



Khi đó $d(D;(B'AC))=d(B;(B'AC))$

Do $\begin{cases}BD\perp AC\\AC\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AC\perp(BB'O)$, dựng $BH\perp B'O$

Suy ra $BH\perp(B'AC)\Rightarrow d=BH=\frac{BO.BB'}{\sqrt{BO^2+BB'^2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Do vậy tỷ số $\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, Biết $SA = \frac{a}{\sqrt{2}}$ khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$ **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{20}$ **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{15}$ **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$

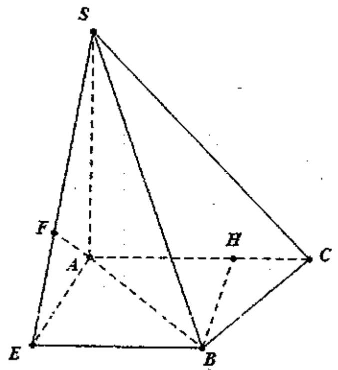
Lời giải:

+) Dựng $Bx // AC, AE \perp Bx \Rightarrow (SAE) \perp Bx$

+) Dựng $AF \perp SE \Rightarrow d(AC;SB) = AF$

Dựng $BH \perp AC$ dễ thấy $AE = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $AF = \frac{AE.SA}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. **Chọn D.**



Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB, góc giữa mặt phẳng $(BCC'B')$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính khoảng các giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $d = \frac{3a}{8}$ **B.** $d = \frac{3a}{4}$ **C.** $d = \frac{3a}{16}$ **D.** $d = \frac{2a}{3}$

Lời giải:

+) Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (B'HK) \Rightarrow \widehat{B'KH} = 60^0$.

+) Ta có: $HK = HB\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

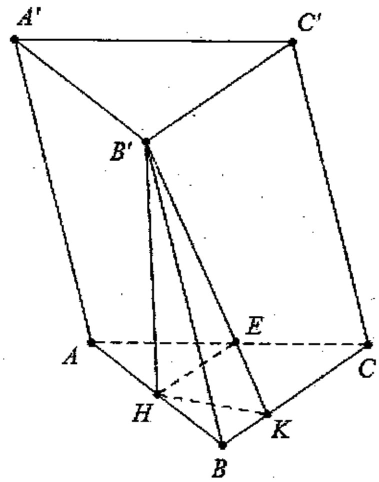
$\Rightarrow B'H = HK\tan 60^0 = \frac{3a}{4}$

+) Do $AA' \parallel BB' \Rightarrow d(AA';BC) = d(AA';(B'C'C))$

$d(A;(B'C'CB)) = 2d(H;(B'C'CB)) = 2HE$

+) Ta có: $HE = \frac{HK.B'H}{\sqrt{B'H^2 + HK^2}} = \frac{3a}{8}$.

Do đó $d = \frac{3a}{4}$. **Chọn B.**



Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB, biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng SA và BC.

A. $d = a\sqrt{3}$ **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $d = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ **D.** $d = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

Lời giải:

+) Gọi H là trung điểm của cạnh AB khi đó $SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$

+) Dựng $Ax // BC \Rightarrow d(SA;BC) = d((B;SAx))$

+) Dựng $HK \perp Ax \Rightarrow (SHK) \perp Ax$.

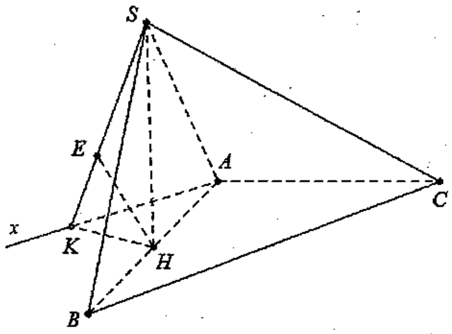
+) Dựng $HE \perp SK$

$\Rightarrow d(B;(SAx)) = 2d(H;(SAx))$

+) Ta có: $HK = AH\sin\widehat{HAK} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow d(H;(SAx)) = HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

+) Do đó $d(SA;BC) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **Chọn C.**



Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}, AC = a$, tam giác SBC là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng SB và AC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

Lời giải

+) Gọi H là trung điểm của BC ta có: $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

+) Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow SH = \dfrac{1}{2}BC = a$.

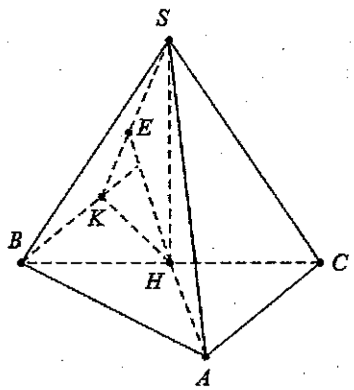
+) Dựng $Bx \parallel AC \Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SBx))$

$= d(C;(SBx)) = d$.

+) Dựng $HK \perp Bx, HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (SBx)$.

+) $d(C;(SBx)) = 2d(H;(SBx)) = 2HE$.

+) Ta có: $HK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

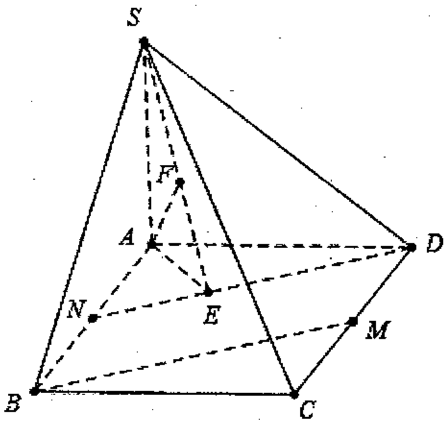


Do đó $d = 2d(H;(SBK)) = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, biết $SA=a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và BM là.

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{145}}{15}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{145}}{29}$

Lời giải:



Dựng $DN\parallel BM\Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Khi đó $d(SD;BM)=d(BM;(SDN))$

$=d(B;(SDN))=d(A;(SDN))$

Dựng $AE\perp DN\Rightarrow DN\perp(SAE)$, dựng $AF\perp SE$

khi đó $\begin{cases}AF\perp SE\\AF\perp DN\end{cases}\Rightarrow AF\perp(SDN)$

Ta có: $AE=\frac{AN.AD}{\sqrt{AN^2+AD^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

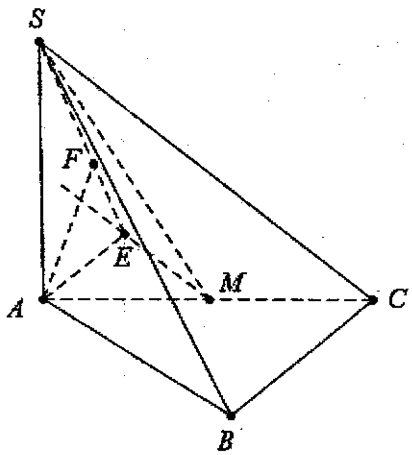
Do vậy $d(B;(SDN))=d(A;(SDN))$

$=AF=\frac{AE.SA}{\sqrt{AE^2+SA^2}}=2a\sqrt{\frac{5}{29}}=\frac{2a\sqrt{145}}{29}$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=2a$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi M là trung điểm của AC. Biết góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng AB và SM theo a.

A. $d=\frac{a\sqrt{13}}{13}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{39}}{13}$ **C.** $d=\frac{2a\sqrt{13}}{13}$ **D.** $d=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases}AB\perp BC\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow\widehat{SBA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Ta có: $SA=AB\tan\widehat{SBA}=2a\sqrt{3}$. Dựng $Mx\parallel AB$

Khi đó $d(AB;SM)=d(AB;(SMx))=d(A;(SMx))$

Dựng $AE\perp Mx; AF\perp SE$ khi đó $d(A;(SMx))=AF$

Do $AE\parallel BC$ nên $\widehat{EAM}=\widehat{ACB}=45^0$

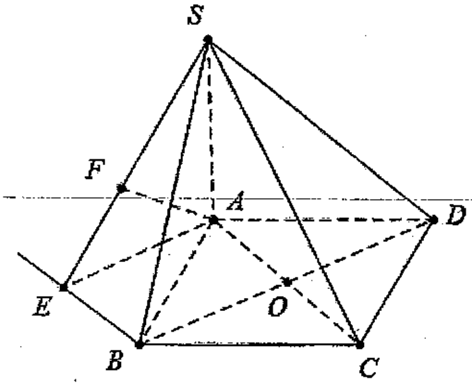
Suy ra $AE=AM\cos45^0=a$

Do đo $AF=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{2a\sqrt{39}}{13}=d$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, đường thẳng SC tạo với đáy góc 45^0. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC là:

A. $d = \frac{a\sqrt{10}}{10}$ **B.** $d = \frac{a\sqrt{10}}{2}$ **C.** $d = \frac{a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $d = \frac{a\sqrt{10}}{15}$

Lời giải:



+) Ta có: $AC = a\sqrt{2}; \widehat{SCA} = \widehat{(SC;(ABCD))} = 45^0$

$\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

+) Dựng $Bx \parallel AC \Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;SBx)$

+) Dựng $AE \perp Bx, AF \perp SE \Rightarrow d = AF$

+) Ta có: $BE \parallel AC \Rightarrow BE \perp BD$ dễ ràng suy ra $OEBO$ là hình chữ nhật suy ra $AE = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

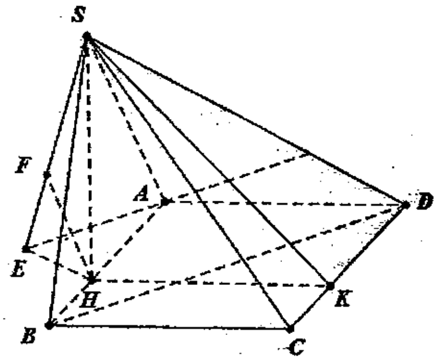
+) $d = \frac{AE.SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. **Chọn C.**

2. Ví dụ vận dụng cao.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm H thỏa mãn $\overline{HA} = -2\overline{HB}$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD.

A. $d = \frac{9a\sqrt{7}}{28}$ **B.** $d = \frac{9a\sqrt{7}}{14}$ **C.** $d = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$ **D.** $d = \frac{a\sqrt{7}}{14}$

Lời giải



+) Dựng $HK \perp CD \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^0$.

+) Ta có: $SH = HK.\tan 60^0 = BC \tan 60^0 = 3a$.

+) Dựng $Ax // BD \Rightarrow d(SA;BD) = d(BD;SAx)$

$= d(B;SAx) = \frac{3}{2} d(H;(SAx))$.

+) Dựng $HE \perp Ax, HF \perp SE$

$\Rightarrow d(H;(SAx)) = HF$.

+) Ta có: $\tan \widehat{ABD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{ABD} = 60^0$

$\Rightarrow HE = HA.\sin 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

+) Do đó: $HF = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \Rightarrow d(SA,BD) = \frac{9a}{4\sqrt{7}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD là:

A. $\frac{3a\sqrt{34}}{17}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{51}}{13}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{38}}{17}$

Lời giải:

+) Dựng $HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$ do vậy

$\widehat{(SCD;ABCD)} = \widehat{SKH} = 45^0$.

Ta có: ΔHKD vuông cân tại K do vậy

$HK = KD = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = HK\tan 45^0 = \frac{3a}{2}$.

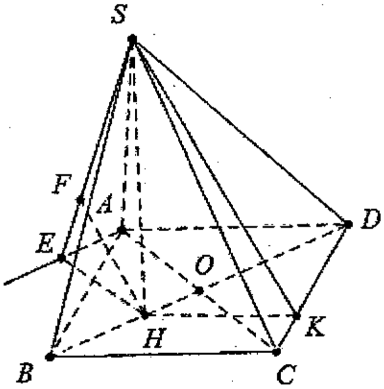
+) Dựng $Ax // BD$ ta có:

$d(SA;BD) = d(BD;(SAx)) = d(H;(SAx))$.

Dựng $HE \perp Ax \Rightarrow HE = OA = a\sqrt{2}$

Dựng $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAx)$.

Ta có: $HF = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a\sqrt{34}}{17} = d$. **Chọn A.**



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, gọi M là trung điểm của cạnh CD. Biết SM tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0, tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng AM và SB.

A. $d = \frac{a\sqrt{60}}{5}$ **B.** $d = \frac{a\sqrt{60}}{6}$ **C.** $d = \frac{a\sqrt{60}}{10}$ **D.** $d = \frac{a\sqrt{60}}{30}$

Lời giải:

+) Ta có: $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = 2a$

$\Rightarrow SA = AM\tan 60 = 2a\sqrt{3}$

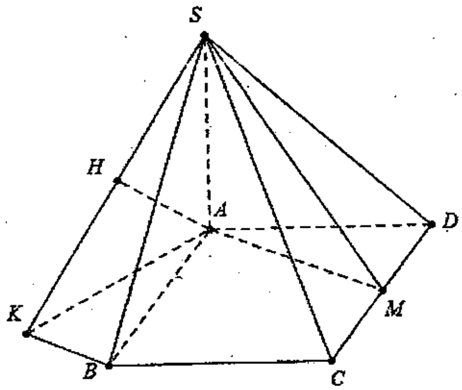
+) Dựng $Bx \parallel AM \Rightarrow d(AM;SB) = d(A;SBx)$

+) Dựng $AK \perp Bx, AH \perp SK$

+) Ta có: $\tan\widehat{MAB} = \frac{MD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MAD} = 30^o$

$\Rightarrow \widehat{BAK} = 30^0 \Rightarrow AK = AB\cos 30^0 = a\sqrt{3}$

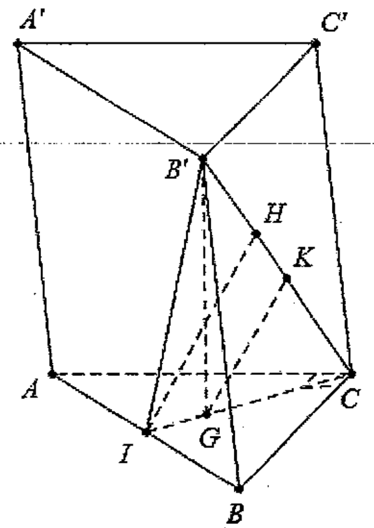
+) $d(A;(SBx)) = AH = a\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{a\sqrt{60}}{5}$. **Chọn A.**



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân $AC = BC = 3a$, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $B'C$.

A. $d = \dfrac{3a\sqrt{42}}{14}$ **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{42}}{7}$ **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{42}}{4}$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

Lời giải:



+) Dựng $CI \perp AB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB.

+) Ta có: $(B'GI) \perp AB \Rightarrow \widehat{B'IG} = 60^0$.

+) Lại có: $CI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow GI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow B'G = GI \tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

+) Dựng $IH \perp B'C \Rightarrow d(AB;B'C) = IH = \dfrac{B'G.CI}{B'C}$

Ta có: $B'C = \sqrt{B'G^2 + GC^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2} \Rightarrow IH = \dfrac{3a\sqrt{42}}{14}$

Do đó $d = IH = \dfrac{3a\sqrt{42}}{14}$.

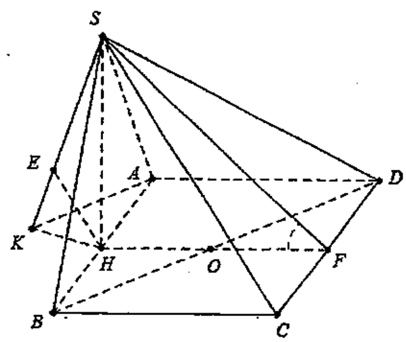
Hoặc dựng $GK \parallel IH \Rightarrow IH = \dfrac{3}{2}GK = \dfrac{3}{2}.\dfrac{B'G.GC}{\sqrt{B'G^2 + GC^2}}$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là trung điểm của AB, biết tam giác SCD là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc 45^0. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng SA và BD.

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$ **B.** $d = \dfrac{3a}{\sqrt{11}}$ **C.** $d = \dfrac{a}{\sqrt{11}}$ **D.** $d = \dfrac{4a}{\sqrt{11}}$

Lời giải:



+) Gọi H là trung điểm của AB. Dựng $HF \perp CD$ khi đó $HF = AD = a\sqrt{2}$.

+) Ta có: $CD \perp (SHF) \Rightarrow \widehat{SFH} = 45^0$

$\Rightarrow SH = HF \tan 45^0 = a\sqrt{2}$; $SF = HF\sqrt{2} = 2a$

Do tam giác SCD vuông cân nên $CD = 2SF = 4a$

Suy ra $d(A;BD) = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{4a}{3}$

+) Dựng $Ax//BD, HK \perp Ax, HE \perp SK$

+) Ta có: $HK = \frac{1}{2}d(A;BD) = \frac{1}{2}.\frac{4a}{3} = \frac{2a}{3}$

+) Do vậy $d(SA;BD) = 2HE = \frac{4a}{\sqrt{11}}$. **Chọn D.**

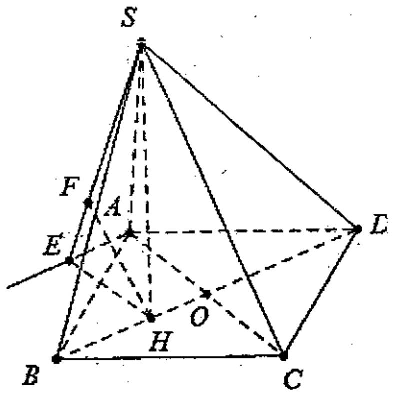
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm H của tam giác đều ABC, biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^o. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD.

A. $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$ **B.** $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$ **C.** $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $d = a\sqrt{5}$

Lời giải

+) Ta có ΔABC đều cạnh a nên H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp DC$

$\Rightarrow CD \perp (SHC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^0$



+) Ta có: $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow HB = HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

+) Khi đó: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^0 = a$

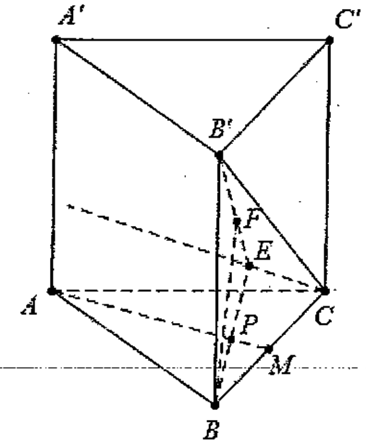
+) Dựng $Ax//BD, HE \perp Ax, HF \perp SE \Rightarrow HE = OA = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow d(SA;BD) = HF = \frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông có $AB = BC = a$ $A'B = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \frac{a\sqrt{42}}{7}$ **B.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $d = \frac{a\sqrt{14}}{7}$ **D.** $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Lời giải:



Ta có: $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Dựng $Cx \parallel AM$ khi đó $d(AM;B'C) = d(AM;(B'Cx))$.

$= d(M;(B'Cx)) = \frac{1}{2}d(B;(B'Cx))$.

Dựng $\begin{cases} BE \perp Cx \\ BF \perp B'E \end{cases} \Rightarrow BF \perp (B'Cx) \Rightarrow d(B;(B'Cx)) = BF$

Lại có $BE = 2BP$, trong đó $BP = \frac{AB.BM}{\sqrt{AB^2 + BM^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$

Suy ra $BE = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow BF = \frac{BE.BB'}{\sqrt{BE^2 + BE^2}} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Do đó $d = \frac{a}{\sqrt{7}}$. **Chọn D.**

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

A [TT6011] Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (Dạng 1)

Câu 1: [329053] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B. Biết $AB = a$; $BC = a$, $AD = 3a$, $SA = a\sqrt{2}$. Khi $SA \perp (ABCD)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, CD là :

A. $\frac{a}{5}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$

Câu 2: [329056] Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a\sqrt{3}$. Độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là ?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: [329063] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{4}$. Tính b theo a.

A. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $b = a$. **C.** $b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $b = \frac{2a}{3}$

Câu 4: [329070] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3AD$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm $H \in AB$ sao cho $BH = 2AH$.

Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAD) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $SH=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và CD.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 5: [329116] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, đáy lớn BC. Hai mặt bên $(SAB),(SAD)$ vuông góc với đáy. Cạnh $SA=AB=a$, góc giữa đường thẳng SD và $(ABCD)$ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $d=a\sqrt{3}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: [329117] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bên $SA=a\sqrt{5}$, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Khoảng cách giữa BD và SC là:

A. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{6}$

Câu 7: [329123] Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB=AC=2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống đáy là trung điểm của AM. Biết SA tạo với đáy góc 60^0. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng BC và SA là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 8: [329128] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $AC=2a, BD=2a\sqrt{3}$ tâm O. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm của OB. Biết tam giác SBD vuông tại S. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và SB là:

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{8}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 9: [329134] Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=2a$; $\widehat{BAC}=120^0$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC theo a là:

A. $\frac{3a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 10: [329137] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết cạnh bên của khối lăng trụ tạo với đáy góc 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ là:

A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 11: [329143] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Tam giác (SAB) đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (SAC) góc 30^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

A. $BC = a\sqrt{2}$. B. $BC = 2a$. C. $BC = a\sqrt{3}$. D. $BC = 3a$.

Câu 12: [329145] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh, $AB = a\sqrt{2}, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM.

A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. B	03. C	04. A	05. D	06. A	07. B	08. C	09. D	10. A
11. C	12. B								

B -[TT6012] Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau (Dạng 2)

Câu 1: [331877] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết $SH = a$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC là:

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 2: [331878] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, tam giác $(A'CM)$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CC'.

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{5}$ B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$ C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ D. $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$

Câu 3: [331879] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD là:

A. $\frac{3a\sqrt{34}}{17}$ B. $\frac{2a\sqrt{13}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{51}}{13}$ D. $\frac{2a\sqrt{38}}{17}$

Câu 4: [331881] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **D.** $2a$.

Câu 5: [331882] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^0$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B, CC'$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 6: [331883] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM.

A. $\frac{2a}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{6a}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{11}}$.

Câu 7: [331885] Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài đường cao từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy (ABC) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Góc tạo bởi mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, MN.

A. $\frac{9a\sqrt{3}}{42}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{42}$. **C.** $\frac{6a\sqrt{3}}{42}$. **D.** $\frac{12a\sqrt{3}}{42}$.

Câu 8: [331886] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SM = \frac{3a}{2}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SM và AD là :

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 9: [331889] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3a; AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng CM và SA là :

A. $\frac{6a}{\sqrt{13}}$ **B.** $\frac{3a}{\sqrt{10}}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{6a}{\sqrt{10}}$

Câu 10: [331891] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, Biết $SA = \frac{a}{\sqrt{2}}$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC là:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$ B. $\frac{a\sqrt{30}}{20}$ C. $\frac{a\sqrt{30}}{15}$ D. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 11: [331893] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, biết $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và BM là:

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$ B. $\frac{2a\sqrt{145}}{15}$ C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$ D. $\frac{2a\sqrt{145}}{29}$

Câu 12: [331894] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AD, các đường thẳng SA, AC và CD đôi một vuông góc với nhau; $SA = AC = CD = a\sqrt{2}$ và $AD = 2BC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 13: [331897] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a, BC = a$, $CD = a\sqrt{6}$, $SA = a\sqrt{2}$. Khi $SA \perp (ABCD)$ thì khoảng cách giữa AD và SC là?

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 14: [331900] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều ABC cạnh là a, cạnh bên $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, I là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và AB là?

A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{a\sqrt{23}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{17}}{7}$.

Câu 15: [331901] Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C có $CA = a, CB = b$, cạnh $SA = h$ vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là?

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. B. $\frac{bh}{\sqrt{b^2+4h^2}}$. C. $\frac{ah}{\sqrt{b^2+4h^2}}$. D. $\frac{ah}{\sqrt{b^2+2h^2}}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. A	**02. B**	**03. A**	**04. C**	**05. B**	**06. D**	**07. A**	**08. C**	**09. B**	**10. D**
11. D	**12. C**	**13. C**	**14. B**	**15. B**					

Chủ đề 6

[TV6013] GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

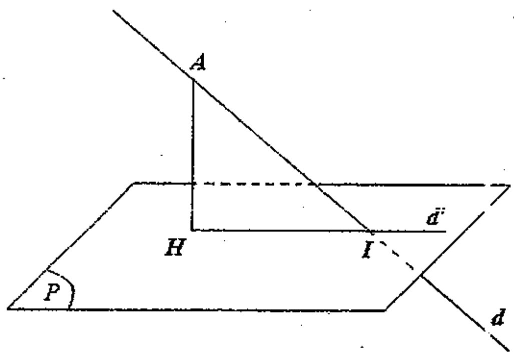
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu vuông góc d' của d trên (P).

2. Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta thực hiện các bước như sau:



+ Tìm giao điểm I của d và (P).

+ Lấy điểm A trên d, kẻ $AH \perp (P)$ tại H.

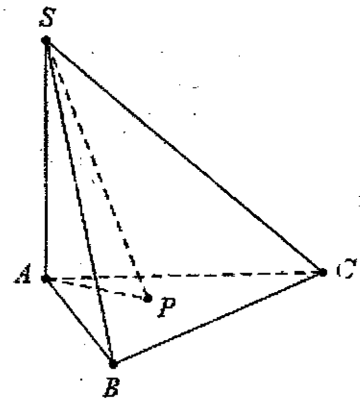
Khi đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là $\widehat{AIH}$.

Dùng tỉ số lượng giác hoặc hệ thức lượng trong tam giác, ta tính được $\widehat{AIH}$.

3. Một số mô hình cơ bản

❖ **Mô hình 1.** Hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$.

⟶ Khảo sát 1.1. *Khảo sát mặt phẳng (ABC)*



Ta xác định $\widehat{(SC;(ABC))}$.

Giao điểm của SC và (ABC) là C.

Bài ra có $SA \perp (ABC)$ tại $A \Rightarrow \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA}$.

Tương tự, ta xác định được $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBA}$.

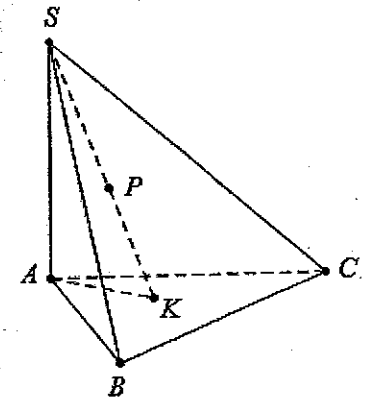
Tổng quát, với mọi điểm $P \in (ABC)$ thì ta có

$\widehat{(SP;(ABC))} = \widehat{SPA}$.

> **Lưu ý**

Một số bài toán phát triển hơn, điểm P không còn thuộc mặt phẳng (ABC) nữa thì ta sẽ tìm giao điểm của SP và (ABC).

Gọi $K = SP \cap (ABC) \Rightarrow \widehat{(SP;(ABC))} = \widehat{SKA}$.



⟶ Khảo sát 1.2. *Khảo sát mặt phẳng* (SAC)

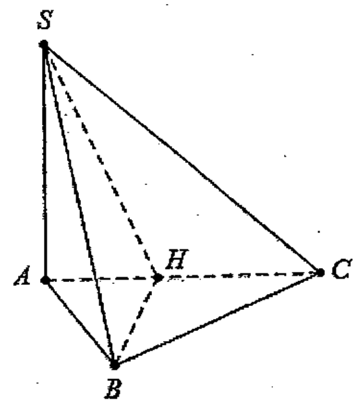
Ta xác định $\widehat{(SB;(SAC))}$.

Giao điểm của BS và (SAC) là S.

Về phương pháp ta sẽ xác định chân đường cao H hạ từ B xuống (SAC). Ta kẻ $BH \perp (SAC)$ tại H, từ đó suy ra ngay $\widehat{(BS;(SAC))} = \widehat{BSH}$.

Với cách làm này thì điểm H khá "vu vơ ", từ đó dẫn đến việc tính toán gặp nhiều khó khăn.

Để ý mặt phẳng (SAC) ở đây rất đặc biệt, mặt phẳng này chứa đường cao SA.



Hơn nữa $(SAC) \cap (ABC) = AC$ nên ta sẽ kẻ $BH \perp AC$ tại H, từ đó $\Rightarrow \widehat{(BS;(SAC))} = \widehat{BSH}$.

Thật vậy, ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{(BS;(SAC))} = \widehat{BSH}$.

Cũng từ $BH \perp (SAC)$ thì ta xác định được ngay

$\widehat{(BA;(SAC))} = \widehat{BAH}$ và $\widehat{(BC;(SAC))} = \widehat{BCH}$.

Việc khảo sát mặt phẳng (SAB) tương tự như việc khảo sát mặt phẳng (SAC).

> **Nhận xét**

Từ việc khảo sát trên, ta có ngay kết quả sau:

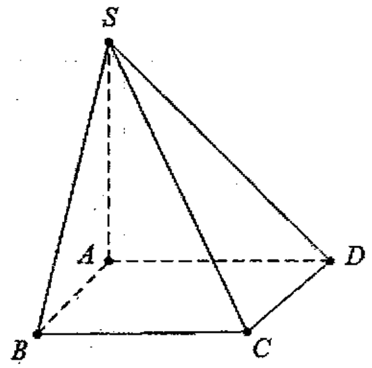
Với hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình chữ nhật) và $SA \perp (ABCD)$ thì

$\widehat{(DS;(SAB))} = \widehat{DSA}$, $\widehat{(DB;(SAB))} = \widehat{DBA}$.

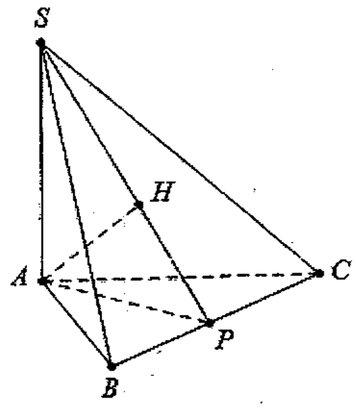
$\widehat{(CS;(SAB))} = \widehat{CSB}$, $\widehat{(CA;(SAB))} = \widehat{CAB}$.

$\widehat{(BS;(SAD))} = \widehat{BSA}$, $\widehat{(BD;(SAD))} = \widehat{BDA}$.

$\widehat{(CS;(SAD))} = \widehat{CSD}$, $\widehat{(CA;(SAD))} = \widehat{CAD}$.



$\longrightarrow$ Khảo sát 1.3. *Khảo sát mặt phẳng* (SBC)



Ta xác định $\widehat{(SA;(SBC))}$.

Giao điểm của SA và (SBC) là S.

Kẻ $AP \perp BC$ $(P \in BC)$, $AH \perp SP$ $(H \in SP)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AP \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAP) \Rightarrow BC \perp AH.$

Như vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SP \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

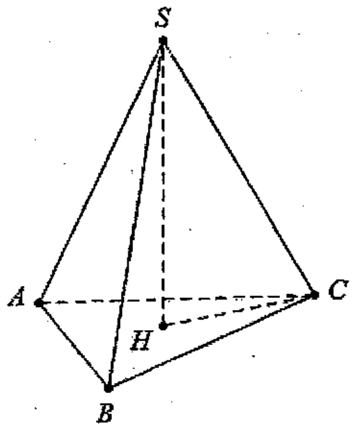
$\Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASH}$.

Cũng từ $AH \perp (SBC)$ thì ta xác định được ngay

$\widehat{(AC;(SBC))} = \widehat{ACH}$ và $\widehat{(AB;(SBC))} = \widehat{ABH}$.

❖ **Mô hình 2.** Hình chóp $S.ABC$ bất kỳ.

Nhiều bài toán, việc xác định đường cao là tương đối phức tạp, từ đó dẫn đến việc xác định góc gặp nhiều khó khăn. Thông qua mô hình này, ta cần lưu ý một kỹ thuật rất "đặc sắc" để xác định góc giữa đường thẳng và phẳng mặt như sau:



Ta xác định $\widehat{(SC;(ABC))}$.

Giao điểm của SC và (ABC) là C.

Kẻ $SH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCH}$.

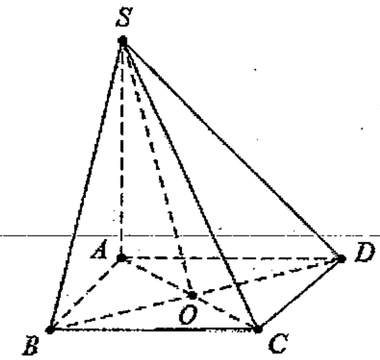
Lưu ý $\sin\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{SC}$ mà $SH = d(S;(ABC))$

$\Rightarrow \sin\widehat{SCH} = \dfrac{d(S;(ABC))}{SC}$.

Để tính $d\left(S;\left(ABC\right)\right)$ thì ta sử dụng các phương pháp tính khoảng cách đã biết.

Việc khảo sát các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) hoàn toàn tương tự.

❖ **Mô hình 3.** Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA\perp(ABCD)$.



Việc khảo sát mặt phẳng $(ABCD)$ tương tự như khảo sát 1.1.

Việc khảo sát các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SAC) tương tự như khảo sát 1.2.

Xét điểm A, việc khảo sát mặt phẳng (SBD) tương tự như khảo sát 1.3.

Xét điểm C, việc khảo sát mặt phẳng (SBD) tương tự như khảo sát ở mô hình 2.

Xét điểm A, việc khảo sát mặt phẳng (SBC) và (SCD) tương tự như khảo sát 1.3.

Xét điểm D, việc khảo sát mặt phẳng (SBC) tương tự như khảo sát ở mô hình 2.

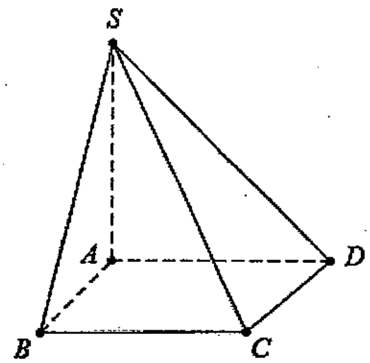
II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Các ví dụ cơ bản

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng ?

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải



Giao điểm của SD và $(ABCD)$ là D.

Bài ra có $SA\perp(ABCD)$ tại $A\Rightarrow\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right)=\widehat{SDA}$.

$\Rightarrow\cos\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right)=\cos\widehat{SDA}=\frac{AD}{SD}$.

Cạnh AD đã biết bằng a, ta cần tính cạnh SD.

Tam giác SAD vuông tại A

$\Rightarrow SD^2=SA^2+AD^2=3a^2+a^2\Rightarrow SD=2a$

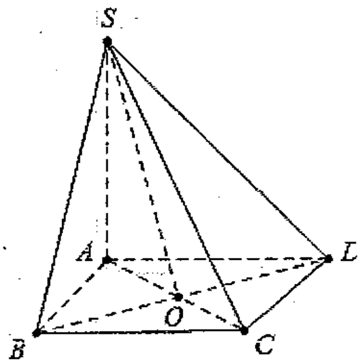
$\Rightarrow\cos\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right)=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$. **Chọn B**

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của đường thẳng AC và BD. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Giao điểm của SO và $(ABCD)$ là O.



Bài ra có $SA \perp (ABCD)$ tại $A \Rightarrow \widehat{(SO;(ABCD))} = \widehat{SOA}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{OA}$.

Cạnh SA đã biết bằng $a\sqrt{3}$, ta cần tính cạnh OA.

Tam giác ABC vuông tại B

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 \Rightarrow AC = 2a$

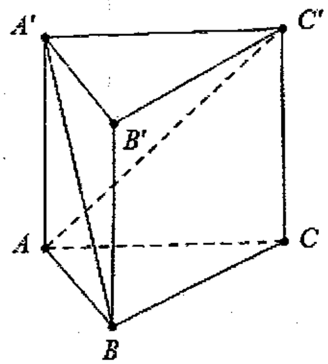
$\Rightarrow OA = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. **Chọn A**

Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Côsin của góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng ?

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Giao điểm của $A'B$ và (ABC) là B.



Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C' \Rightarrow A'A \perp (ABC)$ tại A

$\Rightarrow \widehat{(A'B;(ABC))} = \widehat{A'BA}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(A'B;(ABC))} = \cos\widehat{A'BA} = \frac{AB}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}}{A'B}$ (1)

Giao điểm của AC' và (ABC) là A.

Mà $C'C \perp (ABC)$ tại $C \Rightarrow \widehat{(AC';(ABC))} = \widehat{C'AC}$.

Bài ra $\widehat{\left(AC';(ABC)\right)} = 60^0 \Rightarrow \widehat{C'AC} = 60^0 \Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{CC'}{AC} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow CC' = AC\sqrt{3} = 3a \Rightarrow A'A = 3a \Rightarrow A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 9a^2 + 3a^2 \Rightarrow A'B = 2a\sqrt{3}$

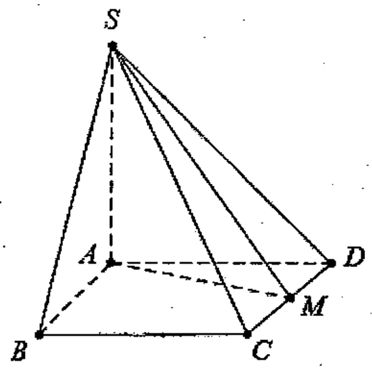
Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{\left(A'B;(ABC)\right)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$. **Chọn D**

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, góc giữa đường thẳng SM và mặt đáy bằng 60^0. Côsin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng ?

A. $\dfrac{4}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Giao điểm của SB và $(ABCD)$ là B.



Bài ra có: $SA \perp (ABCD)$ tại $A \Rightarrow \widehat{\left(SB;(ABCD)\right)} = \widehat{SBA}$

$\Rightarrow \cos\widehat{\left(SB;(ABCD)\right)} = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{2a}{SB}$ (1)

Giao điểm của SM và $(ABCD)$ là M.

Bài ra có $SA \perp (ABCD)$ tại $A \Rightarrow \widehat{\left(SM;(ABCD)\right)} = \widehat{SMA}$.

Mà $\widehat{\left(SM;(ABCD)\right)} = 60^0 \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AM\sqrt{3}$.

Tam giác ADM vuông tại $D \Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2 = 4a^2 + a^2$

$\Rightarrow AM = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = a\sqrt{15} \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 15a^2 + 4a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{19}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{\left(SB;(ABCD)\right)} = \dfrac{2a}{a\sqrt{19}} = \dfrac{2}{\sqrt{19}}$. **Chọn C**

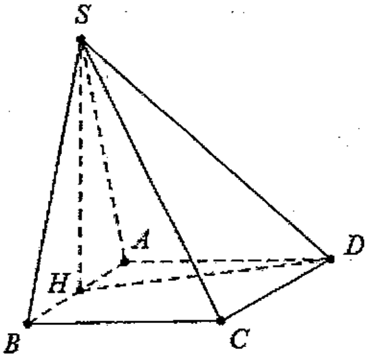
2. Các ví dụ nâng cao

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

Lời giải

Giao điểm của SD và $(ABCD)$ là D.



Ta có: $(SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAB)\cap(ABCD)=AB$.

Kẻ $SH\perp AB$ $(H\in AB)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SD;(ABCD))}=\widehat{SDH}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(SD;(ABCD))}=\cos\widehat{SDH}=\dfrac{HD}{SD}$ (1)

Tam giác HAD vuông tại A

$\Rightarrow HD^2=AD^2+HA^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\Rightarrow HD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$

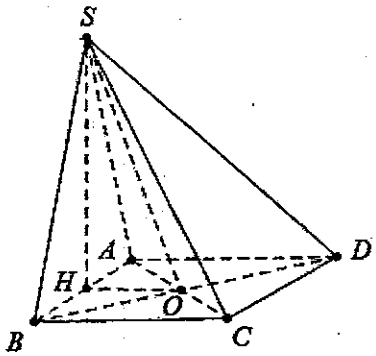
Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Tam giác SHD vuông tại $H\Rightarrow SD^2=HD^2+SH^2=\dfrac{5a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow SD=a\sqrt{2}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(SD;(ABCD))}=\dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}.$ **Chọn B**

➢ **Nhận xét**

Nếu gọi $O=AC\cap BD$ thì ta có thể tính $\cos\widehat{(SO;(ABCD))}$ như sau:



Ta có ngay $\cos\widehat{(SO;(ABCD))}=\cos\widehat{SOH}=\dfrac{OH}{SO}$ (1)

Cạnh OH là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow OH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}$ mà theo trên thì $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SO^2=SH^2+OH^2=\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow SO=a$

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(SO;(ABCD))}=\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}.$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh $SA=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trùng với trung điểm H của cạnh AB. Côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng ?

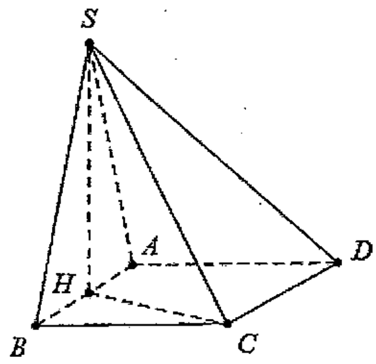
A. $\dfrac{\sqrt{10}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Giao điểm của SC và $(ABCD)$ là C.

Bài ra $SH \perp (ABCD)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCH}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(SC;(ABCD))} = \cos\widehat{SCH} = \dfrac{HC}{SC}$ (1)



Tam giác HBC vuông tại B

$\Rightarrow HC^2 = BC^2 + BH^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H

$\Rightarrow SH^2 = SA^2 - HA^2 = 3a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{11a^2}{4}$.

Tam giác SHC vuông tại $H \Rightarrow SC^2 = HC^2 + SH^2 = \dfrac{5a^2}{4} + \dfrac{11a^2}{4} \Rightarrow SC = 2a$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(SC;(ABCD))} = \dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **Chọn D**

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và cạnh $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng α. Tính $\tan\alpha$.

A. $2\sqrt{\dfrac{3}{17}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{17}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

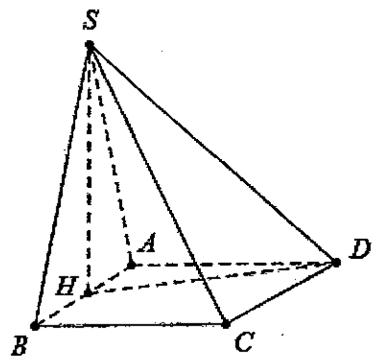
Lời giải

Giao điểm của SD và $(ABCD)$ là D.

Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$.

Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SD;(ABCD))} = \widehat{SDH} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SDH} = \dfrac{SH}{HD}$ (1)



Tam giác SAB vuông tại S

$\Rightarrow AB^2 = SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 \Rightarrow AB = 2a$.

Từ ΔSAB vuông tại $S \Rightarrow SH = \dfrac{SA.SB}{AB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta cũng có thể tính SH dựa vào hệ thức

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Từ ΔSAB vuông tại $S\Rightarrow SA^2=AH.AB\Rightarrow AH=\frac{SA^2}{AB}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$.

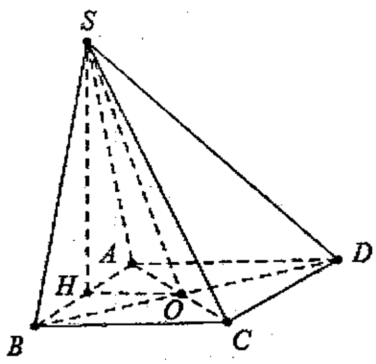
Tam giác HAD vuông tại $A\Rightarrow HD^2=AH^2+AD^2=\frac{a^2}{4}+4a^2\Rightarrow HD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{17}}$. **Chọn C**

➤ **Nhật xét**

Nếu gọi $O=AC\cap BD$ thì ta có thể tính $\tan\left(\widehat{SO;(ABCD)}\right)$ như sau:

Ta có ngay $\tan\left(\widehat{SO;(ABCD)}\right)=\tan\widehat{SOH}=\frac{SH}{OH}$ (1)



Theo trên thì $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, bây giờ ta cần tính cạnh OH.

Ta có $OH^2=AH^2+AO^2-2AH.AO.\cos 45^0$.

Theo trên thì $AH=\frac{a}{2}$ mà $AO=\frac{AC}{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow OH^2=\frac{a^2}{4}+2a^2-2.\frac{a}{2}.a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Thế vào (1) $\Rightarrow \tan\left(\widehat{SO;(ABCD)}\right)=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

⟶ Ta có thể tính cạnh OH bằng cách khác như sau:

Theo trên thì $AB=2a$ và $AH=\frac{a}{2}\Rightarrow BH=AB-AH=\frac{3a}{2}\Rightarrow\frac{AH}{HB}=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}\Rightarrow 4\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow 16OH^2=9OA^2+OB^2+6\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}.$$

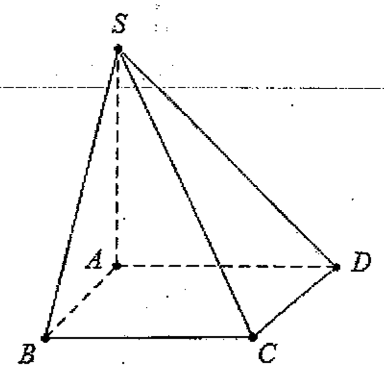
Mà $OA\perp OB\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow 16OH^2=9OA^2+OB^2=10OA^2=10.2a^2\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SD và (SAB) bằng ?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Giao điểm của DS và (SAB) là S.



Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$

$\Rightarrow \overline{(DS;(SAB))} = \widehat{DSA}$

$\Rightarrow \cos\overline{(DS;(SAB))} = \cos\widehat{DSA} = \frac{SA}{SD}$ (1)

Cạnh SA đã biết bằng $a\sqrt{3}$, ta cần tính cạnh SD.

Tam giác SAD vuông tại A

$\Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SD = 2a.$

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\overline{(DS;(SAB))} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C**

➤ **Nhật xét**

Hoàn toàn tương tự, ta xác định $\cos\overline{(CS;(SAB))}$ như sau:

Ta có $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$\Rightarrow \overline{(CS;(SAB))} = \widehat{CSB} \Rightarrow \cos\overline{(CS;(SAB))} = \cos\widehat{CSB}.$

Lưu ý khi $CB \perp (SAB)$ thì $CB \perp SB \Rightarrow \cos\widehat{CSB} = \frac{SB}{SC} \Rightarrow \cos\overline{(CS;(SAB))} = \frac{SB}{SC}$ (1)

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SB = 2a.$

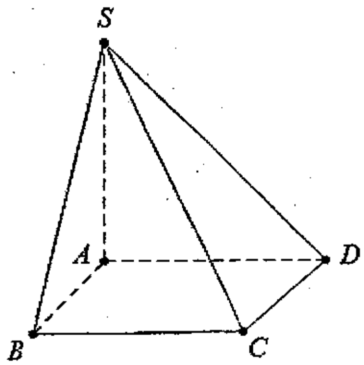
Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow SC^2 = SB^2 + BC^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\overline{(CS;(SAB))} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SB và (SAD) bằng ?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Lời giải



Giao điểm của BS và (SAD) là S.

Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$

$\Rightarrow \widehat{(BS;(SAD))} = \widehat{BSA}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(BS;(SAD))} = \cos\widehat{BSA} = \frac{SA}{SB}$ (1)

Tam giác SAB vuông tại A

$\Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SB = 2a$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(BS;(SAD))} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C**

➢ **Nhận xét**

Hoàn toàn tương tự, ta xác định $\cos\widehat{(CS;(SAD))}$ như sau:

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow \widehat{(CS;(SAD))} = \widehat{CSD} \Rightarrow \cos\widehat{(CS;(SAD))} = \cos\widehat{CSD}$.

Lưu ý khi $CD \perp (SAD)$ thì $CD \perp SD \Rightarrow \cos\widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} \Rightarrow \cos\widehat{(CS;(SAD))} = \frac{SD}{SC}$ (1)

Tam giác SAD vuông tại $A \Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SD = 2a$.

Tam giác SCD vuông tại $D \Rightarrow SC^2 = SD^2 + CD^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}$.

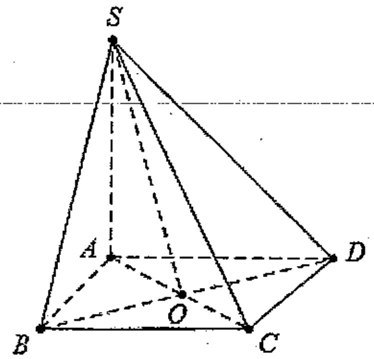
Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(CS;(SAD))} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng ?

A. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Giao điểm của SB và (SAC) là S.



Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{(BS;(SAC))} = \widehat{BSO}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(BS;(SAC))} = \cos\widehat{BSO} = \frac{SO}{SB}$ (1)

Tam giác SAB vuông tại A

$\Rightarrow SB^2 = AB^2 + SA^2 = a^2 + 3a^2 \Rightarrow SB = 2a$.

Tam giác SAO vuông tại A

$\Rightarrow SO^2 = SA^2 + OA^2 = 3a^2 + OA^2$.

Tam OAB vuông cân tại $O \Rightarrow OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SO^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow SO = a\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(BS;(SAC))} = \frac{a\sqrt{\frac{7}{2}}}{2a} = \frac{\sqrt{14}}{4}$. **Chọn A**

➢ **Nhận xét**

Qua ví dụ này, ta cần lưu ý kết quả sau:

Với hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$ thì $BD \perp (SAC)$.

Kết quả $BD \perp (SAC)$ vẫn đúng khi ta thay hình vuông $ABCD$ thành hình thoi $ABCD$.

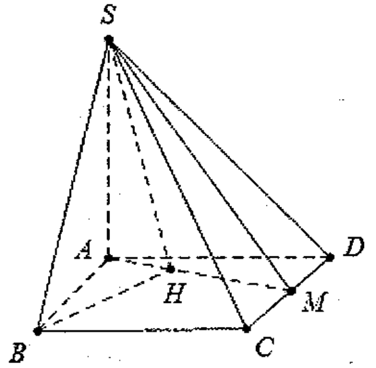
Từ $BO \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC)$, khi đó ta xác định được ngay

$$\widehat{(BA;(SAC))} = \widehat{BAO},\ \widehat{(BC;(SAC))} = \widehat{BCO}.$$
$$\widehat{(DA;(SAC))} = \widehat{DAO},\ \widehat{(DC;(SAC))} = \widehat{DCO},\ \widehat{(DS;(SAC))} = \widehat{DSO}.$$

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, góc giữa đường thẳng SM và mặt đáy bằng 60^0. Đường thẳng SB tạo với mặt phẳng (SAM) một góc α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{91}}$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{79}}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{79}{5}}$.

Lời giải



Kẻ $BH \perp AM$ $(H \in AM)$.

Ta có : $\begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp AM \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAM)$

$\Rightarrow \widehat{(SB;(SAM))} = \widehat{BSH} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SH}$ (1)

Lại có : $\widehat{(SM;(ABCD))} = \widehat{SMA}$.

Bài ra $\widehat{(SM;(ABCD))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AM\sqrt{3}$.

Tam giác ADM vuông tại $D \Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = a\sqrt{15}$.

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 15a^2 + 4a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{19}$.

Ta có $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}BH.AM$ và $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}d(M;AB).AB = \dfrac{1}{2}.2a.2a = 2a^2$

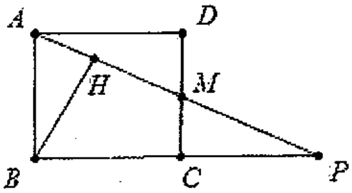
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}BH.AM = 2a^2 \Rightarrow BH = \dfrac{4a^2}{AM} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SBH vuông tại $H \Rightarrow SH^2 = SB^2 - BH^2 = 19a^2 - \dfrac{16a^2}{5} \Rightarrow SH = a\sqrt{\dfrac{79}{5}}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\dfrac{4a}{\sqrt{5}}}{a\sqrt{\dfrac{79}{5}}} = \dfrac{4}{\sqrt{79}}$. **Chọn B**

➢ **Nhận xét**

Để tính cạnh BH ta còn cách khác như sau:



Gọi $P = AM \cap BC \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BP^2}$.

Cạnh $BA = 2a$ và $BP = 2BC = 4a$

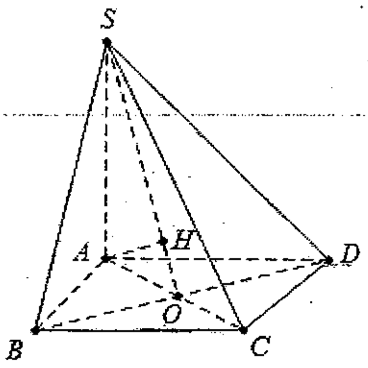
$\Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{16a^2} = \dfrac{5}{16a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng ?

A. $2\sqrt{\dfrac{3}{13}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Lời giải

Giao điểm của AS và (SBD) là S.



Gọi $O = AC \cap BD$, kẻ $AH \perp SO$ $(H \in SO)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH.$

Như vậy: $\begin{cases} AH \perp SO \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$\Rightarrow \widehat{(AS;(SBD))} = \widehat{ASH}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(AS;(SBD))} = \cos\widehat{ASH} = \dfrac{SA}{SO}$ (1)

Cạnh SA đã biết bằng $a\sqrt{3}$, ta cần tính cạnh SO.

Tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SO^2 = SA^2 + AO^2 = 3a^2 + OA^2$.

Tam OAB vuông cân tại $O \Rightarrow OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SO^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow SO = a\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\widehat{(AS;(SBD))} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\dfrac{7}{2}}} = \sqrt{\dfrac{6}{7}}$. **Chọn C**

➢ **Nhận xét**

Từ $AH \perp (SBD)$, ta xác định được ngay

$\widehat{(AC;(SBD))} = \widehat{AOH}$, $\widehat{(AB;(SBD))} = \widehat{ABH}$, $\widehat{(AD;(SBD))} = \widehat{ADH}$.

Tương tự như trên, ta xác định được góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) như sau:

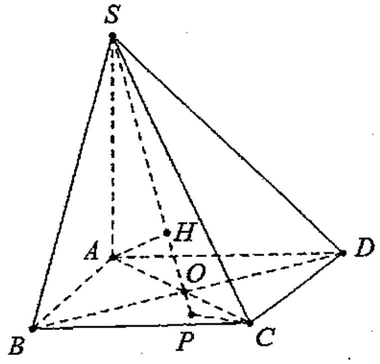
Kẻ $CP \perp SO$ tại H.

Ta có : $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP.$

Như vậy : $\begin{cases} CP \perp SO \\ CP \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow CP \perp (SBD) \Rightarrow \widehat{(CS;(SBD))} = \widehat{CSP} = \widehat{CSO}.$

Hoặc ta có thể sử dụng kỹ thuật xác định góc được giới thiệu ở mô hình 2 như sau:



Ta có: $\sin\widehat{(CS;(SBD))} = \dfrac{d(C;(SBD))}{SC} = \dfrac{d(A;(SBD))}{SC} = \dfrac{AH}{SC}$ (2)

Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3a^2 + (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}.$

Tam giác SAO vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{OA^2}.$

Tam giác OAB vuông cân tại $O \Rightarrow OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{13}{3a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\dfrac{3}{13}}$

Thế vào (2) $\Rightarrow \sin\widehat{(CS;(SBD))} = \dfrac{a\sqrt{\dfrac{3}{13}}}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{65}}.$

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng ?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

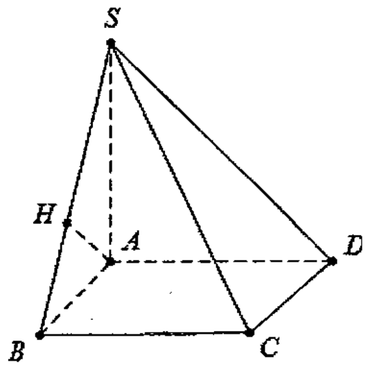
Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$

Như vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow \widehat{(AS;(SBC))} = \widehat{ASH}$

$\Rightarrow \cos\widehat{(AS;(SBC))} = \cos\widehat{ASH} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{SB}.$



Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SB = 2a$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AS;(SBC)}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B**

➤ **Nhận xét**

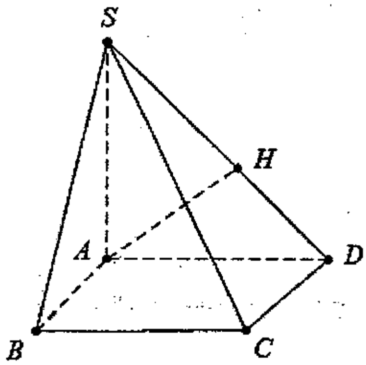
Từ $AH \perp (SBC)$, ta xác định được ngay $\left(\widehat{AB;(SBC)}\right) = \widehat{ABH}$ và $\left(\widehat{AC;(SBC)}\right) = \widehat{ACH}$.

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Kẻ $AH \perp SD$ $(H \in SD)$.



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$

Như vậy $\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{AS;(SCD)}\right) = \widehat{ASH}$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AS;(SCD)}\right) = \cos\widehat{ASH} = \dfrac{SA}{SD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{SD}$ (1)

Tam giác SAD vuông tại A

$\Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SD = 2a.$

Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\left(\widehat{AS;(SCD)}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D**

➤ **Nhận xét**

Từ $AH \perp (SCD)$, ta xác định được ngay

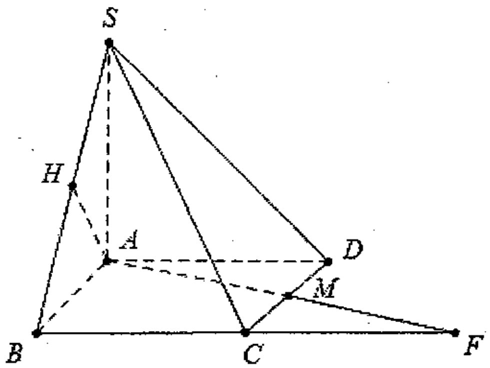
$\left(\widehat{AD;(SCD)}\right) = \widehat{ADH}$ và $\left(\widehat{AC;(SCD)}\right) = \widehat{ACH}$.

Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, góc giữa đường thẳng SM và mặt đáy bằng 60^0. Côsin của góc giữa đường thẳng AM và mặt phẳng (SBC) bằng ?

A. $\sqrt{\frac{3}{19}}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{19}}$ **C.** $\sqrt{\frac{6}{19}}$. **D.** $\sqrt{\frac{15}{19}}$.

Lời giải

Gọi $F = AM \cap BC$, kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$

Như vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBF)$

$\Rightarrow \left(\widehat{AM;(SBC)}\right) = \widehat{AFH}$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;(SBC)}\right) = \cos\widehat{AFH} = \frac{HF}{AF}$ (1)

Ta có C là trung điểm của cạnh $BF \Rightarrow BF = 2BC = 4a.$

Tam giác ABF vuông tại $B \Rightarrow AF^2 = AB^2 + BF^2 = 4a^2 + 16a^2 \Rightarrow AF = 2a\sqrt{5}.$

Lại có $\left(\widehat{SM;(ABCD)}\right) = \widehat{SMA}$ mà $\left(\widehat{SM;(ABCD)}\right) = 60^0 \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{SA}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AM\sqrt{3}.$

Mà ΔADM vuông tại $D \Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = a\sqrt{15}.$

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{60}{19}}.$

Tam giác AHF vuông tại $H \Rightarrow HF^2 = AF^2 - AH^2 = 20a^2 - \frac{60a^2}{19} \Rightarrow HF = a\sqrt{\frac{320}{19}}.$

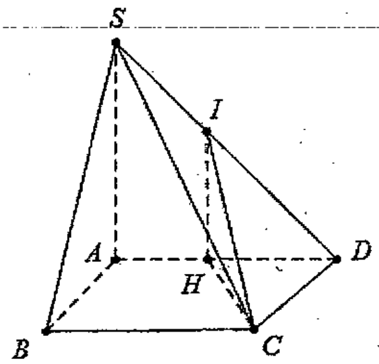
Thế vào (1) $\Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;(SBC)}\right) = \frac{HF}{AF} = \frac{a\sqrt{\frac{320}{19}}}{2a\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{19}}$. **Chọn B**

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh SD. Đường thẳng IC tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Kẻ $IH \perp AD$ $(H \in AD)$.



Xét trên (SAD), ta có $\begin{cases} IH \perp AD \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow IH \,//\, SA.$

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow IH \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \widehat{(IC;(ABCD))} = \widehat{ICH} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{ICH} = \frac{IH}{HC}.$$

Cạnh IH là đường trung bình của ΔSAD

$$\Rightarrow IH = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác HCD vuông tại $D \Rightarrow HC^2 = CD^2 + HD^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow HC = a\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{IH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$ **Chọn A**

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh SD. Đường thẳng IC tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

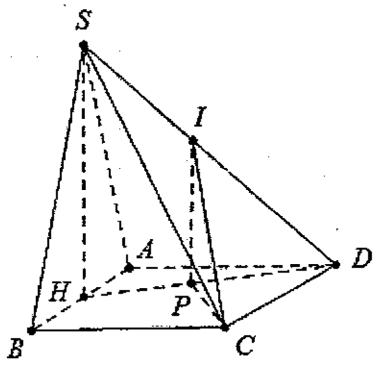
Lời giải

Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$.

Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SH = HA = HB = \frac{AB}{2} = a.$

Kẻ $IP \perp HD$ $(P \in HD)$.



Xét trên (SHD), ta có $\begin{cases} IP \perp HD \\ SH \perp HD \end{cases} \Rightarrow IP // SH$.

Mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow IP \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(IC;(ABCD))} = \widehat{ICP} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{ICP} = \dfrac{IP}{PC}$.

Cạnh IP là đường trung bình của ΔSHD

$\Rightarrow IP = \dfrac{SH}{2} = \dfrac{a}{2}$, bây giờ ta cần tính cạnh PC.

Sử dụng công thức tính đường trung tuyến thì $CP^2 = \dfrac{2(CH^2 + CD^2) - HD^2}{4}$.

Ta có $CH^2 = BC^2 + BH^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$ và $HD^2 = AD^2 + AH^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

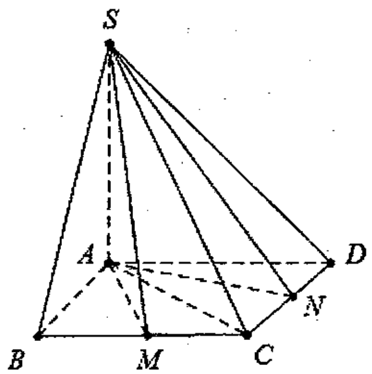
$\Rightarrow CP^2 = \dfrac{2(5a^2 + 4a^2) - 5a^2}{4} \Rightarrow CP = \dfrac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{IP}{PC} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$. **Chọn C**

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD. Đường thẳng SM và SN lần lượt tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có ngay $\alpha = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$ (1)



Lại có $\widehat{(SM;(ABCD))} = \widehat{SMA}$

Bài ra $\widehat{(SM;(ABCD))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AM} = \sqrt{3}$ mà $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow AM = a$.

Tương tự $AN = a$, đặt $AB = x > 0$, $AD = y > 0$.

Ta có $\begin{cases} AM^2 = AB^2 + BM^2 \\ AN^2 = AD^2 + DN^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4} \\ a^2 = y^2 + \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$

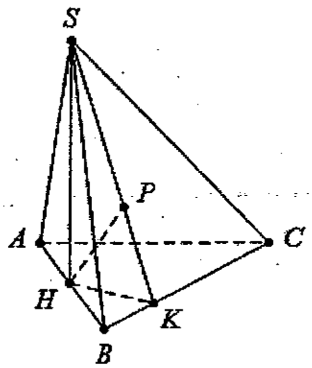
$\Rightarrow x = y \Rightarrow \dfrac{5}{4}x^2 = a^2 \Rightarrow x = y = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = AD = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow AC = a\sqrt{\dfrac{8}{5}}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\dfrac{8}{5}}} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}$. **Chọn A**

Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng (SBC) một góc φ. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\cos^2\varphi = \dfrac{3}{5}$. **B.** $\sin^2\varphi = \dfrac{3}{5}$. **C.** $\tan\varphi = 2$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải



Ta có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAB) \cap (ABC) = AB$.

Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Sử dụng kỹ thuật xác định góc được giới thiệu ở mô hình 2

ta có $\sin\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = \dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA}$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA} = \frac{2d\left(H;(SBC)\right)}{SA} \qquad (1)$$

Kẻ $HK \perp BC$ $(K \in BC)$, $AP \perp SP$ $(P \in SK)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HP.$

Như vậy $\begin{cases} HP \perp BC \\ HP \perp SK \end{cases} \Rightarrow HP \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HP.$

Tam giác SHK vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2}$ (2)

Tam giác BHK vuông tại $K \Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{HK}{HB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}HB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAB đều cạnh $2a \Rightarrow SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thế vào (2) $\Rightarrow \dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HP = a\sqrt{\dfrac{3}{5}} \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HP = a\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA} = \dfrac{2d\left(H;(SBC)\right)}{SA} = \dfrac{2a\sqrt{\dfrac{3}{5}}}{2a} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **Chọn B**

III. [TT6014] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [338025] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Tam giác SBC đều. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng ?

A. 60^0 **B.** 75^0 **C.** 45^0 **D.** 30^0

Câu 2: [338027] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Kí hiệu α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\alpha = 30^0$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\alpha = 45^0$ **D.** $\alpha = 60^0$

Câu 3: [338030] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng ?

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 75^0 **D.** 45^0

Câu 4: [338032] Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Kí hiệu α là góc giữa AC_1 và (A_1BCD_1). Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\alpha = 30^0$ **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\alpha = 45^0$ **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$

Câu 5: [338034] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Biết $SB = a$, tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

Câu 6: [338035] Cho tứ diện $ABCD$ đều. Kí hiệu α là góc giữa AB và (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\cos\alpha = 0$ **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 7: [338038] Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A. 75^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Câu 8: [338039] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$ và $AD = 2a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 45^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{29}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{377}}{29}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{277}}{29}$

Câu 9: [338041] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B với $AB = BC = a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Câu 10: [338042] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Biết $A'C = 3a$, côsin của góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 11: [338044] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^0$. Tam giác SBC đều, có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng ?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 12: [338046] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính tan của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 13: [338047] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính cot của góc giữa SD và $(ABCD)$.

A. $\frac{5}{\sqrt{15}}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14: [338049] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 15: [338051] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Tính tan của góc tạo bởi giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK).

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Câu 16: [338052] Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 17: [338054] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 18: [338056] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$ và $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{15}$. Góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD) bằng ?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 19: [338058] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính tan của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** 1

Câu 20: [338059] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 21: [338060] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Tính sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{85}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{51}}{17}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Câu 22: [338061] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$, cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO. Tính tan góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 23: [338063] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABC và $SH=\dfrac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SC. Tính tan của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 24: [338064] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, SO vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 25: [338065] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. C	2. D	3. A	4. D	5. C	6. A	7. D	8. C	9. D	10. C
11. C	12. B	13. A	14. B	15. C	16. C	17. A	18. C	19. A	20. C
21. A	22. C	23. B	24. C	25. C					

Chủ đề 7
[TV6015] GÓC GIỮA HAI MẶT THẲNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

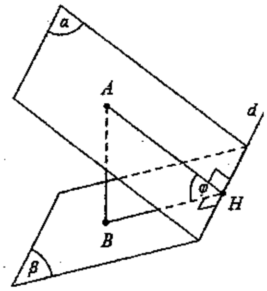
1. Phương pháp

- Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$.

- Lấy $A \in mp(\alpha)$, dựng $AB \perp mp(\beta)$ $(B \in (\beta))$.

- Vẽ BH vuông góc với d thì AH vuông góc d.

✍ Vậy $\widehat{ABH} = \varphi$ $(0 < \varphi \le 90^0)$ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

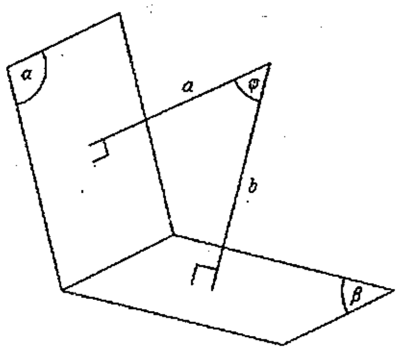


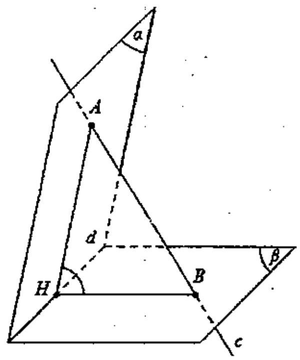
2. Chú ý

- Nếu đa giác (H) trong mặt phẳng (P) có diện tích S, đa giác (H') nằm trong mặt phẳng là hình chiếu vuông góc của (H) có diện tích S', φ là góc giữa (P), (P') thì $\boxed{S' = S.\cos\varphi}$

- Nếu đã có đường thẳng $a \perp mp(\alpha)$ và đường thẳng $b \perp mp(\beta)$ thì góc (nhọn) tạo bởi a và b là góc (nhọn) của hai mặt phẳng (α) và (β).

- Nếu đường thẳng $c \perp d$ và c cắt $mp(\alpha)$ tại A, cắt $mp(\beta)$ tại B, vẽ $AH \perp d$ thì $\widehat{AHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).





3. Các dạng toán điển hình

Dạng 1. *Góc giữa mặt bên và mặt đáy.*

Bài toán gốc 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác, $\widehat{BAC} = \alpha$, $AB = a$, $AC = b$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Tư duy xây dựng lời giải.

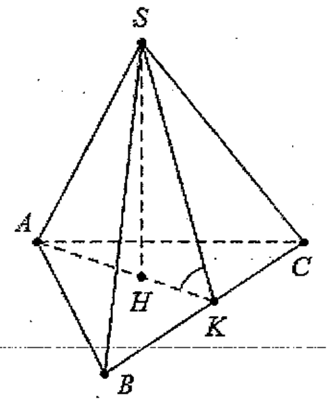
- Tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng $(SBC),(ABC)$.

Ta có $(SBC)\cap(ABC)=BC\Rightarrow$ xuất hiện **hai điểm thừa** trong hai mặt phẳng $(SBC),(ABC)$ lần lượt là S, A.

- Chọn **điểm thừa ở vị trí cao hơn** là điểm S.

Từ S kẻ SH vuông góc với mặt phẳng đối diện (ABC).

- Nối **chân đường cao** H vuông góc với giao tuyến tại K.
- Nối SK, ta được cạnh SK, cạnh HK và đỉnh K nên góc giữa hai mặt phẳng $(SBC),(ABC)$ là $\varphi=\widehat{SKH}$.



✍ **Chứng minh:** Kẻ $SH\perp(ABC)$, $H\in(ABC)$ và $AH\perp BC$ tại K.

Ta có $SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp BC$ mà $AH\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAK)$.

Khi đó $\begin{cases}(SBC)\cap(SAK)=SK\\(ABC)\cap(SAK)=HK\end{cases}\Rightarrow \widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{(SK;HK)}=\widehat{SKH}=\varphi\in\left(0;90^0\right]$.

Để tính toán được góc φ, ta sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông SHK.

Dạng 2. *Góc giữa hai mặt bên.*

Bài toán gốc 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác, có $\widehat{BAC}=\alpha$, $AB=a, AC=b$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Tư duy xây dựng lời giải. *Từ* **bài toán gốc 1**, *ta có thể đưa khối chóp $S.ABC$ về khối chóp $A.SBC$ và với cách xây dựng góc tương tự. Vậy ta có thể thấy rằng, nếu đưa mọi bài toán tìm góc giữa hai mặt phẳng về* **bài toán gốc 1** *thì việc xác định, tính toán góc sẽ trở nên đơn giản.*

II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Các ví dụ cơ bản

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=a$. Cạnh bên $SA=a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC), (ABC) bằng 45^0. Độ dài đoạn thẳng AC bằng			
A. $a\sqrt{2}$.	**B.** $a\sqrt{3}$.	**C.** $2a$.	**D.** a.

Lời giải

Ta có $(SBC)\cap(ABC)=BC\Rightarrow BC$ là giao tuyến.

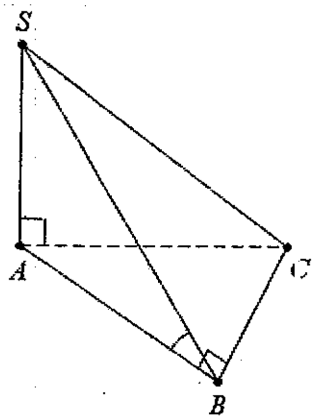
Mặt khác $SA\perp(ABC)$ và ΔABC vuông tại $B\Rightarrow AB\perp BC$.

Nên $\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$ mà $\begin{cases}(SBC)\cap(SAB)=SB\\(SBC)\cap(ABC)=AB\end{cases}$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}=45^0$.

Xét ΔSAB vuông tại A, có $\widehat{SBA}=45^0\Rightarrow SA=AB=a$.

Mà $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền $BC=a$. Trên đường vuông góc với mặt phẳng ABC tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60^0. Tính độ dài đoạn thẳng SA theo a.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

Ta có: ΔABC vuông cân tại $A\Rightarrow AI\perp BC$.

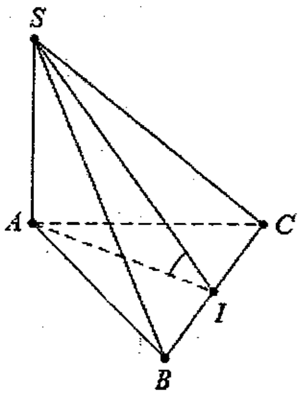
Do định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow SI\perp BC$.

Vậy $\widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{(SI;AI)}=\widehat{SIA}=60^0$.

Xét ΔSAI vuông tại A, có

$\Rightarrow\tan\widehat{SIA}=\frac{SA}{AI}\Leftrightarrow\tan 60^0=\frac{SA}{AI}$

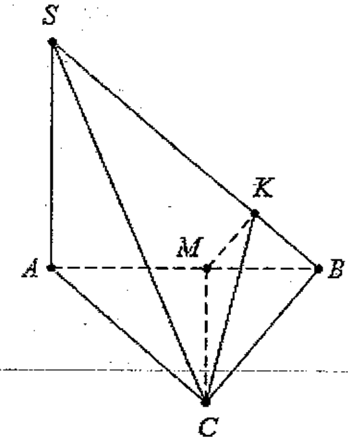
$\Rightarrow SA=\frac{BC}{2}.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=a\sqrt{3}$, cosin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow CM \perp AB$.

Kẻ $MK \perp SB$, $K \in SB$, ta có $\begin{cases} SA \perp CM \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

$\Rightarrow \begin{cases} MK \perp SB \\ CM \perp SB \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow \widehat{((SAB);(SBC))} = \widehat{MKC}$

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow CM = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\widehat{SBA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

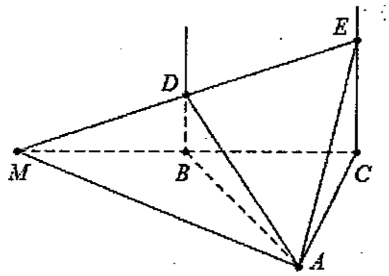
Xét ΔCMK vuông tại $M \Rightarrow \tan\widehat{MKC} = \dfrac{CM}{MK}$.

$\Rightarrow \tan\widehat{MKC} = 2 \Rightarrow \cos\widehat{MKC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại B và C lấy điểm D, E cùng phía (P) sao cho $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $CE = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Vẽ $BC \cap DE = M \Rightarrow (ADE) \cap (ABC) = AM$.

Ta có $BD \parallel CE \Rightarrow \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BM = BC = BA$.

Suy ra ΔAMC vuông tại $A \Rightarrow AM \perp AC$.

$\Rightarrow \begin{cases} AM \perp AC \\ AM \perp EC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (ACE) \Rightarrow \Delta AME$ vuông tại A.

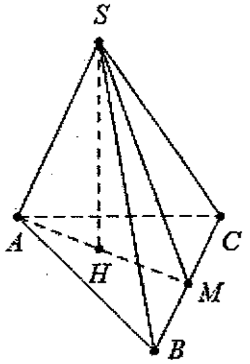
Và $\begin{cases} (ADE) \cap (AME) = AE \\ (ABC) \cap (AME) = AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(ADE);(ABC)} = \widehat{(AE;AC)} = \widehat{EAC}$.

Xét ΔAEC vuông tại A, có $\tan\widehat{EAC} = \dfrac{EC}{AC} = a\sqrt{3} : a = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EAC} = 60^0$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2\ cm$, tam giác SBC vuông cân tại S và góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 30^0. Tính độ dài đoạn thẳng SA.

A. $1\ cm$. **B.** $2\ cm$. **C.** $\sqrt{2}\ cm$. **D.** $4\ cm$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC.

Theo bài ra ΔABC đều và ΔSBC vuông cân tại S

$\Rightarrow \begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó : $\begin{cases} (SBC) \cap (SAM) = SM \\ (ABC) \cap (SAM) = AM \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SMA} = 30^0$.

Ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, $SM = \dfrac{BC}{2} = 1$.

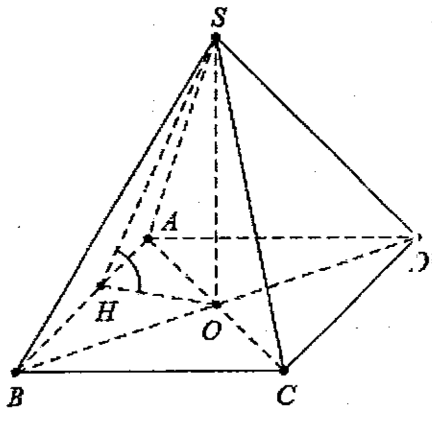
Xét ΔSAM, có $SA^2 = SM^2 + AM^2 - 2.SM.AM.\cos\widehat{SMA}$.

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2.\sqrt{3}.1.\cos 30^0 = 1 \Rightarrow SA = 1\ cm$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$. Cạnh $SO = 3a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $AC = a$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải



Từ O kẻ $OH \perp AB$ mà $SO \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHO)$.

$\begin{cases} (SHO) \cap (SAB) = SH \\ (SHO) \cap (ABC) = OH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB);(ABC))} = \widehat{SHO}$.

Xét ΔOAB vuông tại O, có $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.OH.AB$

$\Rightarrow OH.AB = OA.OB \Rightarrow OH = \dfrac{OA.OB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSHO vuông tại O, có:

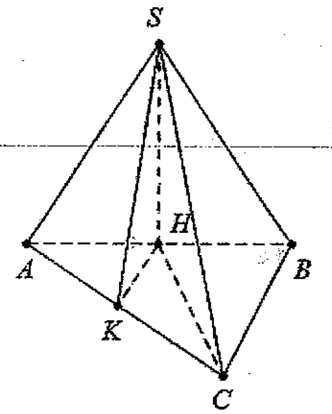
$\Rightarrow \tan\widehat{SOH} = \dfrac{SH}{OH} = 3a : \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Vậy $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\widehat{SHO} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\widehat{SHO}}} = \dfrac{1}{7}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB, $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$.

$\Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SH = \tan 60^0.BH$

Từ H kẻ $HK \perp AC$ mà $SH \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK)$.

$\begin{cases} (SHK) \cap (SAC) = SK \\ (SHK) \cap (ABC) = HK \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAC);(ABC))} = \widehat{(SK;HK)} = \widehat{SKH}$

Lại có: $HK = \frac{BH}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ và $SH = 2\sqrt{3}$.

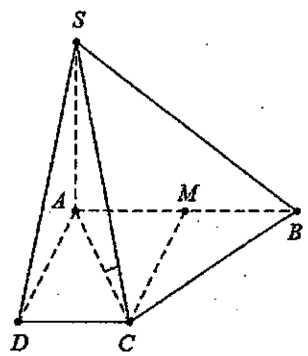
Xét tam giác SHK vuông tại H, ta có

$\tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{SKH} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow AM = BM = AD = CD = a \Rightarrow AMCD$ là hình vuông.

$\Rightarrow AC = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAC)$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (SAC) = SC \\ (ABCD) \cap (SAC) = AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SCA}$.

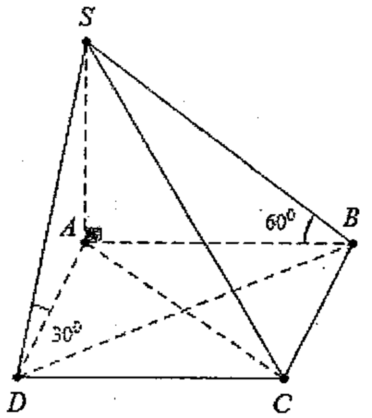
Xét ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn D.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB=2a$ và hai mặt phẳng (SBC), (SDC) lần lượt tạo với đáy các góc 60^0, 30^0. Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ bằng

A. $S=6a^2$. **B.** $S=3\sqrt{3}a^2$. **C.** $S=3a^2$. **D.** $S=3\sqrt{2}a^2$.

Lời giải



Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ và $SA\perp CD$ (1).

$ABCD$ là hình chữ nhật $AD\perp CD$ và $AB\perp BC$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\Rightarrow BC\perp(SAB)$ và $CD\perp(SAD)$.

Khi đó $\begin{cases}\widehat{(SBC);(ABCD)}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}=60^0\\ \widehat{(SCD);(ABCD)}=\widehat{(SD;AD)}=\widehat{SDA}=30^0\end{cases}$

Tam giác SAB vuông tại A, có

$\sin\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{SB}\Rightarrow SA=\sin 60^0.2a=a\sqrt{3}$

$\cos\widehat{SBA}=\dfrac{AB}{SB}\Rightarrow AB=\cos 60^0.2a=a$

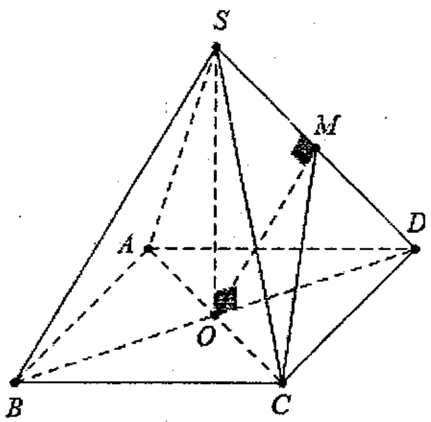
Tam giác SAD vuông tại A, có $\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}\Rightarrow AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{\tan 30^0}=3a$.

Vậy diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.AD=3a^2$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBD), (SCD).

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM\perp SD$.

Tam giác SBD có $SB=SD=a$, $BD=a\sqrt{2}$ nên vuông cân tại S. Suy ra $SB\perp SD\Rightarrow OM\perp SD$

$\Rightarrow\widehat{(SBD);(SCD)}=\widehat{(OM;CM)}=\widehat{CMO}$.

Ta có $\begin{cases}OC\perp BD\\ OC\perp SO\end{cases}\Rightarrow OC\perp(SBD)\Rightarrow OC\perp OM$.

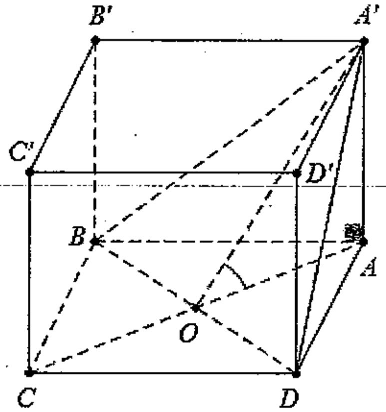
Xét ΔMOC vuông tại O, có $\tan\widehat{CMO}=\dfrac{OC}{OM}=\sqrt{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 2\varphi$.

A. $P = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $P = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $P = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải



HD: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow OA \perp BD$.

Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương $\Rightarrow AA' \perp BD$.

$\Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow \widehat{(A'BD);(ABD)} = \widehat{(OA';OA)}$

$= \widehat{A'OA} = \varphi \qquad (0^0 < \varphi < 90^0)$.

Xét $\Delta OA'A$ vuông tại A, có $\tan \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{OA}$.

$\Rightarrow \tan\varphi = 2.\dfrac{AA'}{AC} = a : \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

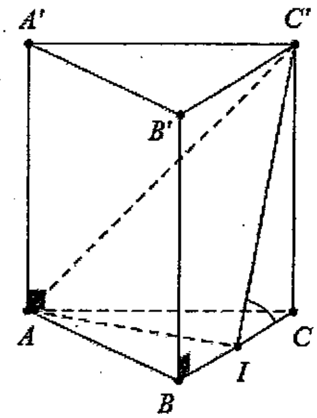
$\Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $P = \sin 2\varphi = 2.\sin\varphi.\cos\varphi = 2.\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều a. Gọi I là trung điểm của BC. Góc giữa hai mặt phẳng $(C'AI)$ và (ABC) bằng 60^0. Độ dài AA' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



HD: Ta có I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow C'C \perp (ABC)$.

$\Rightarrow C'C \perp AI$ mà $AI \perp BC \Rightarrow AI \perp (BCC'B')$.

Mà $\begin{cases}(C'AI)\cap(BCC'B') = C'I \\ (ABC)\cap(BCC'B') = BC\end{cases}$ và $(C'AI)\cap(ABC) = AI$.

Suy ra $\widehat{(C'AI);(ABC)} = \widehat{(C'I;BC)} = \widehat{C'IC} = 60^0$.

Xét $\Delta C'CI$ vuông tại C', có

$\tan\widehat{C'IC} = \dfrac{CC'}{IC} \Rightarrow CC' = \tan 60^0.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

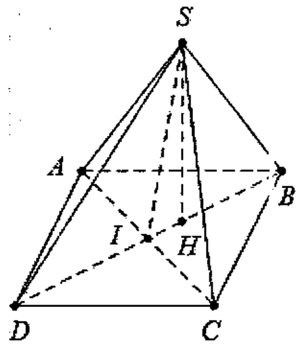
Chọn A.

2. Các ví dụ nâng cao

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, các cạnh $SA = SB = a$ $SD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 90^0. Độ dài đoạn thẳng BD

A. bằng $2a$. **B.** bằng $2a\sqrt{3}$. **C.** bằng $a\sqrt{3}$. **D.** bằng $a\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi I là tâm của hình thoi $ABCD$.

Và H là hình chiếu vuông góc của S lên BD.

$\widehat{(SBD);(ABCD)} = 90^0 \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $\begin{cases} SH \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SI$.

Mà I là trung điểm của BD suy ra $IA = IC = IS$.

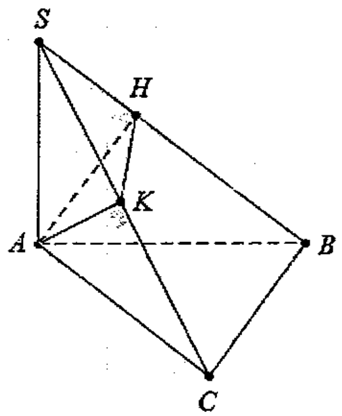
Ta có $IA = IB = IC = ID = IS \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.

$\Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròng đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Độ dài cạnh SA tính theo R là

A. $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{R}{2}$. **C.** $\dfrac{R}{4}$. **D.** $\dfrac{R}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$.

Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$. Đặt $SA = a$.

$\widehat{AHK} = 60^0$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Nên $AK = AH.\sin 60^0 \Leftrightarrow AK^2 = \dfrac{3}{4}AH^2$.

Áp dụng hệ thức lượng, ta được

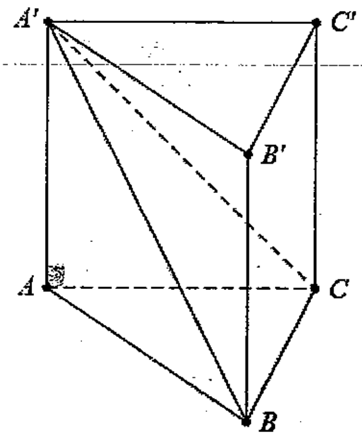
- $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{R^2}$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4R^2}$

Suy ra $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{R^2}\right) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4R^2} \Leftrightarrow a = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc bằng φ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Biết rằng $AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin 2\varphi$ là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải



Do $BC \perp AB$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp A'B$

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC \perp AB \subset (ABC) \end{cases}$, $BC = (ABC) \cap (A'BC)$

$\Rightarrow \widehat{((ABC),(A'BC))} = \widehat{(A'B;AB)} = \widehat{ABA'} = \varphi \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ Xét $\Delta A'AB$ vuông tại A có $AB = A'B.\cos\varphi$.

Vì $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC = \dfrac{1}{2}a.A'B.\cos\varphi = a^2\sqrt{3}.\cos\varphi$

Ta có $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}A'B.BC \Rightarrow A'B = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}$.

Mà $AA' = A'B.\sin\varphi \Rightarrow AA' = 2a\sqrt{3}.\sin\varphi$.

$\Rightarrow 2a\sqrt{3}.\sin\varphi.a^2\sqrt{3}.\cos\varphi = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Biết tam giác SBD cân tại S, tam giác SAC vuông tại S. Tính độ dài đường cao kẻ từ S đến mặt phẳng đáy.

A. $h = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h = \dfrac{a}{3}$. **D.** $h = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$ mà $AC \perp BD$.

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$, kẻ $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

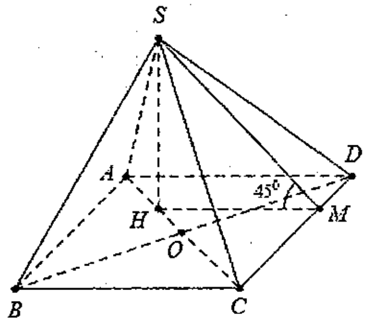
Kẻ $HM \perp CD$ $(H \in CD) \Rightarrow CD \perp (SHM)$

$\Rightarrow \widehat{(SCD);(ABCD)} = \widehat{(SM;HM)} = \widehat{SMH} = 45^0$.

$\Rightarrow \widehat{SMH} = 45^0 \Rightarrow \Delta SMH$ vuông cân $\Rightarrow SH = HM$.

Lại có ΔSAC vuông tại $S \Rightarrow SH^2 = AH.HC$.

Mà $HM = \dfrac{HC}{\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \dfrac{HC}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{HC^2}{2} = AH.HC$.



$\Leftrightarrow HC = 2.AH \Leftrightarrow 3AH = AC \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow HC = \dfrac{4a}{3}$

Vậy $SH = \sqrt{AH.HC} = \sqrt{\dfrac{2a}{3}.\dfrac{4a}{3}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh BC sao cho $BH = 3CH$. Tính tan của góc tạo bởi mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ biết $AA' = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = 3\sqrt{2}$. **D.** $\tan\varphi = 1$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $B'C'$, ta có $A'I \perp B'C'$

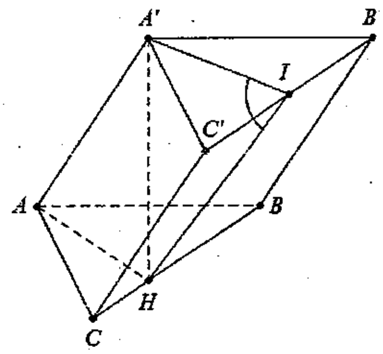
Mà $A'H \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (A'HI) \Rightarrow B'C' \perp HI$.

$\Rightarrow \widehat{(BCC'B');(A'B'C')} = \widehat{(A'I;IH)} = \widehat{A'IH}$.

Áp dụng định lý Cosin cho tam giác AHC, ta có

$$AH^2 = AC^2 + HC^2 - 2.AC.HC.\cos\widehat{ACH}$$

$$= a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.a.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$



Xét $\Delta A'AH$ vuông, có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

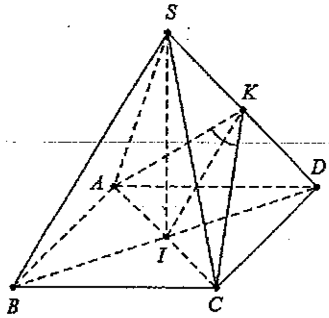
Xét $\Delta A'HI$ vuông, có $\tan\widehat{A'IH} = \dfrac{A'H}{A'I} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a, $SA = SB = a$, $SD = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Gọi I là tâm của hình thoi $S.ABCD$.



Ta có $(SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Theo giả thiết, ta có $AD = SA = a$ mà $AC \perp (SBD)$.

$\Rightarrow SI = IB = ID \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại $S \Rightarrow BD = a\sqrt{3},\ AC = a$.

Vẽ $IK \perp SD$ tại $K \Rightarrow K$ là trung điểm của SD $(SB \parallel IK)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SD \\ IK \perp SD \end{cases} \Rightarrow SD \perp (AKC) \Rightarrow \widehat{((SAD);(SCD))} = \widehat{AKC}$

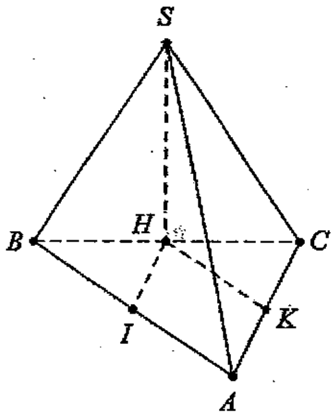
Lại có $IK = \dfrac{SB}{2} = IA = IC \Rightarrow \Delta AKC$ vuông tại $K \Rightarrow \widehat{AKC} = 90^0$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $BC = 4a\sqrt{2}$. Các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) lần lượt tạo với đáy các góc 90^0, 60^0, 30^0. Gọi khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC); giá trị của biểu thức $P = h.S_{\Delta ABC}$ là

A. $6\sqrt{3}a^3$ **B.** $16\sqrt{3}a^3$ **C.** $8\sqrt{3}a^3$ **D.** $4\sqrt{3}a^3$

Lời giải

Vì $(SBC) \perp (ABC)$, kẻ $SH \perp BC \rightarrow SH \perp (ABC)$.



Kẻ $HI \perp AB$ $(I \in AB)$, $HK \perp AC$ $(K \in AC)$.

Khi đó $IH \perp (SAB)$ và $HK \perp (SAC)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{(SAB);(ABC)} = \widehat{(SI;HI)} = \widehat{SIH} = 30^0 \\ \widehat{(SAB);(ABC)} = \widehat{(SK;HK)} = \widehat{SKH} = 60^0 \end{cases}$$

Vì $BC = 4a\sqrt{2}$ nên $AB = AC = 4a \Rightarrow HI + HK = 4a$.

Lại có $SH = HI.\tan 30^0 = HK.\tan 60^0 \Leftrightarrow HI = 3.HK$

$$\Rightarrow \begin{cases} HI + HK = 4a \\ HI = 3HK \end{cases} \Leftrightarrow HK = a \Rightarrow HI = 3a.$$

Suy $SH = HI.\tan 30^0 = a\sqrt{3}$. Vậy $P = h.S_{\Delta ABC} = SH.S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}a^3$. **Chọn C.**

III. [TT6016] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 [339442]: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC).

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 2 [339443]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 3 [339444]: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, cạnh bên $SA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi M là trung điểm AB, tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SMC) và mặt đáy (ABC).

A. $\frac{4}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4 [339446]: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5 [339447]: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6 [339448: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD).

A. $\sqrt{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 7 [339450]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) biết rằng $\cot\alpha = \sqrt{2}$.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 8 [339452]: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi I là trung điểm của BC. Góc giữa mặt phẳng $(C'AI)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{4}$ **B.** $\frac{3a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 9 [339453]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D, AB là đáy lớn và tam giác ABC là cân tại C, $AC = a$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, cạnh bên $SC = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30^0. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0.

Câu 10 [339454]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 11 [339457]: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$, biết $SC = a\sqrt{5}$, gọi M là trung điểm của AC tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng đáy (ABC).

A. 3. **B.** 4. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12 [339458]: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

Câu 13 [339459]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có góc $\widehat{BAD} = 120^0$, hình chiếu vuông góc của điểm H trên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABC, biết đường cao của khối chóp là $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và tam giác SBD vuông tại S. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD).

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 14 [339460]: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A có $AB = AC = 2a$ và $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là

A. $\frac{5}{13}$ **B.** $\frac{6}{13}$ **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{7}{13}$

Câu 15 [339463]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 16 [339464]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a, AD = DC = a, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là :

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 17 [339466]: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$; $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. C	3. B	4. A	5. C	6. D	7. B	8. D	9. C	10. B
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. D	17. D			

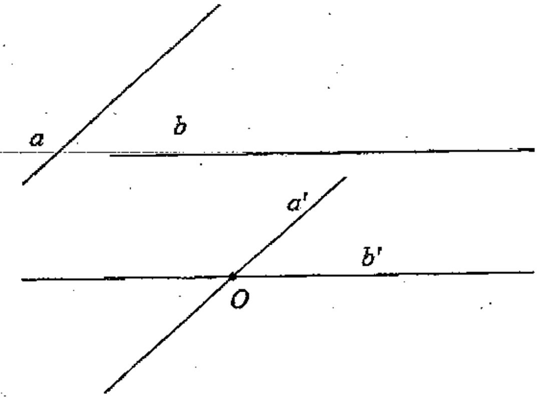
Chủ đề 8

[TV6017] GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Định nghĩa góc giữa đường thẳng và đường thẳng

Trong không gian cho 2 đường thẳng a, b bất kỳ. Từ một điểm O nào đó ta vẽ 2 đường thẳng a', b' lần lượt song song với a và b. Ta nhận thấy rằng khi điểm O thì góc giữa 2 đường thẳng a' và b' không thay đổi. Do đó ta có định nghĩa:



Định nghĩa: Góc giữa 2 đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b

2. Cách xác định góc giữa hai đường thẳng

Để xác định góc giữa 2 đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

Nếu $\vec{u}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng b và $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\alpha$ thì góc giữa 2 đường thẳng a và b bằng α nếu $0\le\alpha\le 90^0$ và bằng $180^0-\alpha$ nếu $90^0<\alpha\le 180^0$. Nếu 2 đường thẳng a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0^0.

Góc giữa 2 đường thẳng là góc có số đo $0^0\le\alpha\le 90^0$.

Chú ý: Để tính góc giữa 2 đường thẳng trong không gian chúng ta cần nhớ các công thức:

1) Định lý hàm số cos: Cho tam giác ABC thì: $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}$

Tương tự ta có: $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2.BA.BC}$ và $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{CA^2+CB^2-AB^2}{2.CA.CB}$

2) Công thức cosin góc giữa 2 vecto: $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Các bài toán cơ bản.

Ví dụ 1: Cho các khẳng định sau. Chọn khẳng định đúng.

A. Góc giữa 2 đường thẳng luôn là góc nhọn.

B. Góc giữa 2 đường thẳng bằng góc giữa 2 vecto chỉ phương của nó.

C. Cosin góc giữa 2 đường thẳng luôn là một giá trị không âm.

D. Cả A và C đều đúng.

Lời giải:

Đáp án **A** sai vì góc giữa 2 đường thẳng là một góc không tù nó có thể là góc 0^0 hoặc góc 90^0

B sai vì nếu góc giữa 2 vecto chỉ phương lớn hơn 90^0 thì góc giữa 2 đường thẳng không bằng góc giữa 2 vecto chỉ phương.

C đúng vì góc giữa 2 đường thẳng là α và $0 \le \alpha \le 90^0$ nên $0 \le \cos\alpha \le 1$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Trong không gian cho góc $\widehat{BAC} = \varphi$ và $\cos\varphi < 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Góc giữa 2 đường thẳng AB và AC bằng φ

B. Góc giữa 2 đường thẳng AB và AC bằng $180^0 - \varphi$

C. Góc giữa 2 đường thẳng AB và AC bằng $90^0 - \varphi$

D. Góc giữa 2 đường thẳng AB và AC bằng $90^0 + \varphi$

Lời giải:

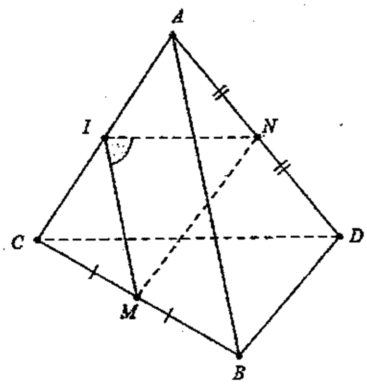
Do $\cos\varphi < 0 \Rightarrow 90^0 < \varphi < 180^0$ khi đó góc giữa 2 đường thẳng AB và AC bằng $180^0 - \varphi$

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $MN = a\sqrt{3}$ tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD.

A. 30^0 **B.** 150^0 **C.** 120^0 **D.** 60^0

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AC.

Khi đó MI là đường trung bình trong tam giác ACB

Suy ra $MI \parallel AB$ và $MI = \dfrac{AB}{2} = a$. Tương tự $IN \parallel CD$ và

$IN = \dfrac{CD}{2} = a$. Do $\begin{cases} IN \parallel CD \\ IM \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AB;CD}\right) = \left(\widehat{IM;IN}\right)$.

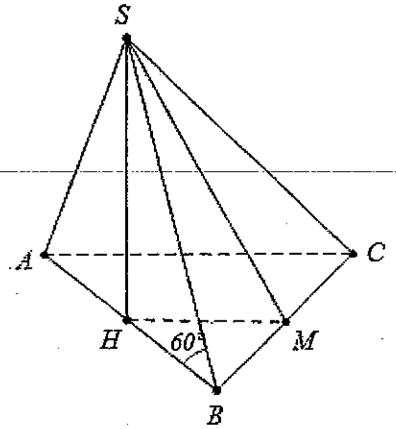
Lại có $\cos\widehat{MIN} = \dfrac{MI^2 + NI^2 - MN^2}{2.IM.IN} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^0$

Do vậy $\left(\widehat{AB;CD}\right) = 60^0$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh AB. Biết rằng góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0 và M là trung điểm của BC. Góc giữa SM và AC là

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 135^0

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của AB, khi đó $SH \perp (ABC)$

Khi đó $\widehat{SB;(ABC)} = \widehat{SBH} = 60^0$.

Mặt khác $HB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow SH = HB\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do HM là đường trung bình trong tam giác ABC nên

$HM \parallel AC \Rightarrow \left(\widehat{SM;AC}\right) = \left(\widehat{SM;HM}\right)$.

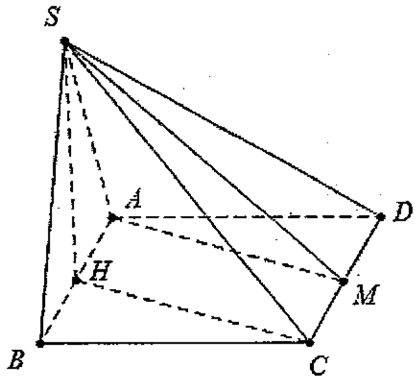
Lại có: $\cos\widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}}$

Trong đó $HM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos\widehat{SMH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\widehat{SM;AC}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{SM;AC}\right) = 60^0$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a; AD = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của AB. Gọi M là trung điểm của CD và $SM = 4a$. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng AM và SC.

A. $\frac{3}{\sqrt{17}}$ **B.** $\sqrt{\frac{9}{17}}$ **C.** $\sqrt{\frac{13}{17}}$ **D.** $\sqrt{\frac{14}{17}}$

Lời giải:



Ta có: $HM \parallel AD \parallel BD$ và $HM = AD = 2a\sqrt{3}$.

Lại có $SH^2 + HM^2 = SM^2 \Rightarrow SH = 2a$.

Do $AMCH$ là hình bình hành nên $CH \parallel AM$

Khi đó góc giữa AM và SC bằng góc giữa HC và SC. Ta có: $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{13}$

Suy ra $\cos\widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \sqrt{\frac{13}{17}}$.

Chọn C.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 4a$; $BC = 8a$. Tam giác SAB là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = 3MC$. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng SM và AC. Chọn khẳng định đúng.

A. $\tan\varphi = \dfrac{7}{20}$ **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{39}}{9}$ **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\tan\varphi = \dfrac{3}{10}$

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm của AH khi đó $BK = 3KA$

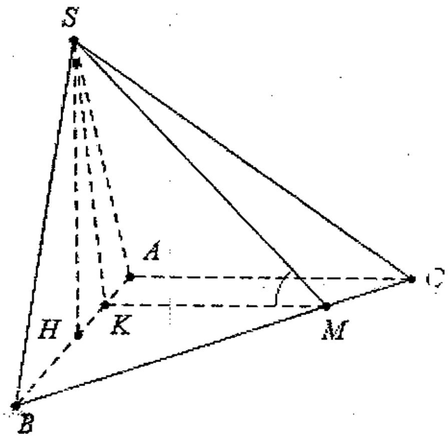
$\Rightarrow KM \parallel AC$. Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4a\sqrt{3}$

$SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Do $KM \parallel AC$ nên $\widehat{(AC;SM)} = \widehat{(KM;SM)}$.

Ta có: $KM = \dfrac{3}{4}AC = 3a\sqrt{3}$; $HK = a$.

Suy ra $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = a\sqrt{13}$.



Mặt khác $KM // AC \Rightarrow KM \perp (SAB) \Rightarrow KM \perp SK$. Khi đó $\tan\varphi = \dfrac{SK}{KM} = \dfrac{\sqrt{39}}{9}$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng SM và DN.

A. $\cos\left(\widehat{SM;DN}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos\left(\widehat{SM;DN}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

C. $\cos\left(\widehat{SM;DN}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **D.** $\cos\left(\widehat{SM;DN}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Lời giải:

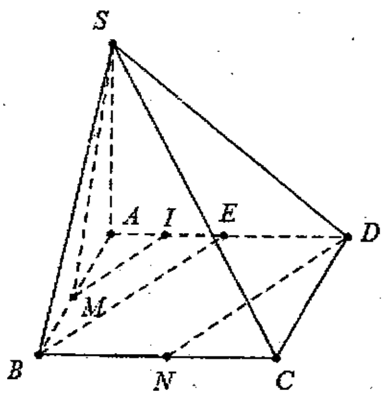
Do $SA \perp (ABCD)$. Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

Gọi E là trung điểm của AD và I là trung điểm của AE. Dễ thấy $BNDE$ là hình bình hành và MI là đường trung bình trong tam giác ABE.

Khi đó $DN \parallel BE \parallel MI$. Ta có: $AM = a; AI = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a}{2}$

Khi đó $SM^2 = SA^2 + AM^2 = 2a^2; SI^2 = \dfrac{5a^2}{4}$;

$MI = AI^2 + AM^2 = \dfrac{5a^2}{4}$



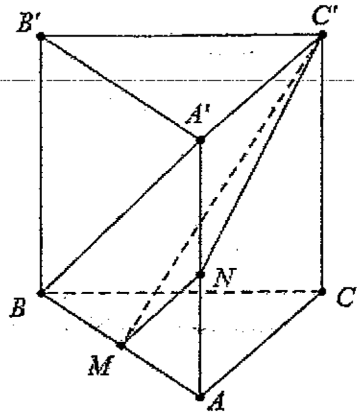
Do vậy $\cos\widehat{SMI} = \dfrac{SM^2 + MI^2 - SI^2}{2.SM.MI} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \cos\widehat{SM;DN}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng $A'B$ và $C'M$.

A. $\cos\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\frac{2}{\sqrt{95}}$ **B.** $\cos\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\frac{4}{\sqrt{95}}$

C. $\cos\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\frac{6}{\sqrt{95}}$ **D.** $\cos\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\frac{8}{\sqrt{95}}$

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AA' khi đó $MN \parallel A'B$

Suy ra $\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\left(\widehat{MN;C'M}\right)$

Lại có $MN=\frac{A'B}{2}=\frac{\sqrt{A'A^2+AB^2}}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$C'M=\sqrt{CC'^2+CM^2}=\sqrt{4a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{19}}{2}$

$C'N=\sqrt{A'C'^2+A'N^2}=a\sqrt{2}$

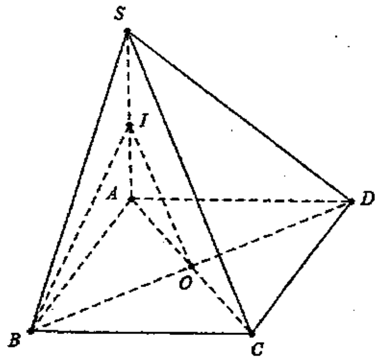
Suy ra $\cos\left(\widehat{C'MN}\right)=\frac{C'M^2+MN^2-C'N^2}{2.C'M.MN}=\frac{8}{\sqrt{95}}>0$

Do đó $\cos\left(\widehat{A'B;C'M}\right)=\frac{8}{\sqrt{95}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=a, AD=a\sqrt{3}$, $SC=2a\sqrt{2}$ và $SA\perp(ABCD)$. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng SC và BD

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Lời giải:



Ta có:

$AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a \Rightarrow SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=2a$

Dựng $OI \parallel SC$ trong đó O là tâm của hình vuông $ABCD$

Khi đó góc giữa SC và BD là góc giữa 2 đường thẳng OI và BD.

Khi đó $OI=\frac{SC}{2}=a\sqrt{2}$; $BI=\sqrt{IA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$

$OB=\frac{BD}{2}=a \Rightarrow \cos\widehat{BOI}=\frac{OB^2+OI^2-BI^2}{2.OI.OB}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

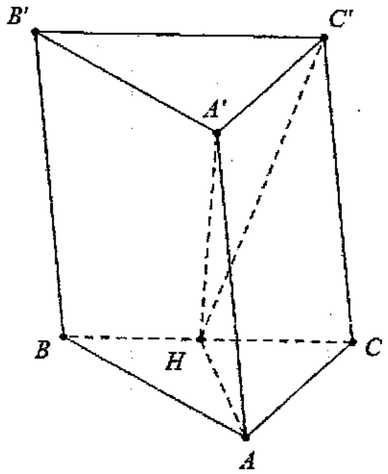
Do đó $\cos\left(\widehat{SC;BD}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: **[TRÍCH ĐỀ THI ĐẠI HỌC A-2008]** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, tam giác ABC vuông tại A, $AB = a; AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của BC. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng AA' và $B'C'$.

A. $\cos\left(\widehat{AA';B'C'}\right) = \frac{1}{4}$ **B.** $\cos\left(\widehat{AA';B'C'}\right) = \frac{1}{2}$

C. $\cos\left(\widehat{AA';B'C'}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\cos\left(\widehat{AA';B'C'}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải:



HD: Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$

Gọi H là trung điểm của BC khi đó $AH = \frac{BC}{2} = a$.

Mặt khác $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$

Do $\begin{cases} AA' \parallel CC' \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AA';B'C'}\right) = \left(\widehat{CC';CH}\right)$

Lại có $A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'C'$.

Suy ra $C'H = \sqrt{A'C'^2 + A'H^2} = a\sqrt{6}$

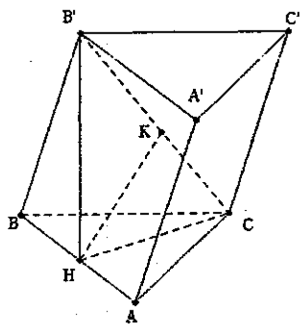
Khi đó $\cos\widehat{C'CH} = \frac{CC'^2 + CH^2 - HC'^2}{2.CC'.HC} = \frac{-1}{4} < 0$

Do vậy $\cos(AA';B'C') = \frac{1}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết khoảng cách từ điểm H đến đường thẳng $B'C$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng $B'C$ và AA'. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{8}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$

Lời giải:



Ta có: $HC = AC\sin\widehat{A} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

+) Dựng $HK \perp B'C \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

+) Mặt khác : $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{B'H^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow B'H = \frac{a}{2}$

Do $AA'//BB' \Rightarrow \left(\widehat{B'C;AA'}\right) = \left(\widehat{B'C;BB'}\right)$

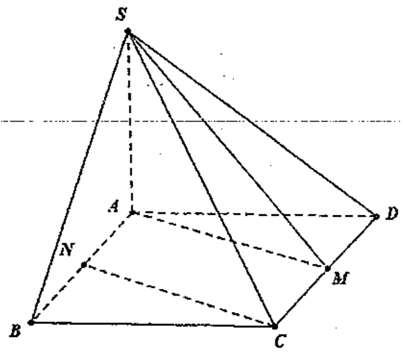
Ta có: $BB' = \frac{a}{\sqrt{2}}, BC = a, B'C = a$.

Khi đó $\cos\left(\widehat{B'C;AA'}\right) = \cos\widehat{CB'B} = \frac{B'C^2 + BB'^2 - BC^2}{2B'C.BB'} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a;AD=a$. Gọi M là trung điểm của CD, biết $SM=2a$. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng SC và AM.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{2}{7}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$

Lời giải:



Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\Delta SAM$ vuông tại A

Do M là trung điểm của CD nên $MC=MD=a$

Lại có $AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=a\sqrt{2}$

Suy ra $SA=\sqrt{SM^2-AM^2}=a\sqrt{2}$

Gọi N là trung điểm của AB suy ra $ANMC$ là hình bình hành do đó $AM\parallel CN$ nên góc giữa 2 đường thẳng SC và AM bằng góc giữa 2 đường thẳng SC và CN.

Do đó $\cos\left(\widehat{SC;AM}\right)=\cos\left(\widehat{SC;CN}\right)$. Mặt khác $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{2a^2+5a^2}=a\sqrt{7}$

$CN=AM=a\sqrt{2};SN=\sqrt{SA^2+AN^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow\cos\widehat{SCN}=\dfrac{SC^2+CN^2-SN^2}{2.SC.CN}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$. **Chọn D.**

Cách 2: Cho hệ trục toạ độ $Oxyz$ với $O\equiv A$; tia $Ox\equiv AB;Oy\equiv AD;Oz\equiv AS$.

Khi đó $A(0;0;0);C(2a;a;0);M(a;a;0);S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SC}\left(2a;a;-a\sqrt{2}\right);\overrightarrow{AM}(a;a;0)\Rightarrow\cos\left(\widehat{SC;AM}\right)=\dfrac{|2a.a+a.a+0|}{\sqrt{7a^2}.\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

Chú ý: Cách làm này chúng ta xem lại sau khi học phần toạ độ không gian $Oxyz$.

III. [TT6018] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [336286]Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC với M là trung điểm của AB

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 120^0

Câu 2: [336287] Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng CI và AC, với I là trung điểm của AB.

A. 10^0 **B.** 30^0 **C.** 150^0 **D.** 170^0

Câu 3: **[336288]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các tam giác SAB, SAD, SAC là các tam giác vuông tại A. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD biết $SA = a\sqrt{3}, AB = a, AD = 3a.$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{130}}$ **D.** $\frac{8}{\sqrt{130}}$

Câu 4: **[336290]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC biết $AD = DC = a, AB = 2a, SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$

A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{42}}$ **C.** $\frac{3}{\sqrt{42}}$ **D.** $\frac{4}{\sqrt{42}}$

Câu 5: **[336291]**Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 6: **[336293]**Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy bằng a. Biết góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^0 và H là hình chiếu của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$, H trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$. Góc giữa BC và AC' là α. Giá trị của $\tan\alpha$ là:

A. 3. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{-1}{3}$.

Câu 7: **[336294]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA \perp (ABCD)$, và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SC, góc tạo bởi hai đường thẳng AM và CD là φ. Giá trị của biểu thức $P = \tan\alpha.\cos^{-2}\alpha$ bằng :

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 8: **[336295]**Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a; AB = a; BC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng AI và SC là:

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Câu 9: **[336297]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng SM và DN là:

A. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 10. **[336298]**Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}, \widehat{DAA'}, \widehat{A'AB}$ đều bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos\alpha$ bằng :

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 11: **[336299]**Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 2a; BC = 2a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Với N là trung điểm của AC, cosin góc giữa 2 đường thẳng SN và BC là:

A. $\cos(SN;BC) = 1$ **B.** $\cos(SN;BC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\cos(SN;BC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(SN;BC) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Câu 12: **[336300]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD, cosin góc giữa 2 đường thẳng CM và SB là:

A. $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Câu 13: **[336303]**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$ và $AD = 3a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng SC và AB. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{11}}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{1}{11}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Câu 14: **[336306]**Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $B'C$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng $B'C$ và AA'. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{8}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 15: **[336307]**Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Biết rằng $A'C = a\sqrt{7}$ và N là trung điểm của AA'. Góc giữa 2 đường thẳng $A'C$ và BN là φ. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{14}}{7}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{14}}{28}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{14}}{14}$

Câu 16: [336309]Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = b$. Biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0, giá trị của b tính theo a bằng :

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Câu 17. [336311]Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = a$, $CD = a$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 18. [336313]Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, $CA = CB = a$. SA vuông góc với đáy, gọi D là trung điểm của AB, góc tạo bởi hai đường thẳng SD, AC là φ. Biết $SA = a\sqrt{3}$, giá trị của biểu thức $P = \tan\alpha$ bằng :

A. $-\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{13}$ **C.** $\sqrt{14}$. **D.** $-\sqrt{14}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	**02. B**	**03. D**	**04. C**	**05. C**	**06.A**	**07. D**	**08. A**	**09. D**	**10. D**
11. B	**12. A**	**13. B**	**14. D**	**15. A**	**16. A**	**17. C**	**18. B**		

Chủ đề 9

[TV6019] THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – Phần 1

(Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy)

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

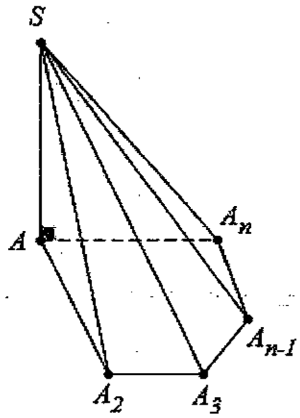
Phương pháp giải

Công thức tính thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}.B.h$ *với* B *là diện tích đáy và* h *là chiều cao của khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy).*

Xét khối chóp $S.AA_1A_2...A_n$ có đáy $AA_1A_2...A_n$ là đa giác diện tích B. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(AA_1A_2...A_n)$. Thể tích khối chóp $S.AA_1A_2...A_n$ là

$$V_{S.AA_1A_2...A_n}=\frac{1}{3}.SA.S_{AA_1A_2...A_n}$$

Đáy $AA_1A_2...A_n$ là các hình đa giác, thường gặp là tam giác (vuông, cân, đều…), hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình thang, … có diện tích như sau:



- ΔABC vuông tại A, có $\begin{cases} AB=a \\ AC=b \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab$

- ΔABC cân tại A, có $\begin{cases} AB=AC=a \\ \sin\widehat{BAC}=\alpha \end{cases} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}.a^2.\sin\alpha$.

Với $\alpha=60^0 \Rightarrow$ tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- Hình vuông $ABCD$ cạnh $a \Rightarrow S_{ABCD}=a^2$.

- Hình thoi $ABCD$ có $\begin{cases} AC=a \\ BD=b \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab$. Với góc $\widehat{BAD}=90^0 \Rightarrow ABCD$ là

hình chữ nhật có diện tích $S_{ABCD}=AB.AD$.

- Hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy $AB=a,\ CD=b$ và độ dài đường cao là h.

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD}=\frac{1}{2}h(a+b)$.

Chú ý: *Khi giải các bài toán về thể tích khối chóp ta thường gặp các giả thiết về góc, khoảng cách do đó cần xem lại cách dựng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng, khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ...*

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{2}$. Cạnh $SA=a$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Diện tích của tam giác ABC là : $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **Chọn B.**

Bài toán tương tự [Bạn đọc tự giải]:

BT1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

BT2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác ABC đều. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $\widehat{SBA}=45^0$. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $V:a^3$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

BT3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=1$, $AD=2$. Cạnh bên $SA=4$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

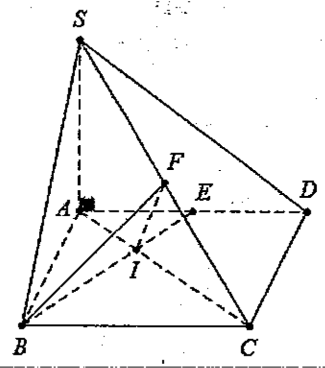
A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, SA vuông góc với đáy, cạnh $SA=AB=a,\ AD=a\sqrt{2}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của AC và BE. Tính thể tích tứ diện $FBIC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{18}a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm của tam giác ABD nên $AI=\frac{1}{3}AC$.



Do đó $S_{\Delta BIC}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Vì F là trung điểm của SC nên

$d\left(F;(IBC)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;(IBC)\right)=\frac{SA}{2}=\frac{a}{2}$.

Suy ra $V_{F.IBC}=\frac{1}{3}.d.S_{\Delta BIC}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{3}.\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{18}a^3$. **Chọn A.**

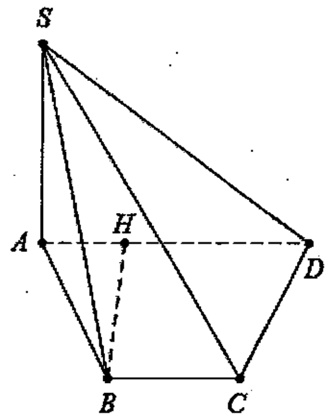
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với hai cạnh đáy AD, BC. $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$, $\widehat{BAD}=60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và SD tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Ta có : $45^0=\widehat{\left(SD;(ABCD)\right)}=\widehat{(SD;AD)}=\widehat{SDA}$. Suy ra tam giác SAD vuông cân tại A nên suy ra $SA=AD=2a$.

Trong hình thang $ABCD$, kẻ $BH\perp AD$ $(H\in AD)$.



Do $ABCD$ là hình thang cân nên

$2AH+BC=AD\Rightarrow AH=\frac{AD-BC}{2}=\frac{a}{2}$.

Tam giác AHB, có $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

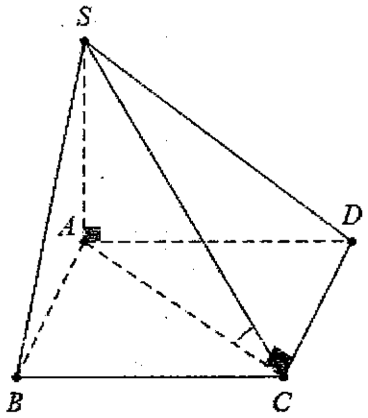
Diện tích $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)BH=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh $AB = a$; $AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tam giác ABC vuông tại A và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90^0$.

Lại có $AD = BC = 2a \Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $CD \perp AC$ và $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

$\Rightarrow \widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA} = 30^0$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.

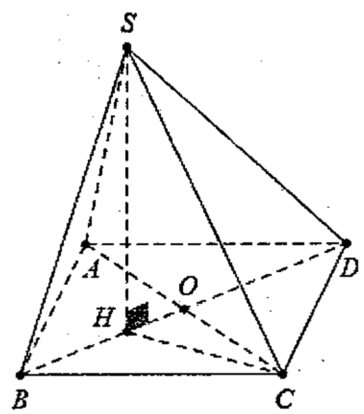
$\Rightarrow SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{3}.\tan 30^0 = a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu của S lên mặt đáy là trung điểm của OB. Cạnh bên SC tạo với đáy một góc bằng góc $\widehat{ABC}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{63}}{48}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $OB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng đáy.

Do đó $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH} = \widehat{ABC} = 60^0$.

Lại có $OH = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $CH = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

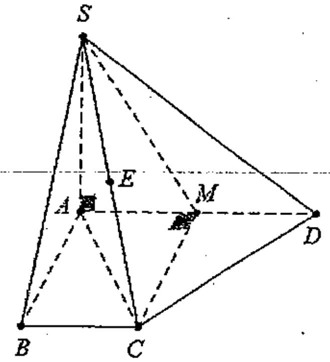
$\Rightarrow SH = CH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{8}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC$. Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của SC và khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAD) bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 4a^3$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = 6a^3$.

Lời giải



Ta có $d(E;(SAD)) = \frac{1}{2} d(C;(SAD)) \Rightarrow d(C;(SAD)) = 2a$.

Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCM$ là hình vuông.

$\Rightarrow CM \perp AD$ mà SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra $SA \perp CM$ kết hợp với $CM \perp AD \Rightarrow CM \perp (SAD)$

$\Rightarrow d(C;(SAD)) = CM = 2a \Rightarrow AB = 2a \Rightarrow \begin{cases} AD = 4a \\ BC = 2a \end{cases}$.

Diện tích hình thang $ABCD$ là:

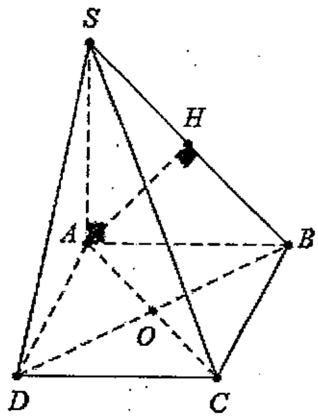
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB.(AD + BC) = 6a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = 2a^3$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Ta có $d(O;(SBC)) = \frac{1}{2} d(A;(SBC)) \Rightarrow d(A;(SBC)) = a$.

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ và $ABCD$ là hình vuông.

$\Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A, ta có $\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2}$

$$\Rightarrow SA = \frac{AB.AH}{\sqrt{AB^2 - AH^2}} = \frac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{2}.a}{a} = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Biết khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $3a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

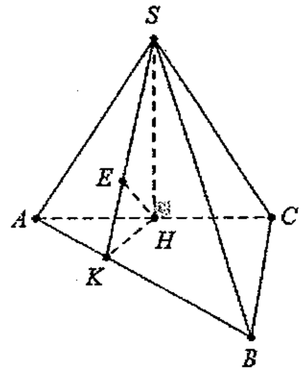
Dựng $HK \perp AB$ mà $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK)$ (1).

Kẻ $HE \perp SK$ (2). Từ (1), (2) $\Rightarrow HE \perp (SAB)$

$\Rightarrow d\left(H;(SAB)\right) = HE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vì $HA = a$; $HC = 2a$

$\Rightarrow HK = HA.\sin A = a.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔAHK vuông)

Xét ΔSHK vuông tại H, có $\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2}$.



$\Leftrightarrow SH = \frac{HK.HE}{\sqrt{HK^2 - HE^2}} \Rightarrow SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác không tù. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB), (SBC) vuông góc với nhau. Cạnh $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASB} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $(SAB) \perp (SBC)$ suy ra $BC \perp (SAB)$.

$\Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC$

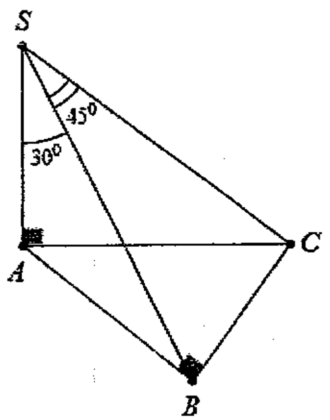
Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan\widehat{BSC} = \frac{BC}{SB}$.

$\Rightarrow BC = \tan 45^0.a\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên

$\sin\widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} \Rightarrow AB = \sin 30^0.a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\widehat{ASB} = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = \cos 30^0.a\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.



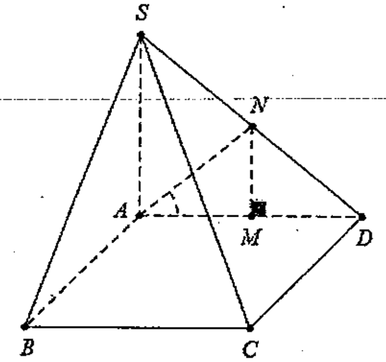
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{3a^3}{8}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=2AB=2a$. Gọi N là trung điểm của SD, đường thẳng AN tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{4a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow AM=\dfrac{AD}{2}$ (1).

Mà N là trung điểm của $SD \Rightarrow MN \parallel SA$ và $MN=\dfrac{SA}{2}$.

Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow MN\perp(ABCD)\Rightarrow AM$ là hình chiếu của AN trên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \widehat{(AN;(ABCD))}=\widehat{(AN;AM)}=\widehat{MAN}=45^0$.

$\Rightarrow \Delta MAN$ vuông cân tại $M \Rightarrow MN=AM=\dfrac{SA}{2}=a$ (2).

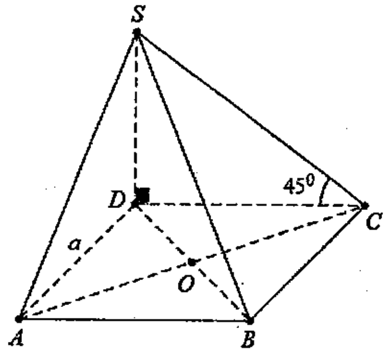
Từ $(1),(2)\Rightarrow AD=2AM=2a\Rightarrow S_{ABCD}=AB.AD=2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{4a^3}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AD=a$, $\widehat{AOB}=120^0$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải



Vì $SD\perp(ABCD)$ và $DC\perp BC$ nên $SC\perp BC$.

Suy ra $\widehat{SCD}=\widehat{((SBC);(ABCD))}=45^0$.

(do ΔSCD vuông tại D nên $\widehat{SCD}<90^0$).

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA=OD$, kết hợp với $\widehat{AOD}=180^0-\widehat{AOB}=60^0$. Suy ra ΔOAD đều.

$\Rightarrow OA=OD=a,\ \widehat{ADO}=60^0\Rightarrow AB=AD.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

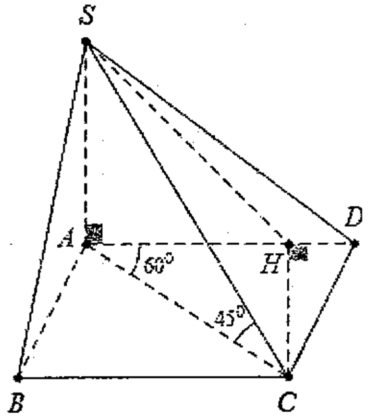
Suy ra $S_{ABCD}=AB.AD=a^2\sqrt{3}$ và $SD=CD.\tan 45^0=a\sqrt{3}$

Vậy thể tích là: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SD.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3}=a^3$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC = 2a$, $\widehat{DAC} = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45^0. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $a^3\sqrt{3}$, tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD.

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của C trên $AD \Rightarrow CH \perp AD$.

Khi đó, khoảng cách $d\left(C;(AD)\right) = CH$ và đặt $CH = x$.

Xét ΔACH vuông tại $H \Rightarrow \sin\widehat{HAC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \widehat{\left(SC;(ABCD)\right)} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA} = 45^0$.

Xét ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC$.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = CH.BC = 2a.x$

$\rightarrow$ Thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S = \frac{1}{3}.\frac{2x}{\sqrt{3}}.2a.x = a^3\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 2a, BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H nằm trên đoạn AB. Các mặt bên $(SBC), (SCD)$ cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Kẻ $HM \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHM)$ và $BC \perp (SAB)$.

Theo giải thiết, ta có $\widehat{(SBC);(ABCD)} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = \alpha$.

$\widehat{(SCD);(ABCD)} = \widehat{(SM;HM)} = \widehat{SMH} = \alpha$.

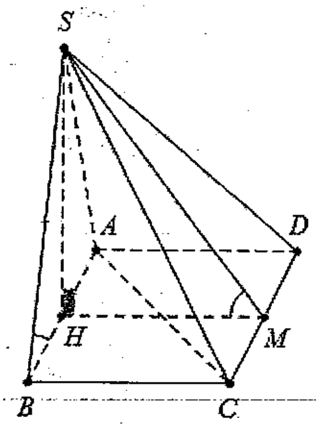
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SH}{HM} = \dfrac{SH}{BH} \Rightarrow HM = BH = \dfrac{AB}{2} = a$

$\Rightarrow H$ là trung điểm $AB \Rightarrow HA = HB = a$.

Xét ΔSHA vuông, có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - a^2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}.2a.a = \dfrac{a^3}{6}$. **Chọn C.**



Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Biết $AC = 2a$, $BC = a$; góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3}{9}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm AC. Do tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên hình chiếu của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $SH \perp (ABC)$.

Do đó $60^0 = \widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{(SB;SH)} = \widehat{SBH}$.

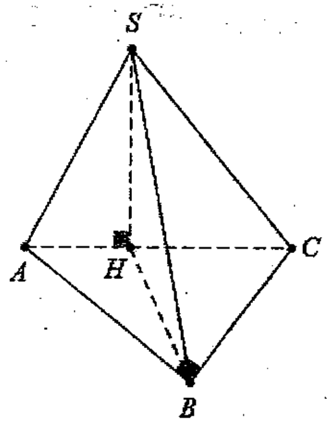
Trong tam giác vuông SHB, ta có

$SH = BH.\tan\widehat{SBH} = \dfrac{AC}{2}.\tan\widehat{SBH} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ABC, ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3}{2}$ $(đvtt)$. **Chọn C.**



Mở rộng bài toán: *nếu giả thiết đưa ra các cạnh bên SA, SB, SC cùng tạo với đáy một góc α thì hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD. Cạnh bên SA tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0, hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (SCD) trùng với trọng tâm ΔSCD. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD và M là trung điểm của $CD \Rightarrow SG = \dfrac{2}{3}SM$.

Đặt $SG = 2x \Rightarrow GM = x$, tam giác SMO vuông tại $O \Rightarrow SG.GM = OG^2$.

$\Leftrightarrow 2x^2 = OG^2 = OM^2 - GM^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

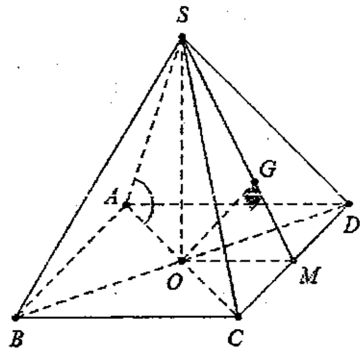
$\Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{9x^2 - OM^2} = a\sqrt{2}$

Mà $\widehat{SA;(ABCD)} = 45^0 \Rightarrow \widehat{SAC} = 45^0 \Rightarrow SO = AO = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2a \Rightarrow S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.4a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **Chọn B.**



Ví dụ 16: [THPT CHUYÊN KHTN – HÀ NỘI]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O, AB = a, \widehat{BAD} = 60^0$, cạnh $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$.

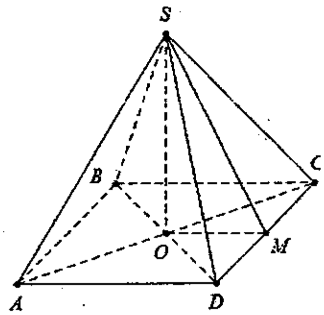
Lời giải

Hình thoi $ABCD$ cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \begin{cases} AC = a\sqrt{3} \\ BD = a \end{cases}$.

Kẻ $OM \perp CD$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD$.

$\Rightarrow CD \perp (SMO) \Rightarrow \widehat{(SCD);(ABCD)} = \widehat{(SM;OM)} = \widehat{SMO}$

Xét ΔOCD vuông tại O, có $OM = \dfrac{OC.OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Xét ΔSMO vuông tại O, có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} \Rightarrow SO = \tan\widehat{SMO}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \tan 60^0.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a}{4}$.

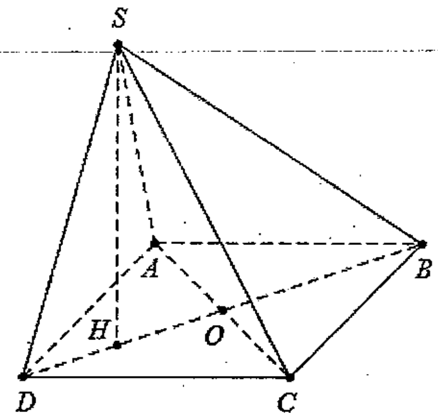
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **Chọn C.**

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $BD=1$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của OD. Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD.



Do đó $60^0=\widehat{SD;(ABCD)}=\widehat{(SD;HD)}=\widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông SHD, ta có

$$SH=HD.\tan\widehat{SDH}=\frac{BD}{4}.\tan\widehat{SDH}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Trong hình vuông $ABCD$, ta có

$$BD=AB\sqrt{2}\Rightarrow AB=\frac{BD}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB^2=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ $(đvtt)$. **Chọn A.**

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

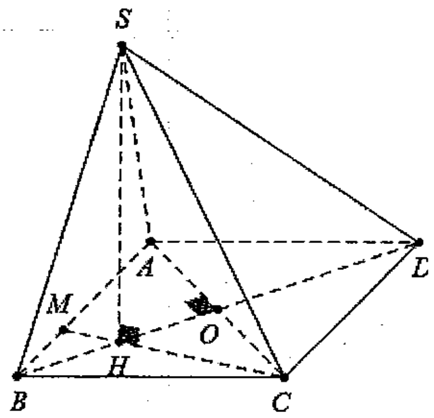
Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD$; M là trung điểm AB. Suy ra $H=BO\cap CM$.

Theo giả thiết $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD. Do đó $30^0=\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SD;SH}\right)=\widehat{SDH}$.

Tam giác ABC và ADC là các tam giác đều cạnh a, suy ra $\begin{cases} OD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ OH=\dfrac{1}{3}BO=\dfrac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow HD = OD + OH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.$



Trong tam giác vuông SHD, ta có

$SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}.$

Diện tích hình thoi $ABCD$ là

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ $(đvtt)$. **Chọn C.**

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc AD sao cho $HA = 3HD$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

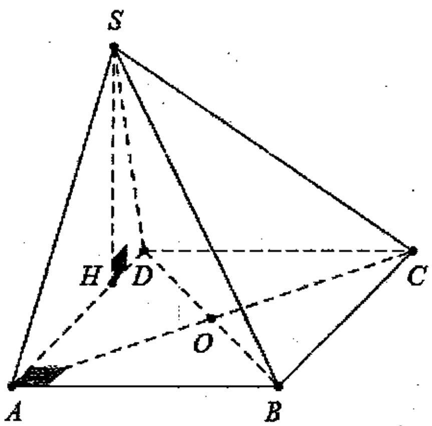
A. $V = \dfrac{8a^3}{\sqrt{6}}.$ **B.** $V = \dfrac{8a^3\sqrt{6}}{9}.$ **C.** $V = \dfrac{8a^3\sqrt{6}}{12}.$ **D.** $V = \dfrac{8a^3\sqrt{6}}{3}.$

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt đáy là HC nên

$30^0 = \widehat{SC;(ABCD)} = \widehat{(SC;HC)} = \widehat{SCH}.$

Trong tam giác vuông SAD, ta có



$SA^2 = AH.AD \Leftrightarrow 12a^2 = \dfrac{3}{4}AD.AD = \dfrac{3}{4}AD^2.$

Suy ra $AD = 4a,\ HA = 3a,\ HD = a,$

$SH = \sqrt{HA.HD} = a\sqrt{3},\ HC = SH.\cot\widehat{SCH} = 3a,$

$CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2a\sqrt{2}.$

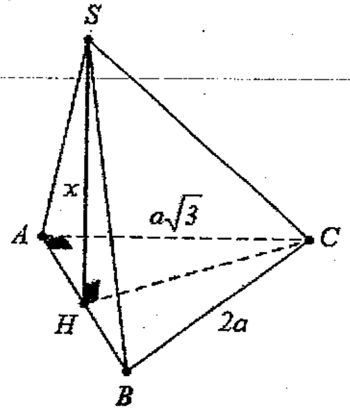
Diện tích $S_{ABCD} = AD.CD = 8\sqrt{2}a^2.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{8a^3\sqrt{6}}{3}.$ **Chọn D.**

Ví dụ 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\widehat{BAC}=90^0$, $BC=2a$, $\widehat{ACB}=30^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB, tam giác SBC vuông tại S. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

ΔSBC vuông tại S và $\begin{cases} AB = BC.\sin C = a \\ AC = BC.\cos C = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Đặt $SH = x$, ta có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Và $HC = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{x^2 + \frac{13a^2}{4}}$.

Mà $SB^2 + SC^2 = BC^2 \Rightarrow 2x^2 + \frac{14a^2}{4} = 4a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn B.**

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC}=60^0$, cạnh $SA = \frac{a\sqrt{5}}{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, biết $SG \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABD \Rightarrow SG \perp (ABCD)$.

Kẻ $GH \perp CD$ tại $H \Rightarrow \widehat{SHG} = \widehat{(SH;GH)} = \widehat{(SCD);(ABCD)} = 60^0$.

Đặt $AB = x$; $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AC = x \Rightarrow AG = \frac{x}{3}$, $CG = \frac{2x}{3}$.

ΔGHC vuông tại $H \Rightarrow HG = CG.\sin\widehat{ACD} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

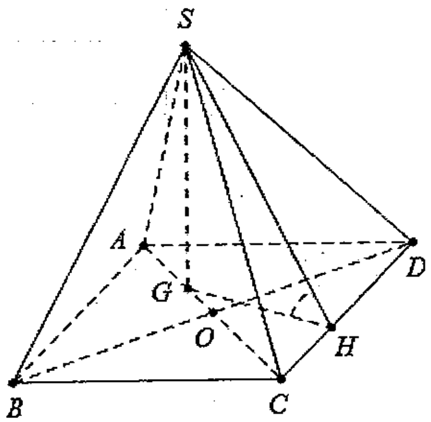
ΔSGH vuông tại $G \Rightarrow SG = HG.\tan\widehat{SHG} = x$.

Tam giác SAG vuông tại G nên $SG^2 + AG^2 = SA^2$.

$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{9}x^2 = \dfrac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SG.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.SG.2.S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{a\sqrt{2}}{6}.2.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **Chọn C.**



Ví dụ 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, AB là đáy lớn và tam giác ABC đều. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = 2a$ và tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB, ΔABC đều $\Rightarrow CM \perp AB$.

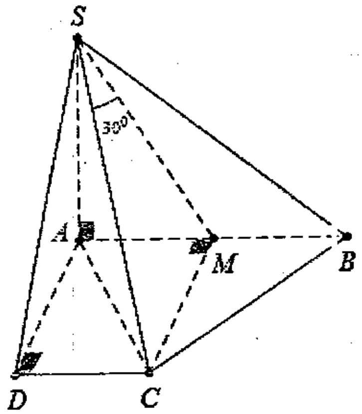
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CM \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow SM$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB).

$\Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{(SC;SM)} = \widehat{MSC} = 30^0$.

Đặt $AB = AC = 2x \Rightarrow CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = x\sqrt{3}$.

$AMCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AD = CM$ và $AM = CD = x$.

Xét ΔSMC vuông tại M, có $\sin\widehat{CSM} = \dfrac{MC}{SC}$.



$\Rightarrow CM = \sin\widehat{CSM}.SC = \sin 30^0.2a = a = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔSAC vuông tại A, có $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

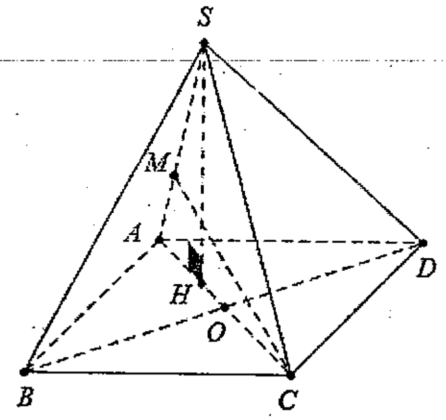
Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AD.(AB + CD) = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Tính thể tích khối tứ diện $SMBC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S trên $mp\,(ABCD)$.

$\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại H.

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$..

Và $HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $AC = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại $C \Rightarrow CM \perp SA$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của SA.

Khi đó $S_{\Delta SCM} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAC} \Rightarrow V_{SMBC} = \frac{1}{2}V_{SABC}$.

$\Rightarrow V_{SMBC} = \frac{1}{6}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$. **Chọn D.**

Ví dụ 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0, diện tích tam giác SBC bằng $2a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, ΔABC cân $\Rightarrow AM \perp BC$.

Có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = 45^0$.

Đặt $AB = x \Rightarrow SB = SC = x\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBC$ cân $\Rightarrow SM \perp BC$

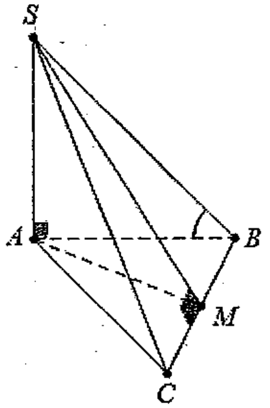
$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}.SM.BC = 2a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow SM.BC = 4a^2\sqrt{3}$ (1)

Mà $BC = x\sqrt{2}$ và $SM = \sqrt{SC^2 - BM^2} = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow x\sqrt{2}.\dfrac{x\sqrt{6}}{2} = 4a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 2a$.

Vậy thể tích $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{6}.SA.AB.AC = \dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn B.



Mở rộng bài toán: *Khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, SB = b, SC = c$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}.SA.SB.SC = \dfrac{1}{6}abc$.*

Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, biết $SO \perp (ABCD)$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

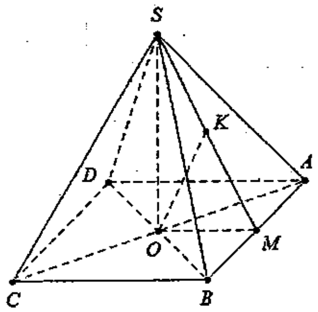
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAB)$.

$\Rightarrow d(SA;CD) = d(CD;(SAB)) = 2.d(O;(SAB)) = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của AB, kẻ $OK \perp SM$ $(K \in SM)$.

Khi đó $OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Xét ΔSMO vuông tại M, có

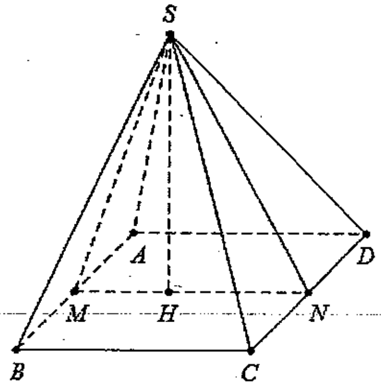
$\dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OK^2} \Rightarrow SO = a\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có $SM \perp AB$ và $MN \perp AB$ suy ra $AB \perp (SMN)$.

Kẻ $SH \perp MN$ $(H \in MN)$ mà $AB \perp (SMN) \to AB \perp SH$.

Suy ra $SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}$.

Mà $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SN = \frac{a}{2}$; $MN = a \Rightarrow MN^2 = SM^2 + SN^2$.

$\Rightarrow \Delta SMN$ vuông tại $S \Rightarrow SH = \frac{SM.SN}{MN} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

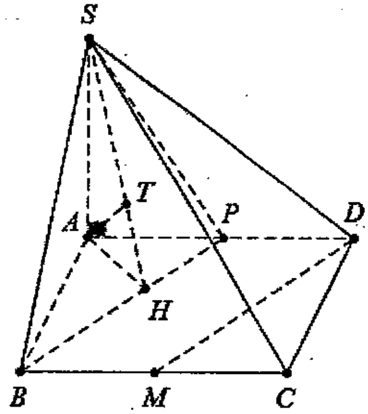
Vậy thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn A.**

Ví dụ 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC, biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. **D.** $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải

Gọi P là trung điểm của AD suy ra $BP \parallel DM$.



Do đó $d(SB;DM) = d(D;(SBP)) = d(A;(SBP))$.

Hạ $AH \perp BP \Leftrightarrow BP \perp (SAH)$. Kẻ $AT \perp SH$.

Suy ra $AT \perp (SBP)$ nên $AT = d(A;(SBP)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Tam giác vuông ABP, có $AH = \frac{AB.AP}{\sqrt{AB^2 + AP^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác vuông SAH, có

$$\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AT^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AT^2} - \frac{1}{AH^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.2a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. **Chọn B.**

III. [TT6020] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [340488] [ĐỀ THI MINH HỌA THPT QG – 2017] Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **C.** $V=\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 2:[340489] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B và $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SB=a\sqrt{5}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 3: [340490] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B và $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SC=a\sqrt{6}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 4: [340491] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SC=a\sqrt{3}$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: [340492] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm $O, AC=2AB=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SD=a\sqrt{5}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6: [340493] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD=2AB=2a$. Gọi H là trung điểm của AD, biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SA=a\sqrt{5}$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 7: [340494] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Gọi H là trung điểm của AB, biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết tam giác SAB đều.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 8: [340495] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B và $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 9: [340496] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết SB hợp với đáy một góc 30^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 10: [340497] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết SM hợp với đáy một góc 60^0, với M là trung điểm BC.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 11: [340498] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A và $BC = 2AB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết góc giữa SC và (ABC) bằng 45^0.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 12: [340499] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A và $BC = 2AB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết góc giữa SM và (ABC) bằng 60^0, với M là trung điểm BC.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 13: [340500] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm $O, AC = 2AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 14: [340501] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm $O, AC = 2AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SO vớ mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 15: [340502] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặ phẳng (SAB), (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết SC hợp với đáy một góc 45^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 16: [340503] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ~~ABCD~~ là hình vuông cạnh a. Hai mặ phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết SM hợp với đáy một góc 60^0, với M là trung điểm của BC.

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 17: [340504] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. H là trung điểm của AB và SH vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết SC hợp với đáy một góc 60^0.

A. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 18: [340505] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD = 2a, AB = a$. H là trung điểm của AD và SH vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết SD hợp với đáy một góc $45°$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 19: [340506] Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2a$, $AB = a$. Gọi H là trung điểm của AD và SH vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết SC hợp với đáy một góc $60°$.

A. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 20: [340507] Đáy của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài là a. Thể tích khối tứ diện $S.BCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 21: [340508] Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên (ABC) là trung điểm của cạnh AB; góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 22: [340509] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D thỏa mãn $AB = 2AC = 2CD = 2a = \sqrt{2}SA$ và $SA \perp (ABCD)$. Khi đó thể tích $S.BCD$ là

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23: [340510] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Biết $AC = a\sqrt{2}$, cạnh SC tạo với đáy một góc 60^o và diện tích tứ giác $ABCD$ là $\dfrac{3a^2}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh SC. Tính thể tích khối chóp $H.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 24: [340511] Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, $BC = a$, $AC = 2a$, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{6}}$.

Câu 25: [340512] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45^o và $SC = 2a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26: [340513] Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Khi đó, thể tích khối chóp trên bằng

A. $\dfrac{1}{6}a^3$. **B.** $\dfrac{1}{9}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2}{3}a^3$.

Câu 27: [340514] Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phăng đáy và có độ dài bằng a. Thể tích khối tứ diện $S.BCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 28: [340515] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết cạnh SA vuông góc với đáy (ABC) và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{9}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 29: [340516] Cho hình chóp $S.ABC$ với SA, SB, SC đôi một vuông góc và độ dài các cạnh $SA = a, SB = b, SC = c$ Thể tích hình chóp bằng

A. $\frac{1}{3}abc$. **B.** $\frac{1}{9}abc$. **C.** $\frac{1}{6}abc$. **D.** $\frac{2}{3}abc$.

Câu 30: [340517] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích của khối chóp.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 31: [340518] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB. Tính thể tích của khối chóp biết $SD = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

A. $a^3\sqrt{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 32: [340519] Một hình chóp tam giác có đường cao bằng 100 cm, các cạnh đáy bằng 20 cm, 21 cm, 29 cm. Thể tích khối chóp đó bằng

A. $7000\,cm^3$ **B.** $6213\,cm^3$ **C.** $6000\,cm^3$ **D.** $7000\sqrt{2}\,cm^3$

Câu 33: [340520] Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với cạnh $AB = a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi thể tích hình chóp $S.ABCD$ là V thì tỉ số $\frac{V}{a^3}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Câu 34: [340521] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{5a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 35: [340522] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^0$, cạnh $SA\perp(ABCD)$. Biết đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{5}$.

Câu 36: [340523] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=AC=a$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 37: [340524] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=16\ dm$ $AD=30\ dm$, hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc φ sao cho $\cos\varphi=\dfrac{5}{13}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. 5760. **B.** 5630. **C.** 5840. **D.** 5920.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	**02. A**	**03. A**	**04. B**	**05. A**	**06. C**	**07. B**	**08. C**	**09. D**	**10. C**
11. A	**12. A**	**13. A**	**14. C**	**15. B**	**16. A**	**17. B**	**18. C**	**19. B**	**20. B**
21. D	**22. B**	**23. C**	**24. D**	**25. A**	**26. A**	**27. C**	**28. A**	**29. C**	**30. B**
31. C	**32. A**	**33. A**	**34. B**	**35. C**	**36. C**	**37. A**			

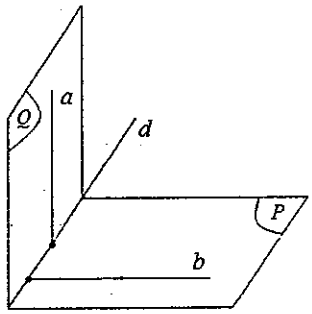
Chủ đề 10
[TV6021] THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – Phần 2
(Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy)

Trong chủ đề này, chúng ta sẽ xét các bài toán về thể tích khối chóp mà đề bài có giả thiết một mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Kiến thức cơ bản

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

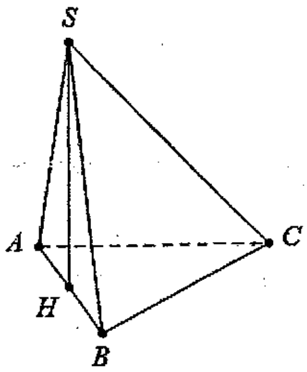


Kiến thức trên được viết gọn như sau

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\a\subset(Q),\ a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(P).$$

2. Mô hình cơ bản cần lưu ý

Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB)\perp(ABC)$.



Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Đáy ABC ta có thể thay bằng tứ giác $ABCD$.

Trường hợp ΔSAB là tam giác đều (tam giác cân tại S, tam giác vuông cân tại S) thì ta có ngay H là trung điểm của cạnh AB. Nếu ΔSAB vuông tại S thì ta cần lưu ý các hệ thức sau:

$$SA^2+SB^2=AB^2,\ SH.AB=SA.SB.$$

$$\begin{cases}SA^2=AH.AB\\SB^2=BH.BA\end{cases}\Rightarrow\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{HA}{HB}.$$

Đặc biệt là hệ thức $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}$.

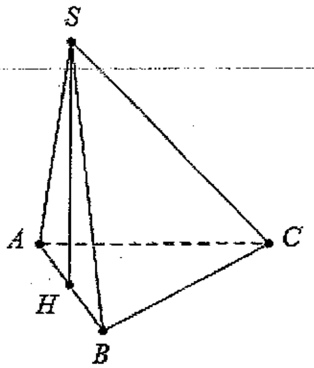
II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{24}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Tam giác SAB vuông cân tại $S\Rightarrow SH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn B**

➢ **Nhận xét**

Nếu thay ΔSAB vuông cân tại S thành tam giác đều thì ta có thể tính V như sau:

Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3}{8}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh $SC=a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

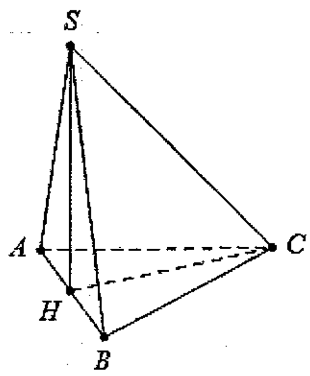
A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{33}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{33}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh AB.



Tam giác ABC đều $\Rightarrow CH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHC vuông tại H

$\Rightarrow SH^2 = SC^2 - CH^2 = 3a^2 - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

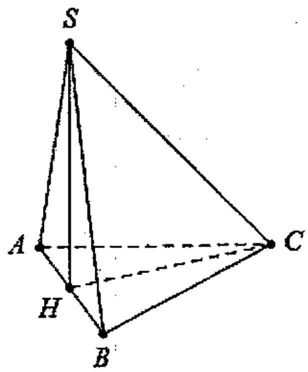
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn D**

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{33}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{33}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh AB.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow HC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\widehat{\left(SC;(ABC)\right)} = \widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SH}{HC} = \sqrt{3} \Rightarrow SH = HC\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn A**

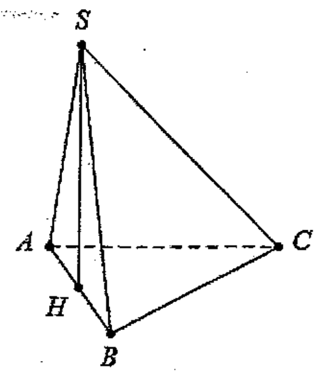
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh $AC = a\sqrt{2}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại B, cạnh $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BA = BC = a$.

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.



Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp SB,\ BC \perp HB \\ SB \subset (SBC),\ HB \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SBH} \Rightarrow \widehat{SBH} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SH}{HB} = \sqrt{3} \Rightarrow SH = HB\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn C**

➢ **Nhận xét**

Nếu đáy ABC là tam giác đều cạnh a thì ta có thể tính V như sau:

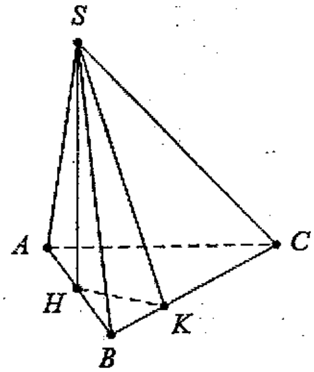
Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Kẻ $HK \perp BC$ $(K \in BC)$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK.$$



Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp SK,\ BC \perp HK \\ SK \subset (SBC),\ HK \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SKH} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow SH = HK\sqrt{3}$.

Lại có $\sin 60^0 = \frac{HK}{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{3}}{2}HB = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{4}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh $AC = a\sqrt{2}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

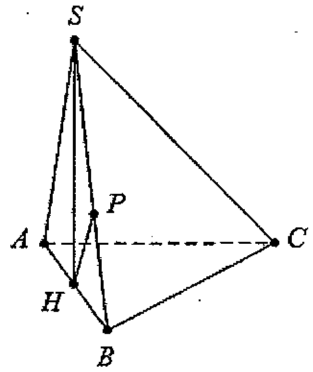
A. $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{30}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{10}}{15}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$.

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$



Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Bài ra $d\left(A;(SBC)\right) = \frac{2a}{3}$.

Mà $d\left(A;(SBC)\right) = 2d\left(H;(SBC)\right) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = \frac{a}{3}$.

Kẻ $HP \perp SB$ $(H \in SP)$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HP.$$

Như vậy $\begin{cases} HP \perp BC \\ HP \perp SB \end{cases} \Rightarrow HP \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HP \Rightarrow HP = \frac{a}{3}$.

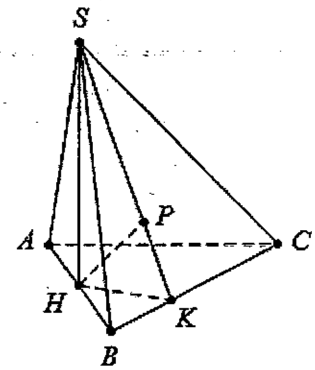
Mà ΔSHB vuông tại $H \Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{HP^2} - \frac{1}{HB^2} = \frac{9}{a^2} - \frac{4}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2}{2}$.

Do đó $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{5}}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{5}}{30}$. **Chọn A**

➢ **Nhận xét**

Nếu đáy ABC là tam giác đều cạnh a thì ta có thể tính V như sau:



Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Bài ra $d\left(A;(SBC)\right) = \frac{2a}{3}$.

Mà $d\left(A;(SBC)\right) = 2d\left(H;(SBC)\right) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = \frac{a}{3}$.

Kẻ $BK \perp BC$ $(K \in BC)$, $HP \perp SK$ $(P \in SK)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HP.$

Như vậy $\begin{cases} HP \perp BC \\ HP \perp SK \end{cases} \Rightarrow HP \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HP \Rightarrow HP = \dfrac{a}{3}.$

Lại có $\sin 60^0 = \dfrac{HK}{HB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}HB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$

Mà ΔSHK vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{HP^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{11}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{33}}{11}.$

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 \sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

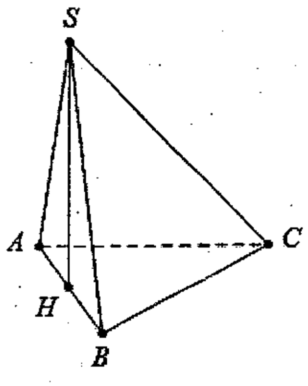
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{33}}{11}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{44}.$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tam giác SAC vuông và cạnh $SC = 4a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}.$ **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}.$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}.$ **D.** $V = 2a^3.$

Lời giải

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có



$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$

Lại có ΔABC và ΔSAB đều $\Rightarrow SA = AC.$

Bài ra ΔSAC vuông nên ΔSAC chỉ có thể vuông tại A

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = \dfrac{SC}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}.$

Khi đó $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2} = a\sqrt{6}.$

Tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 \sin 60^0 = \dfrac{1}{2}.8a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3}.$

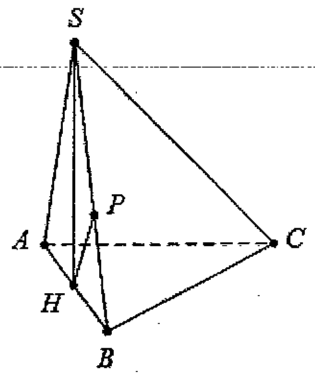
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{6}.2a^2\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{2}.$ **Chọn B**

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Diện tích tam giác SBC bằng $4a^2$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Như vậy $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB.$

Bài ra ΔABC vuông cân tại B và ΔSAB đều

$\Rightarrow SA=SB=AB=BC\Rightarrow SB=BC.$

Mà $BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ vuông cân tại $B\Rightarrow S_{SBC}=\dfrac{1}{2}BC^2.$

Bài ra $S_{SBC}=4a^2\Rightarrow\dfrac{1}{2}BC^2=4a^2\Rightarrow BC=2a\sqrt{2}.$

Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2}=a\sqrt{6}.$

Tam giác ABC vuông cân tại $B\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{1}{2}.8a^2=4a^2.$

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{6}.4a^2=\dfrac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C**

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh C của tam giác ABC bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{33}}{15}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

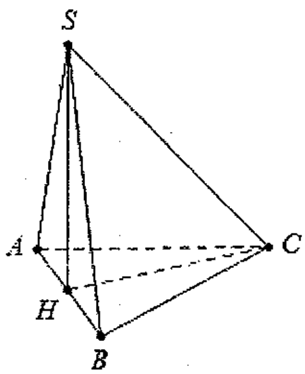
Lời giải

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Mà ΔSAB đều $\Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh AB.

Bài ra ta có $CH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Theo công thức tính đường trung tuyến thì



$$CH^2 = \frac{2\left(CA^2 + CB^2\right) - AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2}{4} = \frac{2\left(2a^2 + a^2\right) - AB^2}{4} \Rightarrow AB = a.$$

Như vậy $AB = BC = a,\ AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại $\Rightarrow B \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn D**

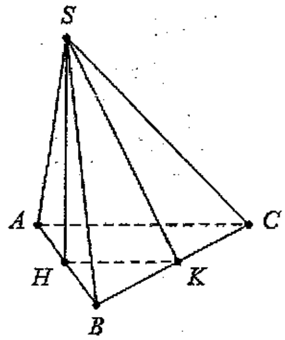
Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{27}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{16}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$



Tam giác SAB vuông tại S

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 \\ \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2a \\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Kẻ $HK \perp BC$ $(K \in BC)$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK.$$

Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp SK,\ BC \perp HK \\ SK \subset (SBC),\ HK \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow \left((SBC);(ABC)\right) = \widehat{SKH} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SH}{HK} = \sqrt{3}$ mà $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{2}$.

Từ $\begin{cases} HK \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK // AC \Rightarrow \dfrac{HK}{AC} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow AC = \dfrac{HK.AB}{BH}$.

Mà ΔSAB vuông tại $S \Rightarrow SB^2 = BH.BA \Rightarrow BH = \dfrac{SB^2}{AB} = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2}$

$$\Rightarrow AC = \dfrac{\dfrac{a}{2}.2a}{\dfrac{3a}{2}} = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = 4a^2 - \dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{32a^2}{9} \Rightarrow BC = \dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}AC.BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}.\dfrac{2a}{3}.\dfrac{4a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{27}$. **Chọn A**

➤ **Nhận xét**

Nếu thay ΔABC vuông tại C thành ΔABC vuông tại A thì ta có thể tính V như sau:

Như trên, ta tính được $AB = 2a,\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ HK = \dfrac{a}{2},\ BH = \dfrac{3a}{2}$.

Mà ΔBHK vuông tại $K \Rightarrow BK^2 = BH^2 - HK^2 = \dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow BK = a\sqrt{2}$.

Ta có $\Delta BKH \sim \Delta BAC$ $(g-g) \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BA} \Rightarrow BC = \dfrac{BH.BA}{BK} = \dfrac{\dfrac{3a}{2}.2a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Mà ΔABC vuông tại $A \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = \dfrac{9a^2}{2} - 4a^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow AC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

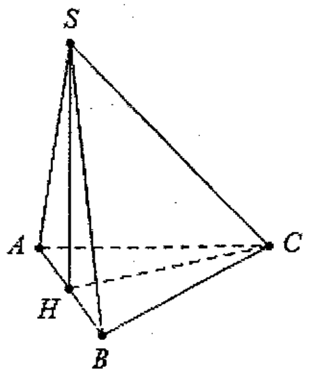
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}.2a.\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, cạnh $SA = a\sqrt{2}$, $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Tam giác SAB vuông tại S

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = SA^2 + SB^2 = 2a^2 + 4a^2 \\ \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{4a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = a\sqrt{6} \\ SH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ta có $\widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCH} \Rightarrow \widehat{SCH} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại $H \Rightarrow HC = HS = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác SAB vuông tại S

$$\Rightarrow SB^2 = BH.BA \Rightarrow BH = \frac{SB^2}{AB} = \frac{4a^2}{a\sqrt{6}} = \frac{4a}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3BH = 2BA \Rightarrow 3\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{BA} \Rightarrow 3\left(\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CB}\right) = 2\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow 9CH^2 = 4CA^2 + CB^2 + 4\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$$

Mà $CA \perp CB \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow 4CA^2 + CB^2 = 9CH^2 = 9.\dfrac{4a^2}{3} = 12a^2$.

Tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow CA^2 + CB^2 = AB^2 = 6a^2$.

Như vậy $\begin{cases} CA^2 + CB^2 = 6a^2 \\ 4CA^2 + CB^2 = 12a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3CA^2 = 6a^2 \\ CB^2 = 6a^2 - CA^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CA = a\sqrt{2} \\ CB = 2a \end{cases}$

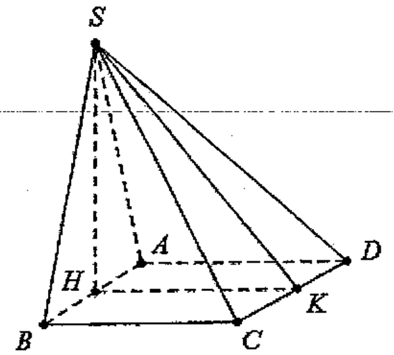
Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{2}CA.CB = \dfrac{a}{3\sqrt{3}}.a\sqrt{2}.2a = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{9}$. **Chọn B**

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD).$$

Kẻ $HK\perp CD$ $(K\in CD)$, ta có

$$\begin{cases}CD\perp HK\\CD\perp SH\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow CD\perp SK.$$

Như vậy $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\CD\perp SK,\ CD\perp HK\\SK\subset(SCD),\ HK\subset(ABCD)\end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SCD);(ABCD))}=\widehat{SKH}\Rightarrow\widehat{SKH}=60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0=\dfrac{SH}{HK}=\sqrt{3}$ mà $HK=AD=a\Rightarrow SH=a\sqrt{3}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D**

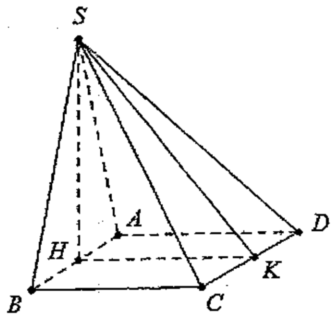
Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, cạnh $SA=2a$, $SB=2a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3}{\sqrt{3}}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\dfrac{4a^3}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp AB$ tại H, ta có

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB),\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD).$$



Kẻ $HK \perp CD$ $(K \in CD)$, ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK.$$

Như vậy $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ CD \perp SK,\ CD \perp HK \\ SK \subset (SCD),\ HK \subset (ABCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SKH} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^0 \Rightarrow \tan 60^0 = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow HK = \frac{SH}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SAB vuông tại S

$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{12a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SH = a\sqrt{3} \Rightarrow HK = a \Rightarrow AD = HK = a.$$

Tam giác SAB vuông tại $S \Rightarrow AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2 + 12a^2 \Rightarrow AB = 4a.$

Do đó $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.AB.AD = \frac{a}{\sqrt{3}}.4a.a = \frac{4a^3}{\sqrt{3}}$. **Chọn D**

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và diện tích tam giác SAB bằng $3a^2$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 6a^3$. **B.** $V = 12a^2$.
C. $V = 2a^3\sqrt{6}$. **D.** $V = 4a^2$.

Lời giải

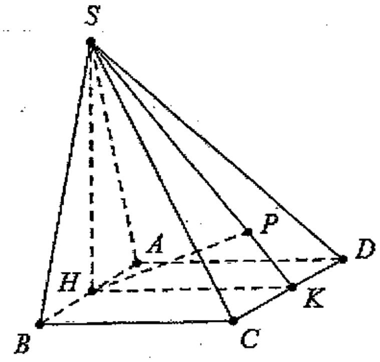
Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

Đặt $SH = x > 0,\ AB = y > 0 \Rightarrow S_{SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}xy.$

Bài ra $S_{SAB} = 3a^2 \Rightarrow xy = 6a^2$ (1)

Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

$$\Rightarrow d(A;(SCD)) = d(H;(SCD)) \Rightarrow d(H;(SCD)) = a\sqrt{3}.$$



Kẻ $HK \perp CD\ (K \in CD)$, $HP \perp SK\ (P \in SK)$, ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HP.$$

Như vậy $\begin{cases} HP \perp CD \\ HP \perp SK \end{cases} \Rightarrow HP \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(H;(SCD)) = HP \Rightarrow HP = a\sqrt{3}.$

Tam giác SHK vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HP^2} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{3a^2}$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3a^2}.(6a^2)^2 = 12a^2 = 2xy \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y.$

Thế vào (1) $\Rightarrow x = y = a\sqrt{6} \Rightarrow SH = AB = a\sqrt{6}$

Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{6}.6a^2 = 2a^3\sqrt{6}$. **Chọn C**

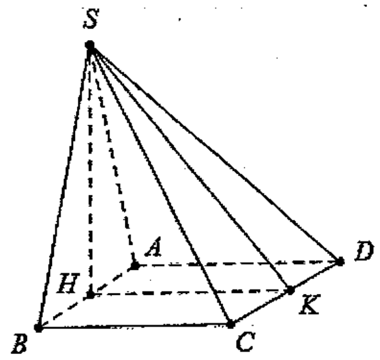
Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh $SA = SB = \dfrac{a\sqrt{78}}{2}$. Diện tích tam giác SCD bằng $6a^2$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V = 6a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Đặt $AB = BC = CD = DA = 2x > 0$.

Kẻ $SH \perp AB$ tại H, ta có



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Bài ra $SA = SB \Rightarrow \Delta SAB$ cân tại $S \Rightarrow HA = HB = x$

$\Rightarrow SH^2 = SA^2 - HA^2 = \dfrac{39a^2}{2} - x^2.$

Kẻ $SK \perp CD$ tại K, ta có $\begin{cases} CD \perp SK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HK$

$\Rightarrow HK = AD = 2x \Rightarrow SK^2 = SH^2 + HK^2 = \dfrac{39a^2}{2} - x^2 + 4x^2$

$\Rightarrow SK=\sqrt{3x^2+\dfrac{39a^2}{2}}\Rightarrow S_{SCD}=\dfrac{1}{2}CD.SK=\dfrac{1}{2}.2x\sqrt{3x^2+\dfrac{39a^2}{2}}=x\sqrt{3x^2+\dfrac{39a^2}{2}}.$

Bài ra $S_{SCD}=6a^2\Rightarrow x\sqrt{3x^2+\dfrac{39a^2}{2}}=6a^2\Rightarrow x^2\left(3x^2+\dfrac{39a^2}{2}\right)=36a^4$

$\Rightarrow 3\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]^2+\dfrac{39}{2}\left(\dfrac{x}{a}\right)^2=36\Rightarrow\left(\dfrac{x}{a}\right)^2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$\Rightarrow AB=2x=a\sqrt{6}$ và $SH^2=\dfrac{39a^2}{2}-x^2=\dfrac{39a^2}{2}-\dfrac{3a^2}{2}\Rightarrow SH=3a\sqrt{2}.$

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.3a\sqrt{2}.6a^2=6a^3\sqrt{2}$. **Chọn B**

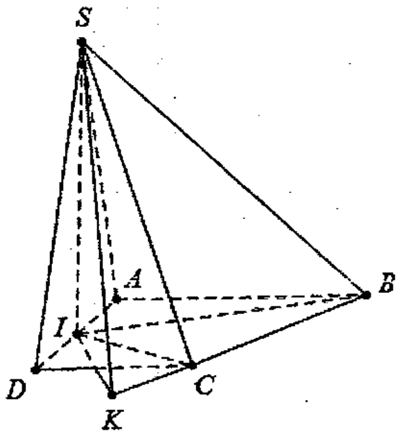
Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB=3a$, $AD=CD=a$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{45}$. **B.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{45}$. **C.** $V=\dfrac{4a^3}{\sqrt{15}}$. **D.** $V=\dfrac{8a^3}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Kẻ $SI\perp AD$ tại I, ta có

$$\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\SI\subset(SAD),\ SI\perp AD\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD).$$



Mà ΔSAD cân tại $S\Rightarrow IA=ID=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Kẻ $IK\perp BC$ tại K, ta có

$$\begin{cases}BC\perp IK\\BC\perp SI\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SIK)\Rightarrow BC\perp SK.$$

Như vậy $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\BC\perp SK,\ BC\perp IK\\SK\subset(SBC),\ IK\subset(ABCD)\end{cases}$

$\Rightarrow\overline{((SBC);(ABCD))}=\widehat{SKI}\Rightarrow\widehat{SKI}=60^0\Rightarrow\tan 60^0=\dfrac{SI}{IK}=\sqrt{3}\Rightarrow SI=IK\sqrt{3}.$

Ta có $S_{IBC}=\frac{1}{2}IK.BC=S_{ABCD}-S_{IAB}-S_{ICD}=\frac{1}{2}a\left(a+3a\right)-\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.3a-\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a=a^2\Rightarrow IK=\frac{2a^2}{BC}$.

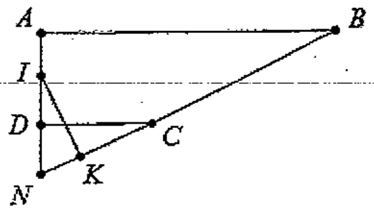
Mà $BC^2=AD^2+\left(AB-CD\right)^2=a^2+\left(3a-a\right)^2\Rightarrow BC=a\sqrt{5}\Rightarrow IK=\frac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow SI=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Do đó $V=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\frac{1}{2}a\left(a+3a\right)=\frac{4a^3}{\sqrt{15}}$. **Chọn C**

➢ **Nhận xét**

Để tính cạnh IK, ta còn cách khác như sau:

Gọi $N=AD\cap BC$, ta có



$$\Delta NKI\sim\Delta NAB\ \left(g-g\right)\Rightarrow\frac{IK}{BA}=\frac{NI}{NB}\qquad(1)$$

Lại có $\frac{ND}{NA}=\frac{NC}{NB}=\frac{CD}{AB}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow NA=3ND$ mà $IA=ID\Rightarrow IN=AD=a$.

Theo trên thì $BC=a\sqrt{5}\Rightarrow NB=\frac{3}{2}BC=\frac{3a\sqrt{5}}{2}$, thế vào (1) $\Rightarrow IK=\frac{3a.a}{\frac{3a\sqrt{5}}{2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Khó hơn một chút, ta thay giả thiết góc giữa mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0 thành giả thiết khoảng cách từ trung điểm của SD đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

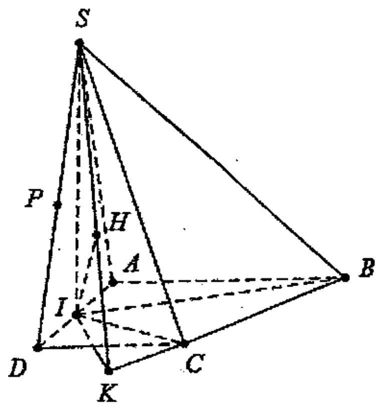
Khi đó ta sẽ tính V như sau:

Gọi P là trung điểm của cạnh SD

$\Rightarrow d\left(D;\left(SBC\right)\right)=2d\left(P;\left(SBC\right)\right)=2.\frac{a\sqrt{15}}{20}=\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

Theo trên, ta có ngay $IN=2DN$

$\Rightarrow d\left(I;\left(SBC\right)\right)=2d\left(D;\left(SBC\right)\right)=2.\frac{a\sqrt{15}}{10}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.



Kẻ $IH\perp SK$ tại H.

Theo trên thì $BK\perp\left(SIK\right)\Rightarrow BK\perp IH$.

Như vậy $\begin{cases}IH\perp BK\\IH\perp SK\end{cases}\Rightarrow IH\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow d\left(I;\left(SBC\right)\right)=IH\Rightarrow IH=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Theo trên thì $IK=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow\dfrac{1}{SI^2}=\dfrac{1}{IH^2}-\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{25}{15a^2}-\dfrac{5}{4a^2}=\dfrac{5}{12a^2}\Rightarrow SI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\dfrac{1}{2}a\left(a+3a\right)=\dfrac{4a^3}{\sqrt{15}}$.

III. [TT6022] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [509194] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=4a$ và $BC=3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Góc giữa mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}a^3$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{12\sqrt{3}}{5}a^3$.

Câu 2: [509195] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $9a^3\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $9a^3$ **D.** $\dfrac{9a^3}{2}$

Câu 3: [509196] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $9a^3\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $9a^3$ **D.** $\dfrac{9a^3}{2}$

Câu 4: [509198] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $18a^3\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{2}$ **C.** $9a^3\sqrt{3}$ **D.** $18a^3\sqrt{15}$

Câu 5: [509199] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=2a$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và $SA=a$, $SB=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $AD=3a$.

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{9a^3\sqrt{15}}{2}$ **C.** $2a^3\sqrt{3}$ **D.** $18a^3\sqrt{15}$

Câu 6: [509200] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=2a$. Tam giác SBD nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và $SB=2a\sqrt{7}$, $SD=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng 30^0.

A. $\dfrac{4a^3\sqrt{11}}{3}$ **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{11}}{9}$ **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{11}}{3}$ **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{11}}{9}$

Câu 7: [509201] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, với cạnh $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SBD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng 30^0.

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Câu 8: [509203] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và $SB = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Câu 9: [509204] Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cạnh $SA = AB = a,\ AC = 2a$ và $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3}{4}$

Câu 10: [509206] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{4a^3}{3}$. Tính độ dài cạnh SC.

A. $3a$ **B.** $a\sqrt{6}$ **C.** $2a$ **D.** Đáp số khác

Câu 11: [509208] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh góc vuông bằng a. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy. Diện tích tam giác SAB bằng $\dfrac{1}{2}a^2$. Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ bằng ?

A. a **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

Câu 12: [509209] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Diện tích của tam giác SAB bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng ?

A. Đáp án khác **B.** $36\sqrt{3}$ **C.** $81\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

Câu 13: [509211] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = 3a$ và $BC = 5a$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a,\ \widehat{SAC} = 30^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng ?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $2a^3\sqrt{3}$ **C.** $a^3\sqrt{3}$ **D.** Đáp án khác

Câu 14: [509213] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = 3a$ và $BC = 5a$. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$, và $\widehat{SAC} = 30^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng ?

A. $2a^3\sqrt{3}$ **B.** $a^3\sqrt{3}$ **C.** Đáp án khác **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 15: [509214] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ **B.** $\sqrt{3}a^3$ **C.** $4\sqrt{3}a^3$ **D.** $3\sqrt{3}a^3$

Câu 16: [509216] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, với cạnh $AB = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng ?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 17: [509217] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông goc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng ?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3}{24}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Câu 18: [509219] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng ?

A. $\dfrac{4a^3}{15}$ **B.** $\dfrac{4\sqrt{15}a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a^3}{3}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. D	**2. B**	**3. D**	**4. B**	**5. A**	**6. A**	**7. D**	**8. D**	**9. D**	**10. B**
11. B	**12. B**	**13. D**	**14. A**	**15. A**	**16. C**	**17. C**	**18. C**		

Chủ đề 11
[TV6023] THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – Phần 3
(Thể tích khối chóp đều)

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Lý thuyết: Khối chóp đều là khối chóp có đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau.

1. Khối chóp tam giác đều.

Khối chóp tam giác đều là khối chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Nếu cho khối chóp đều $S.ABC$ thì ta có

- Tam giác ABC là tam giác đều và các cạnh bên $SA = SB = SC$.
- Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với trọng tâm G (cũng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp , nội tiếp) của tam giác đều ABC tức là $SG \perp (ABC)$.
- Các cạnh bên bằng nhau và đều tạo với đáy một góc bằng nhau.
- Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau và các mặt phẳng bên đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

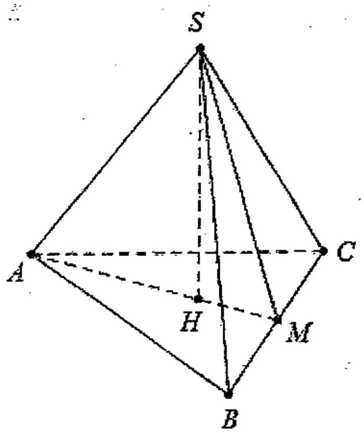
Chú ý: Phân biệt khối chóp đều với tứ diện đều

Tứ diện đều là tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau

Như vậy khối tứ diện đều là một trường hợp đặc biệt của khối chóp tam giác đều.

Khối tứ diện đều là khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy.

Với bài toán về thể tích khối chóp tam giác đều ta cần nhớ.



Diện tích tam giác đều cạnh a bằng $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Độ dài đường trung tuyến $AM = AB\sin\widehat{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $R = HA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

2. Khối chóp tứ giác đều.

Khối chóp tứ giác đều là khối chóp có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau.

Nếu cho khối chóp đều $S.ABCD$ thì ta có

- Tam giác $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên $SA = SB = SC = SD$.
- Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với tâm O của hình vuông $ABCD$ tức là $SO \perp (ABCD)$
- Các cạnh bên bằng nhau và đều tạo với đáy một góc bằng nhau.
- Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau và các mặt phẳng bên đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

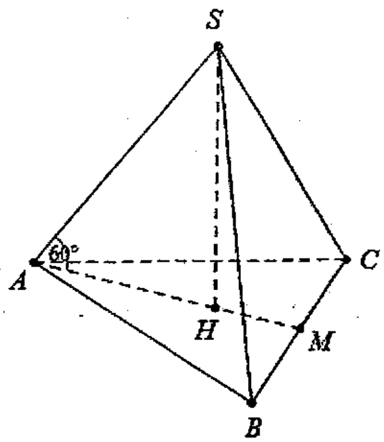
II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Các bài toán cơ bản

Ví dụ 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp đều đã cho là.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $AH = \frac{2}{3}AM \Rightarrow \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $\widehat{SAH} = 60^0 \Rightarrow SH = HA\tan 60^0 = a$

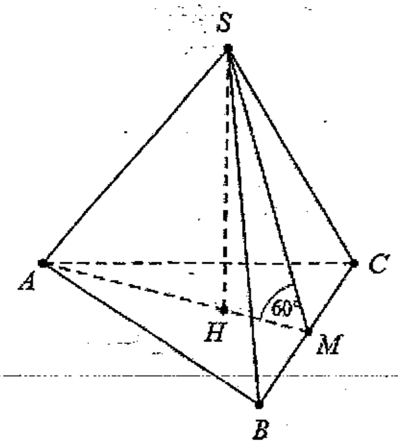
Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn C.**

Tổng quát: Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và cạnh bên tạo với đáy một góc α có thể tích là: $V = \frac{a^3\tan\alpha}{12}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp đều đã cho là.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $HM = \dfrac{1}{3}AM \Rightarrow \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Do đó $\widehat{SMH} = \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = 60^0$

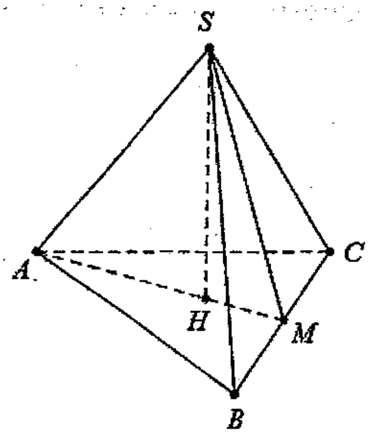
Suy ra $SH = HM \tan 60^0 = \dfrac{a}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.**Chọn D.**

> ***Tổng quát:*** Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và mặt bên tạo với đáy một góc α có thể tích là: $V = \dfrac{a^3 \tan\alpha}{24}$

> **Ví dụ 3:** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng b (với $3b^2 > a^2$) . Thể tích khối chóp đều đã cho là.
>
> **A.** $\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $AH = \dfrac{2}{3}AM \Rightarrow \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$.

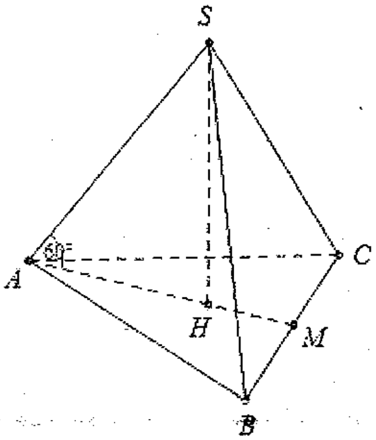
Chọn D.

> ***Tổng quát:*** Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và có cạnh bên bằng b có thể tích là: $V = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp đều đã cho là.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ **C.** $\frac{3a^3}{32}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$

Đặt $AB = BC = CA = x$

Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $AH = \frac{2}{3}AM \Rightarrow \frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Lại có $\widehat{SAH} = 60^0 \Rightarrow SA\cos 60^0 = AH \Rightarrow SA = \frac{2x}{\sqrt{3}} = a$

Do đó $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH = SA\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{32}$$ **.Chọn C.**

Tổng quát: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và tạo với đáy một góc α có thể tích là: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3.\sin\alpha\cos^2\alpha$

Ví dụ 5. Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao h. Khi đó thể tích V của khối chóp đã cho bằng.

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)h$ **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - h^2)h$

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 - h^2)b$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}}{8}(b^2 - h^2)h$

Lời giải:

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH \perp (ABC)$

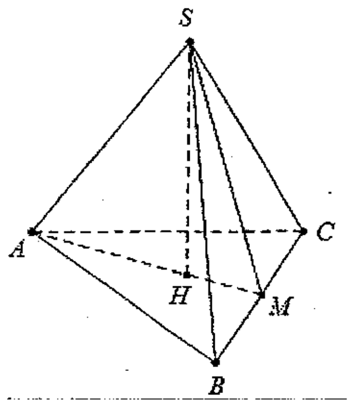
Gọi M là trung điểm của BC ta có $SH = h; SA = b$

Khi đó $AH=\sqrt{b^2-h^2}\Rightarrow AM=\frac{3}{2}AH=\frac{3}{2}\sqrt{b^2-h^2}$

Lại có $BM=AM\tan\widehat{BAM}=\frac{3}{2}\sqrt{b^2-h^2}.\tan 30^0$

Suy ra $S_{ABC}=AM.BM=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)$

Khi đó $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right).h$. **Chọn A.**



Ví dụ 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc α. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a và α.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\alpha$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\tan\alpha$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\tan\alpha$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}\tan\alpha$

Lời giải:

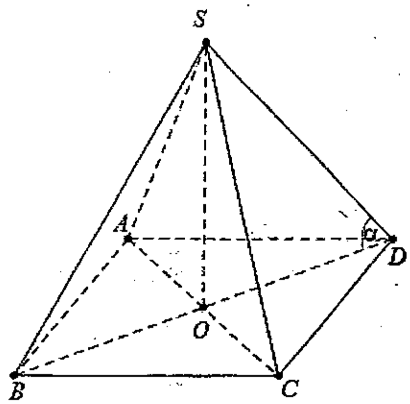
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó $SO\perp(ABCD)$ suy ra $\widehat{SDO}=\widehat{(SD;(ABCD))}=\alpha$.

Lại có $BD=a\sqrt{2}\Rightarrow OD=\frac{BD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $SO=OD\tan\alpha=\frac{a\sqrt{2}\tan\alpha}{2}$

Khi đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\alpha$.

Chọn A.

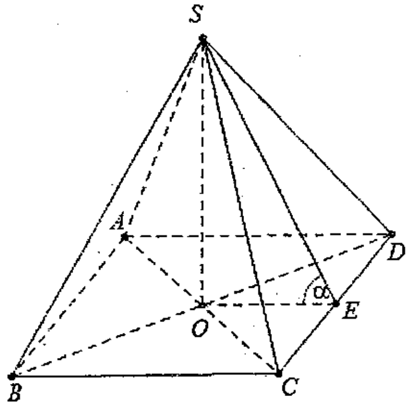


Ví dụ 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc α. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a và α.

A. $V=\frac{a^3}{2}\tan\alpha$ **B.** $V=\frac{a^3}{3}\tan\alpha$ **C.** $V=\frac{a^3}{4}\tan\alpha$ **D.** $V=\frac{a^3}{6}\tan\alpha$

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó $SO \perp (ABCD)$. Dựng $OE \perp CD$, lại có $CD \perp SO$



Suy ra $CD \perp (SEO)$. Khi đó ta có:

$\widehat{((SCD)(ABCD))} = \widehat{SEO} = \alpha$

Mặt khác $OE = \frac{BC}{2}$ (đường trùng bình trong tam giác) nên $OE = \frac{a}{2} \Rightarrow SO = OE\tan\alpha = \frac{a\tan\alpha}{2}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\tan\alpha}{6}$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Kim tự tháp Kê-ốp do ông vua Kê-ốp của nước Ai Cập chủ trì việc xây dựng. Đây là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập . Tháp này được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước công nguyên. Tháp có hình dạng của một khối chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh $a = 230m$. Người ta đo được rằng các mặt bên của tháp tạo với mặt đất một góc xấp xĩ $51,9^0$. Các lối đi và phòng bên trong của kim tự tháp chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, mỗi xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3\ kg/m^3$. Số lần vận chuyển đá cho việc xây dựng kim tự tháp là

A. $n = 754306$ chuyến **B.** $n = 75402$ chuyến

C. $n = 75430600$ chuyến **D.** $n = 75431$ chuyến.

Lời giải:

Áp dụng công thức bài trên ta có : $V = \frac{a^3\tan\alpha}{6} = \frac{230^3.\tan 51,9^0}{6} \approx 2586192\,(m^3)$.

Thể tích đá cần dùng là $V' = \frac{70}{100}V = 1810334\,(m^3) \Rightarrow$ số kg đá cần dùng là

$m = V'.d = 4525846.10^3\,(kg) \Rightarrow$ số lần vận chuyển là $n = \frac{4525846.10^3}{6.10^3.10} = 75431$ chuyến

Chọn D.

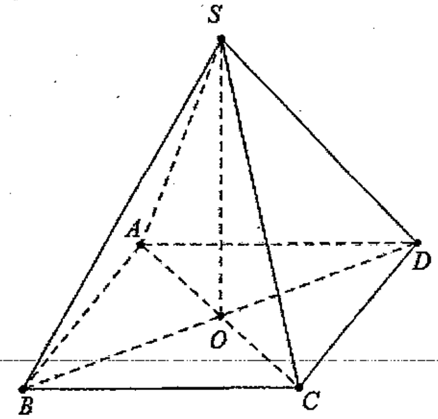
Ví dụ 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng b. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a và b.

A. $V = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{3}$ **B.** $V = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - a^2}}{3}$

C. $V = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$ **D.** $V = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - a^2}}{6}$

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó $SO \perp (ABCD)$.



Lại có $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.a^2 = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$

Chọn C.

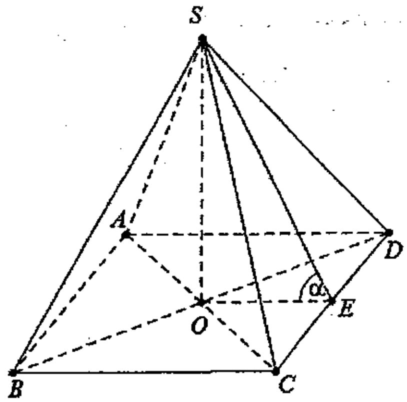
Ví dụ 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc α. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a và α.

A. $V = \frac{1}{3}.\frac{8a^3 \tan\alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2\alpha)^3}}$ **B.** $V = \frac{1}{3}.\frac{4a^3 \tan\alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2\alpha)^3}}$

C. $V = \frac{1}{3}.\frac{2a^3 \tan\alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2\alpha)^3}}$ **D.** $V = \frac{1}{3}.\frac{4a^3 \tan\alpha}{\sqrt{(3 + \tan^2\alpha)^3}}$

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó $SO \perp (ABCD)$. Dựng $OE \perp CD$, lại có $CD \perp SO$



Suy ra $CD \perp (SEO)$. Đặt $AB = BC = x$

Khi đó ta có: $\widehat{((SCD)(ABCD))} = \widehat{SEO} = \alpha$

Mặt khác $OE = \frac{BC}{2}$ (đường trùng bình trong tam giác) nên $OE = \frac{x}{2} \Rightarrow SO = OE\tan\alpha = \frac{x\tan\alpha}{2}$.

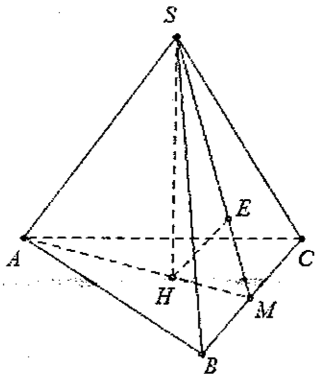
Khi đó $SD^2 = OD^2 + SO^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2\tan^2\alpha}{4}$.

Suy ra $x^2 = \frac{4a^2}{2 + \tan^2\alpha} \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{2 + \tan^2\alpha}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}SO.x^2 = \frac{1}{3}.\frac{4a^3\tan\alpha}{\sqrt{(2 + \tan^2\alpha)^3}}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $d=\frac{3a}{4}$. Thể tích khối chóp đã cho là.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $SH\perp(ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2};HM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Lại có: $AM=3HM$ nên $d(A;(SBC))=3d(H;(SBC))$.

Dựng $HE\perp SM$ lại có $\begin{cases}BC\perp SH\\BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp HE$

Suy ra $d_A=3d_H=3HE=\frac{3a}{4}\Rightarrow HE=\frac{a}{4}$

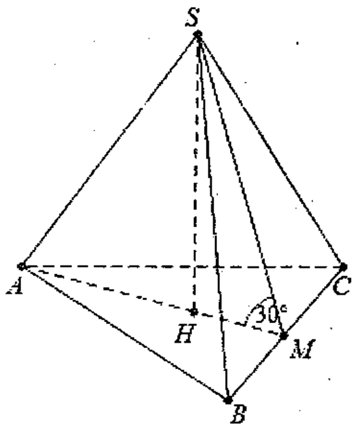
Mặt khác $\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HM^2}\Rightarrow SH=\frac{HE.HM}{\sqrt{HM^2-HE^2}}=\frac{a}{2}$

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Biết mặt bên đều tạo với đáy góc một góc 30^0 và các cạnh bên bằng nhau và bằng $\sqrt{13}$. Thể tích V của khối chóp đã cho là.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SH\perp(ABC)$.

Đặt $AB=x\Rightarrow AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HM=\frac{1}{3}AM=\frac{x\sqrt{3}}{6}$

Gọi M là trung điểm của BC khi đó ta chứng minh được $BC\perp(SIA)\Rightarrow\widehat{SMH}=30^0$

Khi đó $SH=HI\tan 30^0=\frac{x}{6}$; $HA=\frac{x\sqrt{3}}{3}$

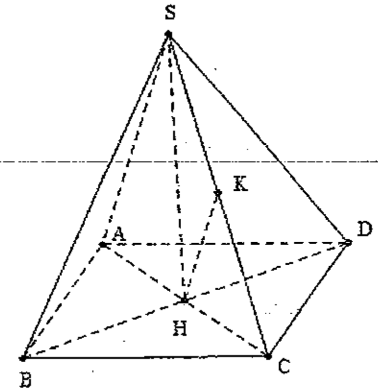
Ta có: $SA^2=HA^2+SH^2=\frac{13x^2}{36}=13\Rightarrow x=6$

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.1.\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$. Biết tam giác SAC vuông tại S và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và BD là h. Thể tích khối chóp đã cho tính theo h là.

A. $h^3\sqrt{2}$ **B.** $\frac{h^3\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{4h^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2h^3\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:



Gọi H là tâm của hình vuông suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Dựng $HK \perp SC$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SH \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp HK$

Do vậy HK là đường vuông góc chung của BD và SC suy ra $HK = h$. Đặt $AC = 2x = BD$. Do tam giác ASC vuông cân tại S nên ta có $SH = \frac{AC}{2} = x$.

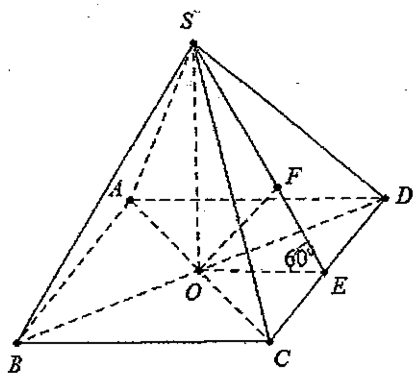
Lại có: $HK = \frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = h \Rightarrow x = h\sqrt{2}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x.\frac{AC^2}{2} = \frac{2x^3}{3} = \frac{4h^3\sqrt{2}}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết mặt phẳng bên tạo với mặt đáy một góc 60^0 và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $2(cm)$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là.

A. $V = \frac{8}{9}(cm^3)$ **B.** $V = \frac{16}{9}(cm^3)$ **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{9}(cm^3)$ **D.** $V = \frac{16\sqrt{3}}{9}(cm^3)$

Lời giải:



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do $S.ABCD$ là khối chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

Dựng $OE \perp CD$, lại có $CD \perp SO$ nên $CD \perp (SEO)$

Do đó $\widehat{((SCD;(ABCD)))} = \widehat{SEO} = 60^0$

Mặt khác $AC = 2OC \Rightarrow d(A;(SCD)) = 2d(O;(SCD))$

Dựng $OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SCD)$

Khi đó $OF = d(O;(SCD)) = \frac{2}{2} = 1(cm)$

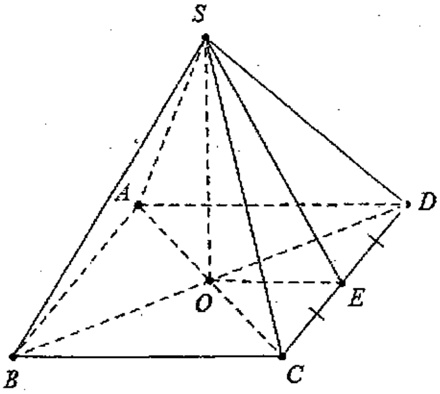
Ta có: $OE\sin 60^0 = OF \Rightarrow OE = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $SO = OE\tan 60^0 = 2$

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}.SO.S_{ABCD} = \frac{16}{9}(cm^3)$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng h, biết rằng các mặt bên của khối chóp là các tam giác đều. Thể tích V của khối chóp đã cho là.

A. $V=\dfrac{2h^3}{9}$ **B.** $V=\dfrac{2h^3\sqrt{2}}{3}$ **C.** $V=\dfrac{2h^3}{3}$ **D.** $V=\dfrac{2h^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Đặt $CD=2x$

Do $S.ABCD$ là khối chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$

Gọi E là trung điểm của CD. Do tam giác SCD đều nên $SE=\dfrac{CD\sqrt{3}}{2}=x\sqrt{3}$. Mặt khác $SO^2+OE^2=SE^2$

Do đó $SO=\sqrt{SE^2-OE^2}=x\sqrt{2}=h\Rightarrow x=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$

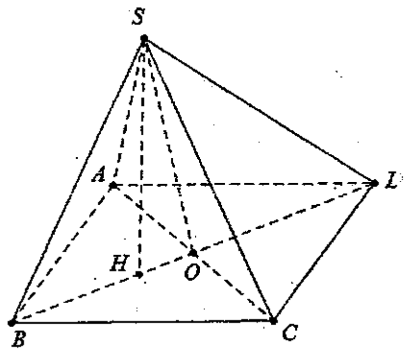
Suy ra $AB=CD=2x=h\sqrt{2}\Rightarrow V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}$

$=\dfrac{1}{3}h.2h^2=\dfrac{2h^3}{3}=V$. **Chọn C.**

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $SA=SB=SC=a$, biết rằng $\widehat{BAD}=120^0$. Thể tích khối chóp đã cho là.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:



Dễ thấy $\widehat{BAD}=120^0\Rightarrow\widehat{ABC}=60^0$ nên ΔABC là tam giác đều cạnh a. Gọi $O=AC\cap BD$.

Mặt khác $SA=SB=SC$ nên $S.ABC$ là khối chóp đều. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có: $OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2};HB=\dfrac{2}{3}OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi đó $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Mặt khác $S_{ABCD}=2S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **Chọn B.**

Nhận xét: Rõ ràng ở bài toán này $S.ABCD$ không phải khối chóp đều, tuy nhiên để có thể xác định được chân đường cao (yếu tố then chốt của bài toán này) chúng ta cần sử dụng tính chất của khối chóp đều $S.ABC$ từ đó xác định đường cao và giải quyết bài toán.

III. [TT6024] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [509621] Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: [509623] Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết cạnh bên bằng $2a$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

Câu 3: [509624] Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45^0.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 4: [509625] Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết mặt bên là tam giác vuông cân.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 5: [509626] Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết mặt bên là tam giác đều.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6: [509628] Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết mặt bên là tam giác đều.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{32}$.

Câu 7: [509629] Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a thì thể tích của nó là:

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: [509631] Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích hình chóp bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9: [509633] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc $\widehat{ASB} = 60^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 10: [509635] Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết cạnh bên bằng $2a$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 11: [509636] Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0

A. $\frac{3a^3}{6}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12: [509637] Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 45^0. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{9}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 13: [509638] Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh có độ dài bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 14: [509640] Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 15: [509641] Khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng 60^0. Tính diện tích xung quanh khối chóp.

A. $2a^2$. **B.** $\sqrt{3}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 16: [509643] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB=a$ và đường cao $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích toàn phần của hình chóp bằng:

A. $\frac{5a^2}{2}$. **B.** $3a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 17: [509645] Khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a, cạnh bênh bằng $2a$ có thể tích là:

A. $\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{6}$.

Câu 18: [509647] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}cm$ và đường cao $SO=1cm$. Gọi M,N lần lượt là chung điểm của AC,AB. Thể tích hình chóp $S.AMN$ tính bằng cm^3 bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: [509650] Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 20: [509651] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm của SH đến (SBC) bằng b. Thể tích của hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$. B. $\frac{a^3b}{3\sqrt{a^2-16b^2}}$. C. $\frac{2a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$. D. $\frac{2ab}{3}$.

Câu 21: [509653] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 22: [509656] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên đều bằng a. Nếu mặt chéo của nó là tam giác đều thì thể tích của chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 23: [509658] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\varphi$. B. $\frac{a^3}{6}\tan\varphi$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\cot\varphi$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

Câu 24: [509660] Cho hình chóp tam giác đều đáy có cạnh bằng a, góc tạo bởi các mặt bên và đáy là 60^0. Thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3}{8}$.

Câu 25: [509661] Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=2a, AB=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{11}}{4}$.

Câu 26: [509663] Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Diện tích toàn phần của hình chóp là:

A. $(1+\sqrt{2})a^2$. B. $(1+\sqrt{3})a^2$. C. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$. D. $(1+2\sqrt{3})a^2$.

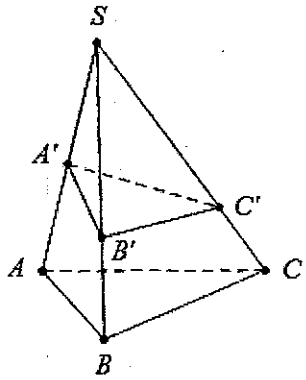
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. C	03. C	04. C	05. D	06. B	07. C	08. D	09. D	10. A
11. B	12. A	13. D	14. B	15. A	16. B	17. A	18. D	19. A	20. A
21. D	22. B	23. D	24. A	25. C	26. D				

Chủ đề 12
[TV6025] THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – Phần 4
(Tỉ số Thể tích)

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Kết quả cơ bản



Xét hình chóp $S.ABC$, trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'.

Khi đó ta có kết quả $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$.

2. Sai lầm cần lưu ý

Xét hình chóp $S.ABCD$, trên các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm A', B', C', D'.

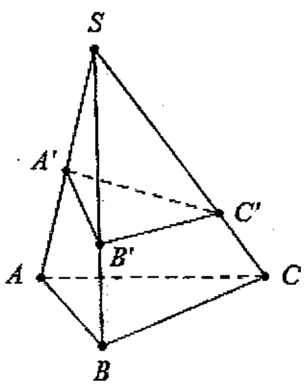
Khi đó ta **không có** kết quả $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$, trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = AA', SB' = 2BB', SC' = 3CC'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$ bằng ?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{1}{24}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$.

Từ $SA' = AA' \Rightarrow \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{1}{2}$; $SB' = 2BB' \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

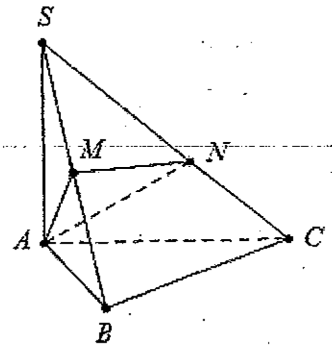
$SC' = 3CC' \Rightarrow \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{3}{4}$.

Do đó $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$. **Chọn D**

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{192}$. **B.** $V = \dfrac{7a^3}{64}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{192}$. **D.** $V = \dfrac{7a^3}{96}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}$ (1)

Cạnh $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

$\Rightarrow SM = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{3}{4}$.

Cạnh $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

$\Rightarrow SN = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{3}{4}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{9}{16}V_{S.ABC}$.

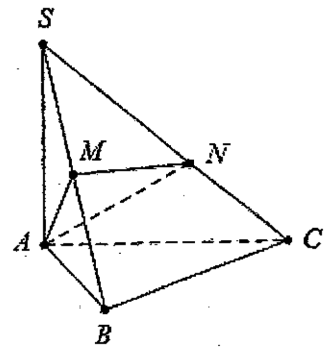
Lại có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}a^2\sin 60^0 = \dfrac{a^3}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{9a^3}{64}$.

Do đó $V_{A.BMNC.} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \dfrac{a^3}{4} - \dfrac{9a^3}{64} = \dfrac{7a^3}{64}$. **Chọn B**

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = a$, $BC = 3a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

A. $V = \dfrac{24a^3\sqrt{3}}{65}$. **B.** $V = \dfrac{28a^3\sqrt{3}}{65}$. **C.** $V = \dfrac{28a^3\sqrt{3}}{75}$. **D.** $V = \dfrac{24a^3\sqrt{3}}{65}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}$ (1)

Cạnh $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AC\sqrt{3} = 2a\sqrt{6}$.

Cạnh $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{24a^2 + a^2} = 5a$

$\Rightarrow SM = \frac{SA^2}{SB} = \frac{24a^2}{5a} = \frac{24a}{5} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{24}{25}$.

Cạnh $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{24a^2 + 8a^2} = 4a\sqrt{2} \Rightarrow SN = \frac{SA^2}{SC} = \frac{24a^2}{4a\sqrt{2}} = 3a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{3}{4}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{24}{25}.\frac{3}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{18}{25}V_{S.ABC}$.

Lại có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{6}.\frac{1}{2}a.2a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{24a^3\sqrt{3}}{25}$.

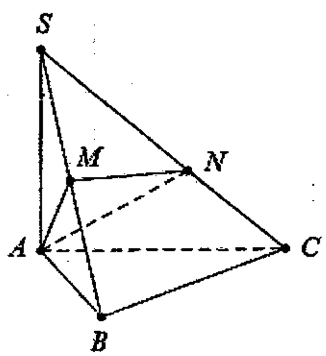
Do đó $V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3} - \frac{24a^3\sqrt{3}}{25} = \frac{28a^3\sqrt{3}}{75}$. **Chọn C**

Ví dụ 4. Xét hình chóp $S.ABC$ có cạnh $BC = 3a$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và cạnh $MN = \frac{9a\sqrt{2}}{5}$. Tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{A.BMNC}}$ bằng ?

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{15}{7}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{18}{7}$.

Lời giải

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$ (1)



Lại có $SA^2 = SM.SB$ và $SA^2 = SN.SC$

$\Rightarrow SM.SB = SN.SC \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SB}$

$\Rightarrow \Delta SMN \sim \Delta SCB\ (c-g-c) \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{CB}$.

Khi đó từ (1) $\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SB} = \frac{MN}{BC}.\frac{MN}{BC} = \frac{MN^2}{BC^2}$.

Bài ra $MN = \frac{9a\sqrt{2}}{5}$ và $BC = 3a \Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{18}{25} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{18}{25}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = V_{S.ABC} - \frac{18}{25}V_{S.ABC} = \frac{7}{25}V_{S.ABC} \Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{A.BMNC}} = \frac{18}{7}$. **Chọn D**

➢ **Nhận xét**

Nếu bổ sung thêm giả thiết ΔABC vuông tại A, cạnh $AB = a$ thì ta tính được trực tiếp $V_{S.AMN}$ và $V_{A.BMNC}$ như sau:

Cạnh $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Theo trên thì $\Delta SMN \sim \Delta SCB\ (c-g-c) \Rightarrow \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{MN}{CB} = \dfrac{\frac{9a\sqrt{2}}{5}}{3a} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ (2)

Đặt $SA = x > 0 \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Cạnh $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 8a^2} \Rightarrow SN = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 8a^2}}$.

Thế vào (2) $\Rightarrow \dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+8a^2}}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5} \Rightarrow 25x^4 = 18\left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + 8a^2\right)$

$\Rightarrow 25\left(\dfrac{x}{a}\right)^4 = 18\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + 1\right]\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + 8\right]$.

Đặt $t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 > 0 \Rightarrow 25t^2 = 18(t+1)(t+8) = 18\left(t^2 + 9t + 8\right) \Rightarrow t = 24$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = 24 \Rightarrow SA = x = 2a\sqrt{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.2a\sqrt{6}.\dfrac{1}{2}a.2a\sqrt{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Theo trên thì $V_{S.AMN} = \dfrac{18}{25}V_{S.ABC}$ và $V_{A.BMNC} = \dfrac{7}{25}V_{S.ABC}$.

Do đó $V_{S.AMN} = \dfrac{24a^3\sqrt{3}}{25}$ và $V_{A.BMNC} = \dfrac{28a^3\sqrt{3}}{75}$.

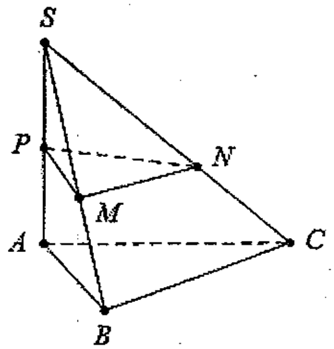
Rõ ràng việc phát hiện $\Delta SMN \sim \Delta SCB$ từ đó đưa ra tỉ số $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{MN}{CB}$ mang tính chất điểm nhấn của bài toán.

Ví dụ 5. Xét hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi P là trung điểm của cạnh SA, gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng SB và SC, cạnh $BC = 3MN$. Tỉ số $\dfrac{V_{S.PMN}}{V_{S.ABC}}$ bằng ?

A. $\dfrac{1}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Tỉ số $\dfrac{V_{S.PMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SP}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}$ (1)



Ta có $\Delta SMP\sim\Delta SAB$ $(g-g)$

$\Rightarrow\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SP}{SB}\Rightarrow SP.SA=SM.SB.$

Lại có $\Delta SNP\sim\Delta SAC$ $(g-g)$

$\Rightarrow\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SN}{SA}\Rightarrow SP.SA=SN.SC.$

Do đó $SM.SB=SN.SC\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SB}$

$\Rightarrow\Delta SMN\sim\Delta SCB$ $(c-g-c)\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{MN}{CB}=\dfrac{1}{3}.$

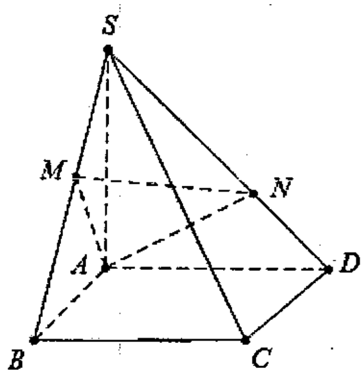
Khi đó từ (1) $\Rightarrow\dfrac{V_{S.PMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}.$ **Chọn A**

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{6}$. Cạnh $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SD. Tính theo a thể tích V của khối chóp $C.SMN$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}.$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}.$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}.$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.CBD}}=\dfrac{SC}{SC}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}$ (1)



Cạnh $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$

$\Rightarrow SM=\dfrac{SA^2}{SB}=\dfrac{3a^2}{2a}=\dfrac{3a}{2}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{3}{4}.$

Cạnh $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{3a^2+6a^2}=3a$

$\Rightarrow SN=\dfrac{SA^2}{SD}=\dfrac{3a^2}{3a}=a\Rightarrow\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{3}.$

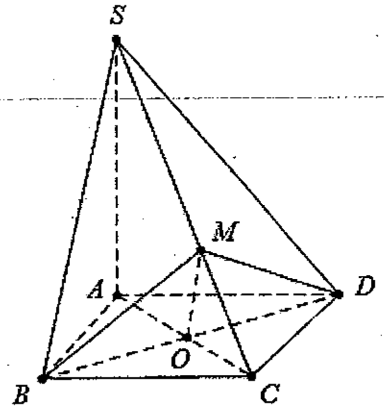
Thế vào (1) $\Rightarrow\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.CBD}}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.CMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.CBD}.$

Lại có $V_{S.CBD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{BCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{6}.=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow V_{S.CMN}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}.$ **Chọn C**

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Cạnh $SA = a\sqrt{5}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $M.SBD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{9}$. **B.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{5}}{27}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{5}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{7a^3\sqrt{5}}{27}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{V_{S.MBD}}{V_{S.CBD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SB}{SB}.\dfrac{SD}{SD} = \dfrac{SM}{SC}$ (1)

Lại có $\Delta CMO \sim \Delta CAS\ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CO}{CS} \Rightarrow CM = \dfrac{AC.OC}{SC}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Cạnh $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{5a^2 + 4a^2} = 3a$

$\Rightarrow CM = \dfrac{2a.a}{3a} = \dfrac{2a}{3}$

$\Rightarrow SM = SC - CM = 3a - \dfrac{2a}{3} = \dfrac{7a}{3} \Rightarrow \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{7}{9}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \dfrac{V_{S.MBD}}{V_{S.CBD}} = \dfrac{7}{9} \Rightarrow V_{S.MBD} = \dfrac{7}{9}V_{S.CBD}$.

Lại có $V_{S.CBD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{5}.\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow V_{S.MBD} = \dfrac{7a^3\sqrt{5}}{27}$. **Chọn D**

Ví dụ 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = 2a$, $SA = 3a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng SC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $H.SAB$.

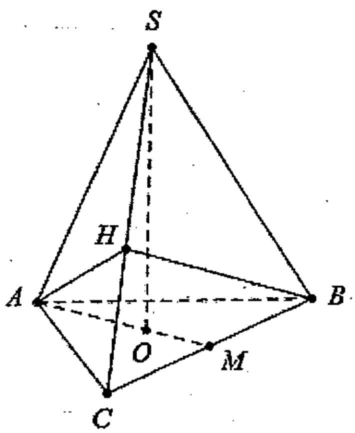
A. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{23}}{27}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{23}}{9}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{23}}{27}$. **D.** $V = \dfrac{7a^3\sqrt{23}}{27}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB}{SB}.\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{SH}{SC}$ (1)

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$

$\Rightarrow AB = BC = CA = 2a$ và $SA = SB = SC = 3a$.



Khi đó $\cos\widehat{BSC}=\dfrac{SB^2+SC^2-BC^2}{2SB.SC}$

$=\dfrac{9a^2+9a^2-4a^2}{2.3a.3a}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow\dfrac{SH}{SC}=\dfrac{7}{9}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow\dfrac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow V_{S.ABH}=\dfrac{7}{9}V_{S.ABC}$ (2)

Kẻ $SO\perp(ABC)$ tại O thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Gọi $M=AO\perp BC\Rightarrow AM\perp BC$ và $MB=MC=\dfrac{BC}{2}=a.$

Ta có $\sin 60^0=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AM=a\sqrt{3}\Rightarrow AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SO^2=SA^2-OA^2=9a^2-\dfrac{4a^2}{3}\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{69}}{3}.$

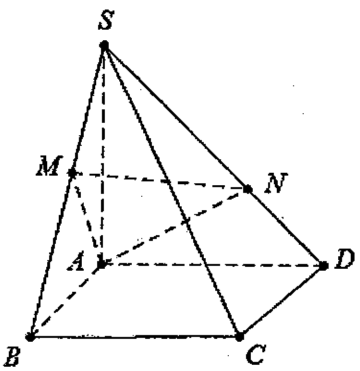
Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{69}}{3}.\dfrac{1}{2}.(2a)^2\sin 60^0=\dfrac{a^3\sqrt{23}}{3}.$

Thế vào (2) $\Rightarrow V_{S.ABH}=\dfrac{7a^3\sqrt{23}}{27}$. **Chọn D**

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{6}$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SD. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng tám lần thể tích khối chóp $C.SMN$. Tỉ số $\dfrac{SA}{a}$ bằng ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.CBD}}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\dfrac{SC}{SC}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{4}$ (1)

Đặt $SA=x>0\Rightarrow SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{x^2+a^2}$

$\Rightarrow SM=\dfrac{SA^2}{SB}=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{x^2}{x^2+a^2}.$

Cạnh $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{x^2+6a^2}$

$$\Rightarrow SN = \frac{SA^2}{SD} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6a^2}} \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{x^2}{x^2+6a^2}.$$

Thế vào (1) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+a^2}.\dfrac{x^2}{x^2+6a^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 4x^4 = \left(x^2+a^2\right)\left(x^2+6a^2\right)$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{x}{a}\right)^4 = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+6\right].$$

Đặt $t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 > 0 \Rightarrow 4t^2 = (t+1)(t+6) = t^2+7t+6 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \sqrt{3}$. **Chọn B**

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có

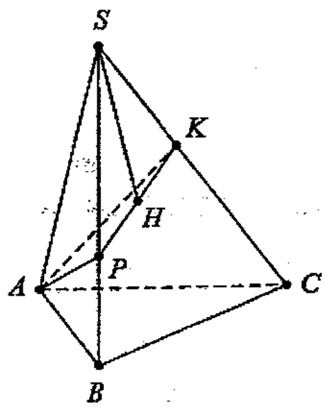
$SA = 1,\ SB = 2,\ SC = 3,\ \widehat{ASB} = 60^0,\ \widehat{ASC} = 90^0,\ \widehat{CSB} = 120^0.$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng ?

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Kí hiệu như hình vẽ với $SA = SP = SK = 1 \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc H hạ từ S xuống (APK) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAPK.



Ta có ngay $AP = 1,\ AK = \sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm của cạnh PK

$$\Rightarrow \sin 60^0 = \frac{HP}{SP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HP = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PK = 2HP = \sqrt{3}.$$

Như vậy $AP^2 + AK^2 = 1 + 2 = PK^2 \Rightarrow AP \perp AK$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta APK \Rightarrow SH \perp (APK)$.

Cạnh $SH = \sqrt{SP^2 - HP^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2}$

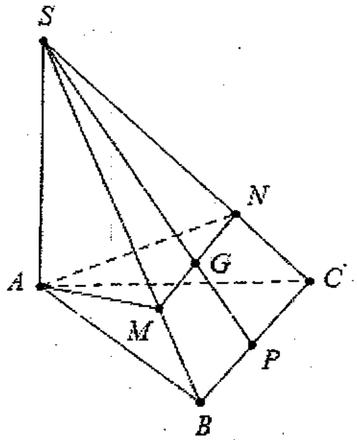
$$\Rightarrow V_{S.APK} = \frac{1}{3}SH.S_{APK} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AP.AK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ta có $\dfrac{V_{S.APK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SP}{SB}.\dfrac{SK}{SC} = 1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6V_{S.APK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B**

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, với $AC = a\sqrt{2}$. Cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, mặt phẳng (α) qua A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M và N. Tính theo a thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V = \frac{5a^3}{54}$. **B.** $V = \frac{5a^3}{27}$. **C.** $V = \frac{2a^3}{27}$. **D.** $V = \frac{a^3}{18}$.

Lời giải



Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$.

Bài ra có $MN // BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{GP} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{5}{9}V_{S.ABC}$.

Tam giác ABC vuông cân tại B, với $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$

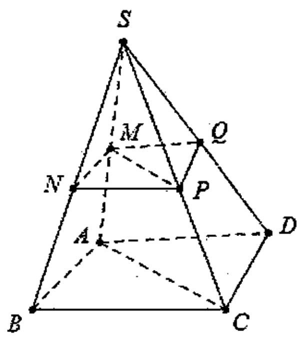
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{5}{9}V_{S.ABC} = \frac{5a^3}{54}$. **Chọn A**

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $SM = AM$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng đáy cắt SB, SC, SD lần lượt tại N, P, Q. Kí hiệu V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{16}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{24}$.

Lời giải

Ta có ngay N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD.



Tỉ số $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Tỉ số $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} + \frac{1}{8}V_{S.ACD} = \frac{1}{8}V_{SABCD}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{8}V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$. **Chọn B**

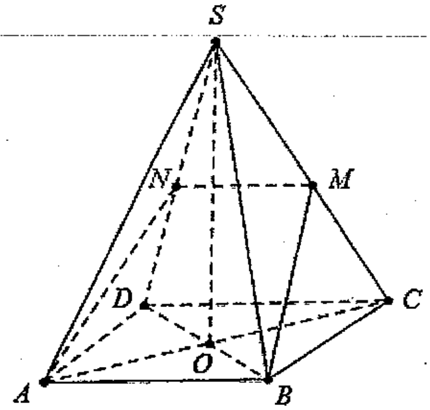
Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh $AB = 2a$, $BD = a\sqrt{6}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, cạnh $SO = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABMN$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{8}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$.

Lời giải

Ta có ngay $MN // AB \Rightarrow MN // CD$.

Mà $MS = MC \Rightarrow NS = ND$.



Tỉ số $\dfrac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB}{SB}.\dfrac{SN}{SD} = 1.1.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABD} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Tỉ số $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB}{SB}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = 1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.BMN} = \dfrac{1}{4}V_{S.BCD} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$

$$\Rightarrow OA^2 = AB^2 - OB^2 = 4a^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = 4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow AC = 2OA = a\sqrt{10} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3a.\frac{1}{2}AC.BD = a^3\sqrt{15}.$$

Do đó $V_{S.ABMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{8}$. **Chọn B**

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, I, K. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AHIK$.

A. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{35}$. **B.** $V = \dfrac{6a^3\sqrt{3}}{35}$. **C.** $V = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{35}$. **D.** $V = \dfrac{12a^3\sqrt{3}}{35}$.

Lời giải

Ta có $SC \perp (AHIK) \Rightarrow SC \perp AI,\ SC \perp AH \Rightarrow AH \perp SC$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp BC$.

Như vậy $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$, tương tự thì $AK \perp SD$.

Cạnh $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

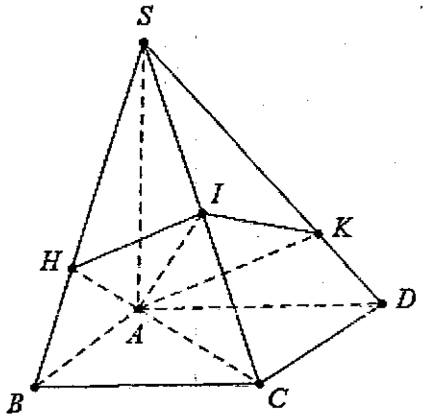
$\Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{4}{5}$.

Cạnh $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}$

$\Rightarrow SK = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{7}} = \dfrac{4a}{\sqrt{7}} \Rightarrow \dfrac{SK}{SD} = \dfrac{4}{7}$.

Cạnh $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Mà $SA = 2a \Rightarrow SA = AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A



$\Rightarrow I$ là trung điểm của cạnh $SC \Rightarrow \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Tỉ số $\dfrac{V_{S.AHI}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SI}{SC} = 1.\dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.AHI} = \dfrac{2}{5}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{5}V_{S.ABCD}$.

Tỉ số $\dfrac{V_{S.AIK}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SI}{SC}.\dfrac{SK}{SD} = 1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{7} \Rightarrow V_{S.AIK} = \dfrac{2}{7}V_{S.ACD} = \dfrac{1}{7}V_{S.ABCD}$

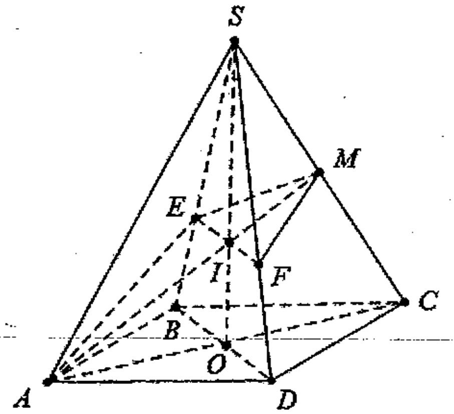
$\Rightarrow V_{S.AHIK} = V_{S.AHI} + V_{S.AIK} = \dfrac{1}{5}V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{7}V_{S.ABCD} = \dfrac{12}{35}V_{S.ABCD}$.

Do đó $V_{S.AHIK} = \dfrac{12}{35}.\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{4}{35}.2a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{35}$. **Chọn C**

Ví dụ 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (α) đi qua A, M song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E và F. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AEMF$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ và tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Gọi $I = EF \cap AM \Rightarrow I \in (SBD)$ và $I \in (SAC)$.

Mà $(SBD) \cap (SAC) = SO \Rightarrow I \in SO$.

Ta có O là trung điểm của cạnh AC và M là trung điểm của cạnh $SC \Rightarrow I$ là trọng tâm của $\Delta SAC \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có $BD // EF \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Tỉ số $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{AE}{SB}.\dfrac{SF}{SD} = 1.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.AEF} = \dfrac{4}{9}V_{S.ABD} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$.

Tỉ số $\dfrac{V_{S.MEF}}{V_{S.CBD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.MEF} = \dfrac{2}{9}V_{S.CBD} = \dfrac{1}{9}V_{S.ABCD}$

$\Rightarrow V_{S.AEMF} = V_{S.AEF} + V_{S.MEF} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{9}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Cạnh $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{\dfrac{3}{2}}.a^2 = \dfrac{a^3}{\sqrt{6}} \Rightarrow V_{S.AEMF} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^3}{\sqrt{6}} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **Chọn D**

III. [TT6026] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [509953] Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \dfrac{7}{2}a^3$. **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \dfrac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

Câu 2: [509961] Cho khối chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân có $AB = BC = a$. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC. Thể tích của khối chóp $S.AB'C'$ là:

A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{36}$ **C.** $\frac{a^3}{18}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Câu 3: [509970] Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{3}{7}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Câu 4: [509976] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, có M là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BC cắt SB, SD lần lượt tại P và Q. Khi đó $\frac{V_{S.APMQ}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 5: [509981] Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Khi đó, tỉ số $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C}} = ?$

A. 4 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 6: [509986] Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khi đó, tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 2 **D.** 4

Câu 7: [509992] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{3}; SA \perp (ABCD)$ M là điểm trên SA sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.BCM$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 8: [509996] Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 9: [510002] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. H là hình chiếu của A trên cạnh SB. Tính thể tích khối chóp $S.AHC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 10: [510006] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45^0. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB và CD. Thể tích khối tứ diện $A.MNP$ bằng:

A. $\frac{a^3}{48}$ **B.** $\frac{a^3}{16}$ **C.** $\frac{a^3}{24}$ **D.** $\frac{a^3}{6}$

Câu 11: [510011] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông vạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại P và cắt SD tại Q. thể tích khối chóp $S.APMQ$ là V. Tỉ số $\frac{18V}{a^3}$ là:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Câu 12: [510015] Cho hình chóp $S.ABC$. Đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh SA vuông góc với đáy, $BC = a, SA = a\sqrt{2}, \widehat{ACB} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Thể tích khối tứ diện $MABC$ là V tỉ số $\frac{V}{a^3}$ là:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$

Câu 13: [511520] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SC Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P, Q. Khi đó $\frac{V_{S.APMQ}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{2}{9}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 14: [511521] Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{16}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 15: [511525] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tỉ lệ thể tích của $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.AMND}}$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 4

Câu 16: [511527] Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 17: [511528] Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{2}SA,\ SB' = \frac{1}{3}SB,\ SC' = \frac{1}{4}SC$. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{1}{24}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{12}$

Câu 18: [511530] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a,\ SA \perp (ABC)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Thể tích của khối chóp $S.ABM$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 19: [511532] Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{16}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 20: [511533] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a,\ AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Thể tích khối chóp $S.BCNM$ bằng:

A. $\frac{10a^3}{27}$ **B.** $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{10\sqrt{3}}{27}$ **D.** $\frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

Câu 21: [511535] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 22: [511539] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNCD$ và khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 23: [511542] Cho khối chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.ACN$ và khối chóp $S.BCM$ bằng:

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** Không xác định được **D.** 2

Câu 24: [511547] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = SA = a$. Gọi I là trung điểm của SB. Thể tích khối chóp $S.AIC$ bằng:

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a^3}{6}$

Câu 25: [511551] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Thể tích khối tứ diện $S.AHK$?

A. $\frac{8a^3}{15}$ **B.** $\frac{4a^3}{15}$ **C.** $\frac{8a^3}{45}$ **D.** $\frac{4a^3}{5}$

Câu 26: [511554] Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.MNC$ và khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Câu 27: [511557] Gọi V là thể tích hình chóp $S.ABCD$. Lấy A' trên SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' song song với đáy hình chóp cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:

A. $\frac{V}{9}$ **B.** $\frac{V}{3}$ **C.** Đáp án khác. **D.** $\frac{V}{27}$

Câu 28: [511561] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 12cm, AB = 5cm, AC = 9cm$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ A xuống SB, SC. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}}$ bằng:

A. $\frac{2304}{4225}$ **B.** $\frac{7}{23}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 29: [511564] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SA. Mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của phần trên và phần dưới bằng:

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Câu 30: [511567] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có O là tâm của $ABCD$. Tỉ số thể tích của khối chóp $O.A'B'C'D'$ và khối hộp bằng:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 31: [511568] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SC. Biết thể tích của khối chóp $S.ABI$ bằng V, thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $4V$ **B.** $6V$ **C.** $2V$ **D.** $8V$

Câu 32: [511569] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mặt đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SD, SC. Thể tích của khối chóp $S.ABNM$ bằng bao nhiêu theo a?

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	02. B	03. A	04. C	05. A	06. B	07. C	08. C	09. C	10. A
11. B	12. D	13. C	14. B	15. A	16. C	17. B	18. D	19. A	20. D
21. B	22. A	23. A	24. B	25. C	26. A	27. D	28. A	29. B	30. D
31. A	32. D								

Chủ đề 13
[TV6027] THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – Phần 5
(Một số dạng chóp đặc biệt)

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu một số khối chóp đặc biệt: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau, khối chóp có các cạnh bên nghiêng đều với đáy, chóp có mặt bên nghiêng đều với đáy và xét một số dạng bài tập liên quan đến khối chóp có đáy bị ẩn.

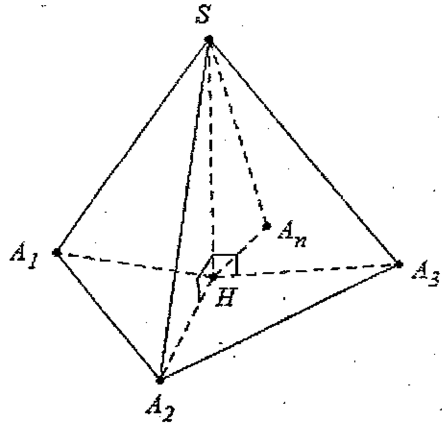
1. Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau.

Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có tất cả các cạnh bên bằng nhau: $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$

Dựng đường cao $SH \perp (A_1A_2A_n)$ của khối chóp.

Khi đó theo định lý Pytago ta có: $SH^2 = SA_1^2 - HA_1^2 = SA_2^2 - HA_2^2 = ... = SA_n^2 - HA_n^2$

Lại có $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$ suy ra $HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$



Như vậy: Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác $A_1A_2..A_n$.

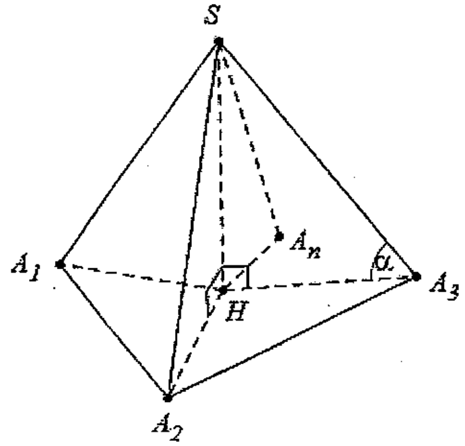
2. Khối chóp có các cạnh bên đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có tất cả các cạnh bên đều tạo với đáy một góc α.

Dựng đường cao $SH \perp (A_1A_2A_n)$ của khối chóp.

Khi đó : $\widehat{SA_1H} = \widehat{SA_2H} = ... = \widehat{SA_nH} = \alpha$ suy ra $SH = HA_1 \tan\alpha = HA_2 \tan\alpha = ... = HA_n \tan\alpha$

Do đó $HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$ suy ra hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác $A_1A_2..A_n$.



3. Khối chóp có các mặt bên đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

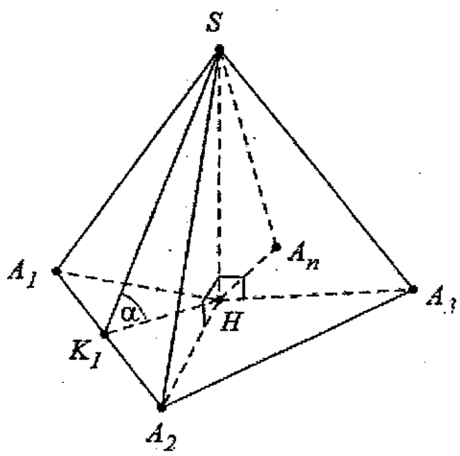
Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có tất cả các mặt bên đều tạo với đáy một góc α.

Dựng đường cao $SH \perp (A_1A_2A_n)$ của khối chóp.

Dựng $HK_1 \perp A_1A_2; HK_2 \perp A_2A_3; ......HK_n \perp A_nA_1$

Do $\begin{cases} HK_1 \perp A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp SH \end{cases} \Rightarrow A_1A_2 \perp (SK_1H) \Rightarrow \widehat{SK_1H} = \alpha$

Tương tự như vậy suy ra $\widehat{SK_1H} = \widehat{SK_2H} = ... = \widehat{SK_nH} = \alpha$



Suy ra $SH = HK_1 \tan\alpha = HK_2 \tan\alpha = ... = HK_n \tan\alpha$ do đó $HK_1 = HK_2 = ...HK_n$

Như vậy điểm H trùng với tâm đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh (hay đường tròn nội tiếp) của đa giác $A_1A_2..A_n$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC, các cạnh bên $SA = SB = SC = a$. Biết rằng $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^0; \widehat{ASC} = 90^0$. Thể tích khối chóp đã cho là.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải:

Dễ thấy các tam giác $ASB; BSC$ là các tam giác đều do đó $AB = BC = a$.

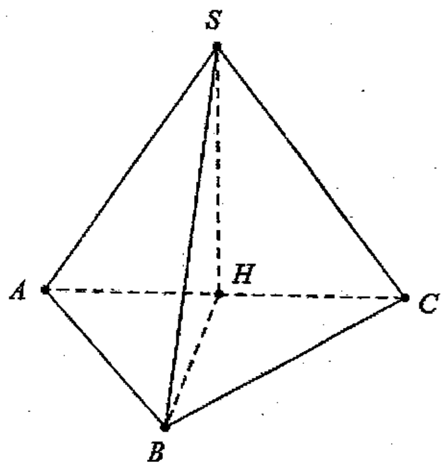
Mặt khác $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

Do đó tam giác ABC vuông tại B.

Mặt khác $SA = SB = SC = a$ nênhình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và là trung điểm của AC.

Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}; S_{ABC} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

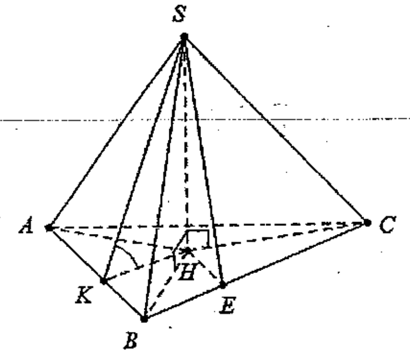
Chọn C.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB=3;BC=4$. Biết rằng các mặt bên của khối chóp đều tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60^0. Thể tích khối chóp đã cho là.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$

Lời giải:



Ta có: H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lại có $p.r=S_{ABC}$

Trong đó $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=6$; $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$

Suy ra $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=6\Rightarrow r=\dfrac{5}{6}=HK$.

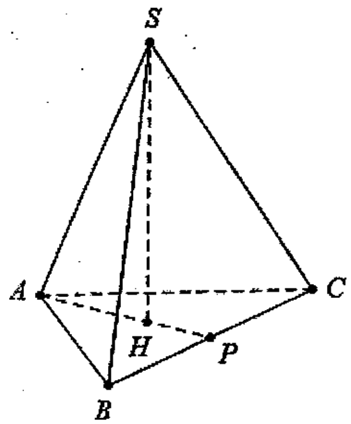
Khi đó $SH=r\tan 60^0=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, với $AB=3$, $BC=2$. Các cạnh bên bằng nhau và đều bằng 4. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{431}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{431}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{23}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$.

Lời giải



Kẻ $SH\perp(ABC)$ tại H, ta có

$$\begin{cases} HA^2=SA^2-SH^2 \\ HB^2=SB^2-SH^2 \\ HC^2=SC^2-SH^2 \end{cases}$$

Bài ra $SA=SB=SC=4\Rightarrow HA=HB=HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4HA}$ (1)

Gọi $P=AH\cap BC$ mà $AB=AC\Rightarrow PB=PC=\dfrac{BC}{2}=1$

$\Rightarrow AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AP.BC=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow 2\sqrt{2}=\frac{3.2.3}{4HA}\Rightarrow HA=\frac{9\sqrt{2}}{8}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\sqrt{16-\frac{81}{32}}=\frac{\sqrt{862}}{8}.$

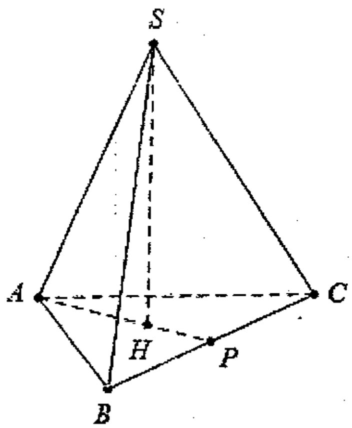
Do đó $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{862}}{8}.2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{431}}{6}$. **Chọn B**

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, với $AB=3$, $BC=2$. Các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt đáy góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Kẻ $SH\perp(ABC)$ tại H, ta có



$$\begin{cases}HA^2=SA^2-SH^2\\HB^2=SB^2-SH^2\\HC^2=SC^2-SH^2\end{cases}$$

Bài ra $SA=SB=SC\Rightarrow HA=HB=HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AB.BC.CA}{4HA}$ (1)

Gọi $P=AH\cap BC$ mà $AB=AC\Rightarrow PB=PC=\frac{BC}{2}=1$

$\Rightarrow AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AP.BC=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}.$

Thế vào (1) $\Rightarrow 2\sqrt{2}=\frac{3.2.3}{4HA}\Rightarrow HA=\frac{9\sqrt{2}}{8}.$

Từ $SH\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SA;(ABC))}=\widehat{SAH}\Rightarrow\widehat{SAH}=60^0$

$\Rightarrow\tan 60^0=\frac{SH}{AH}=\sqrt{3}\Rightarrow SH=AH\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{6}}{8}.$

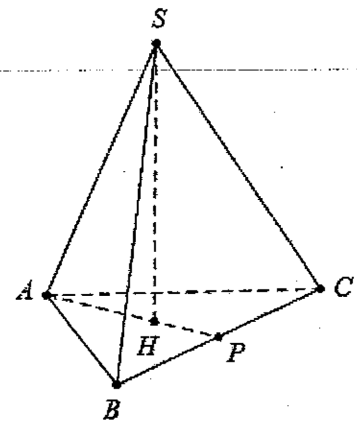
Do đó $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{6}}{8}.2\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C**

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, với $AB > \sqrt{5}$, $BC = 2$. Các cạnh bên đều bằng $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ và cùng tạo với mặt đáy góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Đặt $AB = AC = x > \sqrt{5}$.



Kẻ $SH \perp (ABC)$ tại H, ta có

$$\begin{cases} HA^2 = SA^2 - SH^2 \\ HB^2 = SB^2 - SH^2 \\ HC^2 = SC^2 - SC^2 \end{cases}$$

Bài ra $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4HA} = \frac{2x^2}{4HA} = \frac{x^2}{2HA} \qquad (1)$$

Từ $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{SAH} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 60^0 = \frac{SH}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}SA = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{6}}{8} \\ \cos 60^0 = \frac{HA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}.\frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

Gọi $P = AH \cap BC$ mà $AB = AC \Rightarrow PB = PC = \frac{BC}{2} = 1$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AP = \frac{1}{2}.2\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Thế vào (1) $\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \dfrac{x^2}{2.\frac{9\sqrt{2}}{8}} = \dfrac{2x^2\sqrt{2}}{9} \Rightarrow 8x^4 = 81(x^2-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \frac{9}{8} \end{array}\right.$

Kết hợp với $x > \sqrt{5}$ ta được $x = 3$ thỏa mãn $\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$.

Do đó $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{6}}{8}.2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB, biết tam giác SBC vuông tại S. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{3}$ **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$ **C.** $V = \frac{4a^3}{3}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:

+) Gọi H là trung điểm của cạnh AB ta đặt:

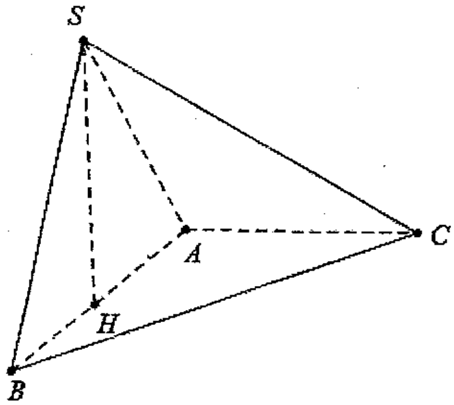
$SH = h \Rightarrow SB^2 = h^2 + a^2, BC^2 = 8a^2$.

+) $SC^2 = SH^2 + HC^2 = h^2 + AH^2 + AC^2 = h^2 + 5a^2$

+) Tam giác SBC vuông tại S nên ta có:

$SB^2 + SC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2h^2 + 6a^2 = 8a^2 \Leftrightarrow h = a$.

Do đó $V = \frac{1}{3}.h.S_d = \frac{1}{3}.a.2a^2 = \frac{2a^3}{3}$. **Chọn B.**



Ví dụ 7. [SÁCH BÀI TẬP-NÂNG CAO HÌNH HỌC 12] Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD và α là góc giữa 2 đường thẳng đó. Thể tích V tứ diện đã cho là.

A. $V = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$ **B.** $V = \frac{1}{6}AB.CD.d.\cos\alpha$

C. $V = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin 2\alpha$ **D.** $V = \frac{1}{6}AB.CD.d.\tan\alpha$

Lời giải:

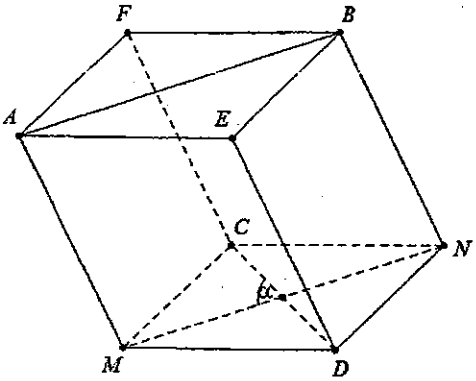
Cách 1: Dựng hình hộp $AEBF.MDNC$ (được gọi là hình hộp ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

Do $(AEBF) \parallel (MDNC)$ nên chiều cao của khối hộp bằng khoảng cách d giữa AB và CD.

Lại có $V_{AEBF.MDNC} = S_d.h = S_{MDNC}.d$

$= \frac{1}{2}MN.CD.\sin\alpha.d = \frac{1}{2}AB.CD.d.\sin\alpha$.

Mặt khác $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{AEBF.MDNC} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$



Cách 2: Dựng hình bình hành $ABCE$

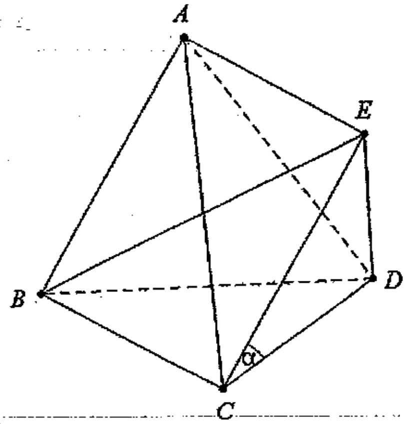
Khi đó $V_{A.BCD}=V_{E.BCD}$ (Do $AE\parallel(BCD)$)

Do đó $V_{A.BCD}=V_{B.ECD}=\frac{1}{3}d\left(B;(CED)\right).S_{CDE}$

$=\frac{1}{3}d\left(AB;(CED)\right).\frac{1}{2}.CD.CE\sin\alpha$

$=\frac{1}{6}d\left(AB;CD\right).CD.AB.\sin\alpha=\frac{1}{6}d.AB.CD.\sin\alpha$

Chọn A.



Ví dụ 8. [SÁCH BÀI TẬP-NÂNG CAO HÌNH HỌC 12] Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ biết rằng $AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c$.

A. $V=\frac{1}{6}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

B. $V=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

C. $V=\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

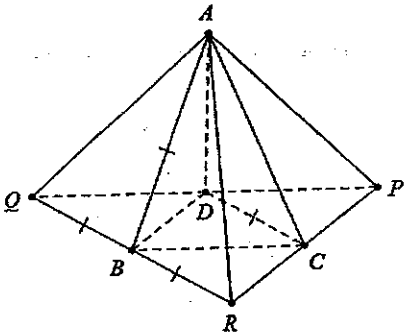
D. $V=\frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

Lời giải

Dựng tứ diện $A.PQR$ sao cho B,C,D lần lượt là trung điểm của các cạnh QR,RP,PQ.

Ta có: $AD=BC=\frac{PQ}{2}$ mà D là trung điểm của PQ do đó $AQ\perp AP$. Chứng minh tương tự ta cũng có $AQ\perp AR; AP\perp AR\Rightarrow V_{A.PQR}=\frac{1}{6}.AP.AQ.AR$.

Do $S_{BCD}=\frac{1}{4}S_{PQR}\Rightarrow V_{A.ABC}=\frac{1}{4}V_{A.PQR}=\frac{1}{24}AP.AQ.AR$



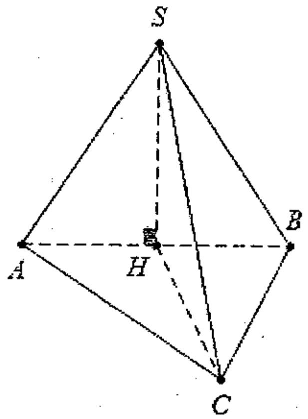
Mặt khác $\begin{cases}AP^2+AQ^2=PQ^2=4AD^2=4c^2\\AQ^2+AR^2=4a^2; AR^2+AP^2=4b^2\end{cases}$. Từ đó suy ra $\begin{cases}AP=\sqrt{2\left(b^2+c^2-a^2\right)}\\AQ=\sqrt{2\left(a^2+c^2-b^2\right)}\\AR=\sqrt{2\left(a^2+b^2-c^2\right)}\end{cases}$

Do đó. $V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=120^0$, $\widehat{BSC}=60^0$ $\widehat{CSA}=90^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Tam giác SAB có $SA=SB=a,\ \widehat{ASB}=120^0$.

$\to AB^2=SA^2+SB^2-2.SA.SB.\cos\widehat{ASB}=3a^2\Rightarrow AB=a\sqrt{3}$

Tam giác SBC có $SB=SC=a,\ \widehat{BSC}=60^0\Rightarrow\Delta SBC$ đều.

Tam giác SAC có $SA=SC=a,\ \widehat{CSA}=90^0$.

$\to\Delta SAC$ vuông cân tại $S\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Tam giác ABC có $AC^2+BC^2=AB^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

Gọi H là trung điểm của $AC\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

(vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

Xét ΔSHA vuông tại H, có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB>AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BSH}=45^0$. Biết $AH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE=a\sqrt{5}$, thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\dfrac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Đặt $AB=x$, ΔABE vuông tại $A\Rightarrow AB^2+AE^2=BE^2$

$\Rightarrow AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2-x^2}=\sqrt{5a^2-x^2}$

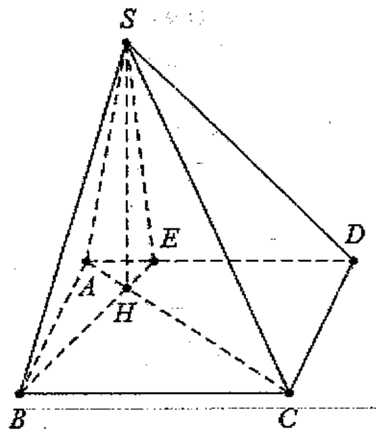
Xét ΔABE vuông tại A, đường cao AH, ta có

$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{5a^2-x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{5}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4-5a^2x^2+4a^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=2a\end{array}\right.$$

Loại $x=a$ vì $x=a\Rightarrow AE=2a>AB=a$, vậy $AB=2a$.

$$\rightarrow BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\frac{4a}{\sqrt{5}}\Rightarrow SH=\frac{BH}{\tan\widehat{BSH}}=\frac{4a}{\sqrt{5}}.$$



Xét ΔABC vuông tại B, đường cao $BH\Rightarrow\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{BH^2}\Rightarrow BC=\frac{AB.BH}{\sqrt{AB^2-BH^2}}=4a$.

$\rightarrow$ Thể tích $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{4a}{\sqrt{5}}.2a.4a=\frac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD=a\sqrt{2}$, $BC=BD=a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD), biết thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Lời giải

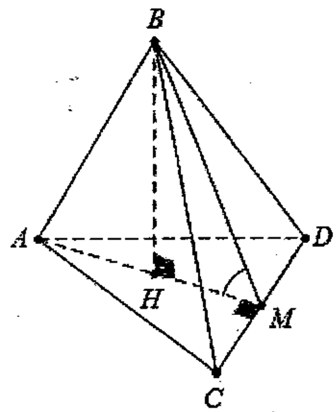
Gọi M là trung điểm của CD.

Xét ΔACD cân tại A và ΔBCD cân tại B nên

$$\begin{cases}AM\perp CD\\BM\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABM)\Rightarrow\widehat{\left((ACD);(BCD)\right)}=\widehat{AMB}$$

Kẻ BH vuông góc với AM tại $H\Rightarrow BH\perp AM$.

Mà $CD\perp(ABM)\Rightarrow CD\perp BH\Rightarrow BH\perp(ACD)$.



$$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{3}.BH.S_{\Delta ACD}\text{ và } d\left(B;(ACD)\right)=BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{3.V}{BH}=\frac{3a^3\sqrt{15}}{27}:\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{5}}{3}$. Đặt $CD=2x$.

Suy ra $AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=\sqrt{2a^2-x^2}\Rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}.AM.CD=x.\sqrt{2a^2-x^2}=\frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.

$\Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow \sin \widehat{AMB} = \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AMB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{\left((ACD);(BCD)\right)} = 45^0$. **Chọn B.**

III.[TT6028] BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1: [511435] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2a, AC = 3a$. Gọi H là trọng tâm tam giác ABD, SH vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp biết góc giữa SA và đáy bằng 45^0.

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 2: [511436] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AO. Góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Câu 3: [511437] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, tâm O, góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{21}}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 4: [511439] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết $AD = 2BC = 2a$ và $BD = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 30^0.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 5: [511440] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết $AD = 2BC = 2a$ và $BD = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SO và mặt phẳng đáy bằng 45^0, với O là giao điểm của AC và BD.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: [511443] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H, với H là trung điểm của BI. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{39}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{39}}{48}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{39}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{39}}{36}$.

Câu 7: [511445] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc BC sao cho $BC=3BH$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{21}}{18}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{36}$. **C.** Đáp án khác. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Câu 8: [511446] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $I, AB=2a\sqrt{3}, BC=2a$. Chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy trùng với trung điểm của DI. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $36a^3$. **B.** $18a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $24a^3$.

Câu 9: [511449] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và $SA\perp(ABCD)$, biết $AB=BC=a; AD=2a$. Cạnh bên $SD=a\sqrt{5}$ và H là hình chiếu của A lên SB. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD):

A. $\frac{3a^3}{2}; \frac{5a^2\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}; \frac{5a\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 10: [511455] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc bằng 45^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AD. Thể tích của khối chóp $S.MCDN$ là bao nhiêu?

A. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{5a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\frac{5a^3\sqrt{2}}{24}$.

Câu 11: [511458] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O, góc $\widehat{ABC}=60^0$. Hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cạnh bên $SC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD):

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.   B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ và $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ và $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.   D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 12: [511460] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $4cm$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 4cm$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $\widehat{ACM} = 45^0$. Gọi H là hình chiếu của S trên CM. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên SC, SH. Thể tích của khối tứ diện $SAIK$ tính theo cm^3 bằng:

A. $\frac{16}{3}$.   B. 9.   C. 8.   D. $\frac{16}{9}$.

Câu 13: [511463] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a\sqrt{5}, BC = 4a$, đường cao là $SA = a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với đường cao AH của đáy ABC sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng x. Diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A. $4\sqrt{15}x(a-x)$.   B. $4\sqrt{3}x(a-x)$.   C. $2\sqrt{5}x(a-x)$.   D. $2\sqrt{15}x(a-x)$.

Câu 14: [511464] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a, AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $AC = 4AH$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Tính thể tích tứ diện $SMBC$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{15}$.   B. $\frac{a^3}{48}$.   C. $\frac{\sqrt{14}a^3}{15}$.   D. $\frac{\sqrt{14}a^3}{48}$.

Câu 15: [511467] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a, AD = 2a$. Điểm I thuộc cạnh AB và $IB = 2IA$. SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2\sqrt{15}a^3}{9}$.   B. $\frac{\sqrt{15}a^3}{6}$.   C. $\frac{4\sqrt{30}a^3}{9}$.   D. $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Câu 16: [511471] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}, SO \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa AB và SD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{30}$.   B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.   C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.   D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 17: [511473] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=a\sqrt{3}$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABCD)$. Khoảng cách giữa BD và SC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{4a^3}{\sqrt{3}}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$

Câu 18. [511475] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=a, AD=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABCD)$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối đa diện $S.BCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{10}$ **D.** $a^3\sqrt{3}$

Câu 19. [511476] Hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B. Cạnh $AB=a$. Biết $SA=SB=SC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{1}{2}a^3$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{1}{6}a^3$ **D.** $\frac{1}{3}a^3$

Câu 20. [511477] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $AB=SA=1, AD=\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{36}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{36}$

Câu 21. [511479] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 22. [511480] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a, BC=a\sqrt{2}, SA=2a$ và $SA\perp(ABC)$. Biết (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. Tính diện tích thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp.

A. $\frac{4a^2\sqrt{14}}{35}$ **B.** $\frac{4a^2}{5\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{8a^2\sqrt{10}}{25}$ **D.** $\frac{4a^2\sqrt{6}}{15}$

Câu 23. [511481] Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$. Các mặt bên $(SAB),(SBC)$, (SCA) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp.

A. $8\sqrt{3}a^3$ **B.** $6\sqrt{3}a^3$ **C.** $7\sqrt{3}a^3$ **D.** $5\sqrt{3}a^3$

Câu 24: [511482] Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = 10cm, BC = 12cm, AC = 14cm$, các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và bằng α với $\tan\alpha = 3$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là:

A. $228cm^3$. **B.** $576cm^3$. **C.** $192cm^3$. **D.** $384cm^3$.

Câu 25: [511483] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^0$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy các góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 26: [511484] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $10cm$, các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và bằng α với $\tan\alpha = \frac{9}{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $600cm^3$. **B.** $300cm^3$. **C.** $900cm^3$. **D.** $1200cm^3$.

Câu 27: [511487] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 28: [511488] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a, AD = 2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D của mặt đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	**02. D**	**03. B**	**04. A**	**05. C**	**06. C**	**07. B**	**08. C**	**09. D**	**10. D**
11. B	**12. D**	**13. B**	**14. D**	**15. C**	**16. A**	**17. D**	**18. B**	**19. B**	**20. B**
21. C	**22. A**	**23. A**	**24. C**	**25. D**	**26. B**	**27. C**	**28. D**		

Chủ đề 14

[TV6029] THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Lý thuyết

Hình lăng trụ đứng là hình có đáy là một đa giác và cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Đáy là tam giác, hình vuông, hình thoi, hình thang, hình bình hành ...

2. Phương pháp giải

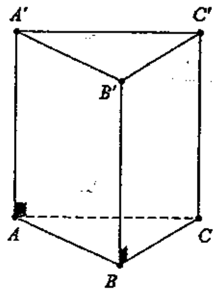
Công thức tính thể tích khối lăng trụ đứng $V = S.h$ với S là diện tích đa giác đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ. Diện tích đa giác đáy đã được giới thiệu ở thể tích khối chóp. Và sử dụng kiến thức về góc cũng như khoảng cách để tìm các yếu tố liên quan là chiều cao và diện tích đáy.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$ $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh $AA' = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải



Áp dụng định lý Sin trong tam giác ABC, ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.a.2a.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{5}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{2}.$$ **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ theo a biết $A'B = 2a\sqrt{2}$.

A. $V = 4a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 8a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = 8a^3$.

Lời giải

Trong tam giác vuông ABB', ta có $AA' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.AC = 2a.2a = 4a^2$.

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = 8a^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$. Đường chéo lớn của đáy $ABCD$ bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Tam giác ABD cân tại A, có $\widehat{BAD}=60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều $\Rightarrow BD=a$.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow BO=\dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$

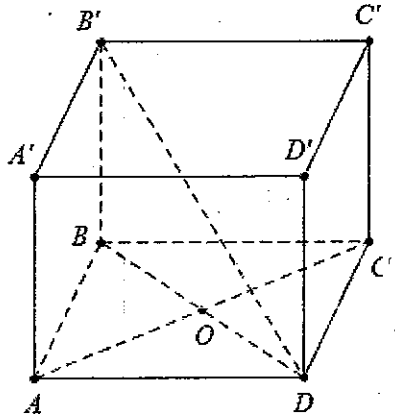
Theo bài ra, ta có $BD'=AC=a\sqrt{3}$.

Xét $\Delta BDD'$ vuông tại D, ta có

$DD'=\sqrt{BD'^2-BD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}=a\sqrt{2}.$

Thể tích của khối lăng trụ là

$V=DD'.S_{ABCD}=a\sqrt{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn B.**



Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi M là điểm thuộc miền trong của hình thoi $ABCD$, biết $A'M$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0 và $A'M=4$. Thể tích của hình lăng trụ bằng 12. Tính AB.

A. $AB=2.$ **B.** $AB=2\sqrt{3}.$ **C.** $AB=4.$ **D.** $AB=4\sqrt{3}.$

Lời giải

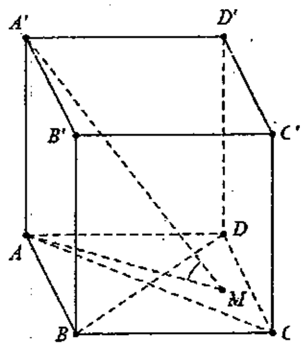
Đặt $AB=x$, $\widehat{BAD}=60^0 \Rightarrow \begin{cases} BD=x \\ AC=x\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}.$

Ta có $AA'\perp(ABCD)\Rightarrow AM$ là hình chiếu của $A'M$ trên $mp\,(ABC)\Rightarrow \widehat{\left(A'M;(ABCD)\right)}=\widehat{\left(A'M;AM\right)}=\widehat{A'MA}=60^0.$

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A, có $\sin\widehat{A'MA}=\dfrac{AA'}{A'M}\Rightarrow AA'=2\sqrt{3}.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABCD}$.

$\Rightarrow 2\sqrt{3}.S_{ABCD}=12\Rightarrow S_{ABCD}=2\sqrt{3}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow AB=2.$ **Chọn A.**



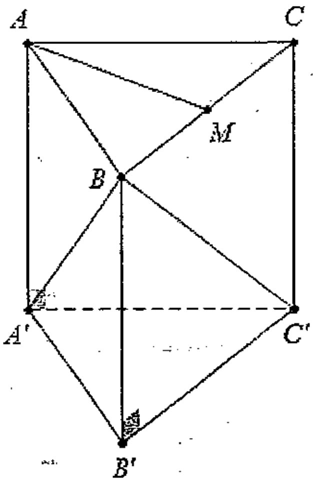
Bài toán tương tự [Bạn đọc tự giải]: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với đáy (ABC) góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \sqrt{3}.$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $V = \dfrac{1}{2}.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB = a,\ AC = 2a$, độ dài đường trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và độ dài đường chéo của mặt bên $BB'C'C$ bằng $3a$. Tính thể tích khối chóp $A.BC'A'$.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}.$ **B.** $V = \dfrac{8a^3}{3}.$ **C.** $V = \dfrac{4a^3}{3}.$ **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}.$

Lời giải



Xét ΔABC, có $AB^2 + AC^2 = 5a^2 = 4.\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 4.AM^2$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC = \dfrac{a.2a}{2} = a^2$.

Xét $\Delta BB'C'$ vuông tại B', có $B'B = \sqrt{BC'^2 - B'C'^2} = 2a$.

Ta có $V_{A.BC'A'} = V_{B.AA'C'} = \dfrac{1}{2}.V_{B.AA'C'C} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$= \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}.AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.2a.a^2 = \dfrac{2a^3}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết rằng hai mặt chéo $BCD'A'$, $ADC'B'$ vuông góc với nhau và diện tích của mỗi mặt chéo này là $a^2\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 4a^3.$ **B.** $V = 2\sqrt{2}a^3.$ **C.** $V = a^3.$ **D.** $V = 8a^3.$

Lời giải

Hai mặt phẳng $(BCD'A'), (ADC'B')$ vuông góc với nhau suy ra $A'B \perp A'B$ và $CD' \perp C'D$.

Mà $ABB'A'$ là hình chữ nhật kết hợp với $A'B \perp A'B$

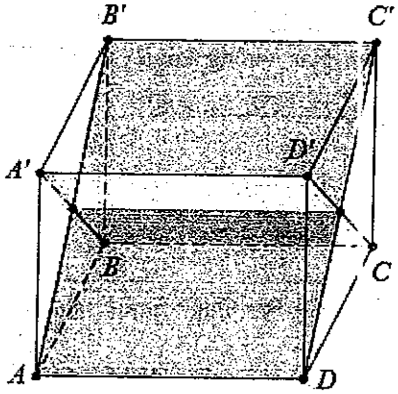
$\Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông. Đặt $AB = BC = x$.

Ta có $A'B = x\sqrt{2}$, $BC = x \Rightarrow S_{A'D'CB} = x^2\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = x^3 = a^3$. **Chọn A.**

Chú ý: Bản chất $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh $a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D} = a^3$.



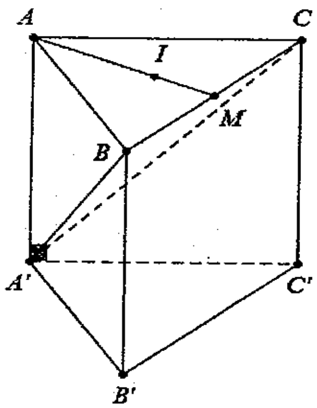
Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 1, khoảng cách từ tâm của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{1}{6}$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

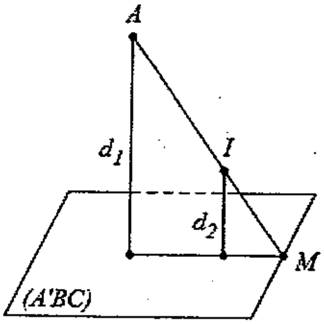
A. $\frac{3}{16}$. **B.** $\frac{\sqrt{12}}{16}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

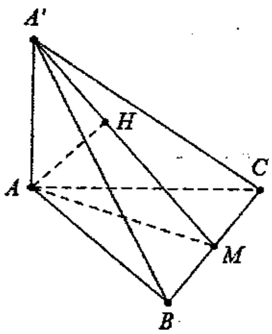
Lời giải

Gọi I là tâm tam giác ABC, M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow \frac{d(I;(A'BC))}{d(A;(A'BC))} = \frac{IM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(A;(A'BC)) = 3.\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.







Xét tứ diện $A'.ABC$ có $A'A \perp (ABC)$. Kẻ $AH \perp A'M$ (1).

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d(A;(A'BC)) = \frac{1}{2}$.

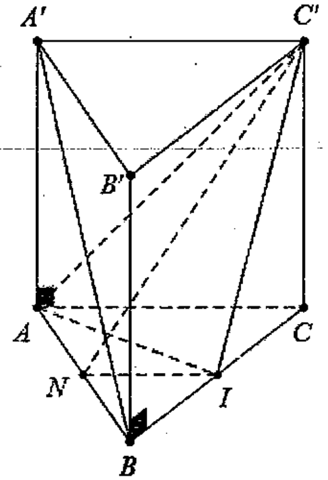
Xét $\Delta A'AM$ vuông, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Vậy thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi N, I tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC. Góc giữa mặt phẳng $(C'AI)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của tứ diện $C'.ANI$.

A. $V=\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{32}$.

Lời giải



Ta có $AI\perp BC$ và $AI\perp CC'\Rightarrow AI\perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow AI\perp C'I\Rightarrow \widehat{\left((C'AI);(ABC)\right)}=\widehat{C'IC}=60^0$.

Do $\Delta C'IC$ vuông tại C nên $CC'=CI.\tan\widehat{C'IC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ANI}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Vậy $V_{NAC'I}=\dfrac{1}{3}CC'.S_{\Delta NAI}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}=\dfrac{a^3}{32}$. **Chọn D.**

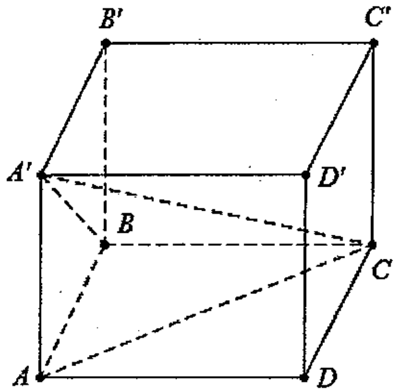
Hoặc $\dfrac{S_{\Delta ANI}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}d\left(I;(AB)\right).AN}{\frac{1}{2}d\left(C;(AB)\right).AB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta ANI}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{4}$.

Khi đó $V_{NAC'I}=V_{C'.ANI}=\dfrac{1}{3}.CC'.S_{\Delta ANI}=\dfrac{1}{12}.CC'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{12}$.

Ví dụ 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Cạnh $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30^0 và $AA'=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp.

A. $V=2a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Ta có $30^0=\widehat{\left(A'C;(ABCD)\right)}=\widehat{(A'C;AC)}=\widehat{A'CA}$.

Lại có $60^0=\widehat{\left((A'BC);(ABCD)\right)}=\widehat{(A'B;AB)}=\widehat{A'BA}$.

Tam giác vuông $A'AB$ có $AB=\dfrac{AA'}{\tan\widehat{A'BA}}=a$.

Tam giác vuông $A'AC$ có $AC=\dfrac{AA'}{\tan\widehat{A'CA}}=3a$.

Tam giác vuông ABC, có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a\sqrt{2}$.

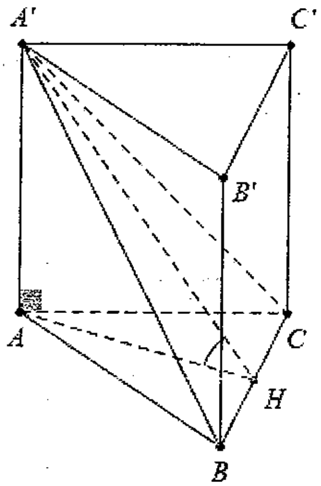
Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD}=AB.BC=2a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.S_{ABCD}=2a^3\sqrt{6}$. **Chọn A.**

Ví dụ 10 [THPT THANH CHƯƠNG – NGHỆ AN]: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh $BC=2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ bằng $60°$. Biết diện tích của tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} AA' \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.

$\begin{cases} (ABC)\cap(A'AH)=AH \\ (A'BC)\cap(A'AH)=A'H \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABC);(A'BC))}=\widehat{A'HA}=60^0$

Lại có $S_{\Delta A'BC}=\frac{1}{2}.A'H.BC \Rightarrow A'H=\frac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC}=\frac{4a^2}{2a}=2a..$

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại A, có

$\sin\widehat{A'HA}=\frac{AA'}{A'H} \Rightarrow AA'=\sin 60^0.2a=a\sqrt{3}$.

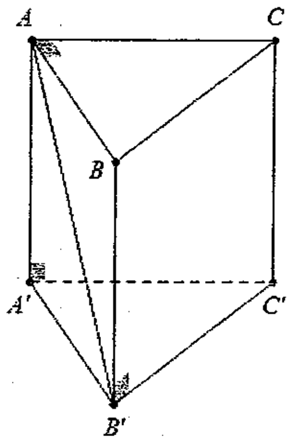
Và $AH=\sqrt{A'H^2-A'A^2}=a \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC=a^3$.

Vậy thể tích lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=a.a^2\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11 [THPT CHUYÊN SƯ PHẠM – HÀ NỘI]: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** a^3.

Lời giải



Ta có $BB' \parallel CC' \Rightarrow CC' \parallel (ABB')$.

$\Rightarrow d(AB';CC')=d(CC';(ABB'))=d(C;(ABB'))$.

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AB \perp AC$ (1).

$ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng $\Rightarrow BB' \perp AC$ (2).

Từ $(1),(2) \Rightarrow AC \perp (ABB') \Rightarrow d(C;(ABB'))=AC=a$.

ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB=AC=a \Rightarrow BC=a\sqrt{2}$.

$BB'C'C$ là hình vuông $\Rightarrow BB'=BC=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

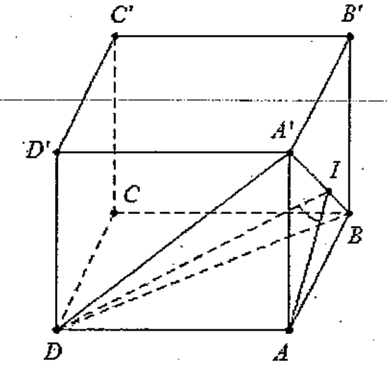
Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao h, mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với mặt bên $(ABB'A')$ góc 60^0, đáy $ABCD$ là hình vuông. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng 16. Tính độ dài h.

A. $h=2$. **B.** $h=2\sqrt{2}$. **C.** $h=\sqrt{3}$. **D.** $h=4$.

Lời giải

Kẻ $AI \perp A'B$. Có $AD \perp mp(AA'B'B) \Rightarrow AD \perp A'B$.

Do $A'B \perp AD$ và $A'B \perp AI$ nên $A'B \perp mp(ADI) \Rightarrow A'B \perp DI$.



Vậy $\alpha = \widehat{DIA} = \left(\widehat{(A'BD);(ABB'A')}\right) = 60^0$.

Xét ΔADI vuông tại $A \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{AI}{AD} \Rightarrow AI = \dfrac{AD}{\sqrt{3}}$.

Xét $\Delta A'AB$ vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{AD^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{2}{AD^2} \Leftrightarrow AD^2 = 2h^2$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = AA'.AD^2 = 2h^3 = 16 \Rightarrow h = 2$. **Chọn A.**

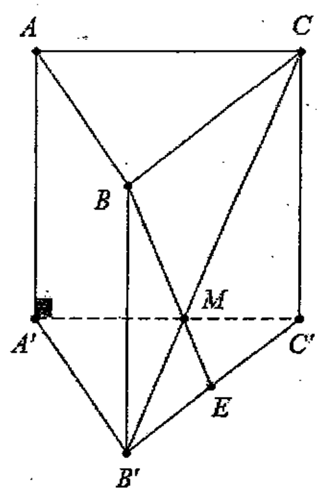
Ví dụ 13: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm $B'C'$, $B'C$ cắt BE tại M. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCM$ biết độ dài các cạnh $AB = 3a$, $AA' = 6a$.

A. $18a^3$. **B.** $12a^3$. **C.** $36a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mà $BB' \perp AH \subset (ABC) \Rightarrow AH \perp (BB'C'C)$.



Suy ra $\begin{cases} V_{A.BCM} = \dfrac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCM} \\ V_{A.BCC'B'} = \dfrac{1}{3}.AH.S_{BB'C'C} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_{A.BCM}}{V_{A.BB'C'B}} = \dfrac{S_{\Delta BCM}}{S_{BB'C'B}}$ (1).

Ta có $\Delta BMC \sim \Delta EMB' \Rightarrow \dfrac{BC}{B'E} = \dfrac{BM}{EM} = \dfrac{1}{2}$.

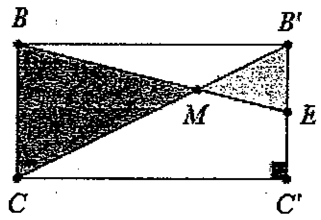
$\Rightarrow d(M;(BC)) = \dfrac{2}{3} d(B';(BC)) = \dfrac{2}{3} BB'$.

$\Rightarrow S_{\Delta BCM} = \dfrac{1}{2}.d(M;(BC)).BC = \dfrac{BB'.BC}{3} = \dfrac{S_{BB'C'C}}{3}$ (2).

Từ $(1),(2) \Rightarrow V_{A.BCM} = \frac{1}{3}V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{3}\left(V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'}\right)$.

$= \frac{1}{3}\left(V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\right) = \frac{2}{9}.V_{ABC.A'B'C'}$.

$\Rightarrow V_{A.BCM} = \frac{2}{9}.AA'.\frac{AB^2}{2} = \frac{2}{9}.6a.\frac{1}{2}(3a)^2 = 6a^3$. **Chọn D.**



Ví dụ 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB = a$, $AA' = a$. Góc tạo bởi đường thẳng BC' và mặt bên $(ABB'A')$ bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm $A'B'$. Ta có $C'H \perp A'B'$.

Mà $A'A \perp C'H \subset (A'B'C')$ nên $C'H \perp (ABB'A')$.

Do đó BH là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$

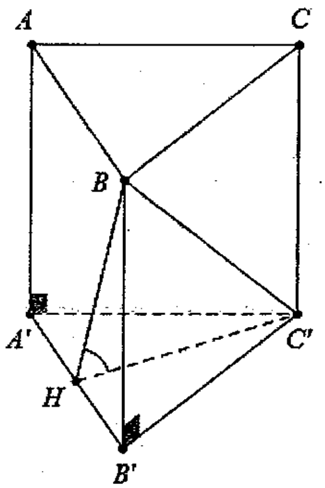
Hay $\widehat{(BC';(ABB'A'))} = \widehat{(BC';BH)} = \widehat{HBC'} = 60^0$.

Ta có $B'H = \frac{A'B'}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{B'B^2 + B'H^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{HBC'} = \tan 60^0 = \frac{C'H}{BH} \Rightarrow C'H = \tan 60^0.BH = \frac{a\sqrt{15}}{2}a$

Nên $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}.C'H.A'B' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta A'B'C'} = a.\frac{a^2\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^3$. **Chọn A.**

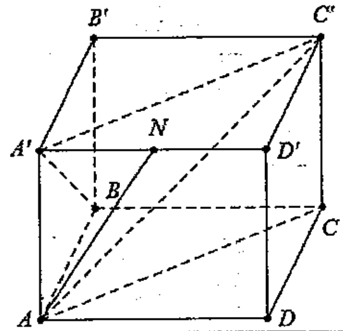


Ví dụ 15: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^0$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = \sqrt{6}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải

Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^0$, suy ra $\widehat{ADC} = 60^0$. Do đó tam giác ABC và ADC là các tam giác đều.



Vì N là trung điểm $A'D'$ nên $C'N \perp A'D'$ và $C'N = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $30^0 = \widehat{AC', (ADD'A')} = \widehat{AC', AN} = \widehat{C'AN}$.

Tam giác $C'AN$, có $AN = \frac{C'N}{\tan \widehat{C'AN}} = \frac{3}{2}$.

Tam giác $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

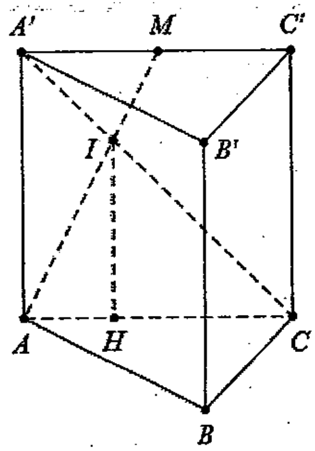
Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2.\sin \widehat{BAD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $AA' = 4a$ và $A'C = 6a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính thể tích của khối tứ diện $IABC$.

A. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V = \frac{32}{9}a^3$

Lời giải

Kẻ $IH \perp AC$, $H \in AC$ thì $IH \perp (ABC)$.



Do đó IH là đường cao của tứ diện $IABC$.

Ta có $\frac{IA'}{IC} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$.

Vì $IH \parallel A'A$ nên $\frac{IH}{A'A} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$ suy ra $IH = \frac{8a}{3}$.

Và $AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2\sqrt{5}a$.

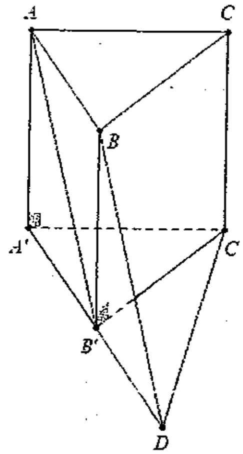
$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$.

Do đó $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{8a}{3}.4a^2 = \frac{32}{9}a^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 17: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = b$. Biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Kẻ đường thẳng $BD \parallel AB'$ cắt $A'B'$ tại D.

Nên $\widehat{(AB',BC')} = \widehat{(BD,BC')} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{DBC'} = 60^0$.

Ta có $BD = AB' = BC'$ nên $BD = BC' = \sqrt{a^2+b^2}$.

Vì $\widehat{A'B'C'} = 60^0 \Rightarrow \widehat{DB'C'} = 120^0$.

Áp dụng định lý hàm số Cosin $\Delta DB'C'$, ta được

$DC'^2 = B'D^2 + B'C'^2 - 2B'D.B'C'.\cos 120^0$.

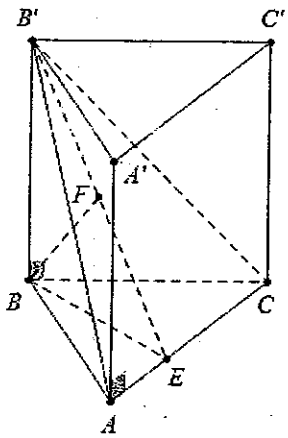
Hay $DC' = a\sqrt{3}$. Vì $\widehat{DBC'} = 60^0$ thì $\Delta BDC'$ là tam giác đều nên $BD = BC' \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{3} \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **Chọn D.**

Ví dụ 18: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^0$; $AB = 3$ và $AC = 4$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải



Diện tích $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = 3\sqrt{3}$.

Kẻ $BE \perp AC$; $BF \perp B'E$. Khi đó $BC \perp B'B$ và $BC \perp BE$

Suy ra $BC \perp BF \Rightarrow BF \perp (B'AC) \Rightarrow d(B;(B'AC)) = BF$.

Do đó $BE = AB.\sin\widehat{BAC} = 3.\sin 60^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Mà $d(M;(B'AC)) = \dfrac{1}{2}d(C;(B'AC)) = \dfrac{1}{2}d(B;(B'AC))$.

$= \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{3\sqrt{15}}{5}$. Xét $\Delta BB'E$ vuông tại B, ta được

$\dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{1}{BF^2} \Rightarrow BB' = \dfrac{BE.BF}{\sqrt{BF^2 - BE^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{ABC} = 1$. **Chọn D.**

III. [TT6030] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. [512910] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = 2a$ (A_1C) hợp với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{6}}{3}$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 4a^3\sqrt{6}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{9}$ **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 2. [512911] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $BA = BC = 2a$, biết $A_1M = 3a$ với M là trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 4a^3$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3}{3}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 4a^3\sqrt{3}$

Câu 3. [512912] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, biết $BA = BC = 2a$ và (A_1BC) hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 6a^3$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 4a^3\sqrt{3}$ **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 4. [512913] Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$

A. $V = a^3$ **B.** $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \dfrac{1}{3}a^3$

Câu 5. [512915] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, $A_1B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = a^3\sqrt{2}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 6a^3$ **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 2a^3$

Câu 6. [512916] Cho khối lăng trụ đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng (A_1BC) hợp với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3}{8}$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3a^3}{8}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 7. [512917] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC với $AB = a, AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120^0$, mặt phẳng (A_1BC) hợp với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$ B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3a^3\sqrt{21}}{14}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{14}$ D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{42}$

Câu 8. [512918] Cho lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$ và đường chéo B_1D của lăng trụ hợp với đáy $ABCD$ một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là:

A. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{9}$ B. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$

C. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 9. [512919] Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh đáy bằng a và mặt (DBC_1) với đáy $ABCD$ một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là:

A. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

C. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Câu 10. [512920] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, A_1C tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 3a^3\sqrt{3}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 6a^3\sqrt{3}$

Câu 11: [512923] Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích lăng trụ.

A. $8\sqrt{3}$. B. Đáp án khác. C. $4\sqrt{3}$. D. $16\sqrt{3}$.

Câu 12: [512924] Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là:

A. $\dfrac{a^3}{2}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 13. [512925] Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, (A_1BC) hợp với mặt đáy một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$ **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 14: [512926] Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a, \widehat{ABC} = 60^0$. Biết BC' hợp với $(AA'C'C)$ một góc 30^0. Tính thể tích lăng trụ.

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** Đáp án khác. **C.** $2a^3\sqrt{2}$. **D.** $a^3\sqrt{5}$.

Câu 15: [512927] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy ABC là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 60^0, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $2\sqrt{3}$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Thể tích khối tứ diện $A'APQ$ là:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 16: [512928] Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, đường chéo AC' tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc $\alpha\left(0 < \alpha < 45^0\right)$. Khi đó, thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $a^3\sqrt{\cot^2\alpha + 1}$. **B.** $a^3\sqrt{\cos 2\alpha}$. **C.** $a^3\sqrt{\cot^2\alpha - 1}$. **D.** $a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$.

Câu 17: [512929] Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi thoi có diện tích S_1. Hai mặt chéo $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có diện tích lần lượt là S_2, S_3. Khi đó thể tích của hình hộp là:

A. $\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$. **B.** $\dfrac{S_1\sqrt{S_2S_3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3S_1S_2S_3}}{3}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{S_1S_2S_3}{2}}$.

Câu 18: [512930] Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm; 3cm; 6cm$. Thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là:

A. $6cm^3$. **B.** $12cm^3$. **C.** $68cm^3$. **D.** $4cm^3$.

Câu 19: [512931] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a; \widehat{ACB} = 60^0$. Biết $B'C$ hợp với $(ACC'A)$ một góc 30^0. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\sqrt{6}a^3$ **B.** $\sqrt{2}a^3$ **C.** $\sqrt{3}a^3$ **D.** $2\sqrt{3}a^3$

Câu 20: [512932] $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có cạnh bằng a. Thể tích của khối tứ diện $A'BDC'$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3}{2}$ **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{a^3}{3}$

Câu 21: [512934] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết $AB = AC = AA' = a$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Thể tích tứ diện $CBB'A'$ là:

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{3}$ **C.** $\frac{a^3}{6}$ **D.** $\frac{2a^3}{3}$

Câu 22: [512939] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0, cạnh $AB = a$. Thể tích khối đa diện $ABCC'$ là:

A. $\frac{3}{4}a^3$ **B.** $\sqrt{3}a^3$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$

Câu 23: [512940] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ theo a.

A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C.** $\frac{a^3}{4}$ **D.** $\frac{a^3}{3}$

Câu 24: [512941] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^0$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{105}}{14}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{14}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{105}}{4}$

Câu 25: [512942] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Tam giác ABC đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của AA'. Tìm mệnh đề đúng.

A. $V_{I.ABC} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$ **B.** $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

C. $V_{I.ABC} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$ **D.** $V_{I.ABC} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$

Câu 26: [512943] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC tam giác vuông tại $A, \widehat{ACB} = 60^0, AC = a$, $AC' = 3a$. Khi đó thể tích khối lăng trụ bằng:

A. $a^3\sqrt{6}$ **B.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{3}$ **C.** $a^3\sqrt{3}$ **D.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{6}$

Câu 27: [512944] Cho hình hộp chữ chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 10cm, AD = 16cm$. Biết rằng BC' hợp với đáy một góc φ và $\cos\varphi = \frac{8}{17}$. Tính thể tích khối hộp.

A. 4800 **B.** 3400 **C.** 6500 **D.** 5200

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. A	03. D	04. A	05. B	06. B	07. B	08. B	09. C	10. C
11. A	12. C	13. D	14. B	15. B	16. C	17. D	18. B	19. A	20. D
21. C	22. D	23. D	24. B	25. D	26. A	27. A			

CHỦ ĐỀ 15
[TV6031]THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

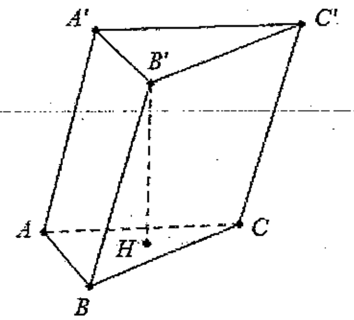
1. Công thức giải toán

Xét hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, kẻ $B'H \perp (ABC)$ tại H.

Khi đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo công thức: $V_{ABC.A'B'C'} = B'H.S_{ABC}$.

Lưu ý:

$B'H = d\left(B';(ABC)\right) = d\left(A';(ABC)\right) = d\left(C';(ABC)\right)$.



Tương tự như vậy, với H là hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ thì thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ được tính theo công thức: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'H.S_{ABCD}$.

Lưu ý: $B'H = d\left(B';(ABCD)\right) = d\left(A';(ABCD)\right) = d\left(C';(ABCD)\right) = d\left(D';(ABCD)\right)$.

Và rõ ràng $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABC.A'B'C'}$.

2. Chú ý quan trọng

Ta có $V_{A'.ABC} = V_{C.ABA'} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'}$.

$V_{A'.BCB'} = V_{C.A'B'B} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'}$.

$V_{A'.B'C'C} = V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(C;(A'B'C')\right).S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(A';(ABC)\right).S_{ABC} = V_{A'.ABC}$.

Như vậy $V_{A'.ABC} = V_{A'.BCB'} = V_{A'.B'C'C}$ mà $V_{A'.ABC} + V_{A'.BCB'} + V_{A'.B'C'C} = V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow V_{A'.ABC} = V_{A'.BCB'} = V_{A'.B'C'C} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Thông qua hệ thức trên, để tính thể tích khối lăng trụ thì ta có thể quy về tính thể tích khối chóp.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

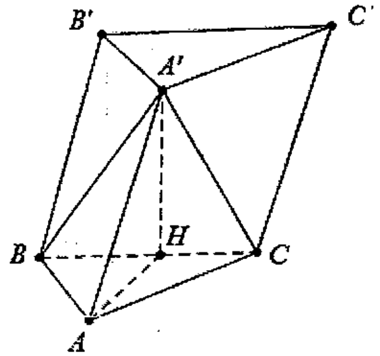
Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải:

Kẻ $A'H\perp BC\ (H\in BC)$, ta có:

$$\begin{cases}(A'BC)\perp(ABC)\\(A'BC)\cap(ABC)=BC\\A'H\subset(PCA'),A'H\perp CP\end{cases}\Rightarrow A'H\perp(ABC).$$



Bài ra $\Delta A'BC$ vuông cân tại $A'\Rightarrow A'H=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Do đó $V=A'H.S_{ABC}=A'H.\dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^0$

$=\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn B**

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

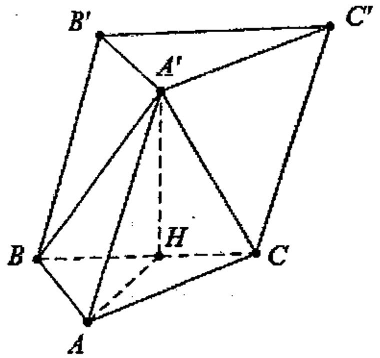
Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

Bài ra có $A'H\perp(ABC)$.

Tam giác ABC đều có H là trung điểm của cạnh BC

$\Rightarrow AH\perp BC\Rightarrow \sin 60^0=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AH=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{6a^2-3a^2}=a\sqrt{3}$.



Do đó $V=A'H.S_{ABC}=A'H.\dfrac{1}{2}AB^2\sin 60^0$

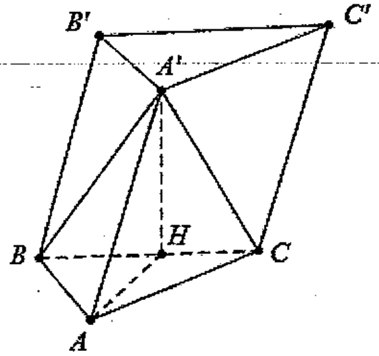
$=a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.4a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3a^3$. **Chọn A**

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V = a^3\sqrt{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.



Bài ra có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(A'A;(ABC))} = \widehat{A'AH}$.

Mà $\widehat{(A'A;(ABC))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{A'H}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow A'H = AH\sqrt{3}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = 2a$

$\Rightarrow AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ và $AH = \dfrac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow A'H = AH\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Do đó $V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AB.AC = a^3\sqrt{3}$. **Chọn D**

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{9a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \dfrac{9a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$.

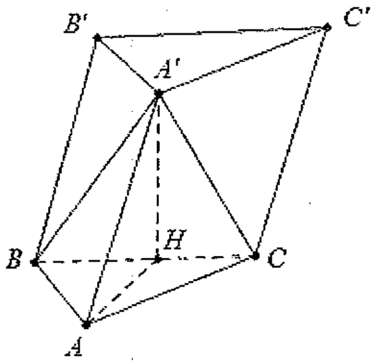
Lời giải:

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

Bài ra có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(A'A;(ABC))} = \widehat{A'AH}$.

Mà $\widehat{(A'A;(ABC))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 60^0 = \dfrac{A'H}{A'A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{3a}{2} \\ \cos 60^0 = \dfrac{AH}{A'A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Tam giác ABC vuông cân tại A

$$\Rightarrow AB = AC = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

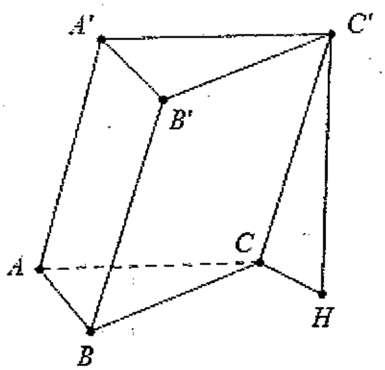
Do đó $V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{9a^3}{8}$. **Chọn A**

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và tạo với đáy góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

Kẻ $C'H \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(CC';(ABC))} = \widehat{C'CH}$.



Bài ra $\widehat{(CC';(ABC))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{C'CH} = 60^0$

$$\Rightarrow \sin 60^0 = \frac{C'H}{CC'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C'H = \frac{\sqrt{3}}{2}CC' = \frac{3a}{2}.$$

Do đó $V = C'H.S_{ABC} = C'H.\dfrac{1}{2}AB.AC\sin 60^0$

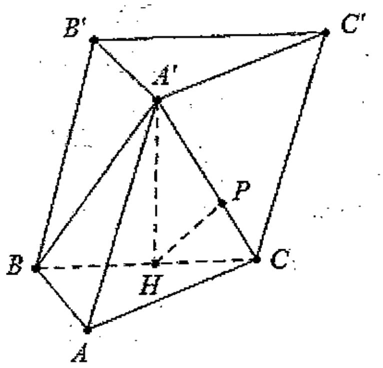
$= \dfrac{3a}{2}.\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn B**

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.



Bài ra có $A'H \perp (ABC)$.

Lại có $\dfrac{d(B;(A'AC))}{d(H;(A'AC))} = \dfrac{BC}{HC} = 2.$

Mà $d(B;(A'AC)) = a\sqrt{2} \Rightarrow d(H;(A'AC)) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

Kẻ $HP \perp A'C$ $(P \in A'C)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BC \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'BC) \Rightarrow AC \perp HP.$

Như vậy $\begin{cases} HP \perp AC \\ HP \perp A'C \end{cases} \Rightarrow HP \perp (A'AC) \Rightarrow d(H;(A'AC)) = HP \Rightarrow HP = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

Cạnh $HC = \dfrac{BC}{2} = a \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HP^2} - \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{2}{a^2} - \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$

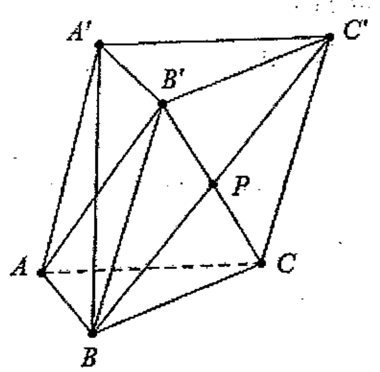
$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AC.BC = a.\dfrac{1}{2}.2a.2a = 2a^3$. **Chọn B**

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi, với cạnh $AB' = 4$ và $A'B = 6$. Đường thẳng BC' và $B'C$ cắt nhau tại điểm P, khoảng cách từ P đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 3. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 36$. **B.** $V = 42$. **C.** $V = 24$. **D.** $V = 32$.

Lời giải:

Tứ giác $ABB'A'$ là hình thoi và $AB' = 4$, $A'B = 6$



$\Rightarrow S_{ABB'A'} = \dfrac{1}{2}AB'.A'B = 12 \Rightarrow S_{ABB'} = 6.$

Ta có P là trung điểm của cạnh $B'C$

$\Rightarrow \dfrac{d(C;(ABB'A'))}{d(P;(ABB'A'))} = \dfrac{CB'}{PB'} = 2.$

Bài ra $d(P;(ABB'A')) = 3 \Rightarrow d(C;(ABB'A')) = 6.$

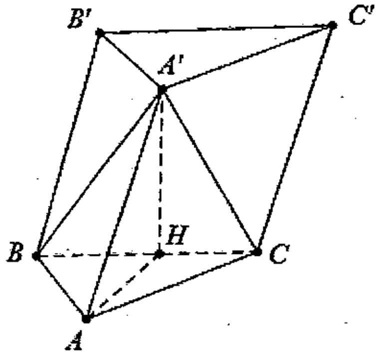
Lại có $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{C.ABB'}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3.\dfrac{1}{3}d(C;(ABB')).S_{ABB'} = 36$. **Chọn A**

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng 3. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3\sqrt{3}$. **B.** $V=3$. **C.** $V=6$. **D.** $V=2$.

Lời giải:



Ta có $AC//A'C' \Rightarrow AC//(A'B'C')$

$\Rightarrow d(AC;A'B')=d(AC;(A'B'C'))=d(A;(A'B'C'))$

$=d(A';(ABC))=A'H.$

Bài ra $d(AC;A'B')=3 \Rightarrow A'H=3.$

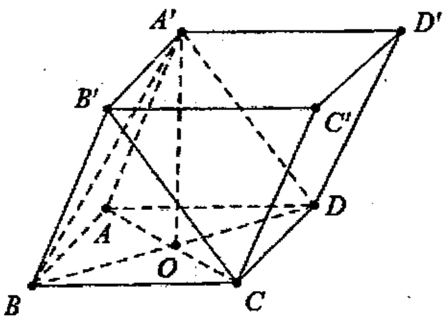
Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=3.\frac{1}{2}.2^2\sin 60^0=3\sqrt{3}.$

Chọn A

Ví dụ 9: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{2}$. Đường thẳng AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải:



Gọi $O=AC\cap BD \Rightarrow A'O\perp(ABCD)$.

Ta có $B'C//A'D \Rightarrow B'C//(A'BD)$

$\Rightarrow d(B';(A'BD))=d(C;(A'BD))$.

Lại có $\begin{cases} CO\perp BD \\ CO\perp A'O \end{cases} \Rightarrow CO\perp(A'BD)$

$\Rightarrow d(C;(A'BD))=CO \Rightarrow d(B';(A'BD))=CO.$

Bài ra $d(B';(A'BD))=\frac{a}{2} \Rightarrow CO=\frac{a}{2} \Rightarrow BC=\frac{a}{\sqrt{2}}.$

Từ $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(AA';(ABCD))}=\widehat{A'AO}\Rightarrow\widehat{A'AO}=60^0$

$\Rightarrow\tan60^0=\dfrac{A'O}{OA}=\sqrt{3}\Rightarrow A'O=OA\sqrt{3}=OC\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'O.S_{ABCD}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.BC^2=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn B**

Ví dụ 10: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ điểm D' đến mặt phẳng $(A'AC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Đường thẳng AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

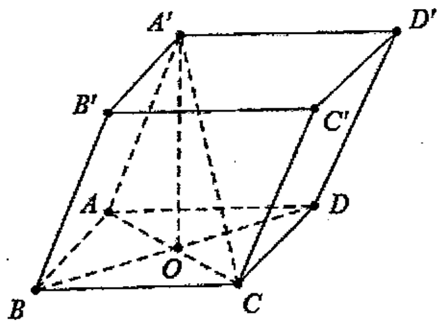
Lời giải:

Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow A'O\perp(ABCD)$.

Ta có $DD'//AA'\Rightarrow DD'//(A'AC)\Rightarrow d(D';(A'AC))=d(D;(A'AC))$.

Lại có $\begin{cases}DO\perp AC\\ DO\perp A'O\end{cases}\Rightarrow DO\perp(A'AC)\Rightarrow d(D;(A'AC))=DO\Rightarrow d(D';(A'AC))=DO.$

Bài ra $d(D';(A'AC))=\dfrac{a}{2}\Rightarrow DO=\dfrac{a}{2}\Rightarrow AD=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Từ $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(AA';(ABCD))}=\widehat{A'AO}$

$\Rightarrow\widehat{A'AO}=60^0\Rightarrow\tan60^0=\dfrac{A'O}{OA}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'O=OA\sqrt{3}=OD\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=A'O.S_{ABCD}$

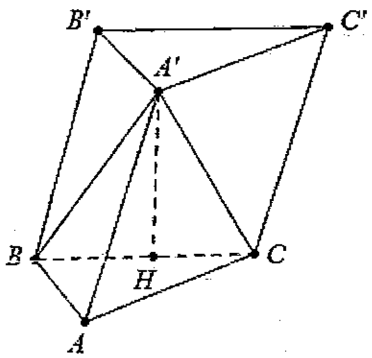
$=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.AD^2=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn C**

Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Góc giữa mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.



Bài ra có $A'H \perp (ABC)$.

Lại có $\begin{cases} AC \perp BC \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'BC) \Rightarrow AC \perp A'C.$

Như vậy $\begin{cases} (A'AC) \cap (ABC) = AC \\ AC \perp A'C,\ AC \perp BC \\ A'C \subset (A'AC),\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((A'AC);(ABC))} = \widehat{A'CB} \Rightarrow \widehat{A'CB} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{A'H}{HC} = \sqrt{3} \Rightarrow A'H = \dfrac{BC}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AC.BC = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.2a.2a = 2a^3\sqrt{3}$. **Chọn D**

Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, góc $\widehat{A'AC'} = 30^0$. Cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và tạo với đáy góc 60^0, đường thẳng AC' tạo với đáy góc 30^0. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$.

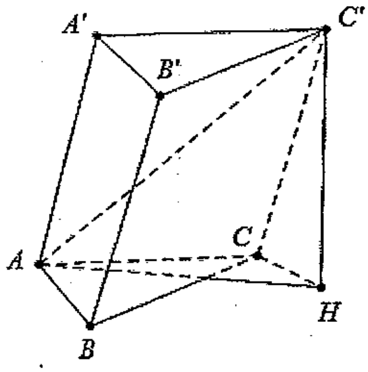
Lời giải:

Kẻ $C'H \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(CC';(ABC))} = \widehat{C'CH}$.

Bài ra $\widehat{(CC';(ABC))} = 60^0 \Rightarrow \widehat{C'CH} = 60^0$

$\Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{C'H}{CC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}CC' = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có $\widehat{(C'A;(ABC))} = \widehat{C'AH}$.



Bài ra $\widehat{(C'A;(ABC))} = 30^0 \Rightarrow \widehat{C'AH} = 30^0$

$\Rightarrow \sin 30^0 = \dfrac{C'H}{C'A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C'A = 2C'H = 3a.$

Lại có $\widehat{A'AC'} = \widehat{AC'C}$ mà $\widehat{A'AC'} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AC'C} = 30^0$

$$\Rightarrow AC^2 = C'A^2 + C'C^2 - 2C'A.C'C\cos 30^0 \Rightarrow AC^2 = 9a^2 + 3a^2 - 2.3a.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2.$$

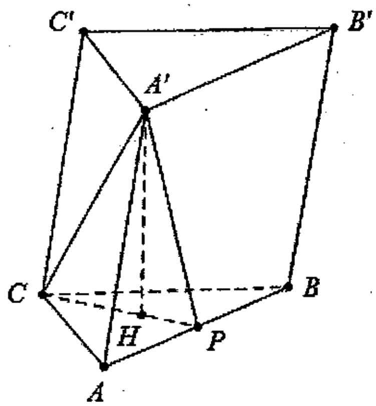
Do đó $V = C'H.S_{ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{1}{2}AC^2 \sin 60^0 = \dfrac{3a}{4}.3a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn D**

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^0$. Điểm P thuộc cạnh AB sao cho $PA = PB$. Tam giác PCA' đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{3a^3}{7}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{7}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{7}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải:

Kẻ $A'H \perp PC$ $(H \in PC)$, ta có



$$\begin{cases} (PCA') \perp (ABC) \\ (PCA') \cap (ABC) = PC \\ A'H \subset (PCA'), A'H \perp CP \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC).$$

Mà $\Delta PCA'$ đều $\Rightarrow HP = HC = \dfrac{CP}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Lại có $\sin 60^0 = \dfrac{A'H}{A'C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài ra ΔABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 30^0$

$\Rightarrow \tan 30^0 = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{2AP}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AP = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PC^2 = AC^2 + AP^2 = AC^2 + \dfrac{3AC^2}{4} = \dfrac{7AC^2}{4}$

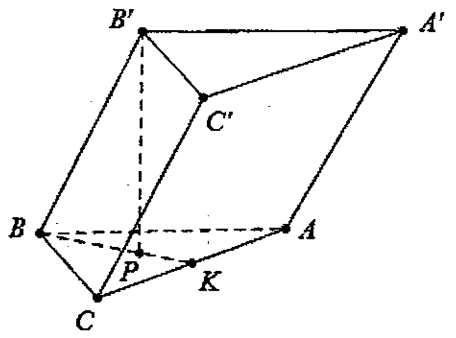
$\Rightarrow AC = \dfrac{2PC}{\sqrt{7}} = \dfrac{2a}{\sqrt{7}} \Rightarrow AB = AC\sqrt{3} = 2a\sqrt{\dfrac{3}{7}}.$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}AC.AB = \dfrac{3a^3}{7}$. **Chọn A**

Ví dụ 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Cạnh $BB' = a$ và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60^0. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{9a^3}{104}$. **B.** $V = \dfrac{9a^3}{208}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{52}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{104}$.

Lời giải:



Gọi P là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow B'P \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{(BB';(ABC))} = \widehat{B'BP} \Rightarrow \widehat{B'BP} = 60^0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 60^0 = \dfrac{B'P}{BB'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^0 = \dfrac{BP}{BB'} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B'P = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ BP = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Gọi $K = BP \cap AC \Rightarrow BK = \dfrac{3}{2}BP = \dfrac{3a}{4}$

Tam giác ABC vuông tại C có $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = AC\sqrt{3} = 2CK\sqrt{3} \Rightarrow CK = \dfrac{BC}{2\sqrt{3}}.$

Mà ΔBCK vuông tại $C \Rightarrow BC^2 + CK^2 = BK^2 = \dfrac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow BC^2 + \dfrac{BC^2}{12} = \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow BC = \dfrac{3a\sqrt{39}}{26} \Rightarrow AC = \dfrac{BC}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}.$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = B'P.S_{ABC} = B'P.\dfrac{1}{2}BC.AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3a\sqrt{39}}{26}.\dfrac{3a\sqrt{13}}{26} = \dfrac{9a^3}{208}$. **Chọn B**

Ví dụ 15: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, với cạnh $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AC. Đường thẳng $A'B$ và $B'C$ vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 3a^3$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải:

Tam giác ABC vuông cân tại B có cạnh $AC = 2a$

$\Rightarrow AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ và $HB = \dfrac{AC}{2} = a$.

Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'} = \left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}\right) - \overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} - \left(\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{HA}\right) = \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC}\right) - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA'} = -\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA'}$.

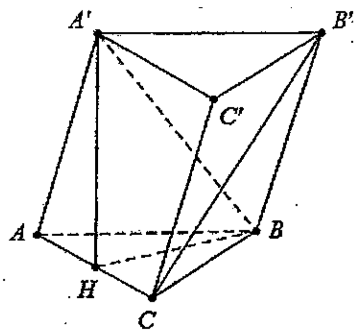
Mà $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA'}$ và $A'B \perp B'C$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA'}\right)\left(-\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA'}\right) = 0$

$\Rightarrow -HB^2 + HA'^2 = 0 \Rightarrow HA' = HB = a$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC}$

$= a.\dfrac{1}{2}AB.BC = a.\dfrac{1}{2}.2a^2 = a^3$. **Chọn C**



Ví dụ 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Đường thẳng AA' và $B'C'$ tạo với nhau một góc α, với $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

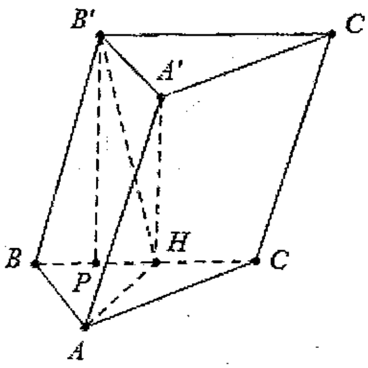
A. $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của cạnh BC.

Bài ra có $A'H \perp (ABC)$.

Cạnh $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$



$\Rightarrow HA = HB = HC = \dfrac{BC}{2} = a.$

Lại có $\begin{cases} AA'//BB' \\ B'B'//BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AA';B'C')} = \widehat{(BB';BC)}$ (1)

Ta có $B'H^2 = A'B'^2 + A'H^2 = a^2 + \left(AA'^2 - AH^2\right)$

$= a^2 + \left(AA'^2 - a^2\right) = AA'^2 \Rightarrow B'H = AA' \Rightarrow B'H = B'B$

$\Rightarrow \Delta B'BH$ cân tại $B' \Rightarrow \widehat{B'BH} < 90^0$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \widehat{(AA';B'C')} = \widehat{B'BH} = \alpha$ mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos\widehat{B'BH} = \dfrac{1}{4}$.

Kẻ $B'P \perp BH$ $(P \in BH) \Rightarrow PB = PH = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\cos\widehat{B'BH} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{BP}{BB'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow BB' = 4BP = 2a$

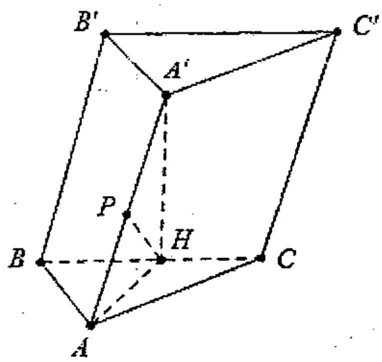
$\Rightarrow A'A = 2a \Rightarrow A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 4a^2 - a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}.$

Do đó $V = A'H.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{2}$. **Chọn A**

Ví dụ 17: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh $AB = 2$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa đường thẳng BC và AA' bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Biết $BC > \sqrt{6}$, tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 3.$ **B.** $V = 2\sqrt{3}.$ **C.** $V = 1.$ **D.** $V = \sqrt{3}.$

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Tam giác ABC cân tại A mà $HB = HC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHA')$.

Khi đó kẻ $HP \perp A'A$ $(P \in A'A) \Rightarrow BC \perp HP$.

Như vậy $\begin{cases} HP \perp A'A \\ HP \perp BC \end{cases} \Rightarrow d(A'A;BC) = HP.$

Bài ra $d(A'A;BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác AHA' vuông tại $H \Rightarrow \frac{1}{A'H^2}+\frac{1}{HA^2}=\frac{1}{HP^2}=\frac{4}{3}$.

Tam giác $A'BC$ vuông cân tại $A' \Rightarrow A'H=\frac{BC}{2}$.

Mà $HA^2=AB^2-BH^2=4-\frac{BC^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{\frac{BC^2}{4}}+\frac{1}{4-\frac{BC^2}{4}}=\frac{4}{3}$

Đặt $t=\frac{BC^2}{4}>0 \Rightarrow \frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}=\frac{4}{3} \Rightarrow t(4-t)=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow BC=2 \\ t=3 \Rightarrow BC=2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Mà $BC>\sqrt{6} \Rightarrow BC=2\sqrt{3} \Rightarrow A'H=\sqrt{3}$ và $AH=1$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=\sqrt{3}.\frac{1}{2}AH.BC=\frac{\sqrt{3}}{2}.1.2\sqrt{3}=3$. **Chọn A**

Ví dụ 18: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với cạnh $AB=\sqrt{3}$, $AD=\sqrt{7}$. Cạnh bên $BB'=1$, mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

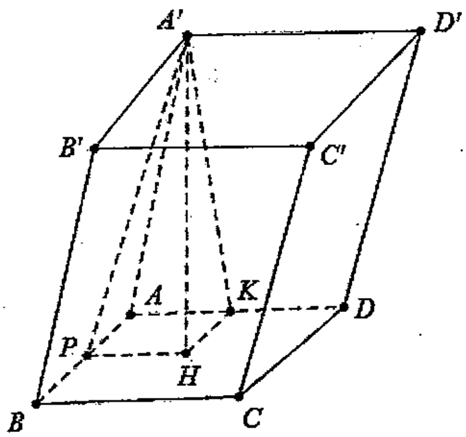
A. $V=3$. **B.** $V=6$. **C.** $V=7$. **D.** $V=\sqrt{21}$.

Lời giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$ tại H.

Kẻ $HP \perp AB$ tại P, ta có $\begin{cases} AB \perp HP \\ AB \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HP) \Rightarrow AB \perp A'P$.

Như vậy $\begin{cases} (ABB'A') \cap (ABCD)=AB \\ AB \perp A'P,\ AB \perp HP \\ A'P \subset (ABB'A'),\ HP \subset (ABCD) \end{cases}$



$\Rightarrow \widehat{((ABB'A');(ABCD))}=\widehat{A'PH}$.

Mà $\widehat{((ABB'A');(ABCD))}=45^0 \Rightarrow \widehat{A'PH}=45^0$.

Kẻ $HK \perp AD$ tại K, tương tự như trên, ta có $A'K \perp AD$ và $\widehat{A'KH}=60^0$.

Đặt $HP=AK=x>0$, $HK=AP=y>0$

$\Rightarrow \begin{cases} A'P^2+AP^2=A'A^2=1 \\ A'K^2+AK^2=A'A^2=1 \end{cases}$

Lại có $A'P = HP\sqrt{2} = x\sqrt{2}$ và $\cos 60^0 = \dfrac{HK}{A'K} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A'K = 2HK = 2y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 4y^2 + x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3}{7} \\ y^2 = \dfrac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \end{cases} \Rightarrow A'H = HP = x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}.$$

Do đó $V = A'H.S_{ABCD} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}.\sqrt{3}.\sqrt{7} = 3$. **Chọn A**

III.[TT6032] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [509955] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, cạnh $AA_1 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.
B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2: [509959] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3a^3\sqrt{21}}{8}$.
B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{24}$.
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{12}$.
D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{8}$.

Câu 3: [509962] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{9a^3}{8}$.
D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{27a^3}{8}$.

Câu 4: [509967] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Mặt phẳng (A_1AB) hợp với mặt đáy một góc α với $\tan\alpha = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

Câu 5: [509973] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh AC. Diện tích tứ giác giác AA_1C_1C bằng $a^2\sqrt{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 6: [509979] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh AC. Đường thẳng A_1B hợp với đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7: [509985] Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh AC. Mặt phẳng (A_1AB) hợp với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

Câu 8: [509991] Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Chân đường vuông góc kẻ từ A_1 lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo hình vuông. Mặt phẳng (AA_1B_1B) hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

A. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
B. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
C. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
D. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 9: [509997] Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD}=120^0$. Biết $A_1.ABC$ là hình chóp đều và A_1D hợp với mặt đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

A. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
B. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=a^3$.
C. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3}{3}$.
D. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 10: [510000] Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $a=4$. Diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng ?

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $10\sqrt{3}$

Câu 11: [510005] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=2a$, $\widehat{CAB}=120^0$. Góc giữa $(AB'C)$ và (ABC) là 45^0. Thể tích khối lăng trụ là:

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $3a^3$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: [510009] Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích lăng trụ bằng:

A. $3a^3$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: [510013] Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của A' lên (ABC) trùng với trung điểm của AB. Biết góc giữa $(AA'C'C)$ và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng:

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $3a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 14: [510031] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a tâm O. Thể tích khối tứ diện $A.A'BO$ bằng ?

A. $\frac{a^3}{8}$ **B.** $\frac{a^3}{9}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{12}$

Câu 15: [510047] Đáy của một hình hộp đứng là một hình thoi có đường chéo nhỏ bằng d và góc nhọn bằng α. Diện tích của một mặt bên bằng S. Thể tích hình hộp đã cho là:

A. $dS\sin\frac{\alpha}{2}$. **B.** $dS\sin\alpha$. **C.** $\frac{1}{2}dS\sin\alpha$. **D.** $dS\cos\frac{\alpha}{2}$.

Câu 16: [510050] Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi I,J lần lượt là trung điểm cạnh AA' và BB'. Khi đó thể tích của khối đa diện $ABCIJC'$ bằng:

A. $\frac{3}{5}V$. **B.** $\frac{4}{5}V$. **C.** $\frac{3}{4}V$. **D.** $\frac{2}{3}V$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	**02. A**	**03. D**	**04. B**	**05. A**	**06. D**	**07. A**	**08. B**	**09. B**	**10. B**
11. C	**12. A**	**13. C**	**14. D**	**15. D**	**16. D**				

Chủ đề 16

TỶ SỐ THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

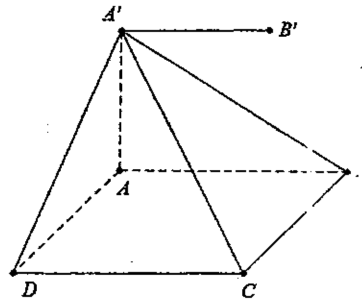
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để làm bài toán về tỷ số thể tích của lăng trụ chúng ta cần nhớ.

Nếu $A'B'//(ABCD) \Rightarrow d(A';(ABCD)) = d(B'(ABCD))$

Do đó $V_{A'.ABCD} = V_{B'.ABCD}$

Nếu $(A'B'C')//(ABCD)$ ta lấy điểm M bất kỳ thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ thì $V_{M.ABCD} = V_{A'.ABCD}$



Ngoài kiến thức trên, để làm bài toán liên quan đến tỷ số thể tích khối lăng trụ chúng ta cần ghi nhớ cách xác định thiết diện của khối lăng trụ, cách phân chia thể tích một khối thành nhiều khối khác nhau để tính toán.

I. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Kí hiệu V là thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi V_1 là thể tích của khối tứ diện $B'D'AC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

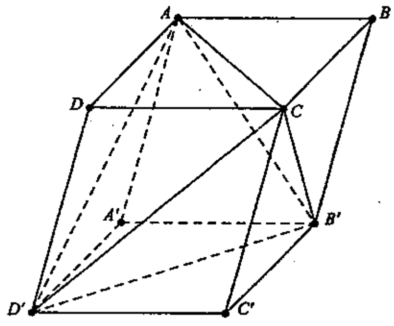
A. $V = 3V_1$ **B.** $V_1 = \frac{2}{3}V$ **C.** $V_1 = \frac{1}{2}V$ **D.** $V_1 = \frac{1}{3}V$

Lời giải:

Gọi h là chiều cao của khối hộp. Ta có:

$V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}h.S_{ABC} = \frac{1}{3}h.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}h.S_{ABCD} = \frac{1}{6}V$

$V_1 = V - 4.V_{B'.ABC} = V - 4.\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$. **Chọn D.**

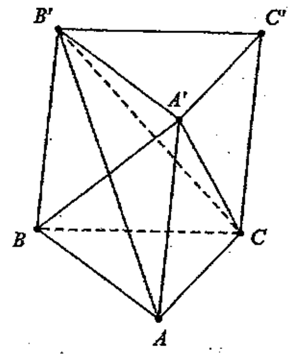


Ví dụ 2: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là $V = 24\left(m^3\right)$. Thể tích V của tứ diện $A'B'BC$ là:

A. $V = 8\,m^3$ **B.** $V = 6\,m^3$ **C.** $V = 12\,m^3$ **D.** $V = 16\,m^3$

Lời giải:

Do $AA' // (B'BC)$ suy ra $V_{A'BCB'} = V_{A.BB'C}$



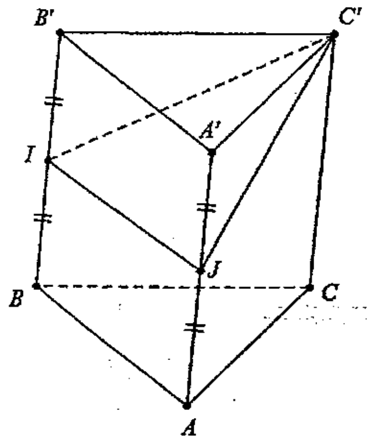
Mặt khác $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Do đó $V_{A'BCB'} = V_{A.BB'C} = \frac{24}{3} = 8\,m^3$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của BB' và AA'. Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và V' là thể tích khối lăng trụ $ABC.C'IJ$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

A. $V' = \frac{1}{3}V$ **B.** $V' = \frac{2}{3}V$ **C.** $V' = \frac{3}{8}V$ **D.** $V' = \frac{5}{8}V$

Lời giải:



Cách 1: Ta có: $V_{C'.ABC} = \frac{V}{3} \Rightarrow V_{C'.A'B'BA} = V - V_{C'.ABC} = \frac{2V}{3}$

$\Rightarrow V_{C'.A'B'JI} = \frac{V}{3}$. Do vậy $V' = V - V_{C'A'B'IJ} = V_{ABC.C'IJ} = \frac{2V}{3}$

Cách 2: Do bài toán mang tính chất tổng quát nên ta sẽ làm trong trường hợp đặc biệt rồi suy ra trường hợp tổng quát. Giả sử lăng trụ là lăng trụ đứng đáy là tam giác đều và đường cao bằng $AA' = 2a$

Khi đó $V = S.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$;

$V_{C'A'B'JI} = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

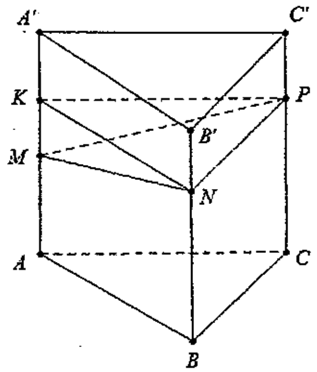
Suy ra $V' = \frac{2V}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: [CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH LẦN 2 - 2017] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng:

A. $\frac{2}{3}V$ **B.** $\frac{9}{16}V$ **C.** $\frac{20}{27}V$ **D.** $\frac{11}{18}V$

Lời giải:

Gọi K là hình chiếu của P trên AA'.



Ta có: $MK = MA' - KA' = \frac{1}{2}AA' - \frac{1}{3}AA'$

Khi đó $V_{ABC.KPN} = \frac{2}{3}V; V_{M.KPN} = \frac{1}{3}MK.S_{KNP}V$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)AA'.S_{ABC} = \frac{1}{18}$

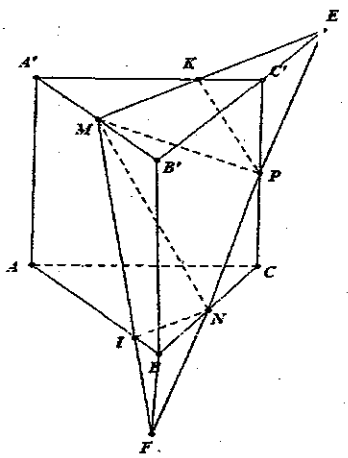
Do đó $V_{ABC.MNP} = \frac{2}{3}V - \frac{1}{18}V = \frac{11}{18}V$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, CC'. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích V_1. Gọi V là thể tích của khối lăng trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{61}{144}$. **B.** $\frac{37}{144}$. **C.** $\frac{25}{144}$. **D.** $\frac{49}{144}$.

Lời giải:

Gọi E và F lần lượt là giao điểm của NP và các đường thẳng $B'C'$ và $B'B$. Gọi $I = MF \cap AB$; $K = A'C' \cap ME$.



Gọi $V = V_{ABC.A'B'C'}$; $V_2 = V_{M.B'EF}$

Ta có: $V_2 = V_{M.B'EF} = \frac{1}{2}V_{A'.B'EF}$. Mặt khác $S_{B'EF} = \frac{9}{8}S_{B'C'CB}$

Khi đó $V_2 = V_{M.B'EF} = \frac{1}{2}.\frac{9}{8}V_{A'.B'C'CB} = \frac{1}{2}.\frac{9}{8}.\frac{2}{3}V = \frac{3}{8}V$

Lại có: $V_{E.KPC'} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}V_2 = \frac{1}{18}V_2$

$V_{F.BIN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}V_2 = \frac{1}{27}V_2 \Rightarrow V_1 = V_{MIKB'FP} = V_2 - \frac{1}{18}V_2 - \frac{1}{27}V_2$

$= \frac{49}{54}V_2 = \frac{49}{54}.\frac{3}{8}V = \frac{49}{144}V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{49}{144}$. **Chọn D.**

Chủ đề 17

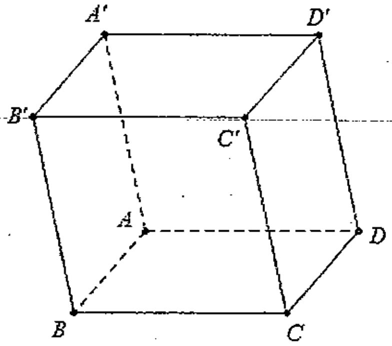
KHỐI HỘP - KHỐI LẬP PHƯƠNG

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Hình hộp

Định nghĩa: Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành

Hình vẽ bên là hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$



Tính chất:

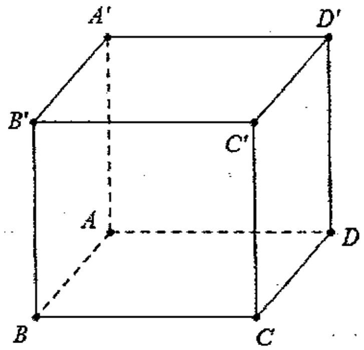
➢ Hình hộp có 6 mặt là hình bình hành, hai mặt đối diện của hình hộp bằng nhau.

➢ Hình hộp có 12 cạnh chia làm 3 nhóm mỗi nhóm 4 cạnh song song và bằng nhau.

➢ Thể tích hình hộp bằng diện tích đáy nhân chiều cao: $V = S_d.h$

2. Hình hộp đứng

Định nghĩa: Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.



Tính chất: Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

3. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất: Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

Thể tích hình hộp chữ nhật bằng tích 3 kích thước dài rộng cao.

4. Hình lập phương.

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất: Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Thể tích hình lập phương cạnh a bằng a^3 . Độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

1. Các bài toán cơ bản

Ví dụ 1: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu hình hộp có 2 mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có 3 mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có 4 mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

D. Nếu hình hộp có 5 mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Lời giải:

Đáp án **C** sai vì hình hộp đứng có đáy là hình bình hành thì 4 mặt bên của hình hộp đứng là các hình chữ nhật tuy nhiên nó không phải là hình hộp chữ nhật (vì đáy là hình bình hành) từ đó ta cũng suy ra **A** và **B** là các đáp án sai. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật là hình hộp chữ nhật.

B. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

C. Hình hộp chữ nhật có 3 mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông.

Lời giải:

Đáp án **B** sai vì hình hộp đứng có 3 kích thước là a, b, a có 6 mặt là các hình chữ nhật bằng nhau tuy nhiên nó không phải là hình lập phương. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là **sai.**

A. Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau thì hình hộp đã cho là hình hộp chữ nhật

B. Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều thì hình hộp đã cho là hình lập phương.

C. Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện có các cạnh đối vuông góc thì hình hộp đã cho là hình hộp thoi (Hình hộp có tất cả các mặt là hình thoi)

D. Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối vuông góc với nhau thì hình hộp đã cho là hộp đứng.

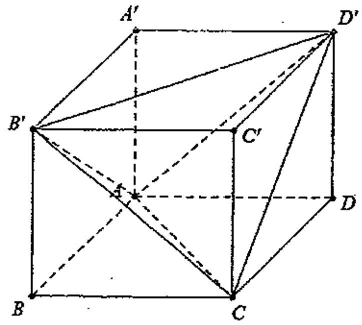
Lời giải:

Ta có: $A'C'//AC$ và $A'C'=AC$

+) Nếu $AC=B'D'$ suy ra các mặt đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đều là hình chữ nhật tương tự suy ra 6 mặt của khối hộp đều là hình chữ nhật nên $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật do đó A đúng.

+) Tứ diện đều có các cạnh đối diện bằng nhau và vuông góc với nhau. Nếu $AC = B'D'$ và $AC \perp B'D'$ suy ra 2 đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hình vuông tương tự như vậy suy ra 6 mặt của hình hộp là hình vuông, do đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên **B** đúng.

Tương tự suy ra **C** đúng. **Chọn D.**



Ví dụ 4: Một hình hộp chữ nhật có diện tích 3 mặt lần lượt bằng $30\,cm^2$; $18\,cm^2$ và $15\,cm^2$. Tính thể tích toàn phần của khối hộp đã cho.

A. $V = 60\,cm^3$ **B.** $V = 90\,cm^3$ **C.** $V = 120\,cm^3$ **D.** $V = 60\sqrt{3}\,cm^3$

Lời giải:

Đặt 3 kích thước của hình hộp đã cho lần lượt là $a\,(cm); b\,(cm); c\,(cm)$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ bc = 18 \\ ca = 15 \end{cases} \Rightarrow (ab).(bc).(ca) = 30.18.15 \Rightarrow V = abc = \sqrt{(ab).(bc)(ca)} = 90\,(cm^3).$$ **Chọn B.**

Tổng quát : Khối hộp chữ nhật có diện tích 3 mặt lần lượt là $S_1; S_2; S_3$ thì có thể tích là $V = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Ví dụ 5: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, cạnh bên $AA' = \sqrt{7}\,(cm)$, các đường chéo $AC' = 3\,(cm)$ và $BD' = 5\,(cm)$. Thể tích khối hộp đã cho là:

A. $6\sqrt{7}\,(cm^3)$ **B.** $3\,(cm^3)$ **C.** $21\,(cm^3)$ **D.** $3\sqrt{7}\,(cm^3)$

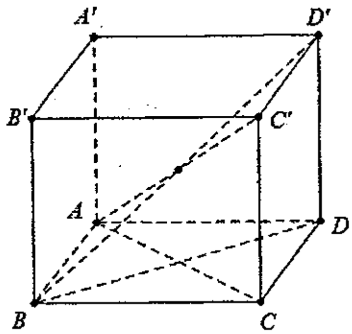
Lời giải :

Ta có : $AC = \sqrt{AC'^2 - CC'^2} = \sqrt{9-7} = \sqrt{2}$

Lại có $BD = \sqrt{BD'^2 - DD'^2} = \sqrt{25-7} = 3\sqrt{2}$

Do $ABCD$ là hình thoi nên $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = 3$

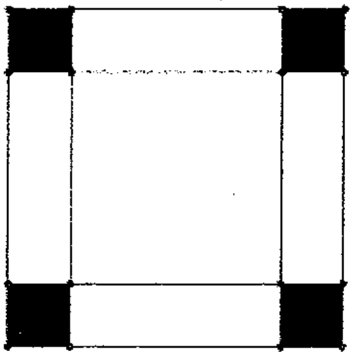
Khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.h = 3\sqrt{7}\,(cm^3)$. **Chọn D.**

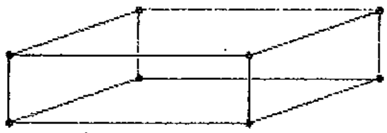


Ví dụ 6: Một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh bằng 12 cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp. Tìm độ dài của cạnh của hình vuông để dung tích của khối hộp bằng $4800\,cm^3$.

A. $38\,cm$ **B.** $36\,cm$ **C.** $44\,cm$ **D.** $42\,cm$

Lời giải:





Gọi x là cạnh hình vuông ban đầu

Do cắt bỏ ở mỗi góc một hình vuông có cạnh 12 cm, nên hình hộp sẽ có đáy là hình vuông có cạnh $x-2.12=x-24\,(cm)$, chiều cao $h=12\,(cm)$

Theo giả thiết ta có: $V_{hop}=S.h=(x-24)^2.12=4800\Rightarrow x=44\,cm$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình hộp chữ nhật có độ dài đường chéo của mặt đáy và 2 mặt bên lần lượt là $a; b; c$. Thể tích V của khối hộp đã cho là:

A. $V=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}abc$

B. $V=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

C. $V=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

D. $V=\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

Lời giải:

Gọi độ dài 3 cạnh của khối hộp lần lượt là $x; y; z$ khi đó ta có: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=b^2 \\ z^2+x^2=c^2 \end{cases}$

Suy ra $x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\\ y=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\\ x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}\end{cases}$

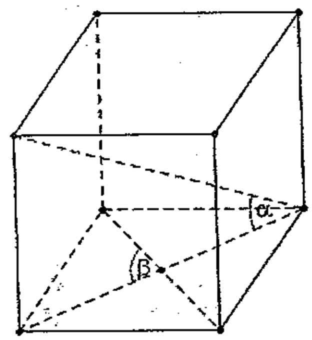
$\Rightarrow V=xyz=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Đường chéo của một hình hộp chữ nhật bằng d. Góc giữa đường chéo và mặt phẳng đáy bằng α, góc nhọn giữa 2 đường chéo của đáy bằng β. Thể tích của khối hộp đó là:

A. $\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$ **B.** $\frac{1}{3}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$

C. $d^3\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\beta$ **D.** $\frac{1}{2}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\beta$

Lời giải:



Độ dài đường cao khối hộp là $h=d\sin\alpha$

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật đáy là $d\cos\alpha$

Diện tích mặt đáy của khối hộp là $S=\frac{1}{2}(d\cos\alpha)^2.\sin\beta$

Do đó thể tích khối hộp là $V=S.h=\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta$

Chú ý: Diện tích tứ giác $ABCD$ là $S=\frac{1}{2}AC.BD\sin\left(\widehat{AC;BD}\right)$

Khi $ABCD$ là hình thoi thì $S=\frac{1}{2}AC.BD$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho biết thể tích của một khối hộp là V, đáy là hình vuông cạnh a. Khi đó diện tích toàn phần của khối hộp bằng:

A. $2\left(\frac{V}{a}+a^2\right)$ **B.** $\frac{4V}{a}+2a^2$ **C.** $2\left(\frac{V}{a^2}+a\right)$ **D.** $4\left(\frac{V}{a^2}+a\right)$

Lời giải:

Ta có: Diện tích đáy của hộp là $S=a^2\Rightarrow$ Chiều cao hộp là $h=\frac{V}{a^2}$

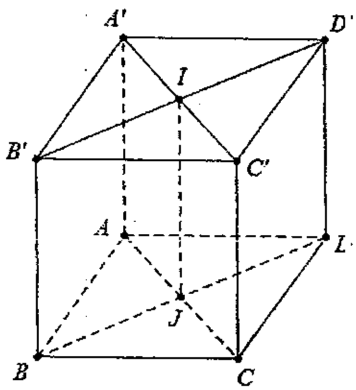
Diện tích toàn phần của khối hộp là: $S_{tp}=2\left(a^2+ah+ah\right)=2\left(a^2+\frac{2V}{a}\right)$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi và 2 mặt chéo $ACC'A'$, $BDD'B'$ đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt này có diện tích lần lượt là $100\,cm^2, 105\,cm^2$ và cắt nhau theo một đoạn thẳng có độ dài bằng $10\,cm$. Khi đó thể tích của hình hộp đã cho là:

A. $225\sqrt{5}\,cm^3$ **B.** $425\,cm^3$ **C.** $235\sqrt{5}\,cm^3$ **D.** $525\,cm^3$

Lời giải:

Gọi $I;J$ lần lượt là tâm hình thoi $A'B'C'D'$ và $ABCD$



Ta có: $\begin{cases}(ACC'A')\perp(ABCD)\\(BDB'D')\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow IJ\perp(ABCD)$

Khi đó $h=IJ=10;\ S_{ACC'A'}=AC.h\Rightarrow AC=\dfrac{100}{10}=10\,(cm)$

Lại có $BD=\dfrac{105}{10}=10{,}5\,(cm)S\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\dfrac{105}{2}$

Do đó $V=S.h=525\,cm^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có diện tích là $12\left(cm^2\right)$ Hai mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$ có diện tích lần lượt là $15\left(cm^2\right)$ và $20\left(cm^2\right)$. Khi đó thể tích của khối hộp đã cho là:

A. $V=60\left(cm^3\right)$ **B.** $V=30\left(cm^3\right)$ **C.** $V=20\left(cm^3\right)$ **D.** $V=30\sqrt{2}\left(cm^3\right)$

Lời giải:

Giả sử $AC=x;\ BD=y;\ AA'=h$ khi đó $S_{ABCD}=12=\dfrac{1}{2}xy\Rightarrow xy=24$

Lại có: $xh=15; yh=20$.

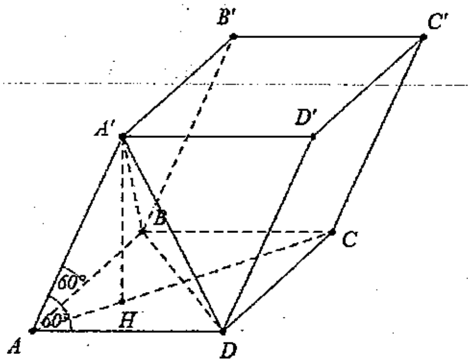
Mặt khác $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.h=\dfrac{1}{2}xyh=\dfrac{1}{2}\sqrt{(xy).(xh).(yh)}=30\sqrt{2}\left(cm^2\right)$. **Chọn D.**

II. Ví dụ vận dụng cao

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a. Biết rằng $\widehat{ABC}=120^0$ và $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=60^0$. Thể tích khối hộp đã cho là:

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:



Ta có: $\widehat{ABC}=120^0 \Rightarrow \widehat{BAD}=60^0$ suy ra tam giác ABD là tam giác đều cạnh a.

Dễ ràng chứng minh được các tam giác $A'AB$ và $A'AD$ là các tam giác đều cạnh a. Suy ra $A'.ABD$ là tứ diện đều cạnh a. Như vậy hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABD

Ta có: $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}$

$\Rightarrow A'H=\dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_{A'ABD}=\dfrac{1}{3}A'H.S_{ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Do đó $V_{hop}=3V_{A'.ABCD}=6V_{A'ABD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

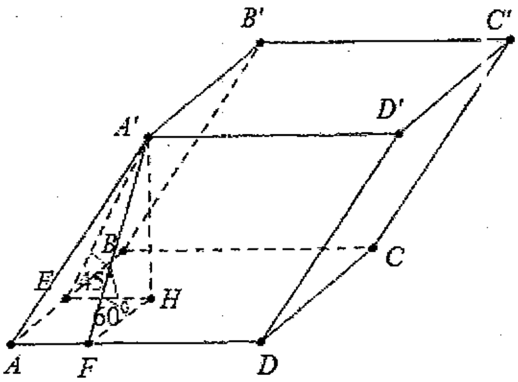
Chú ý: Công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bình luận: Đây là một bài toán không quá khó, tuy nhiên chúng ta cần phải quan sát một cách tinh tế để có thể nhận ra tứ diện $A'.ABD$ là tứ diện đều cạnh a.

Ví dụ 2: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=2\,(cm); AD=4\,(cm)$; các cạnh bên bằng nhau và bằng $\sqrt{21}\,(cm)$. Biết rằng các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc 45^0 và 60^0. Thể tích khối hộp đã cho là.

A. $V=24\,cm^3$ **B.** $V=48\,cm^3$ **C.** $V=24\sqrt{3}\,cm^3$ **D.** $V=24\sqrt{7}\,cm^3$

Lời giải:



Gọi H là chân đường cao hạ từ A' xuống mặt đáy $(ABCD)$. Lần lượt dựng các đường $HE \perp AB; HF \perp AD$ suy ra $(A'EH) \perp AB$ và $(A'FH) \perp AD \Rightarrow \widehat{A'EH} = 45^0; \widehat{A'FH} = 60^0$

Đặt $A'H = h \Rightarrow HE = h; HF = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

Dễ thấy $HEAF$ là hình chữ nhật nên có:

$HA^2 = HE^2 + HF^2 = h^2 + \dfrac{h^2}{3}$

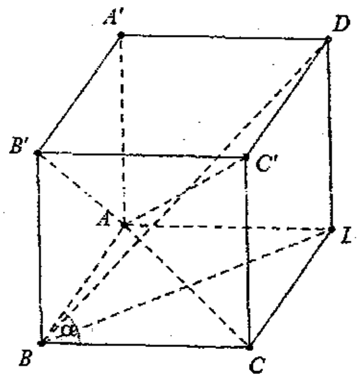
Lại có: $A'H^2 + HA^2 = h^2 + h^2 + \dfrac{h^2}{3} = \dfrac{7h^2}{3} = AA'^2 \Rightarrow h = 3(cm)$.

Do đó $V = 2.4.3 = 24\left(cm^3\right)$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có chu vi đáy là $20\,cm$, độ dài đường cao của khối hộp là $h = \sqrt{3}\,(cm)$, biết độ dài 2 đường chéo AC' và BD' lần lượt là $\sqrt{31}\,(cm)$ và $\sqrt{79}\,(cm)$. Thể tích V của khối hộp đã cho là:

A. $V = 32\,cm^3$ **B.** $V = 20\sqrt{3}\,cm^3$ **C.** $V = 24\,cm^3$ **D.** $V = 36\,cm^3$

Lời giải:



Ta có: $AC = \sqrt{AC'^2 - CC'^2} = \sqrt{31-3} = \sqrt{28}$

Lại có $BD = \sqrt{BD'^2 - h^2} = \sqrt{79-3} = \sqrt{76}$

Đặt $AB = x;\ BC = y;\ \widehat{ABC} = \alpha$, ta có: $x + y = 10$

Khi đó $x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = 28$; $x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha = 76$

Do đó $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ xy\cos\alpha = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 52 \\ xy\cos\alpha = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 24 \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = S_{ABCD}.h = xy\sin\alpha.h = 36cm^3$

Chọn D.

Ví dụ 4: Một hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $80\,cm^3$. Nếu tăng độ dài các cạnh của khối hộp thêm $1\,cm$ thì thể tích khối hộp là $150\,cm^3$. Nếu giảm độ dài các cạnh của khối hộp đi $1\,cm$ thì thể tích khối hộp là $36\,cm^3$. Diện tích toàn phần của hộp giấy ban đầu là.

A. $S=112\left(cm^2\right)$ **B.** $S=224\left(cm^2\right)$ **C.** $56\left(cm^2\right)$ **D.** $98\left(cm^2\right)$

Lời giải:

Giả sử 3 kích thước của khối hộp là $a;\ b;\ c\ \left(cm\right)$, ta có: $abc=80$

Diện tích toàn phần của hộp giấy là $S_{tp}=2\left(ab+bc+ca\right)$

Theo giả thiết bài toán ta có: $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=150$

$\Leftrightarrow abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=150 \Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c=69\ \left(1\right)$

Tương tự $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)=36 \Rightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=36$

Do đó $ab+bc+ca-\left(a+b+c\right)=43\ \left(2\right)$. Từ (1) và (2) suy ra $2\left(ab+bc+ca\right)=112=S_{tp}$.

Chọn A.

Chủ đề 18
[TV6033] MẶT CẦU – KHỐI CẦU

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Mặt cầu

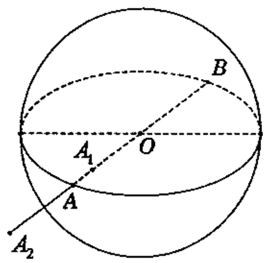
Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R. Kí hiệu: $S(O;R)=\{M \mid OM=R\}$.

2. Khối cầu

Mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm O, bán kính R. Kí hiệu: $B(O;R)=\{M \mid OM \le R\}$.

Nếu OA, OB là hai bán kính của mặt cầu sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB gọi là đường kính của mặt cầu.

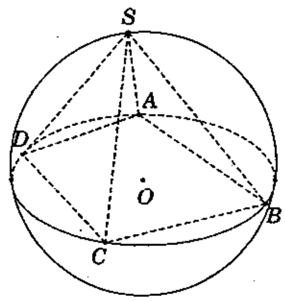
Định lí: Cho hai điểm cố định A, B. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là mặt cầu đường kính AB.



- $A \in S(O;R) \Leftrightarrow OA=R.$
- $OA_1 < R \Leftrightarrow A_1$ nằm trong mặt cầu.
- $OA_2 > R \Leftrightarrow A_2$ nằm ngoài mặt cầu.

3. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.



Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.

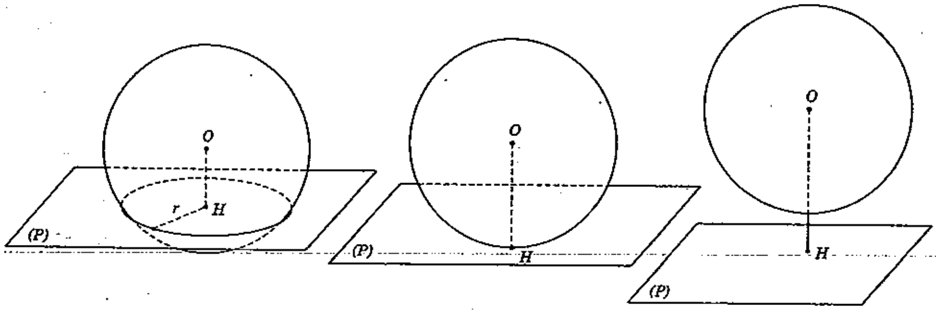
4. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

a. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất cả các mặt của hình chóp.

b. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu vuông góc của O trên (P). Khi đó:



- Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Khi $d=0$ thì mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm O và bán kính R, đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

- Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ có một điểm chung duy nhất H.

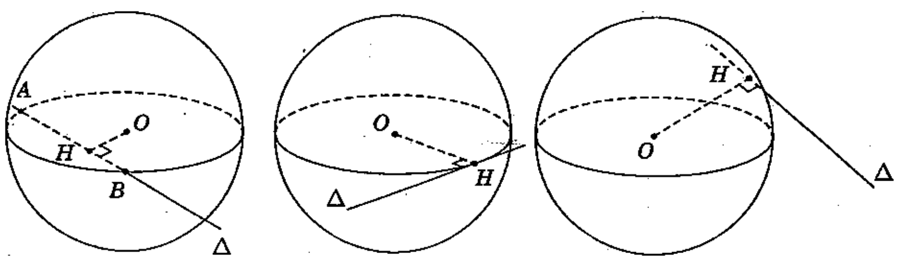
Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với $S(O;R)$ tại H và (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.

Chú ý: Cho H là một điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P) qua H. Thế thì (P) tiếp xúc với $S(O;R) \Leftrightarrow OH \perp (P)$.

- Nếu $d>R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ không có điểm chung.

6. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ. Khi đó:



- Nếu $d < R$ thì Δ cắt $S(O;R)$ tại hai điểm A, B . và H là trung điểm của AB .
- Nếu $d = R$ thì Δ và $S(O;R)$ chỉ có một điểm chung H, trong trường hợp này Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O;R)$ hay Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ và H là tiếp điểm.
- Nếu $d > R$ thì Δ và $S(O;R)$ không có điểm chung.

7. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

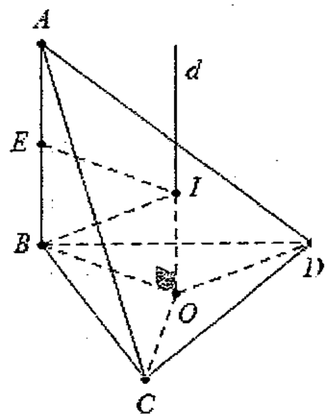
Gọi R là bán kính của mặt cầu thì:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

8. Phương pháp xác định mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài toán 1; **Tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông, chẳng hạn có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$. Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCD$ là mặt cầu đường kính AC, tâm là trung điểm của AC.**

Bài toán 2; **Tứ diện $ABCD$ có một cạnh vuông góc với một mặt, chẳng hạn có đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (BCD).**



Dựng tâm. Dựng trục d của tam giác BCD, thì $d // AB$.

Trong mặt phẳng (AB,d), dựng đường trung trực Δ của AB.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d và Δ.

Tính bán kính R của mặt cầu.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Gọi E là trung điểm của AB.

Xét ΔBOI vuông tại O, có

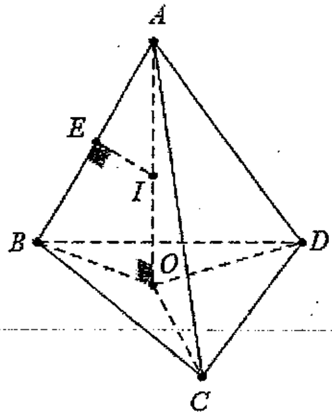
$$R^2 = BI^2 = OB^2 + OI^2 = OB^2 + BE^2 = OB^2 + \frac{AB^2}{4}.$$

Với OB là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Công thức tính nhanh. Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$ [CT1]

Bài toán 3; **Tứ diện $ABCD$ có các cạnh đi qua một đỉnh bằng nhau, chẳng hạn có các cạnh bên $AB = AC = AD$.**

Dựng tâm. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD thì ta có $AO \perp (BCD)$. Trong mặt phẳng (ABO) dựng đường trung trực của AB cắt AO tại I thì I **là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.**



Tính bán kính R của mặt cầu.

Gọi E là trung điểm của AB.

Hai tam giác vuông AOB và AEI đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AB}{AI} \Rightarrow R = AI = \dfrac{AB.AE}{AO} = \dfrac{AB^2}{2.AO}$.

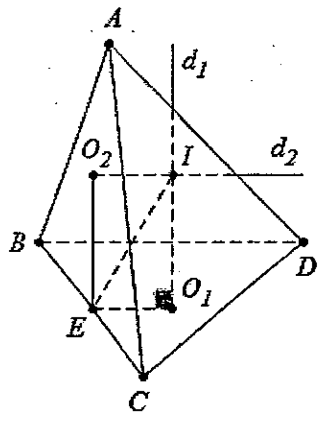
Công thức tính nhanh. Gọi độ dài cạnh bên $AB = AC = AD = x$ và h là chiều cao của tứ diện $ABCD$. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \dfrac{x^2}{2h}$ [CT2].

Bài toán 4; **Tứ diện $ABCD$ có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc, chẳng hạn có** mặt phẳng (ABC) **vuông góc với** mặt phẳng (BCD).

Dựng tâm. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ABC, E là trung điểm của BC, ta có

$O_1E \perp BC \Rightarrow O_1E \perp (ABC)$ (do $(ABC) \perp (BCD)$).

$O_2E \perp BC \Rightarrow O_2E \perp (BCD)$.



Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (BCD) thì d_1 là trục của tam giác BCD và $d_1 // OE$.

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (ABC) thì d_2 là trục của tam giác ABC và $d_2 // O_1E$.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2.

Tính bán kính R của mặt cầu.

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, ABC.

Ta có $O_1E^2 = O_1C^2 - EC^2 = R_1^2 - \dfrac{BC^2}{4}$; $O_2E^2 = O_2C^2 - EC^2 = R_2^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

Suy ra $IE^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{BC^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EC^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

Công thức tính nhanh. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCD, ΔABC và l là độ dài giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC), (BCD). Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{l^2}{4}}$ [CT3].

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) đường kính AB và đường thẳng Δ. Để hình tròn xoay sinh bởi (C) khi quay quanh Δ là một mặt cầu thì cần có thêm điều kiện nào sau đây:

(I) Đường kính AB thuộc Δ.

(II) Δ cố định và đường kính AB thuộc Δ.

(III) Δ cố định và hai điểm A, B cố định trên Δ.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Chỉ (III). **D.** Không cần thêm điều kiện nào.

Lời giải:

Theo bài ra, ta có Δ cố định và hai điểm A, B cố định trên Δ. **Chọn C.**

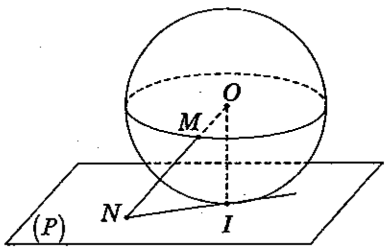
Ví dụ 2: Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P) có khoảng cách đến tâm O bằng R. Một điểm M tùy ý thuộc (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N. Hình chiếu của O trên (P) là I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. NI tiếp xúc với (S).

B. $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$.

C. Cả A và B đều sai.

D. Cả A và B đều đúng.



Lời giải:

Vì I là hình chiếu của O trên (P) nên $d(O,(P)) = OI$ mà $d[O,(P)] = R$.

Nên I là tiếp điểm của (P) và (S). Đường thẳng OM cắt (P) tại N nên IN vuông góc với OI tại I. Suy ra IN tiếp xúc với (S).

Tam giác OIN vuông tại I nên $ON = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IN = R$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA = 2R$. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B. Khi đó độ dài đoạn AB bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải:

Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên $AB \perp OB$.

Suy ra $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA = 2R$. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại B và C sao cho $BC = R\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ O đến BC bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của O lên BC.

Ta có $OB = OC = R$, suy ra H là trung điểm của BC nên $HC = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \frac{R}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hình cầu đường kính $AA' = 2r$. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{4r}{3}$. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn (C). Tính diện tích của đường tròn (C).

A. $\frac{8\pi r^2}{9}$. **B.** $\frac{8\pi r^2}{3}$. **C.** $\frac{4\pi r^2}{9}$. **D.** $\frac{2\pi r^2}{9}$.

Lời giải:

Theo giả thiết, ta có $AH=\frac{4r}{3}$. Ta suy ra $OH=\frac{r}{3}$.

Gọi r' là bán kính của đường tròn (C). Ta có $r'^2=r^2-OH^2=r^2-\frac{r^2}{9}=\frac{8r^2}{9}$.

Vậy diện tích của đường tròn (C) là $S=\pi r'^2=\frac{8\pi r^2}{9}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\frac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$. **D.** $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Lời giải:

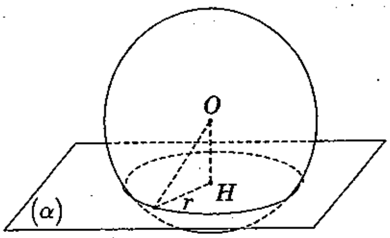
Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là d, ta có $d^2=R^2-r^2$.

Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R.

Theo giả thiết, ta có $\pi R^2=p\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2=\frac{p}{2}\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Suy ra $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (α). Biết khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với $S(O;R)$ là một đường tròn đường kính bằng



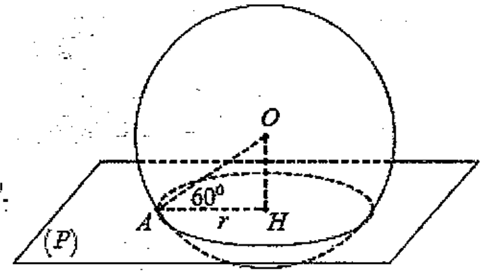
A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R}{2}$. **D.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của O xuống (α). Ta có $d(O,(\alpha))=OH=\frac{R}{2}<R$ nên (α) cắt $S(O;R)$ theo đường tròn $C(H;r)$. Bán kính đường tròn $C(H;r)$ là $r=\sqrt{R^2-OH^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra đường kính của đường tròn cần tính bằng $R\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho mặt cầu $S(O;R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và mặt phẳng (P) bằng 60^0 (như hình vẽ bên). Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:



A. πR^2. **B.** $\frac{\pi R^2}{2}$.

C. $\frac{\pi R^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi R^2}{8}$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì:

- H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S).
- $\widehat{(OA;(P))} = \widehat{(OA;AH)} = 60^0$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến $r = HA = OA.\cos 60^0 = \frac{R}{2}$..

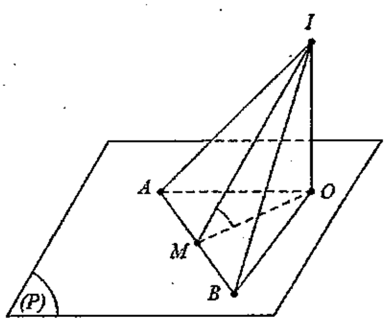
Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến $\pi r^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Cho mặt cầu $S(I;R)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn tâm O. Hai điểm $A, B \in (O)$ sao cho tam giác OAB đều và góc giữa hai mặt phẳng (IAB) và (OAB) bằng 60^0. Biết diện tích ΔIAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm^2$, tính bán kính R.

A. $R = \frac{3}{2}\ cm$. **B.** $R = \sqrt{5}\ cm$. **C.** $R = \frac{\sqrt{13}}{2}\ cm$. **D.** $R = \sqrt{6}\ cm$.

Lời giải:

Đặt $OA = OB = x$. Tam giác OAB là tam giác đều $\Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng (OAB) là hình chiếu của mặt phẳng (IAB) trên mặt phẳng (P).



$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{\Delta IAB}.\cos\varphi$ với $\varphi = \widehat{(IAB);(OAB)} = 60^0$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{S_{\Delta IAB}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = 1$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \widehat{IMO} = 60^0 \Rightarrow IO = \frac{3}{2}$.

Vậy $R = IA = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R. Ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ qua điểm A không nằm trên mặt cầu, đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là ba hình tròn có tổng diện tích bằng $12\pi\ cm^2$. Biết $IA=\sqrt{3}\ cm$, tính độ dài bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=2\ cm.$ **B.** $R=\sqrt{5}\ cm.$ **C.** $R=3\ cm.$ **D.** $R=\sqrt{2}\ cm.$

Lời giải:

Gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P),(Q),(R)$.

Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) với $(P),(Q),(R)$

Khi đó $R^2=a^2+r_1^2;\ R^2=b^2+r_2^2;\ R^2=c^2+r_3^2 \Rightarrow 3R^2=a^2+b^2+c^2+\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)$ $(*)$.

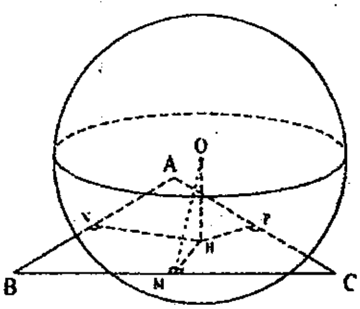
Mà $a^2+b^2+c^2=IA^2;\ S_1+S_2+S_3=\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow 3R^2=IA^2+\dfrac{S_1+S_2+S_3}{\pi}=3+12=15\Rightarrow R=\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho mặt cầu (S) có tâm O bán kính $R=2$. Tam giác ABC với 3 cạnh là $AB=3$; $AC=4$ và $BC=5$. Trong đó 3 cạnh đều tiếp xúc với mặt cầu. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 0 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải:



Giả sử AB, BC, CA tiếp xúc với mặt cầu tại các điểm $N, M, P \Rightarrow ON\perp AB$; $OM\perp BC$; $OP\perp AC$.

Kẻ $OH\perp(ABC)\Rightarrow HN\perp AB$; $HM\perp BC$; $HP\perp AC$

Hay H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Có $r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

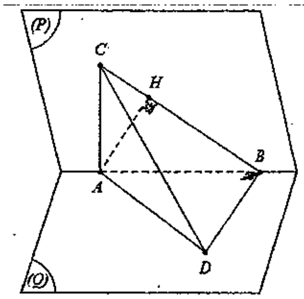
Mà ΔABC vuông tại $A\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.AC}{2}=6.$

Khi đó $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=6\Rightarrow r=1=OM$. Vậy $d(O;(ABC))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}.$ **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}a.$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a.$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

Lời giải:



Vì $(P)\perp(Q)$ và $CA\perp\Delta$ nên $CA\perp(Q)\Rightarrow CA\perp AD.$

Tương tự $BD\perp BC$ nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một goc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là trung điểm của CD và $R=\frac{CD}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác ABD, ACD ta có

$R=\frac{\sqrt{AC^2+AD^2}}{2}=\frac{\sqrt{AC^2+AB^2+BD^2}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: [THPT THANH CHƯƠNG – NGHỆ AN] Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Biết $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^0$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{2a}{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S=6\pi a^2.$ **B.** $S=4\pi a^2.$ **C.** $S=9\pi a^2.$ **D.** $S=8\pi a^2.$

Lời giải

Theo **bài toán 1,** ta có $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^0\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm I của SA.

Gọi D trên mặt phẳng (ABC) sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật, khi đó $AD=BC=a\sqrt{5}$ và $SD\perp(ABDC)$.

Kẻ đường thẳng d đi qua A song song với đường thẳng BC.

Ta có $BC//(SAd) \Rightarrow d(SA;BC) = d(BC;(SAd))$.

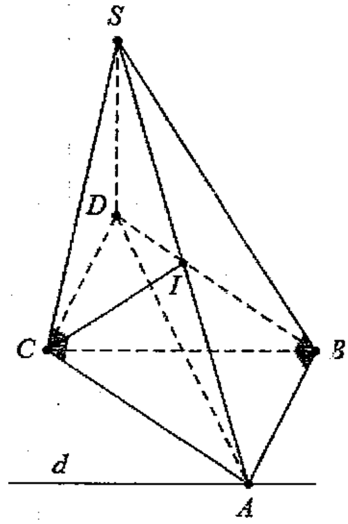
$= \frac{1}{2}d(D;(SAd)) \Rightarrow d = d(D;(SAd)) = \frac{4a}{3}$.

Kẻ $DH \perp Ad$ $(H \in Ad) \Rightarrow DH = 2.d(A;(BC)) = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.

Theo bài toán khoảng cách, có $\frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{d^2} \Rightarrow SD = 2a$.

$\Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = 3a \Rightarrow R = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy diện tích là $S = 4\pi R^2 = 9\pi a^2$. **Chọn C.**



Bài toán tương tự: Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Hai tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. 7π. **B.** $\frac{5\pi}{4}$. **C.** 20π. **D.** 5π.

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SB. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (MCD). Mặt phẳng (MCD) tạo với đáy một góc bằng 45^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $MHBC$.

A. $R = \frac{3a}{2}$. **B.** $R = \frac{3a}{4}$. **C.** $R = \frac{a}{2}$. **D.** $R = \frac{a}{4}$.

Lời giải:

Kẻ MI song song với AB, $I \in SA$.

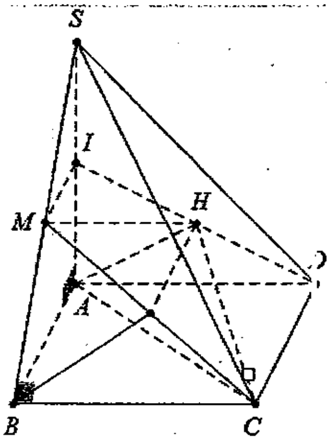
Kẻ AH vuông góc với DI với $H \in ID$.

Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (MCD)$.

Do đó $\widehat{((MCD);(ABCD))} = \widehat{IDA} = 45^0 \Rightarrow \begin{cases} SA = 2a \\ AI = AD = a \end{cases}$.

Mà $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB \Rightarrow \Delta MBC$ vuông tại B.

Xét ΔADI vuông tại A, có $AH = \frac{\sqrt{AI^2 + ID^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$



$\Rightarrow HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{5}.$

Khi đó $MC=\sqrt{\dfrac{SC^2+BC^2}{2}-\dfrac{SB^2}{4}}=\dfrac{3a}{2}\Rightarrow CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \Delta MHC$ vuông tại $H\Rightarrow \widehat{MHC}=90^0$.

Theo **bài toán 1,** ta có $\widehat{MBC}=\widehat{MHC}=90^0 \Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp của khối chóp $MHBC$ chính là trung điểm của MC. Vậy bán kính $R=\dfrac{MC}{2}=\dfrac{3a}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: [ĐỀ SỞ GD – ĐT – HN] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng qua A và vuông góc SC với cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$.

A. $V=\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\pi.$ **B.** $V=\dfrac{125}{6}\pi.$ **C.** $V=\dfrac{32}{3}\pi.$ **D.** $V=\dfrac{108}{3}\pi.$

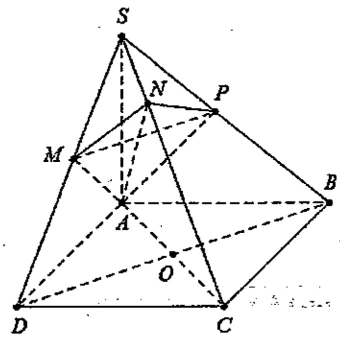
Lời giải:

Ta có $SC\perp(AMNP)\Rightarrow SC\perp AM$ mà $AM\perp SB$.

$\Rightarrow AM\perp MC\Rightarrow \widehat{AMC}=90^0$. Tương tự $\widehat{APC}=90^0$.

Mặt khác $\widehat{ANC}=90^0$ nên theo **bài toán 1** thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$ là trung điểm của AC.

Suy ra $R=\dfrac{AC}{2}=2\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi.$ **Chọn C.**



Bài toán tương tự: [Bạn đọc tự giải] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F bằng:

A. $R=a\sqrt{2}.$ **B.** $R=a.$ **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $R=\dfrac{a}{2}.$

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Cạnh bên SA vuông với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng $\dfrac{3a}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $R=3a.$ **B.** $R=\dfrac{5a}{2}.$ **C.** $R=\dfrac{3a}{2}.$ **D.** $R=2a.$

Lời giải:

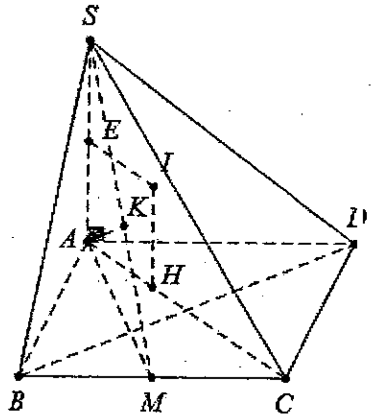
Ta có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$.

$\Rightarrow d(AD;SC) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC)) = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$ (ΔABC đều).

Kẻ $AK \perp SM$ $(K \in SM)$, có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

$\Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AK = \dfrac{3a}{2}$.



Xét ΔSAM vuông tại A, có $\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AK^2}$.

$\Rightarrow SA = \dfrac{AM.AK}{\sqrt{AM^2 - AK^2}} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3a^2 - \dfrac{9a^2}{4}} = 3a$.

Dựng hình: *Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD. Gọi E là trung điểm của SA.*

Kẻ $(d) \perp (ABD)$ tại H và (d) cắt mặt phẳng trung trực của SA tại I.

Khi đó $IA = IB = ID = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD$.

Xét khối chóp $S.ABD$ có $SA \perp (ABD)$ thuộc **bài toán 2** nên sử dụng $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$ [CT1]

Với $h = SA$ là chiều cao của khối chóp, $r = R_{\Delta ABD}$ là bán kính đường tròng ngoại tiếp ΔABD.

Áp dụng định lí sin trong ΔABD, ta có $2.R_{\Delta ABD} = \dfrac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow R_{\Delta ABD} = \dfrac{BD}{2.\sin 120^0} = 2a$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \dfrac{SA^2}{4}} = \dfrac{5a}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 17: Cho tứ diện $SABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASB} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$. Bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là:

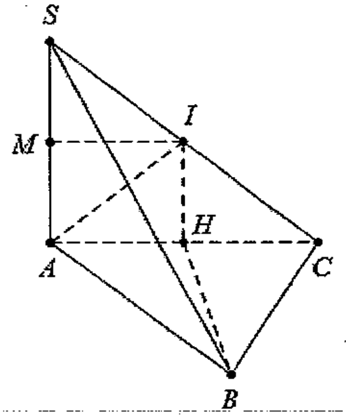
A. a. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Lời giải:

Đặt $\widehat{ASB} = 60^0$. Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mà $(SAB) \perp (SBC) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AB \perp BC$, $SB \perp BC$.

Xét ΔSBC vuông tại B, có $\widehat{BSC}=45^0 \Rightarrow SB=BC=a\sqrt{2}$.



Xét ΔSAB vuông tại A, có $\begin{cases} SA=\cos 60^0.SB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ AB=\sin 60^0.SB=\dfrac{a\sqrt{6}}{2} \end{cases}$.

Gọi H là trung điểm của AC, M là trung điểm của SA.

Kẻ đường thẳng $(d)\perp(ABC)$ tại H và cắt mặt phẳng trung trực của SA tại $I \Rightarrow IS=IA=IB=IC=R$.

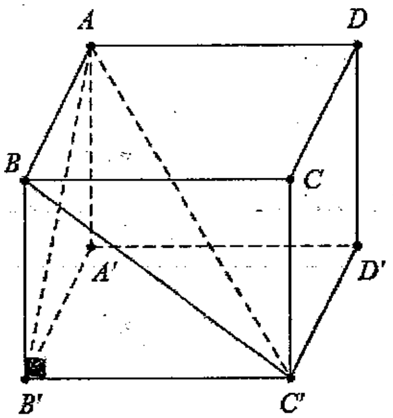
Xét ΔIHA vuông tại H có $IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=a$. **Chọn A.**

Ví dụ 18: [ĐỀ THI THỬ NGHIỆM – BGD] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a$ và $AA'=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R=3a$. **B.** $R=\dfrac{3a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $R=2a$.

Lời giải:

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB\perp BC$ mặt khác $AB\perp BB'$ Suy ra $AB\perp(BB'C'C)$, khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ thuộc **bài toán 2.**

Sử dụng công thức, ta có $[\mathrm{CT1}]: R=\sqrt{r^2+\dfrac{h^2}{4}}$

Với $h=AB=a$ và $\Delta BB'C'$ vuông tại B'

$$\Rightarrow r=\frac{BC'}{2}=\frac{\sqrt{B'B^2+B'C'^2}}{2}=\frac{\sqrt{A'A^2+AD^2}}{2}=a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{3a}{2}.$$ **Chọn C.**

Bài toán tương tự: [THPT LƯƠNG THẾ VINH – HÀ NỘI][Bạn đọc tự giải] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AD=4$, $AA'=5$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ACB'D'$.

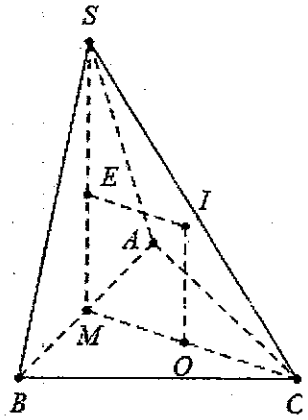
A. $S=50\pi$. **B.** $S=80\pi$. **C.** $S=100\pi$. **D.** $S=120\pi$.

Ví dụ 19: [ĐỀ THI MINH HỌA – BGD] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\frac{5\pi}{3}$.

Lời giải:

Hình vẽ bên:



- O là tâm của ΔABC, $(d_1)\perp(ABC)=O$.
- E là tâm của ΔSAB, $(d_2)\perp(SAB)=E$.
- $(d_1)\cap(d_2)=I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Nhận xét: Ta có $(SAB)\perp(ABC)\in$ **bài toán 4.**

Sử dụng $R=\sqrt{R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}}$ [CT3] với $R_1=R_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔSAB.

Và $(SAB)\cap(ABC)=AB\Rightarrow l=AB=1\Rightarrow R=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **Chọn B.**

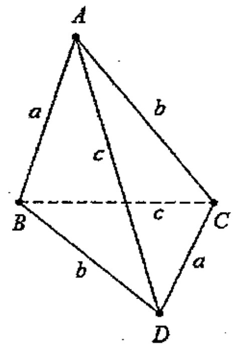
Bài toán tương tự: [THPT KIM LIÊN – HÀ NỘI] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a, AD=2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chiếu hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 20: [THPT CHUYÊN NGỮ – HN] Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=CD=BD=2a$. $AC=2a$; $AD=BC=a\sqrt{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $R=a\sqrt{2}$ **C.** $R=a\sqrt{5}$ **D.** $R=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Lời giải:



Xây dựng bài toán tổng quát với tứ diện $ABCD$, ta có

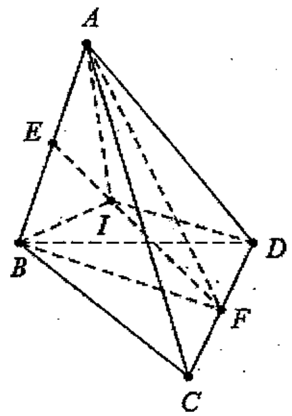
$AB = CD = a,\ AC = BD = b,\ AD = BC = c$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{AB^2+AC^2+AD^2}.$$

Áp dụng bài toán trên với $AB = AC = 2a,\ AD = a\sqrt{2}$, ta được

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{4a^2+4a^2+2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.a\sqrt{10} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$ **Chọn D.**



Hoặc *ta có thể xây dựng bài toán tổng quát với tứ diện* $ABCD$ *có hai cạnh đối có chung một đường trung trực, chẳng hạn có* AB *và* CD *có đoạn trung trực là* EF.

Đặt $AB = x,\ CD = y,\ EF = d \Rightarrow t = \dfrac{1}{2d^2}\left(d^2 + \dfrac{b^2-a^2}{4}\right).$

Biết t ta xác định được tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó, bán kính $R = \sqrt{d^2t^2 + \dfrac{x^2}{4}}.$

Với bài toán trên: Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Chứng minh được $AF = BF;\ CE = DE \Rightarrow EF$ là trung trực của hai đoạn thẳng AB, CD. Ta có $AF = BF = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}.$

$\Rightarrow d = EF = \sqrt{BF^2+BE^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ và $x = AB = 2a,\ y = CD = 2a.$

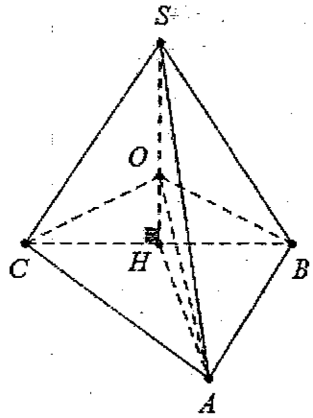
$$\Rightarrow t = \frac{1}{2d^2}\left(d^2+\frac{y^2-x^2}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \sqrt{d^2t^2+\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{4}.\frac{1}{4}+\frac{4a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$ **Chọn D.**

Ví dụ 21: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, các cạnh bên $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow HA = HB = HC$.



Kết hợp với giả thiết $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{(SA;AH)} = \widehat{SAH} = 60^0$.

Mà ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AH = a$.

Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Suy ra O thuộc đường thẳng SH nên O thuộc mặt phẳng (SBC).

Do đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Xét tam giác SHA, ta có $SA = \dfrac{AH}{\cos 60^0} = 2a \Rightarrow \Delta SBC$ là tam giác đều có độ dài cạnh bằng $2a \Rightarrow R = \dfrac{2a}{2.\sin 60^0} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

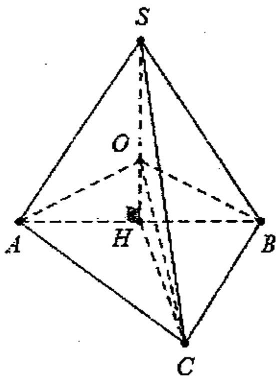
Hoặc sử dụng [CT2]: $R = \dfrac{x^2}{2h}$ với $\begin{cases} x = SA = 2a \\ h = SH = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow R = \dfrac{4a^2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **Chọn C.**

Bài toán tương tự:

Bài toán 1: Cho ba tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng và $\widehat{xSy} = 120^0$, $\widehat{ySz} = 60^0$, $\widehat{zSx} = 90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

A. $R = \dfrac{a}{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = a\sqrt{2}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải: Sử dụng định lý cosin, ta có



$\widehat{ASB} = 120^0 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$.

$\widehat{ASC} = 90^0 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 60^0 \Rightarrow BC = a$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C. Mà $SA = SB = SC \Rightarrow$ hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC hay trùng với trung điểm của AB.

Vậy $SH \perp (ABC)$, $SA = SB = SC$ nên sử dụng [CT2]: $R = \dfrac{x^2}{2h}$

Với $x = SA = a$, $h = SH = \dfrac{a}{2}$ suy ra $R = \dfrac{a^2}{2.\dfrac{a}{2}} = a$. **Chọn B.**

Bài toán 2: [Bạn đọc tự giải] Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ACD), (BCD) vuông góc với nhau, cạnh $AB = BC = BD = AC = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh của mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

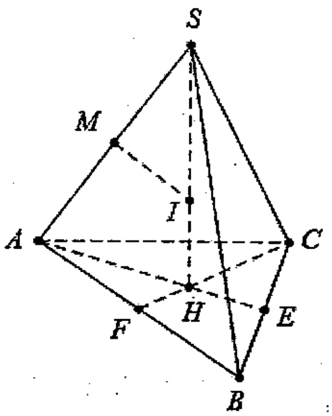
A. $S_{xq} = \pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 4\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = 2\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 8\pi a^2$.

Ví dụ 22: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng h. Biết rằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $R = \frac{2a}{3}$ và $\frac{h}{a}$ là số nguyên. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng về mối liên hệ giữa a, h.

A. $h = a$. **B.** $h = 3a$. **C.** $a^2 + 4ah - 3h^2 = 0$. **D.** $a : h = 1 : 2$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy. Trong mặt phẳng (SAH) dựng trung trực MI của cạnh SA cắt SH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp.



Hai tam giác SMI và SHA đồng dạng nên $\frac{SM}{SH} = \frac{SI}{SA}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SH^2 + HA^2}{2SH}.$$

Ta có $AH = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$.

Theo giả thiết $R = \frac{2a}{3}$ nên $\frac{a^2 + 3h^2}{6h} = \frac{2a}{3} \Leftrightarrow a^2 - 4ah + 3h^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = h \\ a = 3h \end{array}\right.$. **Chọn A.**

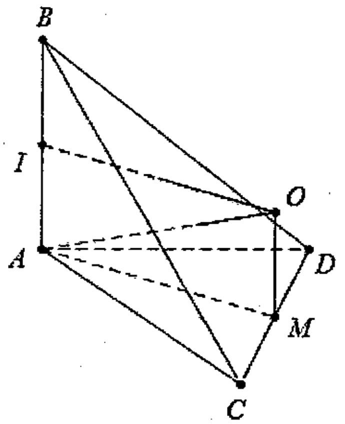
Mở rộng với bài toán hình chóp tam giác đều. *Nếu thay giả thiết đường cao $SH = h$, bằng :*

- *Cạnh bên $SA = b$ thì* $R = \frac{\sqrt{3}.b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.
- *Cạnh bên SA hợp với đáy một góc α thì* $R = \frac{\sqrt{3}}{3.\sin 2\alpha}a$.
- *Mặt bên tạo với mặt đáy góc β thì* $R = \frac{\sqrt{3}\left(4 + \tan^2\beta\right)}{12\tan\beta}a$.
- *Góc $\widehat{SAB} = \varphi$ thì* $R = \frac{\sqrt{3}.a}{4\sqrt{-\cos\varphi.\cos 3\varphi}}$.
- *Góc $\widehat{ASB} = \gamma$ thì* $R = \frac{\sqrt{3}.a}{4\sqrt{\sin\frac{\gamma}{2}.\sin\frac{3\gamma}{2}}}$.

Ví dụ 23: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$. **B.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **C.** $\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$. **D.** $4\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của CD. Khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ACD.

Từ M dựng đường thẳng d song song với AB.

Trong mặt phẳng $(AB;d)$ dựng đường thẳng trung trực của AB cắt d tại O. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp của khối chóp.

Ta có $MA = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AD^2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$

Và $AMOI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OM = IA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Do vậy $OA = \sqrt{OM^2+MA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = \pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$. **Chọn A.**

Hoặc: *Từ ba cạnh AB, AC, AD ta dựng được hình hộp chữ nhật nhận AB, AC, AD là ba cạnh xuất phát từ đỉnh S. Khi đó tâm của hình hộp chữ nhật là tâm của mặt cầu phải tìm và bán kính mặt cầu bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo hình hộp chữ nhật đó. Ta suy ra:*

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2+AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Tổng quát: Tứ diện $ABCD$, AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ (*)

Bài toán tương tự:

Bài toán 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ và các cạnh bên $SA = SB = SD$, $\widehat{BSD} = 90^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SABD$ là

A. $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. **B.** $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. **C.** $R = \frac{\sqrt{3}}{4}a$. **D.** $R = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Lời giải: Vì $SA = SB = SD$ và ΔABD đều cạnh $a \Rightarrow S.ABD$ là hình chóp tam giác đều.

Mặt khác $\widehat{BSD} = 90^0 \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow SA, SB, SD$ đôi một vuông góc và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABD$ là $R = \frac{\sqrt{SA^2 + SB^2 + SD^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Bài toán 2: [THPT ĐẶNG THÚC HỨA – NGHỆ AN] Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau. Gọi C là điểm cố định trên Oz, đặt $OC = 1$; các điểm A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $R = \sqrt{6}$. **D.** $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải: Đặt $OA = a, OB = b$ với $a, b > 0$ suy ra $OA + OB = OC \Leftrightarrow a + b = 1$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (OA, OB, OC đôi một vuông góc) là

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (1-a)^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 2a + 2}$$

Dễ thấy $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{a^2 - a + 1} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị bé nhất cần tìm là $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 24: [THPT CHUYÊN ĐH VINH – NGHỆ AN] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, cạnh $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. $R = a$. **B.** $R = a\sqrt{5}$. **C.** $R = a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt{2}$.

Lời giải:

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ hay là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A'.ABC$.

Sử dụng công thức tính nhanh [CT1]: $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \frac{A'A^2}{4}}$.

Ta có $\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^0$.

$$\Rightarrow R_{\Delta ABC} = \frac{BC}{2\sin\widehat{BAC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2.\sin 120^0} = a \text{ nên } R = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \frac{A'A^2}{4}} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Chọn D.

Bài tập tương tự:

Bài toán 1: [Bạn đọc tự giải] Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60^0. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho là:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{129}}{12}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{93}}{6}$.

Bài toán 2: [THPT KIM LIÊN – HÀ NỘI] Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $3a$ và chiều cao bằng $8a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$.

A. $R = 4a$. **B.** $R = 5a$. **C.** $R = a\sqrt{19}$. **D.** $R = 2a\sqrt{19}$.

Bài toán 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AA' = 3AM$. Biết góc $\widehat{BMC'} = 90^0$. Gọi V là thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tỷ số $\frac{V}{a^3}$ ***gần với giá trị nào sau đây nhất?***

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải: Đặt $AA' = 3x \Rightarrow AM = x,\ A'M = 2x$.

Xét ΔAMB vuông tại A, có $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Xét $\Delta MA'C'$ vuông tại A', có $MC' = \sqrt{A'M^2 + A'C'^2} = \sqrt{4x^2 + a^2}$.

Xét $\Delta BB'C'$ vuông tại B', có $BC' = \sqrt{B'B^2 + B'C'^2} = \sqrt{9x^2 + a^2}$.

Ta có $\widehat{BMC'} = 90^0 \Rightarrow BC'^2 = BM^2 + MC'^2 \Leftrightarrow 4x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Sử dụng công thức $[\text{CT1}]: R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \frac{A'A^2}{4}}$.

Với $R_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ A'A = \frac{3a}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{129}}{12}$

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{129}}{12}\right)^3.a^3 \Rightarrow \frac{V}{a^3} = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{\sqrt{129}}{12}\right)^3 \approx 3,55 \Rightarrow \frac{V}{a^3}$ gần 4 nhất. **Chọn B.**

Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai ?

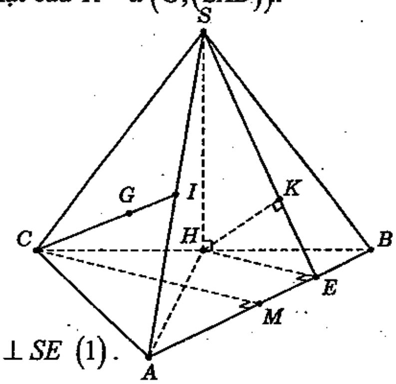
A. $R = d(G;(SAB))$. **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH$. **C.** $\dfrac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{39}$. **D.** $\dfrac{R}{a} = \sqrt{13}$.

Lời giải:

Ta có $60^0 = \widehat{\left(SA;(ABC)\right)} = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH}$. Và ΔABC đều cạnh $a \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có $SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \dfrac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d(G,(SAB))$.



Ta có $d(G;(SAB)) = \dfrac{1}{3}d(C;(SAB)) = \dfrac{2}{3}d(H;(SAB))$.

Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB và MB.

Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE, suy ra $HK \perp SE$ (1).

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d(H;(SAB)) = HK$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a\sqrt{6}$ và độ dài các cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi H là giao điểm của AC và BD. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $SHAB$.

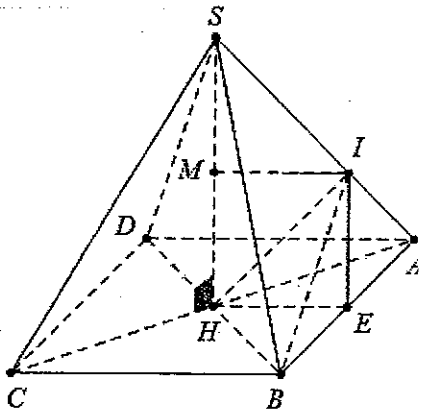
A. $V = \dfrac{25a^3\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3\pi}{2}$. **C.** $V = \dfrac{5\sqrt{5}a^3\pi}{6}$. **D.** $V = \dfrac{9\pi a^3}{4}$.

Lời giải:

Gọi H là giao điểm của AC và $BD.$

Vì $SA = SB = SC = SD$ nên H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp hình bình hành $\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Tứ diện $S.HAB$ có $SH \perp (HAB)$ nên sử dụng công thức tính nhanh, ta được:



$$[\text{CT1}]: R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{(R_{\Delta HAB})^2 + \frac{SH^2}{4}}.$$

- ΔHAB vuông tại $H \Rightarrow R_{\Delta HAB} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.$
- $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AC^2}{4}} = a\sqrt{3}.$

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow V = \dfrac{5\sqrt{5}a^3\pi}{6}.$ **Chọn C.**

Ví dụ 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$ và cạnh $CD = 2a$. Cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng đáy và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{11}}{8}.$ **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}.$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{11}}{6}.$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}.$

Lời giải:

Vì $AB = DE = AD = a$ nên $ABED$ là hình vuông.

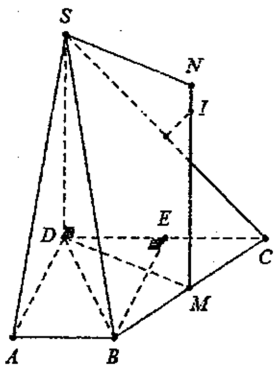
Tam giác BEC vuông tại B nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC.

Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC.

Thì đường thẳng Δ song song với SD. Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SC, mặt phẳng đó cắt Δ tại I.

Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

Kẻ $SN // DM$ cắt MI tại N, ta có $SDMN$ là hình chữ nhật với.



$SD = a$ và $DM^2 = \dfrac{DB^2 + DC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}.$

$= \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}$

Ta có $SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (MN - IM)^2 = \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$.

Mà $IC = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$ và $R = IC = IS$ nên $\frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$.

$\Rightarrow IM = \frac{3}{2}a$. Vậy bán kính mặt cầu cần tính là $R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. **Chọn D.**

Bài toán tương tự : [Bạn đọc tự giải] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Kí hiệu M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$. **D.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

III. [TT6034] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [510228] Một khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương đó bằng:

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 2: [510229] Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a thì có diện tích bằng:

A. a^3. **B.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 3: [510233] Cho hình lập phương cạnh a nội tiếp trong một mặt cầu. Bán kính **đường tròn lớn** của mặt cầu đó bằng:

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: [510236] Cho mặt cầu (S) có tâm A đường kính 10 cm và mặt phẳng (P) cách tâm một khoảng 4 cm. Kết luận nào sau đây ***sai*** ?

A. (P) cắt (S)

B. (P) cắt (S) theo một đường tròn bán kính 3 cm

C. (P) tiếp xúc với (S)

D. (P) và (S) có vô số điểm chung.

Câu 5: [510238] Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó là:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **B.** $\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{3}{\pi\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6: [510240] Một hình hộp chữ nhật có 3 kích thước $20\ cm$, $20\sqrt{3}\ cm$, $30\ cm$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp đó bằng:

A. $\frac{32\pi}{3}dm^3$ **B.** $\frac{62,5\pi}{3}dm^3$ **C.** $\frac{625000\pi}{3}dm^3$ **D.** $\frac{3200\pi}{3}cm^3$

Câu 7: [510241] Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BB'=2\sqrt{3}\,cm$, $C'B'=3\,cm$, diện tích mặt đáy bằng $6\,cm^2$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp trên bằng:

A. $\frac{500\pi}{3}(cm^3)$ **B.** $\frac{125\pi}{6}(cm^3)$ **C.** $100\pi\,(cm^3)$ **D.** $\frac{100\pi}{3}(cm^3)$.

Câu 8: [510243] Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R và điểm A nằm trên (S). Mặt phẳng (P) qua A tạo với OA một góc 60° và cắt (S) theo một đường tròn có diện tích bằng:

A. $\frac{3\pi R^2}{4}$ **B.** $\frac{\pi R^2}{2}$ **C.** $\frac{3\pi R^2}{2}$ **D.** $\frac{\pi R^2}{4}$.

Câu 9: [510247] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh $SA=AB=10cm$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

A. $12\pi\,dm$. **B.** $1200\pi\,dm$. **C.** $1200\pi\,dm^2$. **D.** $12\pi\,dm^2$.

Câu 11: [510250] Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AA'=AC=a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ bằng:

A. $8\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $12\pi a^2$. **D.** $10\pi a^2$.

Câu 12: [510252] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=AC=2a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{32\pi a^2}{3}$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Câu 13: [510254] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích các mặt $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ lần lượt bằng $20cm^2$, $28cm^2$, $35cm^2$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật bằng:

A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}cm$. **B.** $6\sqrt{10}cm$. **C.** $3\sqrt{10}cm$. **D.** $30cm$.

Câu 14: [510260] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a = 3\ cm$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $32\pi\sqrt{3}cm^3$. **B.** $16\pi\sqrt{3}cm^3$. **C.** $\dfrac{8a^3\pi}{3\sqrt{3}}cm^3$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}cm^3$.

Câu 15: [510271] Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 3m$, $SA = 3\sqrt{3}$ và cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $18\pi m^3$. **B.** $36\pi m^3$. **C.** $16\pi m^3$. **D.** $12\pi\sqrt{3}m^3$.

Câu 16: [510274] Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên $AA' = \dfrac{2a}{3}$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ACB'C'$ bằng:

A. $\dfrac{32\pi a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{16\pi a^3}{27}$.

Câu 17: [510283] Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong mặt cầu bán kính $R = 3cm$. Tam giác ABC cân và có diện tích bằng $2\ cm^2$. Diện tích toàn phần của hình hộp đó bằng:

A. $8cm^2$. **B.** $24cm^2$. **C.** $8\sqrt{28}cm^2$. **D.** $8\left(1+\sqrt{28}\right)cm^2$.

Câu 18: [510287] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nói trên bằng:

A. $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: [510291] Một mặt cầu có đường kính bằng $2a$ thì có diện tích bằng:

A. $8\pi a^2$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Câu 20: [510295] Một đường thẳng cắt mặt cầu tâm O tại hai điểm A,B sao cho tam giác OAB vuông cân tại O và $AB = a\sqrt{2}$. Thể tích khối cầu là:

A. $V = 4\pi a^3$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{2}{3}\pi a^3$.

Câu 21: [510302] Cho mặt cầu (S) có tâm I bán kính $R =$ 5 và mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính $r = 3$. Kết luận nào sau đây là **sai** ?

A. Tâm của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

B. (C) là giao tuyến của (S) và (P).

C. Khoảng cách từ I đến (P) bằng 4.

D. (C) là đường tròn giao tuyến lớn nhất của (P) và (S).

Câu 22: [510337] Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Diện tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $S = 14\pi a^2$. **B.** $S = 8\pi a^2$. **C.** $S = 12\pi a^2$. **D.** $S = 10\pi a^2$.

Câu 23: [510338] Thể tích V của một mặt cầu có bán kính R được xác định bởi công thức nào sau đây

A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = 4\pi R^3$. **C.** $V = \dfrac{\pi R^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Câu 24: [510339] Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = 5a$ và vuông góc với (ABC), ΔABC vuông tại B và $AB = 3a$, $BC = 4a$. Bán kính của mặt cầu nói trên bằng

A. $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: [510340] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$, $SA = a; AB = b$, $AC = c$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **B.** $R = \dfrac{2(a+b+c)}{3}$.

C. $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **D.** $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 26: [510341] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật , SA vuông góc với mặt đáy . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $R = \dfrac{1}{2}AC$. **B.** $R = \dfrac{1}{2}SB$. **C.** $R = \dfrac{1}{2}SC$. **D.** $R = \dfrac{1}{2}SA$.

Câu 27: [510343] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O tại điểm H thì OH là khoảng cách ngắn nhất từ O đến một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng (P).

B. Chỉ có duy nhất hai mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước và tiếp xúc với mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C), tâm của đường tròn (C) là hình chiếu của tâm mặt cầu (S) xuống mặt phẳng (P).

D. Tại điểm H nằm trên mặt cầu chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.

Câu 28: [510344] Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Bất kì một hình tứ diện nào cũng có mặt cầu ngoại tiếp

B. Bất kì một hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp

C. Bất kì một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

D. Bất kì một hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp

Câu 29: [510345] Một mặt cầu có bán kính $R\sqrt{3}$. Diện tích mặt cầu bằng:

A. $8\pi R^2$. **B.** $12\pi R^2$. **C.** $4\pi R^2$. **D.** $12\sqrt{3}\pi R^2$.

Câu 30: [510346] Mặt cầu có bán kính r thì có diện tích là:

A. $4\pi r$. **B.** $4\pi r^2$. **C.** $\frac{4}{3}\pi r^2$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Câu 31: [510347] Khối cầu có bán kính r thì có thể tích là:

A. $4\pi r^3$. **B.** $4\pi r^2$. **C.** $\frac{4}{3}\pi r^2$. **D.** $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Câu 32: [510348] Khối cầu có bán kính $3cm$ thì có thể tích là:

A. $9\pi(cm^3)$. **B.** $36\pi(cm^3)$. **C.** $27\pi(cm^3)$. **D.** $12\pi(cm^3)$.

Câu 33: [510350] Mặt cầu có bán kính $4cm$ thì có diện tích là:

A. $64\pi(cm^2)$. **B.** $16\pi(cm^2)$. **C.** $\frac{64}{3}\pi(cm^2)$. **D.** $\frac{256}{3}\pi(cm^2)$.

Câu 34: [510351] Mặt cầu (S) có diện tích bằng $100\pi(cm^2)$ thì có bán kính là:

A. $3(cm)$. **B.** $4(cm)$. **C.** $5(cm)$. **D.** $\sqrt{5}(cm)$.

Câu 35: [510353] Khối cầu (S) có thể tích bằng $288\pi(cm^3)$ thì có bán kính là:

A. $6\sqrt{2}(cm)$. **B.** $6(cm)$. **C.** $6\sqrt{6}(cm)$. **D.** $\sqrt{6}(cm)$.

Câu 36: [510354] Khối cầu (S) có diện tích bằng $16\pi a^2$, $(a > 0)$ thì có thể tích là:

A. $\frac{32}{3}\pi a^3(cm^3)$. **B.** $32\pi a^3(cm^3)$. **C.** $16\pi a^3(cm^3)$. **D.** $\frac{16}{3}\pi a^3(cm^3)$.

Câu 37: [510355] Khối cầu (S_1) có thể tích bằng $36\pi(cm^3)$ và có bán kính gấp 3 lần bán kính khối cầu (S_2). Thể tích của khối cầu (S_2) là:

A. $4\pi(cm^3)$. **B.** $\frac{4}{3}\pi(cm^3)$. **C.** $297\pi(cm^3)$. **D.** $324\pi(cm^3)$.

Câu 38: [510356] Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng đi qua tâm được thiết diện là một hình tròn có chu vi bằng 4π. Diện tích và thể tích của (S) lần lượt là:

A. 16π và $\frac{32}{3}\pi$. **B.** 16π và 32π. **C.** 8π và $\frac{32}{3}\pi$. **D.** 8π và 32π.

Câu 39: [510358] Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng $4\ cm$ được thiết diện là một hình tròn có bán kính bằng $3\ cm$. Bán kính của mặt cầu (S) là:

A. $5\ cm$. **B.** $7\ cm$. **C.** $12\ cm$. **D.** $10\ cm$.

Câu 40: [510359] Cắt mặt cầu (S) có bán kính 10 cm bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng 6 cm được thiết diện là hình tròn (C). Diện tích của (C) là:

A. $16\pi\ (cm^2)$. **B.** $32\pi\ (cm^2)$. **C.** $64\pi\ (cm^2)$. **D.** $128\pi\ (cm^2)$.

Câu 41: [510360] Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng 4 cm được thiết diện là hình tròn có diện tích $9\pi(cm^2)$. Thể tích của (S) là:

A. $\frac{250}{3}\pi\ (cm^3)$. **B.** $\frac{1372}{3}\pi\ (cm^3)$. **C.** $2304\pi\ (cm^3)$. **D.** $\frac{500}{3}\pi\ (cm^3)$.

Câu 42: [510361] Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh $2a$ có thể tích là:

A. $3\pi a^3\ (cm^3)$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3\ (cm^3)$.

C. $3\pi a^3\ (cm^3)$. **D.** $4\sqrt{3}\pi a^3\ (cm^3)$.

Câu 43: [510362] Mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a có thể tích là:

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^3}{9}$.

Câu 44: [510363] Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ thì có bán kính là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

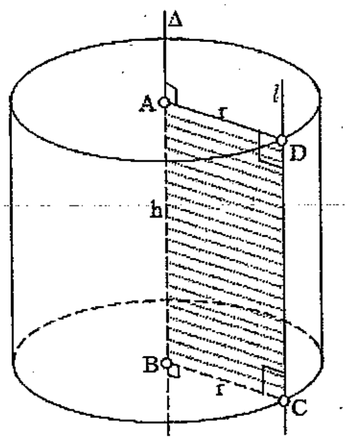
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. C	03. C	04. C	05. A	06. B	07. B	08. D	09. D	10. B
11. C	12. A	13. A	14. A	15. B	16. A	17. D	18. B	19. C	20. C
21. D	22. A	23. D	24. A	25. D	26. C	27. D	28. C	29. B	30. B
31. D	32. B	33. B	34. C	35. B	36. A	37. B	38. A	39. A	40. C
41. D	42. D	43. B	44. B						

Chủ đề 19
[TV6035] MẶT TRỤ-HÌNH TRỤ-KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Mặt trụ tròn xoay: Trong mặt phẳng (P) cho 2 đường thẳng Δ là l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ. Người ta thương gọi tắt mặt trụ tròn xoay là mặt trụ. Đường thẳng Δ được gọi là trục và đường thẳng l được gọi là đường sinh của mặt trụ đó.



2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay.

➢ Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh (chẳng hạn cạnh AB), thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay, hay còn được gọi tắt là hình trụ.

➢ Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra 2 hình tròn bằng nhau gọi là 2 đáy của hình trụ. Độ dài cạnh CD được gọi là độ dài đường sinh của hình trụ, phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quanh quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ. Khoảng cách AB giữa 2 mặt phẳng song song chứa 2 đáy là chiều cao của hình trụ.

➢ Khối trụ tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay, được gọi tắt là khối trụ.

➢ Với r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ, l là độ dài đường sinh của hình trụ ta có: $h = l$

Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay: $S_{xq} = 2\pi rh$

Diện tích 2 đáy của hình trụ: $S_d = 2\pi r^2$

Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

Thể tích khối trụ: $V = S_d.h = \pi r^2 h$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Ví dụ cơ bản.

Ví dụ 1: [TRÍCH ĐỀ THI MINH HOẠ THPT QG 2017]

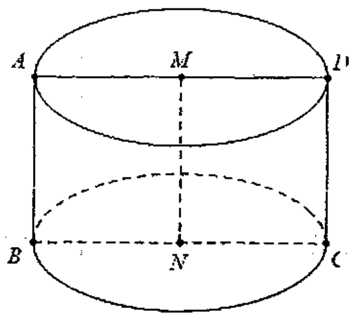
Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=4\pi$ **B.** $S_{tp}=2\pi$ **C.** $S_{tp}=6\pi$ **D.** $S_{tp}=10\pi$

Lời giải:

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN ta được hình trụ có chiều cao $h=MN=AB=1$ và bán kính đáy $r=MA=\dfrac{AD}{2}=1$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành là: $S_{tp}=S_đ+S_{xq}=2\pi r^2+2\pi rh$

$=2\pi.(1)^2+2\pi.1.1=4\pi$. **Chọn A.**

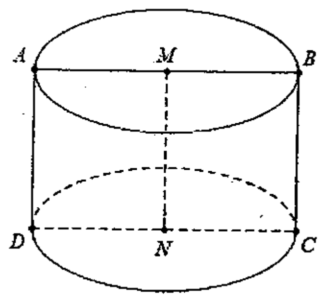


Ví dụ 2: Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4a; AD=2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi quay hình chữ nhật đó quanh MN ta được một hình trụ tròn xoay. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay đó.

A. $S_{xq}=16a^2$ **B.** $S_{xq}=16\pi a^2$ **C.** $S_{xq}=8\pi a^2$ **D.** $S_{xq}=12\pi a^2$

Lời giải:

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN ta được hình trụ có chiều cao $h=MN=AD=2a$ và bán kính đáy $r=MA=\dfrac{AB}{2}=2a$. Khi đó diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành là: $S_{xq}=2\pi rh=8\pi a^2$. **Chọn C.**



Ví dụ 3: Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $BC=k.AB$; quay hình chữ nhật quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1, quay hình chữ nhật quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $V_1=V_2$ **B.** $V_1=kV_2$ **C.** $V_2=kV_1$ **D.** $V_1=k^2V_2$

Lời giải:

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh AB ta được hình trụ có chiều cao $h_1 = AB$ và bán kính đáy $r_1 = BC$. Do đó thể tích khối trụ sinh ra là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.BC^2.AB$

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh BC ta được hình trụ có chiều cao $h_2 = BC$ và bán kính đáy $r_2 = AB$. Do đó thể tích khối trụ sinh ra là $V_2 = \pi r^2 h = \pi.AB^2.BC$

Khi đó ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{BC}{AB} = k$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Trong không gian cho 2 hình chữ nhật $ABCD$ và $EFGH$ có các cạnh $AB = 3$; $BC = 4$ và $EF = 12$; $FG = 2$. Cho hình thứ nhất quay quanh cạnh AB, hình thứ 2 quay quanh cạnh EF. Gọi V_1; V_2 lần lượt là thể tích của hình thứ nhất và hình thứ 2. Chọn khẳng định đúng.

A. $V_1 = 2V_2$ **B.** $V_1 = V_2$ **C.** $V_2 = 8V_1$ **D.** $V_1 = 8V_2$

Lời giải:

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB ta được hình trụ có chiều cao $h_1 = AB$ và bán kính đáy $r_1 = AD$ do đó $V_1 = \pi r_1^2.h_1 = \pi AD^2.AB = \pi.BC^2.AB = 48\pi$

Khi quay hình chữ nhật $EFGH$ quanh cạnh EF ta được hình trụ có chiều cao $h_2 = EF$ và bán kính đáy $r_2 = FG$ do đó $V_2 = \pi r_2^2.h_2 = \pi FG^2.EF = \pi.2^2.12 = 48\pi$

Do đó $V_1 = V_2 = 48\pi$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hình trụ có 2 đáy là các đường tròn tâm O và O' bán kính $R = \sqrt{10}$, biết rằng tồn tại một dây cung $AB = 6$ của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều. Thể tích khối trụ đã cho là:

A. $V = 5\pi\sqrt{26}$ **B.** $V = 10\pi\sqrt{3}$ **C.** $V = 10\pi\sqrt{26}$ **D.** $V = 5\pi\sqrt{3}$

Lời giải:

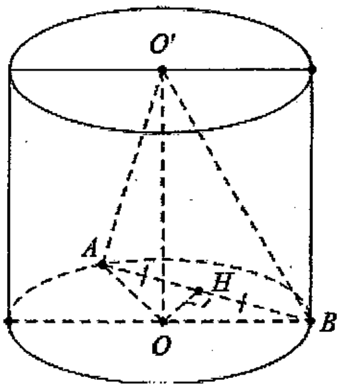
Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó $OH \perp AB$

Ta có: $OH = \sqrt{R^2 - HA^2} = \sqrt{10-9} = 1$

Lại có $O'H = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Suy ra $h = OO' = \sqrt{O'H^2 - OH^2} = \sqrt{27-1} = \sqrt{26}$

Vậy $V = S_d h = \pi R^2.h = 10\pi\sqrt{26}$. **Chọn C.**



Ví dụ 6: Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ ngoại tiếp mặt cầu đã cho. Gọi S_1 là diện tích xung quanh của khối trụ và S_2 là diện tích của khối cầu. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $S_1 = S_2$ **B.** $S_1 = S_2\sqrt{2}$ **C.** $S_2 = S_1\sqrt{2}$ **D.** $S_1 = 2S_2$

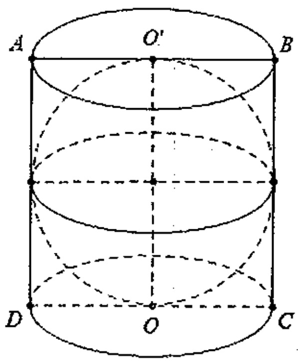
Lời giải:

Ta có diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi R^2$

Diện tích xung quang của khối trụ là : $S_1 = 2\pi rh$

Trong đó $r = R; h = 2R$. Do vậy $S_1 = 4\pi R^2$

Vậy $S_1 = S_2$. **Chọn A.**



Ví dụ 7: Một hình trụ có diện tích xung quanh là $x\left(m^2\right)$ và diện tích toàn phần là $y\left(m^2\right)$ $(y > x > 0)$. Thể tích khối trụ đã cho là:

A. $\dfrac{xy}{2\sqrt{2\pi(y-x)}}$ **B.** $\dfrac{x\sqrt{y-x}}{2\sqrt{2\pi}}$ **C.** $\dfrac{xy}{\sqrt{2\pi(y-x)}}$ **D.** $\dfrac{x\sqrt{y-x}}{\sqrt{2\pi}}$

Lời giải:

Diện tích hình tròn đáy là: $S_d = \dfrac{y-x}{2}\left(m^2\right)$

Bán kính đáy của khối trụ là: $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{y-x}{2\pi}}$.

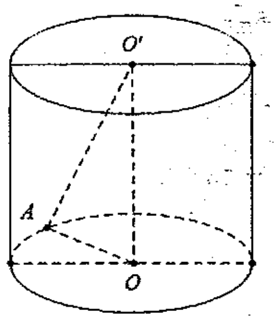
Chiều cao của khối trụ là: $h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi r} = \dfrac{x}{2\pi\sqrt{\dfrac{y-x}{2\pi}}} = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi(y-x)}}$

Do đó thể tích khối trụ đã cho là: $V = S_d.h = \dfrac{y-x}{2}.\dfrac{x}{\sqrt{2\pi(y-x)}} = \dfrac{x\sqrt{y-x}}{2\sqrt{2\pi}}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hình trụ có 2 đáy là các đường tròn tâm O và O' và có bán kính đáy là R. Lấy điểm A thuộc đường tròn (O). Biết rằng $O'A = 2R$, thể tích khối trụ là:

A. $V = \pi R^3\sqrt{2}$ **B.** $V = 2\pi R^3\sqrt{2}$ **C.** $V = 2\pi R^3$ **D.** $V = \pi R^3\sqrt{3}$

Lời giải:



Ta có: $OO'=h$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $O'OA$ ta có:

$O'A^2=h^2+R^2 \Rightarrow h=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$

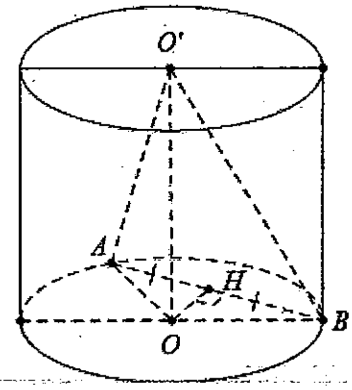
Do vậy thể tích khối trụ là:

$V_t=S_d.h=\pi R^2h=\pi R^3\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hình trụ có 2 đáy là các đường tròn tâm O và O' và có bán kính là $R=5$. Trên đường tròn (O) lấy 2 điểm A, B sao cho $AB=8$ và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối trụ đã cho là:

A. $V=15\pi\sqrt{3}$ **B.** $V=25\pi\sqrt{3}$ **C.** $V=125\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=75\pi\sqrt{3}$

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của AB khi đó H là trung điểm của AB. Ta có: $HA=HB=4$

Do vậy $OH=\sqrt{OA^2-HA^2}=\sqrt{R^2-4^2}=3$

Mặt khác $OO'\perp AB \Rightarrow (O'HO)\perp AB$

Do đó $\widehat{O'HO}=\widehat{((O'AB);(OAB))}=60^0$

Khi đó $OO'=OH\tan 60^0=3\sqrt{3}$

Vậy $V=S_d.h=\pi R^2h=75\pi\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Cho hình trụ có 2 đáy là các đường tròn tâm O và O' và có bán kính là R. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong hình trụ. Biết $ABCD$ là hình vuông và $B'C=4R$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ tính theo R là:

A. $V=\frac{2}{3}R^3\sqrt{14}$ **B.** $V=2R^3\sqrt{14}$ **C.** $V=2\pi R^3\sqrt{14}$ **D.** $V=R^3\sqrt{14}$

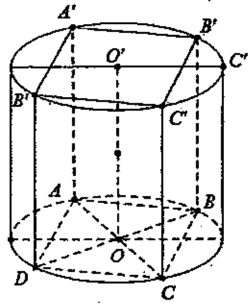
Lời giải:

Do $ABCD$ là hình vuông nên O là tâm hình vuông.

Khi đó $AC=2R \Rightarrow AB=BC=R\sqrt{2}$

Suy ra $B'B=\sqrt{B'C^2-BC^2}=R\sqrt{14}$

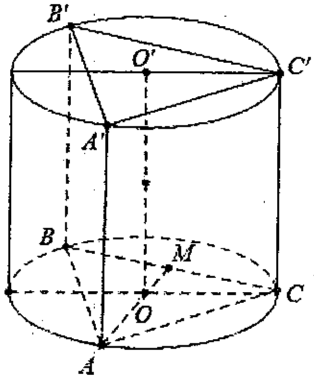
Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.h=2R^3\sqrt{14}$. **Chọn B.**



Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết $A'B$ tạo với đáy một góc 60^0, tính diện tích toàn phần S_{tp} của mặt trụ tròn xoay ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A. $S_{tp} = \frac{8\pi}{3}a^2$. **B.** $S_{tp} = \frac{4\pi}{3}a^2$. **C.** $S_{tp} = \frac{10\pi}{3}a^2$. **D.** $S_{tp} = 2\pi a^2$.

Lời giải:



Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt khác $A'B$ tạo với đáy một góc 60^0 nên $AA' = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3} = h$

Ta có: $S_{xq} = C_d.h = 2\pi R.h = 2\pi a^2$.

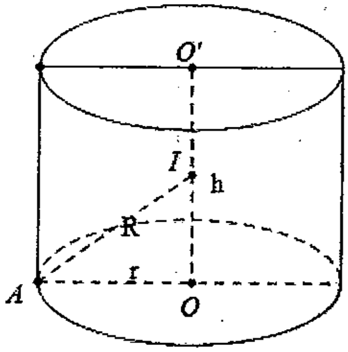
Diện tích đáy là: $S_d = 2.\left(\pi R^2\right) = \frac{2\pi a^2}{3}$

Vậy $S_{tp} = \frac{8\pi}{3}a^2$. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Cho một hình trụ nội tiếp trong một hình cầu bán kính R. Biết chiều cao của khối trụ bằng $R\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của khối trụ tính theo R là:

A. $S_{xq} = \pi R^2$ **B.** $S_{xq} = 2\pi R^2$ **C.** $S_{xq} = \pi R^2\sqrt{2}$ **D.** $S_{xq} = 4\pi R^2$

Lời giải:



Gọi r là bán kính đáy của khối trụ và h là chiều cao khối trụ. Khi đó: $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2; h = R\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow R^2 = r^2 + \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$;

Do đó $S_{xq} = 2\pi Rh = \pi R^2$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Một hình trụ có bán kính đáy bằng R. Một mặt phẳng đi qua trục OO' cắt hình trụ theo một thiết diện là hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích hình tròn đáy của hình trụ. Thể tích khối trụ đã cho là:

A. $V = \frac{\pi^2 R^3}{6}$ **B.** $V = \frac{\pi^2 R^3}{2}$ **C.** $V = \frac{\pi R^3}{4}$ **D.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$

Lời giải:

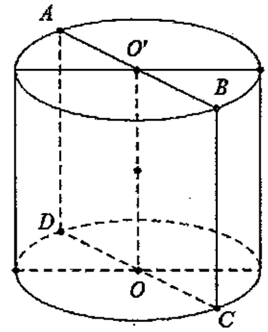
Ta có diện tích hình tròn đáy là: $S_d = \pi R^2$

Diện tích hình chữ nhật là: $S_{ABCD} = AD.CD = 2R.h$

Khi đó theo giả thiết ta có: $2R.h = \pi R^2 \Rightarrow h = \dfrac{\pi R}{2}$

Thể tích khối trụ khi đó là: $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi^2 R^3}{2}$

Chọn B.



Ví dụ 14: Một hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy. Biết rằng diện tích toàn phần của khối trụ là x. Thể tích V của khối trụ đã cho là:

A. $V = \dfrac{x^3}{4\sqrt{\pi}}$ **B.** $V = \dfrac{x\sqrt{x}}{8}$ **C.** $V = \dfrac{x\sqrt{x}}{8\sqrt{\pi}}$ **D.** $V = \dfrac{x^3}{8\sqrt{\pi}}$

Lời giải:

Ta có: $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = x \Leftrightarrow 4\pi r^2 = x \Leftrightarrow r = h = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}}$

Do vậy thể tích khối trụ là: $V = S_d.h = \pi r^2 h = \pi r^3 = \dfrac{x\sqrt{x}}{8\sqrt{\pi}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 15: Một mặt phẳng song song với trục và cách trục của khối trụ một khoảng là $3\,(cm)$ cắt khối trụ theo một thiết diện là hình vuông $ABCD$ cạnh $8\,(cm)$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V_{(T)} = 100\pi\,(cm^3)$ **B.** $V_{(T)} = 200\pi\,(cm^3)$ **C.** $V_{(T)} = 400\pi\,(cm^3)$ **D.** $V_{(T)} = 80\pi\,(cm^3)$

Lời giải:

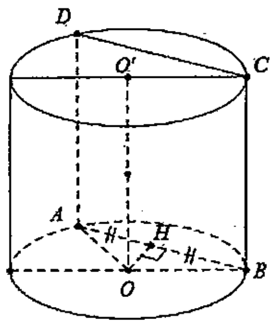
Gọi H là trung điểm của AB khi đó $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH = 3 \end{cases}$

Ta có: $AB = 8 \Rightarrow HA = 4 \Rightarrow OA = R = \sqrt{HA^2 + OH^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Lại có $AD = AB = h = 8$ suy ra $V_{(T)} = \pi R^2 h = 200\pi\,(cm^3)$

Chọn B.



Ví dụ 16: Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao của hình trụ là h. Trên hai đường tròn (O) và (O'), lấy 2 điểm di động A và B sao cho góc giữa đường thẳng OA và $O'B$ bằng 90^0. Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R và h.

A. $AB=\sqrt{R^2+h^2}$ **B.** $AB=\sqrt{2R^2+h^2}$ **C.** $AB=\sqrt{2R^2+2h^2}$ **D.** $AB=\sqrt{R^2+2h^2}$

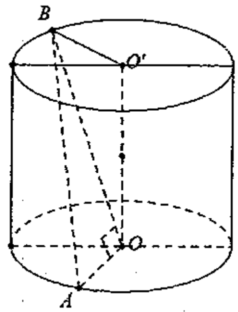
Lời giải:

Ta có: $OA\perp O'B$, mặt khác $OA\perp OO'$

Do đó $OA\perp OB$ suy ra tam giác OAB vuông tại O.

Ta có: $AB^2=OA^2+OB^2=OA^2+\left(OO'^2+O'B^2\right)=2R^2+h^2$

Do vậy $AB=\sqrt{2R^2+h^2}$. **Chọn B.**



2. Ví dụ vận dụng cao.

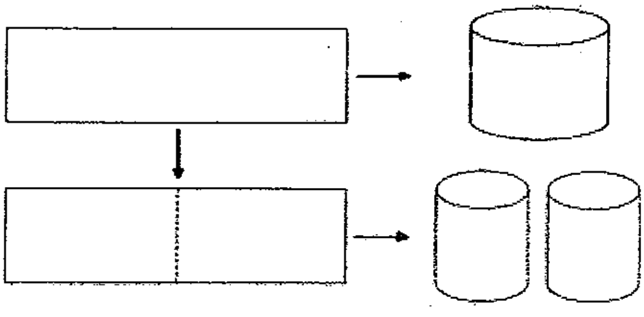
Ví dụ 1: [TRÍCH ĐỀ THI MINH HOẠ THPT QG - 2017 CỦA BỘ GD&ĐT]

Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $50\text{cm}\times 24\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo 2 cách sau (xem hình minh hoạ dưới đây)

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành 2 tấm tôn bằng nhau , rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Ký hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải:

Bạn đầu bán kính của khối trụ là R, sau khi cắt đôi và gò 2 tấm tôn nhỏ thành 2 thùng ta được 2 khối trụ có bán kính đáy bằng nhau và bằng $\frac{R}{2}$

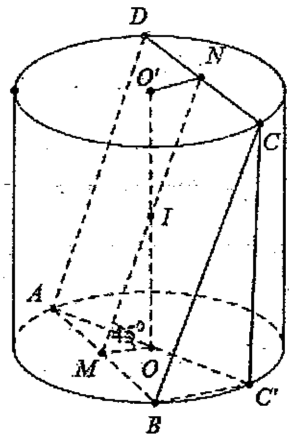
Chiều cao của các khối trụ là bằng nhau và bằng h.

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 h}{2.\left[\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 h\right]} = 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ một góc bằng 45^0. Tính thể tích của hình trụ đã cho.

A. $V = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$ **C.** $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{18}$

Lời giải:



Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó $OM \perp AB$ và $O'N \perp CD$. Gọi I là giao điểm của MN và OO'. Đặt $R = OA$ và $h = OO'$

Ta có: ΔIOM vuông cân tại O

Suy ra $OM = OI = \frac{IM}{\sqrt{2}} = \frac{AD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Lại có: $R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3a^2}{8}$

Do đó $V = \pi R^2 h = \pi\frac{3a^2}{8}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Cách 2: Gọi C' là hình chiếu của C trên O.

Khi đó:

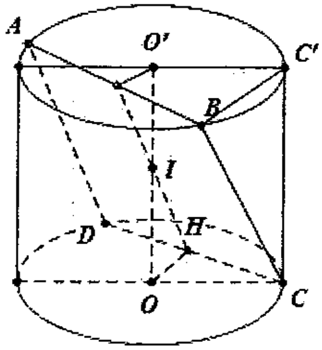
$\widehat{CBC'} = 45^0 \Rightarrow CC' = h = BC\sin 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AC' = 2R = \sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}}$

$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = \pi R^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: [325060][Trích đề thi thử THPT chuyên Hưng Yên] Cho hình trụ có bán kính đáy và chiều cao có độ dài bằng nhau. Hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy (các cạnh AD, BC không phải là đường sinh của hình trụ). Tính độ dài bán kính đáy và chiều cao của hình trụ biết rằng cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải:



Cách 1. Đặt $OO' = OC = 2x$

Suy ra $CD = 2CH = 2\sqrt{4x^2 - OH^2}$

Lại có $AD = 2IH = 2\sqrt{OH^2 + OI^2} = 2\sqrt{OH^2 + x^2}$

Cho $CD = AD \Rightarrow 4x^2 - OH^2 = OH^2 + x^2 \Rightarrow OH^2 = \frac{3x^2}{2}$

Khi đó $AD^2 = 4\left(4x^2 - \frac{3x^2}{2}\right) = 10x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow OC = 2x = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Cách 2: Gọi C' là hình chiếu của C xuống $(O'AB)$

Khi đó $BC' = 2d(O'; AB) = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Mặt khác $BC'^2 + CC'^2 = BC^2 \Leftrightarrow 4R^2 - a^2 + R^2 = a^2 \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. **Chọn B.**

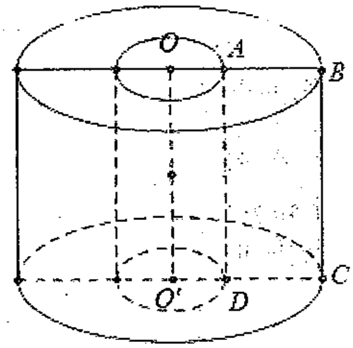
Ví dụ 4: Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $BC = 2a$. Trên đường thẳng AB và CD lần lượt lấy các điểm O và O' sao cho $OO' \parallel AD$ và cách AD một khoảng là x. Biết rằng $OB > OA$ và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục OO' ta được khối tròn xoay có thể tích là $4\pi a^3$. Giá trị của x là:

A. $x = a$ **B.** $x = 2a$ **C.** $x = \frac{a}{2}$ **D.** $x = \frac{3a}{2}$

Lời giải:

Khi quay hình chữ nhật $OBCO'$ quanh trục OO'ta được khối trụ với bán kính đáy $r = OB = a + x$, chiều cao $h = AD = 2a$ suy ra $V = \pi r^2 h = \pi(a+x)^2.2a$

Khi quay hình chữ nhật $OADO'$ quay trục OO' ta được khối trụ với bán kính đáy $r_1 = OA = x$, chiều cao $h_1 = AD = 2a$. Do đó $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 2\pi a x^2$



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh OO' ta được khối tròn xoay có thể tích là $V_{tx} = V - V_1 = \pi(a+x)^2.2a - 2\pi a x^2$

$= 2\pi a\left(a^2 + 2ax\right) = 4\pi a^3 \Rightarrow a^2 + 2ax = 2a^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Chọn C.

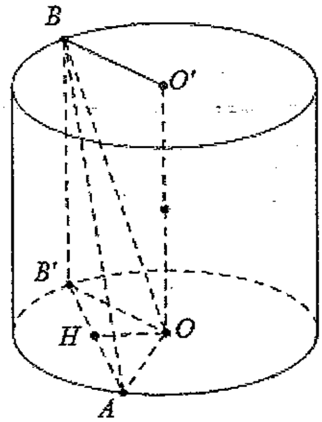
Ví dụ 5: Cho hình trụ tròn xoay có đáy là hai hình tròn tâm O và O' và có chiều cao gấp đôi bán kính đáy. Trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B, trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A sao cho góc giữa 2 đường thẳng OA và $O'B$ bằng 2α, biết $AB = a$. Tính bán kính đáy của khối trụ đã cho.

A. $R = \dfrac{a}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$ hoặc $R = \dfrac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$ **B.** $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$ hoặc $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$

C. $R = \dfrac{2a}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$ hoặc $R = \dfrac{2a}{\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$ **D.** $R = \dfrac{a}{4\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$ hoặc $R = \dfrac{a}{4\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$

Lời giải:

Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) khi đó $O'B // OB'$. Đặt $OA = R \Rightarrow h = OO' = 2R$



Ta có: $\left(\widehat{O'B; OA}\right) = \left(\widehat{OB'; OA}\right) = 30^0$

Khi đó $\widehat{AOB'} = 2\alpha$ hoặc $\widehat{AOB'} = 180^0 - 2\alpha$

Dựng $OH \perp AB'$ suy H là trung điểm của AB'

Ta có: $AB' = 2HB' = 2.R\sin\dfrac{\widehat{AOB'}}{2}$

Xét tam giác vuông $AB'B$ ta có: $AB'^2 + BB'^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow 4R^2\sin^2\dfrac{\widehat{AOB'}}{2} + 4R^2 = a^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{a}{2\sqrt{\sin^2\dfrac{\widehat{AOB'}}{2} + 1}}$

Khi đó ta có: $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$ hoặc $R = \dfrac{a}{2\sqrt{\sin^2\left(90^0 - \alpha\right) + 1}} = \dfrac{a}{2\sqrt{\cos^2\alpha + 1}}$. **Chọn B.**

III. [TT6036] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: **[510255]** Cho hình trụ (*T*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (*T*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $S_{xq} = \pi rh$ **B.** $S_{xq} = 2\pi rl$ **C.** $S_{xq} = 2\pi r^2 h$ **D.** $S_{xq} = \pi rl$

Câu 2: **[510257]** Cho hình trụ (*T*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu S_{tp} là diện tích toàn phần của (*T*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $S_{tp} = \pi rl$ **B.** $S_{tp} = \pi rl + 2\pi r$ **C.** $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$ **D.** $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$

Câu 3: **[510261]** Cho hình trụ (*T*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu $V_{(T)}$ là thể tích khối trụ (*T*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $V_{(T)} = \frac{1}{3}\pi rh$ **B.** $V_{(T)} = \pi r^2 h$ **C.** $V_{(N)} = \pi rl^2$ **D.** $V_{(N)} = 2\pi r^2 h$

Câu 4: **[510263]** Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 7\text{cm}$. Diện tích xung quanh của hình trụ này là:

A. $35\pi(\text{cm}^2)$ **B.** $70\pi(\text{cm}^2)$ **C.** $\frac{70}{3}\pi(\text{cm}^2)$ **D.** $\frac{35}{3}\pi(\text{cm}^2)$

Câu 5: **[510264]** Một hình trụ có bán kính đáy $r = a$, độ dài đường sinh $l = 2a$. Diện tích toàn phần của hình trụ này là:

A. $6\pi a^2$ **B.** $2\pi a^2$ **C.** $4\pi a^2$ **D.** $5\pi a^2$

Câu 6: **[510266]** Quay hình vuông *ABCD* cạnh *a* xung quanh một cạnh. Thể tích của khối trụ được tạo thành là:

A. $\frac{1}{3}\pi a^3$ **B.** $2\pi a^3$ **C.** πa^3 **D.** $3\pi a^3$

Câu 7: **[510268]** Cho hình vuông *ABCD* cạnh 8 cm. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Quay hình vuông *ABCD* xung quanh *MN*. Diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành là:

A. $64\pi(\text{cm}^2)$ **B.** $32\pi(\text{cm}^2)$ **C.** $96\pi(\text{cm}^2)$ **D.** $126\pi(\text{cm}^2)$

Câu 8: **[510270]** Một hình trụ (*T*) có diện tích toàn phần là $120\pi(\text{cm}^2)$ và có bán kính đáy bằng 6 cm. Chiều cao của (*T*) là:

A. 6cm **B.** 5cm **C.** 4cm **D.** 3cm

Câu 9: **[510272]** Một khối trụ (*T*) có thể tích bằng $81\pi(\text{cm}^3)$ và đường sinh gấp ba lần bán kính đáy. Độ dài đường sinh của (*T*) là:

A. 12 cm **B.** 3 cm **C.** 6 cm **D.** 9 cm

Câu 10: [510276] Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và góc $\widehat{BDC} = 30^0$. Quay hình chữ nhật này xung quanh cạnh AD. Diện tích xung quanh của hình trụ được tạo thành là:

A. $\sqrt{3}\pi a^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi a^2$ **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi a^2$ **D.** πa^2

Câu 11: [510278] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi (C) và (C') lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình trụ có hai đáy là (C) và (C') có thể tích là:

A. $\dfrac{1}{3}\pi a^3$ **B.** $2\pi a^3$ **C.** πa^3 **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$

Câu 12: [510279] Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng 26 cm. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $\dfrac{69\pi}{2}(cm^2)$ **B.** $69\pi(cm^2)$ **C.** $23\pi(cm^2)$ **D.** $\dfrac{23\pi}{2}(cm^2)$

Câu 13: [510281] Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 2 cm được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16cm^2$. Thể tích của (T) là:

A. $32\pi(cm^3)$ **B.** $16\pi(cm^3)$ **C.** $64\pi(cm^3)$ **D.** $8\pi(cm^3)$

Câu 14: [510284] Một hình trụ có tỉ số giữa diện tích toàn phần và diện tích xung quanh bằng 4. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Đường sinh bằng bán kính đáy.

B. Bán kính đáy bằng ba lần đường sinh.

C. Đường sinh bằng ba lần bán kính đáy.

D. Đường sinh bằng bốn lần bán kính đáy.

Câu 15: [510286] Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp} = 4\pi$ **B.** $S_{tp} = 2\pi$ **C.** $S_{tp} = 6\pi$ **D.** $S_{tp} = 10\pi$

Câu 16: [510289] Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng AB thì hình chữ nhật $ABCD$ tạo thành hình tròn xoay là:

A. Hình trụ **B.** Khối trụ **C.** Mặt trụ **D.** Hai hình trụ

Câu 17: [510290] Khối nón có chiều cao $h = 3cm$ và bán kính đáy $r = 2cm$ thì có thể tích bằng:

A. $4\pi(cm^3)$ **B.** $\dfrac{4}{3}\pi(cm^3)$ **C.** $16\pi(cm^2)$ **D.** $4\pi(cm^2)$

Câu 18: [510292] Khối trụ có chiều cao $h=3\text{cm}$ và bán kính đáy $r=2\text{cm}$ thì có thể tích bằng:

A. $12\pi(\text{cm}^3)$ **B.** $4\pi(\text{cm}^3)$ **C.** $6\pi(\text{cm}^3)$ **D.** $12\pi(\text{cm}^2)$

Câu 19: [510294] Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính bằng 7 và chiều cao bằng 9 là

A. 62π **B.** 63π **C.** 126π **D.** 128π

Câu 20: [510298] Hình trụ có bán kính bằng 5, khoảng cách giữa hai đáy bằng 7. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

A. 10π **B.** 85π **C.** 95π **D.** 120π

Câu 21: [510300] Một hình trụ có diện tích đáy bằng $4\pi(\text{m}^2)$. Khoảng cách giữa trục và đường sinh của mặt xung quanh hình trụ đó bằng:

A. 4m **B.** 3m **C.** 2m **D.** 1m

Câu 22: [510301] Bên trong một lon sữa hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao và bằng 1 dm. Thể tích thực của lon sữa đó bằng:

A. $2\pi(\text{dm}^3)$ **B.** $\frac{\pi}{2}(\text{dm}^3)$ **C.** $\frac{\pi}{4}(\text{dm}^3)$ **D.** $\pi(\text{dm}^3)$

Câu 23: [510303] Một hình vuông cạnh a quay xung quanh một cạnh tạo thành một hình tròn xoay có diện tích toàn phần bằng:

A. $4a^2\pi$ **B.** $6a^2\pi$ **C.** $2a^2\pi$ **D.** $3a^2\pi$

Câu 24: [510304] Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 2 cm, biết O và O' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi quay hình vuông $ABCD$ quanh trục OO' thì khối trụ tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng:

A. $2\pi(\text{cm}^3)$ **B.** $4\pi(\text{cm}^3)$ **C.** $6\pi(\text{cm}^3)$ **D.** $8\pi(\text{cm}^2)$

Câu 25: [510305] Một khối cầu bán kính R, một khối trụ có bán kính R, chiều cao $2R$. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối trụ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 2

Câu 26: [510307] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a và một hình trụ có 2 đáy nội tiếp trong 2 hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ và diện tích toàn phần của hình lập phương bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ **D.** π.

Câu 27: [510308] Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao nội tiếp trong mặt cầu bán kính R. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng:

A. $2\pi R^2\sqrt{2}$ **B.** $\pi R^2\sqrt{2}$ **C.** $2\pi R^2$ **D.** πR^2

Câu 28: [510310] Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn xoay bằng:

A. πa^3 **B.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$ **C.** $3\pi a^3$ **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$

Câu 29: [510311] Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích khối trụ tương ứng bằng:

A. 2π **B.** π **C.** 3π **D.** 4π .

Câu 30: [510312] Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

A. 12π **B.** 10π **C.** 8π **D.** 6π .

Câu 31: [510315] Một hình trụ có bán kính đáy bằng 4 *cm*, thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng:

A. $16\pi\, cm^2$ **B.** $64\pi\, cm^2$ **C.** $32\pi\, cm^2$ **D.** $24\pi\, cm^2$

Câu 32: [510316] Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2 *cm*, thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích của khối trụ tương ứng bằng:

A. $12\pi\left(cm^2\right)$ **B.** $16\pi\left(cm^2\right)$ **C.** $20\pi\left(cm^2\right)$ **D.** $24\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 33: [510318] Hình trụ có bán kính đáy *R*, thiết diện qua trục là hình vuông. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều có hai đáy nội tiếp trong hai đường tròn đáy của hình trụ bằng:

A. $2R^3$ **B.** $3R^3$ **C.** $4R^3$ **D.** $5R^3$.

Câu 34: [510320] Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó ba quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng 3 lần đường kính của quả banh. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả banh và S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1/2.

Câu 35: [510322] Khối trụ có chiều cao $2a\sqrt{3}$, bán kính đáy $a\sqrt{3}$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối trụ bằng:

A. $8\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $6\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $4\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 36: [510324] Một hình tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Xét hình trụ có 1 đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và có chiều cao bằng chiều cao hình tứ diện. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng:

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: [510325] Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chiều cao $OO' = a\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên 2 đáy $(O),(O')$ sao cho góc giữa OO' và AB bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và OO' bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 38: [510327] Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có AB, CD lần lượt là 2 dây cung của 2 đường tròn đáy và mặt phẳng $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng:

A. $\frac{5a^2}{2}$. **B.** $5a^2$. **C.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5a^2\sqrt{2}$.

Câu 39: [510329] Hình trụ có bán kính đáy $3cm$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng $10cm$ thì có diện tích toàn phần là:

A. $78\pi\left(cm^2\right)$ **B.** $60\pi\left(cm^2\right)$ **C.** $18\pi\left(cm^2\right)$ **D.** $69\pi\left(cm^2\right)$

Câu 40: [510330] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Diện tích S là:

A. πa^2 **B.** $\pi a^2\sqrt{2}$ **C.** $\pi a^2\sqrt{3}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. D	03. B	04. B	05. A	06. C	07. A	08. C	09. D	10. C
11. D	12. A	13. A	14. B	15. A	16. A	17. A	18. D	19. C	20. D
21. C	22. C	23. A	24. A	25. B	26. C	27. C	28. D	29. A	30. D

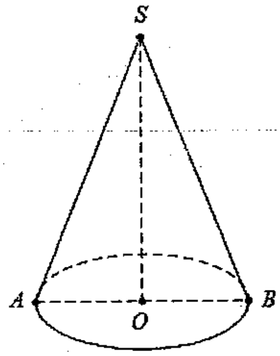
Chủ đề 20

[TV6037] MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Một số kiến thức mở đầu

Xét tam giác SOA vuông tại O, khi quay tam giác SOA xung quanh SO thì tạo nên một hình, hình này được gọi là hình nón tròn xoay (hay hình nón). Cạnh OA vạch thành hình tròn đáy, còn cạnh SA vạch thành mặt xung quanh của hình nón.



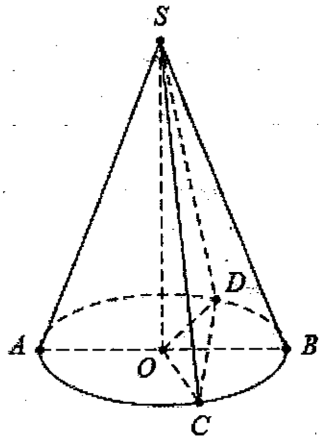
Hình nón trên có SO là đường cao (hay trục), S là đỉnh, đường sinh $SA = SB$ và bán kính đáy $R = OA = OB = \dfrac{AB}{2}$.

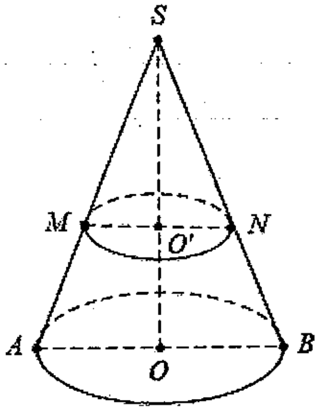
Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác cân.

Thật vậy, thiết diện qua đỉnh của hình nón là ΔSCD như hình vẽ dưới đây.

Ta có $SC^2 = SO^2 + OC^2$ và $SD^2 = SO^2 + OD^2$.

Mà $OC = OD = R \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \Delta SCD$ cân tại S.





Hiển nhiên thiết diện vuông góc với trục là hình tròn tâm O' như hình vẽ trên.

2. Các công thức giải toán

+) Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi Rl$.

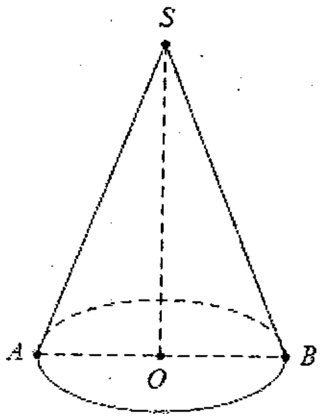
+) Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi Rl + \pi R^2$.

+) Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Trong đó R là bán kính đáy, l là đường sinh và h là đường cao.

Cụ thể hóa đối với hình vẽ sau thì $R = OA = OB = \frac{AB}{2}$, $l = SA = SB$, $h = SO$.

Ngoài ra, ta cần lưu ý thêm đường sinh $l = \sqrt{h^2 + R^2}$, góc ở đỉnh là $\widehat{ASB}$ và diện tích xung quanh của hình nón cũng chính là diện tích xung quanh của khối nón được giới hạn bởi hình nón đó.



II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và đường cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq} = 15\pi$. **B.** $S_{xq} = 12\pi$. **C.** $S_{xq} = 20\pi$. **D.** $S_{xq} = 3\pi\sqrt{7}$.

Lời giải:

Ta có $R = 3$, $h = 4 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + R^2} = 5 \Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = 15\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và đường sinh bằng 5. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 45\pi$. **C.** $V = 12\pi$. **D.** $V = 15\pi$.

Lời giải:

Ta có $R = 3$, $l = 5 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = 4 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho hình nón (N) có đường cao bằng 4 và đường sinh bằng 5. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq} = 12\pi$. **B.** $S_{xq} = 15\pi$. **C.** $S_{xq} = 3\pi\sqrt{7}$. **D.** $S_{xq} = 20\pi$.

Lời giải:

Ta có $h = 4$, $l = 5 \Rightarrow R = \sqrt{l^2 - h^2} = 3 \Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = 15\pi$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 45\pi$. **C.** $V = 15\pi$. **D.** $V = 12\pi$.

Lời giải:

Ta có $R = 3$ và $S_{xq} = \pi Rl = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} = 15\pi$

$\Rightarrow 3\sqrt{h^2 + 9} = 15 \Rightarrow h = 4 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho khối nón (N) có đường cao bằng 4 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 12\pi$. **C.** $V = 45\pi$. **D.** $V = 15\pi$.

Lời giải:

Ta có $h = 4$ và $S_{xq} = \pi Rl = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} = 15\pi$

$\Rightarrow R^2\left(R^2 + 16\right) = 15^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho khối nón (N) có đường sinh bằng 5 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 36\pi$. **C.** $V = 15\pi$. **D.** $V = 45\pi$.

Lời giải:

Ta có $l = 5$ và $S_{xq} = \pi Rl = 15\pi$

$\Rightarrow 5R = 15 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = 4 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng 12π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A. $S_{xq} = 12\pi$. **B.** $S_{xq} = 3\pi\sqrt{7}$. **C.** $S_{xq} = 15\pi$. **D.** $S_{xq} = 20\pi$.

Lời giải:

Ta có $R = 3$ và $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$

$\Rightarrow 3h = 12 \Rightarrow h = 4 \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = 5 \Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = 15\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho khối nón (N) có đường cao bằng 4 và thể tích bằng 12π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

A. $S_{xq} = 20\pi$. **B.** $S_{xq} = 3\pi\sqrt{7}$. **C.** $S_{xq} = 15\pi$. **D.** $S_{xq} = 12\pi$.

Lời giải:

Ta có $h = 4$ và $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi$

$\Rightarrow \frac{4}{3}R^2 = 12 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow l = \sqrt{R^2 + h^2} = 5 \Rightarrow S_{xq} = \pi R l = 15\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Cho khối nón (N) có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 12π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N), biết (N) có đường cao lớn hơn 2.

A. $S_{xq} = 15\pi$. **B.** $S_{xq} = 12\pi$. **C.** $S_{xq} = 20\pi$. **D.** $S_{xq} = 3\pi\sqrt{7}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} l = \sqrt{h^2 + R^2} = 5 \\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = 25 - h^2 \\ R^2 h = 36 \end{cases}$

$\Rightarrow (25 - h^2)h = 36 \Rightarrow h^3 - 25h + 36 = 0 \Rightarrow h = 4$ thỏa mãn $h > 2$

$\Rightarrow R = \sqrt{l^2 - h^2} = 3 \Rightarrow S_{xq} = \pi R l = 15\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Cho khối nón (N) có thể tích bằng 12π và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính bán kính đáy R của (N), với $R > \frac{\sqrt{210}}{5}$.

A. $R = 4$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = 3$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 12\pi \\ S_{xq} = \pi R l = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} = 15\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{36}{R^2} \\ R^2(h^2 + R^2) = 15^2 \end{cases}$

$\Rightarrow R^2\left(\frac{36^2}{R^4} + R^2\right) = 15^2 \Rightarrow \frac{36^2}{t} + t^2 = 15^2 \; (t = R^2 > 8,4)$

$\Rightarrow t^3 - 225t + 1296 = 0 \Rightarrow t = 9$ thỏa mãn $\Rightarrow R = 3$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và đường cao bằng 4. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón (N).

A. $S_{tp}=24\pi.$ **B.** $S_{tp}=21\pi.$ **C.** $S_{tp}=29\pi.$ **D.** $S_{tp}=27\pi.$

Lời giải:

Ta có $R=3,\ h=4\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=5\Rightarrow S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi Rl+\pi R^2=24\pi.$ **Chọn A.**

Ví dụ 12. Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích toàn phần bằng 24π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=15\pi.$ **B.** $S_{xq}=12\pi.$ **C.** $S_{xq}=20\pi.$ **D.** $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}.$

Lời giải:

Ta có $R=3$ và $S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R\sqrt{h^2+R^2}+\pi R^2=24\pi$

$\Rightarrow 3\sqrt{h^2+9}+9=24\Rightarrow h=4\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=5\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi.$ **Chọn A.**

Ví dụ 13: Cho hình nón (N) có đường cao bằng 4 và diện tích toàn phần bằng 24π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=12\pi.$ **B.** $S_{xq}=15\pi.$ **C.** $S_{xq}=20\pi.$ **D.** $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}.$

Lời giải:

Ta có $h=4$ và $S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R\sqrt{h^2+R^2}+\pi R^2=24\pi$

$\Rightarrow R\sqrt{R^2+16}+R^2=24.$

Với $R>3\Rightarrow R\sqrt{R^2+16}+R^2>24.$

Với $0<R<3\Rightarrow R\sqrt{R^2+16}+R^2<24.$

Do đó $R=3\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=5\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi.$ **Chọn B.**

Ví dụ 14: Cho hình nón (N) có đường sinh bằng 5 và diện tích toàn phần bằng 24π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=12\pi.$ **B.** $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}.$ **C.** $S_{xq}=20\pi.$ **D.** $S_{xq}=15\pi.$

Lời giải:

Ta có $l=5$ và $S_{tp}=S_{xq}+S_{đáy}=\pi Rl+\pi R^2=5\pi R+\pi R^2=24\pi$

$\Rightarrow R^2+5R=24\Rightarrow R=3\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=5\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi.$ **Chọn D.**

Ví dụ 15: Cho hình nón (N) có bán kính bằng 3 và diện tích xung quanh bằng $\frac{5}{8}$ diện tích toàn phần. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=15\pi$. **B.** $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}$. **C.** $S_{xq}=20\pi$. **D.** $S_{xq}=12\pi$.

Lời giải:

Ta có $R=3$ và $S_{xq}=\frac{5}{8}S_{tp}=\frac{5}{8}\left(S_{xq}+S_{đáy}\right)\Rightarrow 3S_{xq}=5S_{đáy}$

$\Rightarrow 3\pi Rl=5\pi R^2\Rightarrow l=5\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Cho hình nón (N) có đường cao bằng 4 và diện tích xung quanh bằng $\frac{5}{8}$ diện tích toàn phần. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}$. **B.** $S_{xq}=15\pi$. **C.** $S_{xq}=12\pi$. **D.** $S_{xq}=20\pi$.

Lời giải:

Ta có $h=4$ và $S_{xq}=\frac{5}{8}S_{tp}=\frac{5}{8}\left(S_{xq}+S_{đáy}\right)\Rightarrow 3S_{xq}=5S_{đáy}$

$\Rightarrow 3\pi Rl=5\pi R^2\Rightarrow 3\sqrt{h^2+R^2}=5R\Rightarrow 9\left(4^2+R^2\right)=25R^2$

$\Rightarrow R=3\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=5\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi$. **Chọn B.**

Ví dụ 17: Cho hình nón (N) có đường sinh bằng 5 và diện tích xung quanh bằng $\frac{5}{8}$ diện tích toàn phần. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=3\pi\sqrt{7}$. **B.** $S_{xq}=12\pi$. **C.** $S_{xq}=15\pi$. **D.** $S_{xq}=20\pi$.

Lời giải:

Ta có $l=5$ và $S_{xq}=\frac{5}{8}S_{tp}=\frac{5}{8}\left(S_{xq}+S_{đáy}\right)\Rightarrow 3S_{xq}=5S_{đáy}$

$\Rightarrow 15R=5R^2\Rightarrow R=3\Rightarrow S_{xq}=\pi Rl=15\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 18: Cho khối nón có bán kính đáy bằng 10 và góc ở đỉnh bằng 60^0. Tính diện tích S của thiết diện đi qua hai đường sinh.

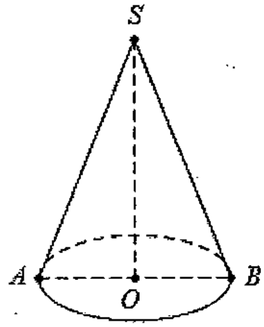
A. $S=200$. **B.** $S=200\sqrt{3}$. **C.** $S=100$. **D.** $S=100\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có $\widehat{ASB}=60^0$ mà ΔSAB cân tại S

$\Rightarrow \widehat{ASO}=30^0 \Rightarrow \dfrac{OA}{SA}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow SA=2OA=20.$

Do đó $S=\dfrac{1}{2}l^2.\sin 60^0=\dfrac{1}{2}SA^2.\sin 60^0=100\sqrt{3}$. **Chọn D.**



Ví dụ 19: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=5$, $AC=2$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=\sqrt{21}$. **B.** $l=5$. **C.** $l=2$. **D.** $l=\sqrt{29}$.

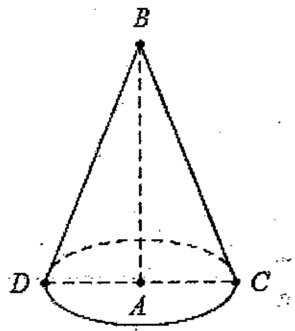
Lời giải:

Khi quay ABC vuông tại A xung quanh trục AB thì đường sinh của hình nón chính là cạnh BC.

Ta có $l=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$. **Chọn D.**

➢ **Nhận xét**

Ta xác định được $R=AC=2$, $l=BC=\sqrt{29}$, $h=AB=5$. Khi đó dựa vào các công thức đã biết ta hoàn toàn tính được S_{xq}, S_{tp}, V.



Ví dụ 20: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=4$, $AC=3$. Tính thể tích V của khối nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục BC.

A. $V=12\pi$. **B.** $V=16\pi$ **C.** $V=\dfrac{80\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{48\pi}{5}$.

Lời giải:

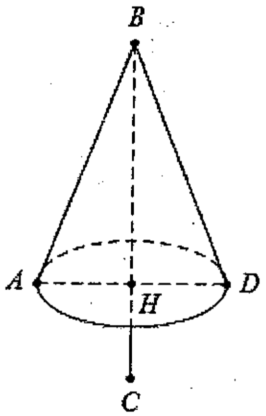
Kẻ $AH\perp BC$ $(H\in BC)$, khi quay ΔABC xung quanh trục BC ta được hai khối nón N_1 và N_2 chung đáy có tâm là H và bán kính $R=HA=HD=\dfrac{AD}{2}$.

Khối nón N_1 có đường cao $h_1=BH$, khối nón N_2 có đường cao $h_2=CH$.

Thể tích của khối nón N_1 là $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH.$

Thể tích của khối nón N_2 là $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.CH$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2 (BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC.$



Cạnh $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Cạnh $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}.$

Do đó $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2.5 = \frac{48\pi}{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 21: Cho hình nón (N), đáy của (N) có bán kính bằng R. Thiết diện qua trục của (N) là một tam giác vuông. Khối nón được tạo nên bởi (N) có thể tích bằng ?

A. $\frac{1}{3}\pi R^3.$ **B.** $\pi R^3.$ **C.** $\frac{2}{3}\pi R^3.$ **D.** $2\pi R^3.$

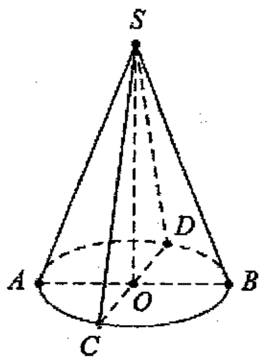
Lời giải:

Thiết diện là tam giác vuông SCD.

Hơn nữa cạnh $SC = SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại S

$\Rightarrow h = SO = OC = OD = R$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3$. **Chọn A.**



➢ **Nhận xét**

+) Ta có thể tính S_{xq} của (N) như sau:

Đường sinh $l = SC = \sqrt{OC^2 + SO^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

Do đó $S_{xq} = \pi Rl = \pi R^2\sqrt{2}.$

+) Nếu thay giả thiết đáy của (N) có bán kính bằng R thành giả thiết thể tích của khối nón được tạo nên bởi (N) bằng $\frac{1}{3}\pi R^3$ thì khi đó

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 \Rightarrow h = R \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$

+) Nếu thay giả thiết đáy của (N) có bán kính bằng R thành giả thiết diện tích xung quanh của (N) bằng $\pi R^2\sqrt{2}$ thì khi đó

$S_{xq} = \pi Rl = \pi R^2\sqrt{2} \Rightarrow l = R\sqrt{2} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = R.$

+) Nếu thay thiết diện qua trục của (N) là một tam giác vuông thành thiết diện qua trục của (N) là một tam giác có một góc bằng 60^0 thì khi đó ΔSCD đều

$\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SO}{OC} = \sqrt{3} \Rightarrow SO = R\sqrt{3}.$

+) Nếu thay thiết diện qua trục của (N) là một tam giác vuông thành thiết diện qua trục của (N) là một tam giác có một góc bằng 120^0 thì khi đó $\widehat{CSD} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{CSO} = 60^0 \Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{OC}{SO} = \sqrt{3} \Rightarrow SO = \dfrac{R}{\sqrt{3}}.$

+) Nếu thay thiết diện qua trục của (N) là một tam giác vuông thành thiết diện qua trục của (N) là một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{R^2}{3}$ thì khi đó

$S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SO.CD = \dfrac{R^2}{3} \Rightarrow SO = \dfrac{2R^2}{3CD} = \dfrac{2R^2}{3.2R} = \dfrac{R}{3}.$

+) Nếu thay thiết diện qua trục của (N) là một tam giác vuông thành thiết diện qua trục của (N) là một tam giác có chu vi bằng $8R$ thì khi đó $SC + SD + CD = 8R$

$\Rightarrow 2SC + 2R = 8R \Rightarrow SC = 3R \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2R\sqrt{2}.$

Ví dụ 22: Cho hình nón (N) có đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$, đáy của (N) có bán kính bằng a. Thiết diện qua đỉnh của (N) là một tam giác nằm trong mặt phẳng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Tính theo a diện tích S của tam giác này.

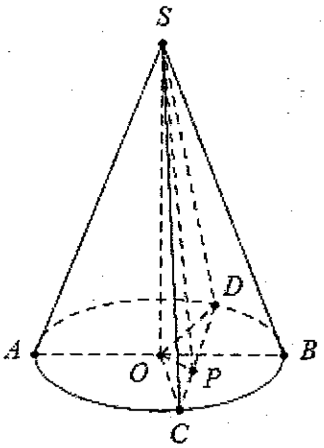
A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}.$ **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $S = \dfrac{3a^2}{2}.$ **D.** $S = \dfrac{3a^2}{4}.$

Lời giải:

Thiết diện qua đỉnh của (N) là ΔSCD như hình vẽ.

Kẻ $OP \perp CD$ $(P \in CD)$, ta có:

$$\begin{cases} CD \perp OP \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOP) \Rightarrow CD \perp SP.$$



Như vậy $\begin{cases}(SCD)\cap(OCD)=CD\\ CD\perp SP,\ CD\perp OP\\ SP\subset(SCD),\ OP\subset(OCD)\end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((SCD);(OCD))}=\widehat{SPO}\Rightarrow \widehat{SPO}=60^0$

$\Rightarrow \tan 60^0=\dfrac{SO}{OP}=\sqrt{3}\Rightarrow OP=\dfrac{SO}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow CP^2=OC^2-OP^2=a^2-\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow CP=\dfrac{a}{2}\Rightarrow CD=2CP=a.$

Lại có $\sin 60^0=\dfrac{SO}{SP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SP=\dfrac{2SO}{\sqrt{3}}=a\sqrt{3}.$

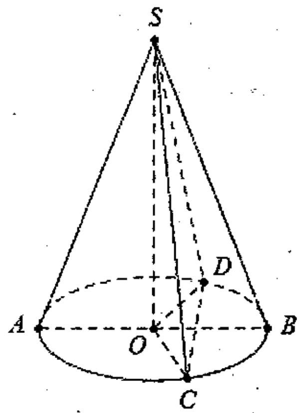
Khi đó từ $CD\perp SP\Rightarrow S_{SCD}=\dfrac{1}{2}CD.SP=\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 23: Cho hình nón (N) có đường cao bằng $2a$, đáy của (N) có bán kính bằng a. Thiết diện qua đỉnh của (N) là một tam giác có một góc bằng 60^0. Tính theo a diện tích S của tam giác này.

A. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $S=\dfrac{5a^2}{2}$. **D.** $S=\dfrac{5a^2}{4}$.

Lời giải:

Thiết diện qua đỉnh của (N) là ΔSCD như hình vẽ.



Ta có $SC^2=SO^2+OC^2=4a^2+a^2\Rightarrow SC=a\sqrt{5}.$

$SD^2=SO^2+OD^2=4a^2+a^2\Rightarrow SC=a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SC=SD=a\sqrt{5}\Rightarrow \Delta SCD$ cân tại S.

Bài ra thì ΔSCD có một góc bằng $60^0\Rightarrow \Delta SCD$ đều

$\Rightarrow S_{SCD}=\dfrac{1}{2}SC.SD\sin 60^0=\dfrac{1}{2}SC^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{4}.$

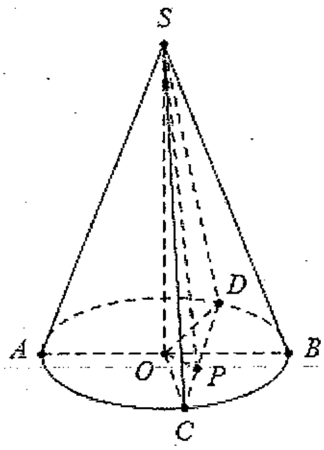
Chọn B.

Ví dụ 24: Cho hình nón (N) có đường cao bằng $a\sqrt{3}$, đáy của (N) có bán kính bằng a. Thiết diện qua đỉnh của (N) là một tam giác có chu vi bằng $5a$. Tính theo a diện tích S của tam giác này.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:

Thiết diện qua đỉnh của (N) là ΔSCD như hình vẽ.



Ta có $SC^2 = SO^2 + OC^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SC = 2a.$

$SD^2 = SO^2 + OD^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow SC = 2a.$

Bài ra có chu vi ΔSCD bằng $5a$

$\Rightarrow SC + SD + CD = 5a \Rightarrow 4a + CD = 5a \Rightarrow CD = a$

Kẻ $SP \perp CD$ $(P \in CD)$ mà $SC = SD = 2a$

$$\Rightarrow PC = PD = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow SP^2 = SC^2 - CP^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SP = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}CD.SP = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$$

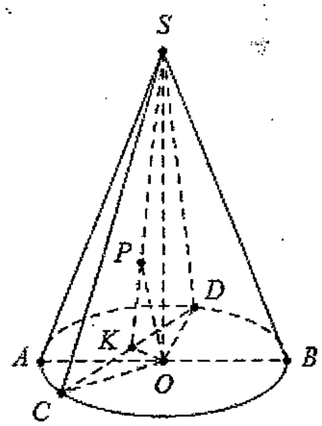
Chọn C.

Ví dụ 25: Cho hình nón (N) có đường cao bằng $\frac{3a}{2}$, đáy của (N) có bán kính bằng a. Thiết diện qua đỉnh của (N) là một tam giác nằm trong mặt phẳng cách tâm đáy của (N) một khoảng bằng $\frac{3a}{4}$. Tính theo a diện tích S của tam giác này.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = \frac{3a^2}{2}$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{3a^2}{4}$.

Lời giải:

Thiết diện qua đỉnh của (N) là ΔSCD như hình vẽ.



Kẻ $OK \perp CD$ $(K \in CD)$, $OP \perp SK$ $(P \in SK)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp OK \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOK) \Rightarrow CD \perp OP.$

Như vậy $\begin{cases} OP \perp CD \\ OP \perp SK \end{cases} \Rightarrow OP \perp (SCD) \Rightarrow d(O;(SCD)) = OP.$

Bai ra có $d(O;(SCD)) = \frac{3a}{4} \Rightarrow OP = \frac{3a}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OP^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{16}{9a^2} - \frac{4}{9a^2} = \frac{12}{9a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow CK^2 = OC^2 - OK^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} \Rightarrow CK = \frac{a}{2} \Rightarrow CD = 2CK = a.$

Lại có $SK = \frac{SO.OK}{OP} = \frac{\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{4}} = a\sqrt{3}.$

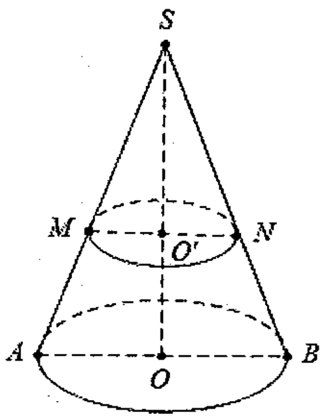
Từ $CD \perp (SOK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}CD.SK = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 26: Cho hình nón (N) có đường cao bằng $2a$, đáy của (N) có bán kính bằng a. Thiết diện vuông góc với trục của (N) là một đường tròn (T) có chu vi bằng $\frac{2\pi a}{3}$. Tính theo a diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh là đỉnh của (N) và đáy là đường tròn (T).

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{9}$. **B.** $S_{xq} = \frac{2\pi a^2\sqrt{5}}{9}$. **C.** $S_{xq} = \frac{2\pi a^2\sqrt{17}}{9}$. **D.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{9}$.

Lời giải:

Thiết diện vuông góc với trục của (N) là đường tròn (T) có tâm là O' như hình vẽ.



Ta có $2\pi.MO' = \frac{2\pi a}{3} \Rightarrow MO' = \frac{a}{3}$.

Lại có $\frac{MO'}{AO} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow SO' = \frac{MO'.SO}{AO} = \frac{\frac{a}{3}.2a}{a} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow SM^2 = SO'^2 + MO'^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{9} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

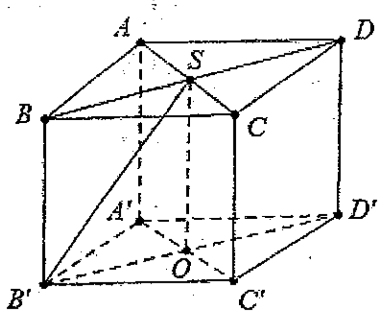
$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \pi.MO'.SM = \pi.\frac{a}{3}.\frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{9}$.

Chọn D.

Ví dụ 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hình nón (N) có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Tính theo a diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$. **D.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:



Gọi S là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Hình nón (N) có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ nên đáy của (N) sẽ có bán kính $R = OB'$ và (N) sẽ có đường sinh $l = SB'$.

Khi đó $S_{xq} = \pi Rl = \pi.OB'.SB'$.

Cạnh $OB' = \dfrac{A'B'}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $SO = AA' = a$

$\Rightarrow SB'^2 = OB'^2 + SO^2 = \dfrac{a^2}{2} + a^2 \Rightarrow SB' = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Do đó $S_{xq} = \pi.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.a\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

III. [TT6038] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [510199] Cho hình nón (*N*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (*N*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $S_{xq} = \pi rh$ **B.** $S_{xq} = 2\pi rl$ **C.** $S_{xq} = 2\pi r^2 h$ **D.** $S_{xq} = \pi rl$

Câu 2: [510202] Cho hình nón (*N*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu S_{tp} là diện tích toàn phần của (*N*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $S_{tp} = \pi rl$ **B.** $S_{tp} = \pi rl + 2\pi r$ **C.** $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$ **D.** $S_{tp} = 2\pi rl + \pi r^2$

Câu 3: [510206] Cho hình nón (*N*) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu $V_{(N)}$ là thể tích khối nón (*N*). Công thức nào sau đây là đúng ?

A. $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi rh$ **B.** $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ **C.** $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi rl$ **D.** $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 l$

Câu 4: [510207] Cho hình nón (*N*) có chiều cao $h = 4\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 3\,\text{cm}$. Độ dài đường sinh của (*N*) bằng ?

A. 5cm **B.** $\sqrt{7}$ cm **C.** 7cm **D.** 12cm

Câu 5: [510210] Cho hình nón (*N*) có chiều cao bằng 4cm, bán kính đáy bằng 3cm. Diện tích xung quanh của (*N*) bằng ?

A. $12\pi(\text{cm}^2)$ **B.** $15\pi(\text{cm}^2)$ **C.** $20\pi(\text{cm}^2)$ **D.** $30\pi(\text{cm}^2)$

Câu 6: [510212] Cho hình nón (*N*) có đường sinh bằng 10cm, bán kính đáy bằng 6cm. Diện tích toàn phần của (*N*) bằng ?

A. $60\pi(\text{cm}^2)$ **B.** $120\pi(\text{cm}^2)$ **C.** $96\pi(\text{cm}^2)$ **D.** $66\pi(\text{cm}^2)$

Câu 7: [510214] Cho hình nón (*N*) có đường sinh bằng 9cm, chiều cao bằng 3cm. Thể tích của khối nón (*N*) bằng ?

A. $72\pi(\text{cm}^3)$ **B.** $216\pi(\text{cm}^3)$ **C.** $\sqrt{72}\pi(\text{cm}^3)$ **D.** $27\pi(\text{cm}^3)$

Câu 8: [510216] Diện tích xung quanh của hình nón được sinh ra khi quay tam giác đều *ABC* cạnh *a* xung quanh đường cao *AH* bằng ?

A. πa^2 **B.** $\frac{\pi a^2}{2}$ **C.** $2\pi a^2$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 9: [510218] Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A* có cạnh $AB = 2a$. Quay tam giác này xung quanh cạnh *AB*. Tính thể tích của khối nón được tạo thành.

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$ **B.** $\frac{4\pi a^2}{3}$ **C.** $\frac{8\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 10: [510219] Quay một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ xung quanh một cạnh góc vuông. Tính diện tích xung quanh của hình nón được tạo thành.

A. $\pi a^2\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}\pi a^2$ **C.** $2\pi a^2$ **D.** πa^2

Câu 11: [510222] Cho tam giác *ABC* vuông tại *B* có $AB = a$ và $A = 30^0$. Quay tam giác này xung quanh cạnh *AB*. Diện tích toàn phần của hình nón được tạo thành bằng ?

A. $3\pi a^2$ **B.** $\frac{5}{3}\pi a^2$ **C.** πa^2 **D.** $\sqrt{3}\pi a^2$

Câu 12: [510224] Hình nón (*N*) có diện tích xung quanh bằng $20\pi(\text{cm}^2)$ và bán kính đáy bằng 4cm. Thể tích của khối nón (*N*) bằng ?

A. $16\pi(\text{cm}^3)$ **B.** $10\pi(\text{cm}^3)$ **C.** $\frac{16}{3}\pi(\text{cm}^3)$ **D.** $\frac{10}{3}\pi(\text{cm}^3)$

Câu 13: [510226] Cắt hình nón (*N*) bằng một mặt phẳng đi qua trục của hình nón được thiết diện là một tam giác vuông cân có diện tích bằng $3a^2$. Diện tích xung quanh của (*N*) bằng ?

A. $6\pi a^2(\text{cm}^2)$ **B.** $\sqrt{2}\pi a^2(\text{cm}^2)$ **C.** $6\sqrt{2}\pi a^2(\text{cm}^2)$ **D.** $3\sqrt{2}\pi a^2(\text{cm}^2)$

Câu 14: [510230] Cho hình chóp đều *S.ABCD*, đáy có cạnh bằng 2*a*, cạnh bên bằng 3*a*. Hình nón (*N*) ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*. Thể tích của khối nón (*N*) bằng ?

A. $\sqrt{7}\pi a^3(\text{cm}^3)$ **B.** $\frac{7\pi a^3}{3}(\text{cm}^3)$ **C.** $\frac{6\pi a^3}{3}(\text{cm}^3)$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}\pi a^3}{3}(\text{cm}^3)$

Câu 15: [510232] Cho hình nón (*N*) có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$. Cắt hình nón (*N*) bằng một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cách tâm của đáy 12cm. Diện tích của thiết diện tạo thành bằng ?

A. $50\sqrt{7}(cm^2)$ **B.** $100\sqrt{7}(cm^2)$ **C.** $150\sqrt{7}(cm^2)$ **D.** $200\sqrt{7}(cm^2)$

Câu 16: [510234] Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Khi quay tam giác *ABC* quanh cạnh *AB* thì đường gấp khúc *BCA* tạo thành hình tròn xoay là ?

A. Khối nón **B.** Mặt nón **C.** Hình nón **D.** Hai hình nón

Câu 17: [510235] Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì tam giác ABC tạo thành:

A. Khối nón **B.** Mặt nón **C.** Hình nón **D.** Hai hình nón

Câu 18: [510239] Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh BC thì đường gấp khúc BAC tạo thành:

A. Hình nón **B.** Hai hình nón **C.** Mặt nón **D.** Khối nón

Câu 19: [510244] Cho hình nón (N) có đỉnh S và đáy là đường tròn (C). Thể tích của khối nón (N) bằng 10cm^3. Hình trụ (T) có một đáy là (C), đáy còn lại có tâm là S. Thể tích của (T) là:

A. $10(\text{cm}^3)$ **B.** $20(\text{cm}^3)$ **C.** $30(\text{cm}^3)$ **D.** $40(\text{cm}^3)$

Câu 20: [510245] Hình nón có chiều dài đường sinh d, bán kính đáy r thì có diện tích xung quanh bằng:

A. πrd **B.** $2\pi rd$ **C.** πrl **D.** $2\pi rl$

Câu 21: [510246] Hình nón có đường sinh $l = 5\text{cm}$ và bán kính đáy $r = 4\text{cm}$ thì có diện tích xung quanh bằng:

A. $20\pi(\text{cm}^2)$ **B.** $40\pi(\text{cm}^2)$ **C.** $20(\text{cm}^2)$ **D.** $20\pi(\text{cm}^3)$

Câu 22: [510248] Hình nón bán kính đáy $r = 3\text{cm}$ và chiều cao $h = 4\text{cm}$ thì có diện tích toàn phần bằng:

A. $24(\text{cm}^2)$ **B.** $39(\text{cm}^2)$ **C.** $33(\text{cm}^2)$ **D.** $12(\text{cm}^3)$

Câu 23: [510249] Một hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng $2R$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\dfrac{\pi R^2}{2}$ **B.** πR^2 **C.** $2\pi R^2$ **D.** $4\pi R^2$

Câu 24: [510251] Một hình nón được sinh ra do tam giác đều cạnh $2a$ quay quanh đường cao của nó. Khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh của hình nón bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 25: [510253] Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ACB} = 60^0$. Khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AC thì khối nón tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng:

A. πa^3 **B.** $3\pi a^3$ **C.** $9\pi a^3$ **D.** $6\pi a^3$

Câu 26: [510256] Một khối nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối nón bằng:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 27: [510259] Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có diện tích $50\,cm^2$. Thể tích khối nón là:

A. $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\pi\left(cm^3\right)$ **B.** $\dfrac{250\sqrt{2}}{3}\pi\left(cm^3\right)$ **C.** $\dfrac{50\sqrt{2}}{3}\pi\left(cm^3\right)$ **D.** $\dfrac{350\sqrt{2}}{3}\pi\left(cm^3\right)$

Câu 28: [510262] Một hình nón có đường sinh bằng 3 cm và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bởi mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy bằng 60°. Khi đó diện tích thiết diện là:

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}(cm^2)$ B. $\frac{27}{2}(cm^2)$ C. $6(cm^2)$ D. $3\sqrt{2}(cm^2)$.

Câu 29: [510265] Cho hình nón đỉnh S có đường cao bằng 6 cm, bán kính đáy bằng 8 cm. Trên đường tròn đáy lấy hai điểm A, B sao cho $AB = 12\,cm$. Diện tích tam giác SAB bằng:

A. $48(cm^2)$ B. $40(cm^2)$ C. $60(cm^2)$ D. $100(cm^2)$.

Câu 30: [510267] Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh là đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ B. $\pi a^2\sqrt{2}$ C. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31: [510269] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh ra khi đường gấp khúc $BB'D$ quay quanh BD bằng:

A. $\pi a^2\sqrt{6}$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$. C. $\pi a^2\sqrt{2}$. D. $\pi a^2\sqrt{5}$.

Câu 32: [510273] Một hình nón được sinh ra do tam giác đều cạnh a quay quanh đường cao của nó. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33: [510277] Hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60^0. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là:

A. $\frac{3\pi a^2}{2}$. B. $\frac{3\pi a^2}{4}$. C. $\frac{3\pi a^2}{6}$. D. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Câu 34: [510282] Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh là đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Thể tích của khối nón bằng:

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$.

Câu 35: [510285] Một hình nón có đường sinh bằng a, góc ở đỉnh bằng 90^0. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Diện tích thiết diện bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2a^2}{3}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 36: [510288] Một hình nón được sinh ra do tam giác đều cạnh a quay quanh đường cao của nó. Một mặt cầu có thể tích bằng thể tích hình nón thì có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{8}$. D. $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{2}$.

Câu 37: [510293] Gọi l,h,R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng ?

A. $l^2 = h^2 + R^2$ **B.** $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}$ **C.** $R^2 = h^2 + l^2$ **D.** $l^2 = hR$

Câu 38: [510296] Gọi l,h,R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N). Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) bằng ?

A. $S_{xq} = \pi Rl$ **B.** $S_{xq} = \pi Rh$ **C.** $S_{xq} = 2\pi Rl$ **D.** $S_{xq} = \pi R^2 h$

Câu 39: [510299] Gọi l,h,R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón (N) bằng ?

A. $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$ **B.** $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$

C. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$ **D.** $S_{tp} = \pi Rh + \pi R^2$

Câu 40: [510306] Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón bằng ?

A. $20\pi a^2$ **B.** $40\pi a^2$ **C.** $24\pi a^2$ **D.** $12\pi a^2$

Câu 41: [510309] Cho hình nón có bán kính đáy là $3a$, chiều cao là $4a$. thể tích của hình nón bằng ?

A. $12\pi a^3$ **B.** $36\pi a^3$ **C.** $15\pi a^3$ **D.** $12\pi a^3$

Câu 42: [510313] Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích toàn phần hình nón bằng ?

A. $36\pi a^2$ **B.** $30\pi a^2$ **C.** $38\pi a^2$ **D.** $32\pi a^2$

Câu 43: [510317] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa một mặt bên và đáy bằng 60^0, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

A. $\frac{\pi a^2}{6}$ **B.** $\frac{\pi a^2}{4}$ **C.** $\frac{\pi a^2}{3}$ **D.** $\frac{5\pi a^2}{6}$

Câu 44: [510319] Cho hình hóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp $ABCD$ bằng:

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$ **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{15}}{4}$ **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{6}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$

Câu 45: [510321] Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh huyền 2a. Thể tích của khối nón bằng:

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$ **C.** πa^3 **D.** $2\pi a^3$

Câu 46: [510323] Diện tích toàn phần của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\sqrt{3}$ và thiết diện qua trục là tam giác đều bằng:

A. 12π **B.** 8π **C.** 4π **D.** 16π

Câu 47: [510326] Khối nón (*N*) có chiều cao bằng $3a$. Thiết diện song song và cách mặt đáy một đoạn bằng *a*, có diện tích bằng $\frac{64}{9}\pi a^2$. Thể tích của khối nón (*N*) bằng:

A. $16\pi a^3$ **B.** $\frac{25}{3}\pi a^3$ **C.** $48\pi a^3$ **D.** $\frac{16}{3}\pi a^3$

Câu 48: [510328] Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Kí hiệu V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu ngoại tiếp và nội tiếp khối nón trên. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng ?

A. 8 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 2

Câu 49: [510332] Khối nón (*N*) có chiều cao là *h* và nội tiếp trong khối cầu có bán kính *R* với $h < 2R$. Khi đó, thể tích của khối nón (*N*) theo *h* và *R* bằng ?

A. $\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$ **B.** $\frac{4}{3}\pi h^2(2R-h)$ **C.** $\pi h^2(2R-h)$ **D.** $\frac{1}{3}\pi h(2R-h)$

Câu 50: [510333] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *O* và *O'* lần lượt là tâm của hai đáy ABC, $A'B'C'$. Biết góc giữa đường thẳng $O'B$ với mặt phẳng (*ABC*) bằng 30^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón đỉnh *O'*, đáy là đường tròn tâm *O* ngoại tiếp tam giác *ABC*.

A. $\frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{27}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{9}$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{9}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{9}; \frac{\pi a^3}{27}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. D	**02. C**	**03. B**	**04. A**	**05. B**	**06. C**	**07. C**	**08. B**	**09. C**	**10. A**
11. C	**12. A**	**13. D**	**14. D**	**15. B**	**16. C**	**17. A**	**18. B**	**19. C**	**20. A**
21. A	**22. A**	**23. C**	**24. D**	**25. A**	**26. D**	**27. B**	**28. D**	**29. A**	**30. A**
31. B	**32. A**	**33. A**	**34. B**	**35. A**	**36. A**	**37. A**	**38. A**	**39. A**	**40. A**
41. D	**42. A**	**43. C**	**44. A**	**45. A**	**46. A**	**47. A**	**48. A**	**49. A**	**50. A**

Chủ đề 21

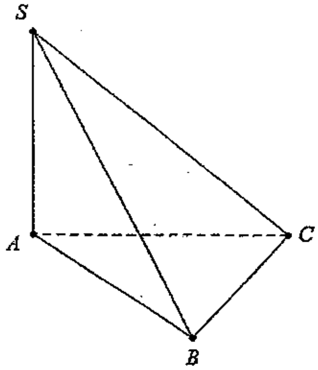
[TV6039] CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B và $SA\perp(ABC)$. Biết rằng $SB=a$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **B.** $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$ **C.** $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **D.** $V_{\max}=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

Lời giải:



Đặt $SA=x$ ta có: $AB=\sqrt{a^2-x^2}=BC$ suy ra $S_{ABC}=\dfrac{AB^2}{2}=\dfrac{a^2-x^2}{2}$

Khi đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}x.\dfrac{a^2-x^2}{2}=\dfrac{1}{6}x\left(a^2-x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=a^2x-x^3$ $(0<x<a)$ ta có: $f'(x)=a^2-3x^2=0\Rightarrow x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Từ đó suy ra $\max\limits_{(0;a)}f(x)=f\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{1}{6}f\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ và $SA\perp(ABCD)$. Biết rằng khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng h. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ theo h.

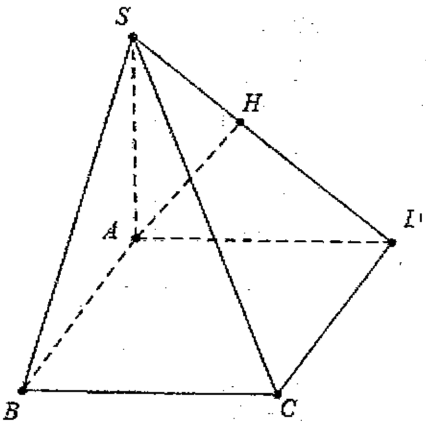
A. $V_{\max}=\dfrac{h^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V_{\max}=\dfrac{2h^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V_{\max}=\dfrac{3h^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $V_{\max}=\dfrac{2h^3\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:

Do $AB\,//\,CD$ nên $d\left(B;(SCD)\right)=d\left(A;(SCD)\right)$

Dựng $AH\perp SD\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=h$.

Đặt $AD = x \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \frac{xh}{\sqrt{x^2 - h^2}}$



Khi đó $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{xh}{\sqrt{x^2 - h^2}}.x^2$

Như vậy $V_{\max} \Leftrightarrow \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - h^2}}$ lớn nhất

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - h^2}}\ (x > h)$ ta có:

$$f'(x) = \frac{3x^2\sqrt{x^2 - h^2} - \frac{x^3.x}{\sqrt{x^2 - h^2}}}{h^2 - x^2} = \frac{2x^4 - 3x^2h^2}{\sqrt{(h^2 - x^2)^3}} = 0 \Rightarrow x = h\sqrt{\frac{3}{2}}$$

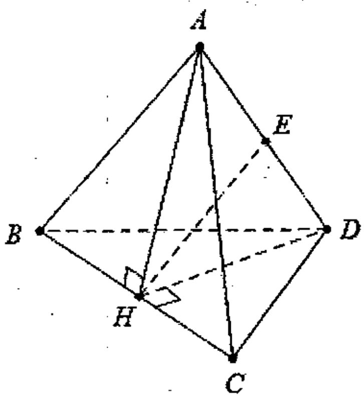
Từ đó suy ra $V_{\max} = \frac{1}{3}f\left(h\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$, biết các tam giác ABC và BCD là các tam giác đều cạnh a và cạnh $AD = x$, $0 < x < a\sqrt{3}$. Tính thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là:

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **B.** $V_{\max} = \frac{a^3}{4}$ **C.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $V_{\max} = \frac{a^3}{8}$

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC khi đó $\begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases}$



Suy ra $BC \perp (AHD)$ và ta có: $AH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi E là trung điểm của AD do tam giác AHD cân nên $HE \perp AD \Rightarrow HE = \sqrt{AH^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$.

Ta có:

$$V_{ABCD} = V_{B.AHD} + V_{C.AHD} = \frac{1}{3}BC.S_{AHD} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}HE.AD$$

Lại có $\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}.x = 2.\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}.\frac{x}{2} \le \left(\frac{3a^2}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}\right)$

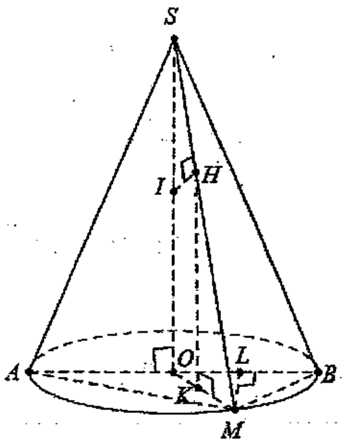
$=\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow V_{ABCD}\le\dfrac{a^3}{8}\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{a^3}{8}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3a^2=2x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **Chọn D.**

Cách 2: Nhận xét $V_{\max}\Leftrightarrow S_{AHD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AH.DH\sin\widehat{AHD}=\dfrac{3a^2}{8}.\sin\widehat{AHD}\le\dfrac{3a^2}{8}$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, đường kính $AB=2R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại O lấy điểm S sao cho $SO=R\sqrt{3}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO với $SI=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ và M là một điểm thuộc (C). H là hình chiếu của I trên SM .Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $ABHM$.

A. $V=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $V=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $V=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:



Ta có: $\Delta SHI\sim\Delta SOM\ (g-g)$ do đó $\dfrac{SI}{SM}=\dfrac{SH}{SO}$

$$\Rightarrow SH=\frac{SI.SO}{SM}=\frac{\frac{2R}{\sqrt{3}}.R\sqrt{3}}{\sqrt{3R^2+R^2}}=R$$

Do $SH=\dfrac{1}{2}SM$ nên H là trung điểm của SM.

Dựng $HK\,//\,SO$ và $ML\perp AB\Rightarrow HK=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $V_{H.ABM}=\dfrac{1}{3}HK.S_{AMB}=\dfrac{R\sqrt{3}}{6}.\dfrac{1}{2}ML.AB=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}ML$

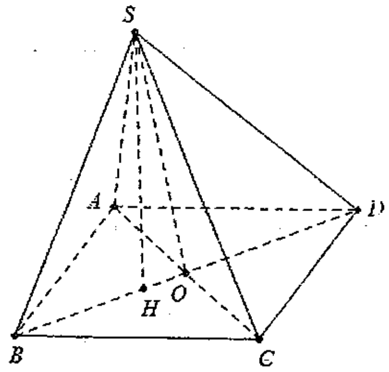
Mặt khác $ML\le MO$ do đó $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}ML\le\dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}MO=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow MO=R\Leftrightarrow MO\perp AB$ hay M là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SC=a$. Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V_{\max}=\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $V_{\max}=\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $V_{\max}=\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{\max}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải:



Đặt $SD = x > 0$. Ta có: $\Delta SAC = \Delta ABC\ (c-c-c)$

Do đó $SO = BO$ (2 đường trung tuyến tương ứng)

Suy ra $SO = \frac{BD}{2} \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến ứng với canh đối diện bằng nửa cạnh ấy)

Khi đó $BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$

Suy ra $AC = 2OA = 2\sqrt{AB^2 - \frac{BD^2}{4}} = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2+x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}$

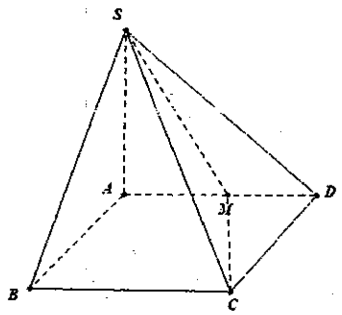
Lại có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.AC.S_{SBD} = \frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{3}.\frac{SB.SD}{2} = \frac{ax\sqrt{3a^2-x^2}}{6}$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $x\sqrt{3a^2-x^2} \le \frac{x^2+3a^2-x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow V \le \frac{a^3}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: [325124][THPT Chuyên Hưng Yên - Lần 2-2017] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = y$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = x$. Biết rằng $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCM$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải:



Ta có: $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCB} = \frac{1}{3}y.\frac{AM+BC}{2}.AB$

$= \frac{a}{6}.(x+a)y \Rightarrow V_{Max} \Leftrightarrow \left[(x+a)y\right]_{\max}\ \left(x \in [0;a]\right)$.

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = (x+a)y = (x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ với $x \in [-a;a]$ suy ra $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} + (x+a).\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - x^2 - x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ x = \frac{a}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Cách 2: Đặt $x = a.\sin t;\ y = a.\cos t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

suy ra $(x+a)y = (a\sin t + a\cos t).a\cos t = a^2(\sin t\cos t + \cos t)$.

Xét hàm số $f(t) = \sin t\cos t + \cos t = \frac{\sin 2t}{2} + \cos t$

Ta có: $f'(t) = \cos 2t - \sin t = 1 - 2\sin^2 t - \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Mặt khác $f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{Max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn D.**

Cách 3: Cho $a = 1$ lập bảng **TABLE** cho hàm số $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$

MIN MAX TRONG KHỐI TRỤ

Ví dụ 1: Một công ty xuất nhập khẩu muốn sản xuất một loại thùng hình trụ để chứa xăng dầu có thể tích V cho trước. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều cao h và bán kính R thỏa mãn đẳng thức nào trong các đẳng thức sau.

A. $h = 2R$ **B.** $h = R$ **C.** $h = R\sqrt{2}$ **D.** $h = R\sqrt{3}$

Lời giải:

Thể tích của thùng là $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$

Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của thùng phải nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi(R^2 + Rh) = 2\pi\left(R^2 + \frac{V}{\pi R}\right) = 2\pi\left(R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R}\right)$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \ge 3\sqrt[3]{R^2.\frac{V}{2\pi R}.\frac{V}{2\pi R}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \frac{V}{2\pi R} \Leftrightarrow R^2 = \frac{\pi R^2 h}{2\pi R} \Leftrightarrow h = 2R$. **Chọn A**

Ví dụ 2: Người ta định làm một cái hình trụ bằng tôn có thể tích V cho trước. Tìm bán kính đáy của hình trụ sao cho tốn ít nguyên liệu nhất.

A. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ **B.** $r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ **C.** $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ **D.** $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$

Lời giải

Thể tích của hình trụ là $V=\pi r^2 h$ (Trong đó h là chiều cao của khối trụ)

Diện tích toàn phần của hình trụ là (Diện tích phần làm nguyên liệu)

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\ge 3\sqrt[3]{2\pi r^2.\frac{V}{r}.\frac{V}{r}}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2\pi r^2=\frac{V}{r}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: [331078] [Trích đề thi Sở GD và ĐT Hà Nội - 2017] Một công ty dự kiến chi 1 tỷ đồng để sản xuất các thùng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000 đ/m^2, chi phí để làm mặt đáy là 120.000 đ/m^2. Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể)

A. 12525 thùng. **B.** 18209 thùng. **C.** 57582 thùng. **D.** 58135 thùng.

Lời giải:

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của 1 thùng sơn.

Suy ra dung tích thùng sơn là $V=\pi r^2 h=0,005\left(m^3\right)$

Diện tích xung quanh của thưng là $S_{xq}=2\pi rh$, diện tích 2 đáy là $S_d=2\pi r^2$

Chi phí là $T=2\pi rh.100+2\pi r^2.120$ ta sẽ tìm $T_{\min}$ khi đó $T=40\pi\left(5rh+6r^2\right)_{\min}\Leftrightarrow F=5rh+6r^2$ nhỏ nhất

Ta có $F=5.\frac{0,005}{\pi r}+6r^2=\frac{1}{80\pi r}+\frac{1}{80\pi r}+6r^2\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{80\pi r}.\frac{1}{80\pi r}.6r^2}=3\sqrt[3]{\frac{3}{3200\pi^2}}$

Chi phí ít nhất thì sẽ sản suất được nhiều thùng nhất.

Khi đó số thùng tối đa sản xuất được là: $n=\frac{1.000.000}{T_{\min}}=58135$ thùng. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Một công ty Container cần thiết kế các thùng đựng hàng hình hộp chữ nhật , không nắp có đáy là hình vuông, thể tích cố định là $V\left(m^3\right)$. Hỏi cạnh đáy của thùng là bao nhiêu mét để tổng diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy là nhỏ nhất?

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$ **B.** $2\sqrt[3]{V}$ **C.** $\sqrt[3]{4V}$ **D.** $\sqrt[3]{2V}$

Lời giải:

Gọi $x\left(m\right)$ và $y\left(m\right)$ lần lượt là độ dài đáy và chiều cao của thùng đựng hàng.

Khi đó ta có: $x^2y=V$.

Mặt khác tổng diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy là $S=4xy+x^2=4x.\frac{V}{x^2}+x^2$

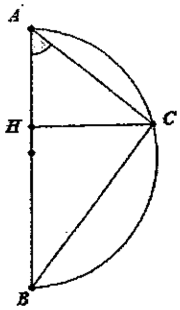
Xét $S(x)=\frac{4V}{x}+x^2=\frac{2V}{x}+\frac{2V}{x}+x^2\ge 3\sqrt[3]{4V^2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^3=2V\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2V}$

Chọn D.

Ví dụ 5: [Trích đề thi thử chuyên Đại học Vinh lần 1 - 2017] Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\widehat{CAB}=\alpha$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha=45^0$ **B.** $\alpha=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\alpha=30^0$ **D.** $\alpha=60^0$

Lời giải:



Đặt $AH=h;CH=r$ lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình nón khi quay tam giác ACH quanh trục AB.

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. Mặt khác $HB=2R-h$ từ $CH^2=HA.HB$ (hệ thực lượng trong tam giác vuông).

Suy ra $r^2=h(2R-h)\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi h.(2R-h).h$

$\Rightarrow V_{\max}\Leftrightarrow\left[(2R-h)h^2\right]_{\max}$

Cách 1: Xét hàm số $f(h)=(2R-h)h^2\ (0<h<2R)$

Cách 2: Ta có: $(2R-h)h^2=4(2R-h).\frac{h}{2}.\frac{h}{2}\le 4\left(\frac{2R-h+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}}{3}\right)^3=\frac{32}{27}R^2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2R-h=\frac{h}{2}\Leftrightarrow R=\frac{3}{4}h\Rightarrow h=\frac{4}{3}R\Rightarrow r=AH=\frac{2R\sqrt{2}}{3}$

$\Leftrightarrow\tan\alpha=\frac{CH}{AH}=\frac{r}{h}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $\alpha=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 3: Do tam giác ABC vuông tại C nên ta có $AC=AB\cos\alpha=2R\cos\alpha$

Lại có $AH=AC\cos\alpha\Rightarrow AH=2R\cos^2\alpha$; $CH=AC\sin\alpha=2R\cos^4\alpha.\sin^2\alpha$

Do đó $V_{max} \Leftrightarrow \cos^4\alpha.\sin^2\alpha = \left[\cos^4\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)\right]_{max}$. Đặt $t=\cos^2\alpha \Rightarrow (0<t<1)$

Xét $f(t)=t^2(1-t) \Rightarrow f'(t)=-3t^2+2t=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow \max_{(0;1)} f(t)=f\left(\frac{2}{3}\right)$

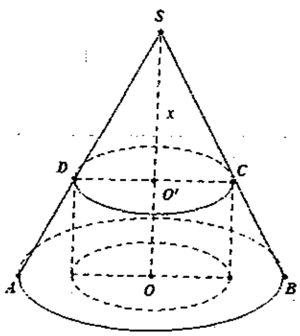
Khi đó $\cos^2\alpha=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: [Trích tạp chí toán học tuổi trẻ lần 5 - 1017] Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P), đường cao $SO=h$. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho $SO'=x\ (0<x<h)$. Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính $r'\ (0<r'<r)$ nằm trên mặt phẳng (P) đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q), (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N)). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $x=\frac{1}{2}h.$ **B.** $x=\frac{1}{3}h.$ **C.** $x=\frac{2}{3}h.$ **D.** $x=\frac{1}{4}h.$

Lời giải:

Theo định lý Talet ta có: $\frac{x}{h}=\frac{r'}{r}\ (0<x<h)$



Thể tích hình trụ là $V=\pi r'^2(h-x)=\pi\frac{(xr)^2}{h^2}.(h-x)=f(x)$

Vì thể tích khối nón không đổi nên để phần thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất thì thể tích hình trụ là lớn nhất.

Ta có: $f(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2.(h-x)$

Cách 1: Xét hàm số $M(x)=x^2(h-x)$

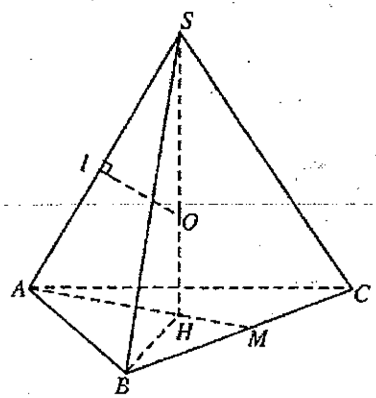
Cách 2: Ta có: $M(x)=4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(h-x)\le 4.\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+h-x}{3}\right)^3=\frac{4h^3}{27}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{2}=h-x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}h$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ đều nội tiếp trong mặt cầu bán kính R không đổi. Hình chóp có thể tích lớn nhất có chiều cao là:

A. $h=\dfrac{2R}{3}$ **B.** $h=\dfrac{4R}{3}$ **C.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ **D.** $h=\dfrac{R\sqrt{6}}{4}$

Lời giải:



Ta tính được $R=SO=\dfrac{SA^2}{2SH}$ (các em xem lại phần mặt cầu). Gọi a và h lần lượt là độ dài cạnh đáy và chiều cao của khối chóp.

Khi đó $SA^2=h^2+\dfrac{a^2}{3}\Rightarrow R=\dfrac{3h^2+a^2}{6h}$

Mặt khác $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S.h=\dfrac{\sqrt{3}a^2h}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}h\left(6Rh-3h^2\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^2\left(2R-h\right)$

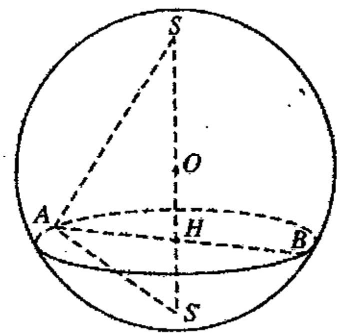
Lại có $h^2\left(2R-h\right)=\dfrac{1}{2}h.h\left(4R-2h\right)\le\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\dfrac{32R^3}{27}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow h=4R-2h\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$ và khi đó $S.ABC$ là tứ diện đều. Như vậy nếu không làm được bài toán này theo cách thuần tuý chúng ta có thể dự đoán thể tích khối chóp lớn nhất khi nó là tứ diện đều. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Trong tất cả các hình nón nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R, độ dài đường sinh của hình nón có thể tích lớn nhất là:

A. $l=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ s**B.** $l=\dfrac{R\sqrt{6}}{2}$ **C.** $l=\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$ **D.** $l=R\sqrt{6}$

Lời giải:



Kí hiệu bán kính đáy của hình nón là x, chiều cao hình nón là y (trong đó $0<x\le 2R;0<y\le R$). Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có:

$x^2=y\left(2R-y\right)$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Gọi V_1 là thể tích khối nón: $V_1=\dfrac{\pi}{3}x^2y=\dfrac{\pi}{6}y.y.\left(4R-2y\right)$

Mặt khác $y.y.\left(2R-y\right)\le\left(\dfrac{y+y+4R-2y}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}R^3$

Do đó $V \le \frac{32\pi}{81}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}; x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$

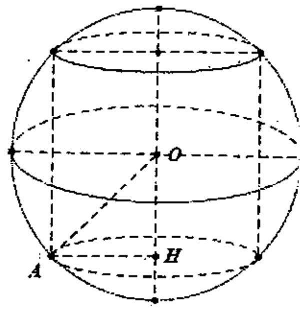
Khi đó $l = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Cho hình trụ (T) nội tiếp trong một hình cầu có bán kính là R. Hình trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $V_{(T)} = \frac{4\pi R^3}{9}$ **B.** $V_{(T)} = \frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$ **C.** $V_{(T)} = \frac{4\pi\sqrt{2}R^3}{9}$ **D.** $V_{(T)} = \frac{4\pi\sqrt{2}R^3}{3}$

Lời giải:

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ đã cho



Khi đó ta có: $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - h^2\right).h$

Lại có $V' = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}\left(h \in (0;2R)\right)$

Khi đó $V_{\max} = \frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$. **Chọn B.**

II. [TT6040] BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1: [328884] Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x\ (0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để S_{MNPQ} lớn nhất.

A. a. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 2: [3288893] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x, \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = AD = BC = BD = 1$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tìm x để thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3: [328900] Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π. Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: [328903] Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh a, người ta lấy điển M với $AM = x\left(0 < x < a\right)$, và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA = y\left(y > 0\right)$. Với giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp $S.ABCM$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{42}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Câu 5: [328910] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định x để diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 6: [328914] Cho tứ diện $ABCD$ sao cho $AB = 2x$, $CD = 2y$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định x và y để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = y = \frac{1}{2}$. **B.** $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x = y = 1$. **D.** $x = y = \frac{1}{3}$.

Câu 7: [328920] Cho tam diện $Oxyz$ có các góc $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOx} = \alpha$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy A, B, C sao cho $OA = OB = OC = x$. Tính α để diện tích xung quanh của $O.ABC$ lớn nhất.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 8: [328925] Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Xác định x để hình chóp có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Câu 9: [328928] Trong các hình trụ có diện tích toàn phần không đổi $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{5}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 10: [328933] Trong các hình trụ có diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy không đổi là $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **D.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 11: [328936] Trong tất cả các hình trụ có cùng thể tích V, tính diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

A. $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{2}}$. **C.** $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$. **D.** $3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Câu 12: [328941] Trong tất cả hình nón có độ dài đường sinh là a, tìm hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $MaxV = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $MaxV = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $MaxV = \frac{\pi\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $MaxV = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}a^3$.

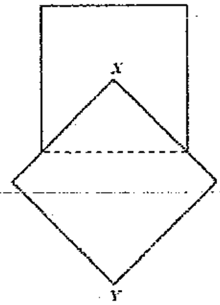
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. C	**02. B**	**03. B**	**04. D**	**05. B**	**06. B**	**07. A**	**08. C**	**09. D**	**10. C**
11. A	**12. A**								

Chủ đề 22
MỘT SỐ KHỐI TRÒN XOAY ĐẶC BIỆT

Ví dụ 1: [TRÍCH ĐỀ THI THỬ NGHIỆM CỦA BGD VÀ ĐT]

Cho 2 hình vuông có cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY



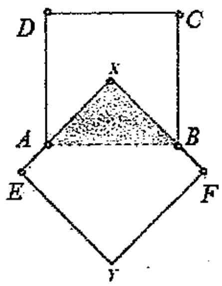
A. $V=\dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ **B.** $V=\dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$

C. $V=\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$ **D.** $V=\dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$

Lời giải:

Khi quay hình vuông $ABCD$ theo trục XY ta được hình trụ có chiều cao $h=\dfrac{5}{2}$ và bán kính đáy

$r=\dfrac{5}{2}\Rightarrow V_{(T)}=V_1=S_d.h=\pi r^2h=\dfrac{125\pi}{4}$



Khi quay hình vuông $XEYF$ theo trục XY ta được 2 hình nón ghép lại với nhau với $h=\dfrac{XY}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2};r=\dfrac{EF}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $V_2=2V_{(N)}=2.\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{125\pi}{3\sqrt{2}}$

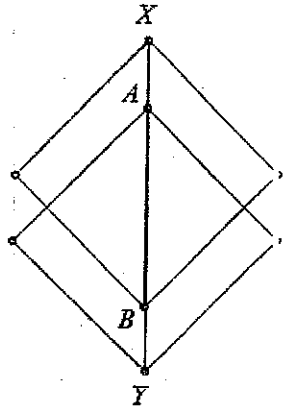
Bây giờ ta tính phần thể tích bị lặp khi quay cả khối quay trục XY.

Phần đó là hình nón khi quay tam giác XAB quanh trục XY với thiết diện là tam giác XAB vuông cân cạnh bằng $XA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $r_3=\dfrac{AB}{2};h=d\left(X;AB\right)=\dfrac{5}{2}\Rightarrow V_3=\dfrac{1}{3}\pi r^2=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{125}{8}=\dfrac{125}{24}\pi$.

Do đó thể tích cần tìm là $V=V_1+V_2-V_3=\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **Chọn C.**

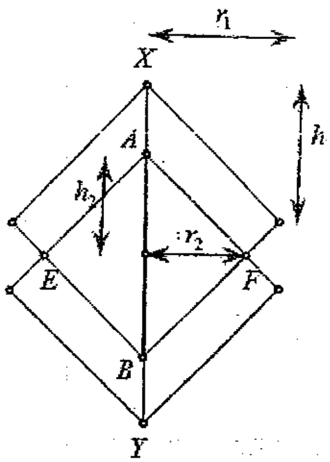
Ví dụ 2: Cho 2 hình vuông có cạnh bằng nhau và bằng 4 được xếp chồng lên nhau như hình vẽ bên. Biết rằng độ dài đoạn thẳng $AB = 3\sqrt{2}$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



A. $V = \dfrac{101\pi\sqrt{2}}{6}$ **B.** $V = \dfrac{37\pi\sqrt{2}}{6}$

C. $V = \dfrac{101\pi\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V = \dfrac{37\pi\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:



Khi quay 2 hình vuông đã cho quanh trục XY ta được 4 khối nón có thể tích bằng nhau với chiều cao $h_1 = \dfrac{XB}{2} = 2\sqrt{2}$ và bán kính đáy $r_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow V_1 = 4.\left(\dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1\right) = \dfrac{64\pi\sqrt{2}}{3}$

Khi quay hình vuông $AEBF$ quanh trục AB ta cũng được 2 hình nón có chiều cao và bán kính là

$$h_2 = r_2 = \frac{EF}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_2 = 2\left(\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2\right) = \frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$$

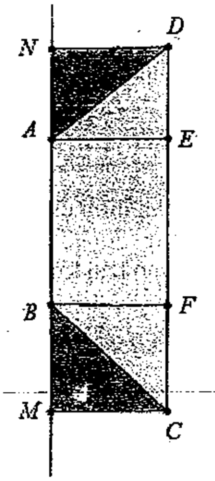
Khi đó $V = V_1 - V_2 = \dfrac{101\pi\sqrt{2}}{6}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: [THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HOÁ LẦN 2-2017] Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ và $AB = AD = BC = a, CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh hình thang $ABCD$ xung quanh trục là đường thẳng AB

A. $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{5}{4}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{5}{2}\pi a^3$.

Lời giải:

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích V tạo bởi hai khối:

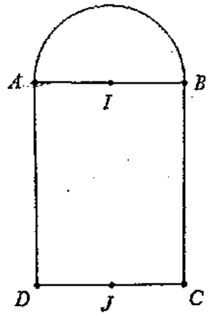


- Khối trụ tròn xoay có chiều cao $h = CD = MN = 2a$ và bán kính đường tròn đáy $R = DN = \sqrt{DA^2 - NA^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (như hình vẽ bên).
- Thể tích khối trụ trên trừ đi thể tích $2.V_2$ của hai khối nón có chiều cao $h_2 = \dfrac{a}{2}$ và bán kính đường tròn đáy $R = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là

$V = V_1 - 2.V_2 = \pi.2a.\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{2}{3}.\pi.\dfrac{a}{2}.\dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{5}{4}\pi a^3$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và nửa đường tròn đường kính AB như hình vẽ. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết $AB = 4;\ AD = 6$ Thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục IJ là:



A. $V = \dfrac{56}{3}\pi$. **B.** $V = \dfrac{104}{3}\pi$.

C. $V = \dfrac{40}{3}\pi$. **D.** $V = \dfrac{88}{3}\pi$.

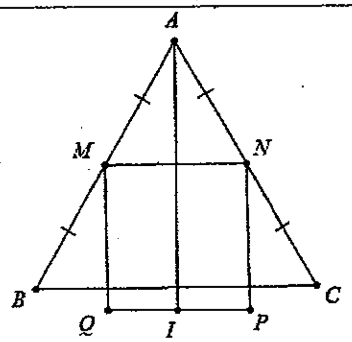
Lời giải:

Khi xoay mô hình quanh trục IJ thì nửa đường tròn tạo thành nửa mặt cầu có $R = 2$; hình chữ nhật ABCD tạo thành hình trụ có $r = 2; h = 6$.

$\Rightarrow$ Thể tích nửa khối cầu là $V_1 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{16\pi}{3}$.

Thể tích khối trụ là $V_2 = \pi r^2 h = 24\pi \Rightarrow V = V_1 + V_2 = \dfrac{88\pi}{3}$. **Chọn D.**

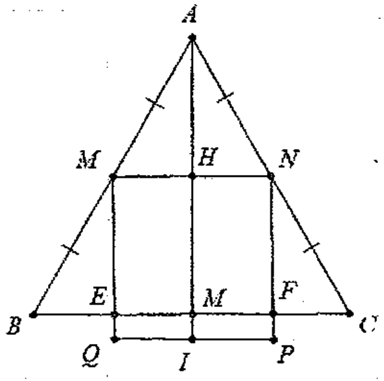
Ví dụ 5: Tam giác đều ABC và hình vuông $MNPQ$ được xếp như hình vẽ với MN là đường trung bình của tam giác ABC. Biết cạnh của tam giác bằng 4. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục AI là:



A. $V = \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 2\right)\pi$ **B.** $V = \left(\sqrt{3} + 2\right)\pi$

C. $V_3 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3} + 2\right)\pi$ **D.** $V_3 = \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 1\right)\pi$.

Lời giải:



Khi quay quanh trục AI tam giác ABC ta được hình nón có bán kính đáy là $r = 2$ và chiều cao

$h = AM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ suy ra $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

Khi quanh hình chữ nhật $EFPQ$ quanh trục AI ta được hình trụ có bán kính đáy $r = IP = \frac{MN}{2} = \frac{BC}{4} = 1$ và chiều cao $h = MI = HI - HM = MQ - \frac{AM}{2} = 2 - \sqrt{3}$

Khi đó $V_2 = \pi r^2 h = \pi.\left(2 - \sqrt{3}\right)$

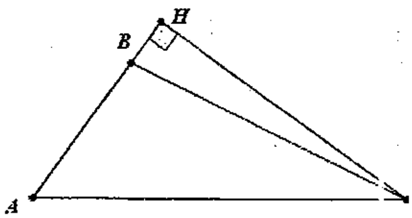
Do vậy $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} + 2\right)\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: [THPT Chuyên Quốc Học Huế lần 1-2017]

Cho tam giác ABC có $AB = 3, BC = 5, CA = 7$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AB.

A. 50π. **B.** $\frac{75\pi}{4}$. **C.** $\frac{275\pi}{8}$. **D.** $\frac{125\pi}{8}$.

Lời giải:



Ta có: $\cos\widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2.BA.BC} = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CBH} = 60^0$

suy ra $CH = BC\sin 60^0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

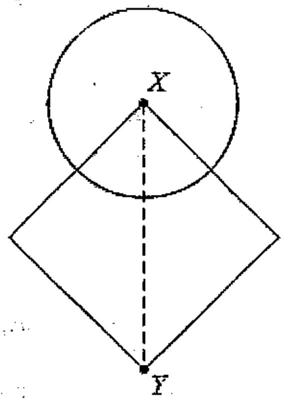
Khi quay tam giác quay AB ta được khối có thể tích là

$V = V_{(N_1)} - V_{(N_2)} = \frac{1}{3}\pi CH^2.AH - \frac{1}{3}\pi CH^2.BH$

(Trong đó $V_{(N_1)}; V_{(N_2)}$ lần lượt là thể tích khối nón tạo thành khi quay các tam giác CBH và CAH quanh AB)

$= \frac{1}{3}\pi CH^2\left(AH - BH\right) = \frac{1}{3}\pi CH^2.AB = \frac{75}{4}\pi$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho hình tròn bán kính bằng 2 và hình vuông có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với đỉnh của hình vuông như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



A. $V=\dfrac{32\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{8\left(5\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$.

C. $V=\dfrac{8\left(5\sqrt{2}+2\right)\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8\left(4\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$.

Lời giải

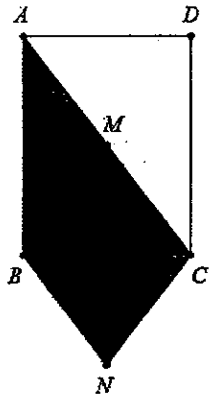
Khi quay hình vẽ quanh trục ta được khối tròn xoay bao gồm

- Khối cầu với bán kính $R=2\Rightarrow V_C=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$.
- Hai khối nón cùng thể tích có thiết diện là tam giác ABD với chiều cao bằng bán kính đường tròn đáy và bằng $h=r=2\sqrt{2}\Rightarrow V=2.V_N=\dfrac{2}{3}\pi r^2h=\dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.
- Trừ đi phần giao của khối cầu và khối nón có thiết diện là tam giác ABD chính là thể tích khi quay hình quạt quanh trục XY.

Lý thuyết: *Khi quay một hình quạt chắn bởi hai bán kính R thành một góc φ thì ta được khối tròn xoay có thể tích là* $V_Q=V_C.\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{4}\right)=\left[1-\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\right].\dfrac{V_C}{2}$ *với* $V_C=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Vậy thể tích cần tính là $V=\dfrac{32}{3}\pi+\dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}-\dfrac{32}{6}\pi.\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{8\left(5\sqrt{2}+2\right)\pi}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$, cạnh $AB=2\sqrt{3}$, $AD=2$. Gọi M là tâm của hình chữ nhật, N là điểm đối xứng với M qua BC như hình vẽ bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ABNC$ quanh trục AC.



A. $V=8\sqrt{3}\pi$.

B. $V=8\pi$.

C. $V=6\pi$.

D. $V=6\sqrt{3}\pi$.

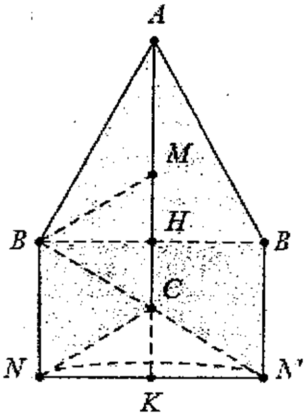
Lời giải

Tam giác MBC cân tại M có $\widehat{MCB}=60^0 \Rightarrow \Delta MBC$ đều.

Kẻ BH vuông góc AC tại H. Kẻ NK vuông góc AC tại K.

$\Rightarrow BH=NK=\sqrt{3}$ và $AH=3,\ HC=CK=1 \Rightarrow HK=2.$

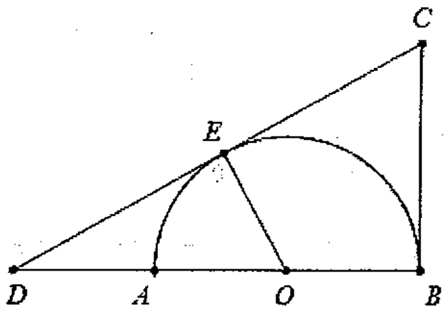
Khi quay tứ giác $ABNC$ quanh trục AC ta được khối tròn xoay có mặt phẳng thiết diện như hình vẽ bên, bao gồm



- Khối nón có tam giác thiết diện là ABB' với chiều cao $h=AH$ và bán kính đường tròn đáy $r=BH$.
- Khối trụ có thiết diện là $BBN'B'$ với chiều cao $h=HK$ và bán kính đường tròn đáy $r=NK$.
- Trừ khối nón có tam giác thiết diện là CNN' với chiều cao $h=CK$ và bán kính đường tròn đáy $r=NK$.

Vậy thể tích cần tính là $V=\frac{1}{3}\pi.BH^2.AH+\pi.BH^2.HK-\frac{1}{3}\pi.BH^2.CK=8\pi.$ **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$, kí hiệu Δ là đường thẳng vuông góc với AB tại B. Trên nửa đường tròn lấy điểm E di động, tiếp tuyến của nửa đường tròn tại E và cắt tia đối của tia AB lần lượt tại $C,\ D$ (như hình vẽ dưới). Khi quay tam giác BCD quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích nhỏ nhất là ?



A. $\frac{8\pi R^3}{27}$. **B.** $\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8\pi R^3}{3}$. **D.** $\frac{8\pi R^3}{9}$.

Lời giải

Đặt $\widehat{BOC}=\alpha \Rightarrow \alpha \in \left(45^0;90^0\right) \Rightarrow \tan\alpha>1$, chú ý công thức $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

Tam giác OBC vuông tại B, có $\tan\widehat{BOC}=\frac{BC}{BO} \Rightarrow BC=R.\tan\alpha$.

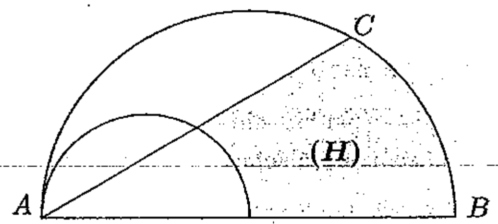
Ta có $\widehat{BCD}=2\left(90^0-\alpha\right) \Rightarrow BD=BC.\tan\left(180^0-2\alpha\right)=-BC.\tan 2\alpha$.

Khi quay tam giác BCD quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}.BC^2.BD=-\frac{\pi}{3}.BC^3.\tan 2\alpha=\frac{2\pi}{3}.R^3.\frac{\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha-1}\ge\frac{8\pi R^3}{3}.$$

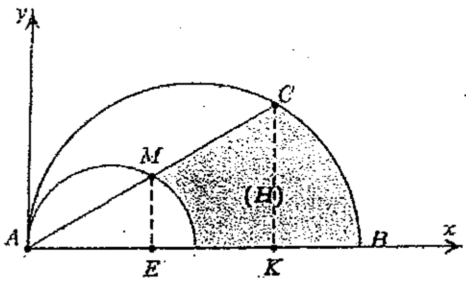
Vì $\tan^4\alpha \ge 4\left(\tan^2\alpha - 1\right) \Leftrightarrow \left(\tan^2\alpha - 2\right)^2 \ge 0; \forall \alpha \in \left(45^0;90^0\right)$. Vậy $V_{\min} = \dfrac{8\pi R^3}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10.[516395] Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ dưới, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB



A. $\dfrac{620}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{784}{3}\pi$.

C. 279π. **D.** $\dfrac{325}{3}\pi$.



HD: Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

Ta có: $\dfrac{1}{2}\pi R^2 = 32\pi \Rightarrow R = 8$.

Khi đó PT đường tròn đường kính AB là:

$(x-8)^2 + y^2 = 64$, phương trình $AC: y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$AC \cap (C_1) = C\left(12;4\sqrt{3}\right); AC \cap (C_2) = M\left(6;2\sqrt{3}\right)$

Suy ra khi quay cung $\widehat{ACB}$ quanh AB ta được vật thể có thể tích gồm 2 phần

Phần 1 là hình nón có chiều cao $h = AK = 12$ và bán kính $r = CK = 4\sqrt{3}$, phần 2 là hình chỏm cầu.

Khi đó : $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi CK^2.AK + \pi\int\limits_{12}^{16}\left[64 - (x-8)^2\right]dx$

Tương tự $V_2 = \dfrac{1}{3}.\pi\left(\dfrac{CK}{2}\right)^2.\left(\dfrac{AK}{2}\right) + \pi\int\limits_{6}^{8}\left[16 - (x-4)^2\right]dx$

Khi đó $V = V_1 - V_2 = \dfrac{784}{3}\pi$.

Cách 2: Khi quay hình quạt CAB có $\widehat{CAB} = \varphi$ quanh AB ta được khối tròn xoay có thể tích là $V = \left(1 - \cos^4\varphi\right).V_C$. Với V_C là thể tích khối tròn xoay khi quay nửa đường tròn đường kính AB quanh AB.

Áp dụng ta có: $V_1 = \left(1 - \cos^4 30\right).\dfrac{4}{3}\pi.8^3; V_2 = \left(1 - \cos^4 30\right).\dfrac{4}{3}\pi.4^3$ suy ra $V = V_1 - V_2 = \dfrac{784}{3}\pi$.

Chọn B.

Chủ đề 23
[TV6041] LÝ THUYẾT KHỐI ĐA DIỆN

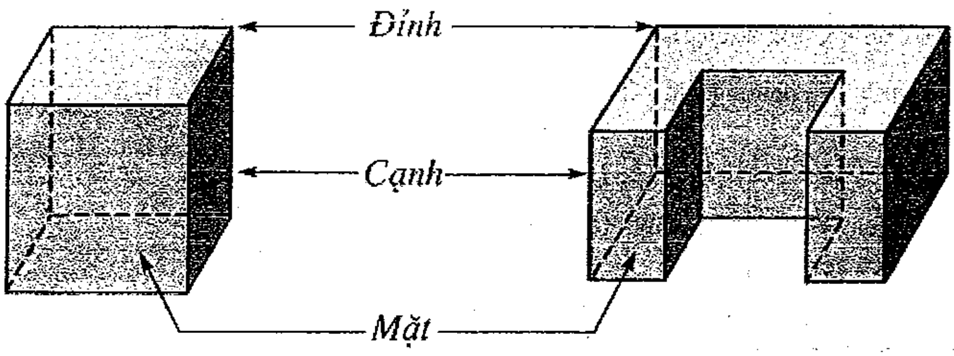
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Khái niệm hình đa diện và khối đa diện.

Hình đa diện: Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là những hình không gian được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác. Các đa giác ấy thỏa mãn các tính chất.

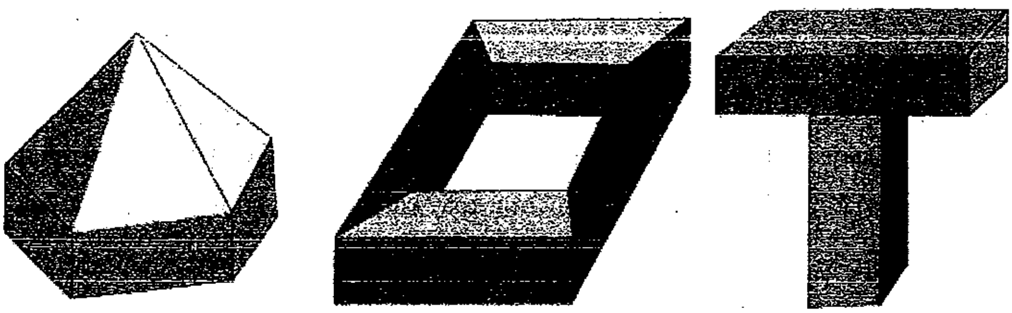
- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như thế gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự được gọi là đỉnh, cạnh của hình đa diện đấy.

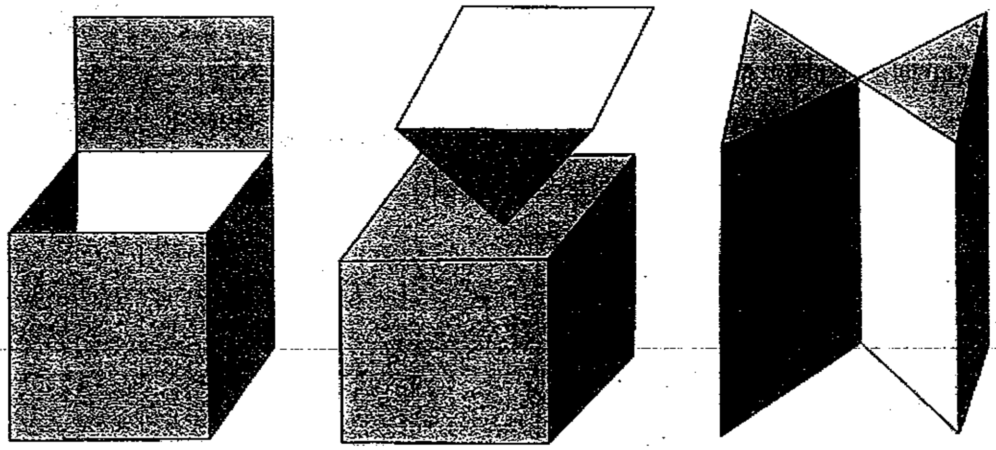


Khối đa diện: Khối đa diện là phần không gian giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Các hình dưới đây là những khối đa diện.



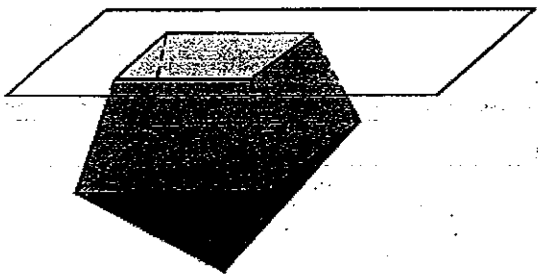
Các hình dưới đây **không** phải là khối đa diện.



2. Khối đa diện lồi và đều.

Đa diện lồi: Khối đa diện (H) được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi.

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.



Đa diện đều: Khối đa diện đều là khối đa diện có tính chất sau đây:

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

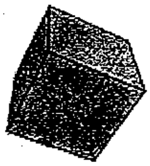
Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều và bằng nhau.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$

Định lý: Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, loại $\{4;3\}$, loại $\{3;4\}$, loại $\{5;3\}$ và loại $\{3;5\}$.

Tùy theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo theo thứ tự được gọi là khối tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.

Bảng tóm tắt 5 loại khối đa diện đều.

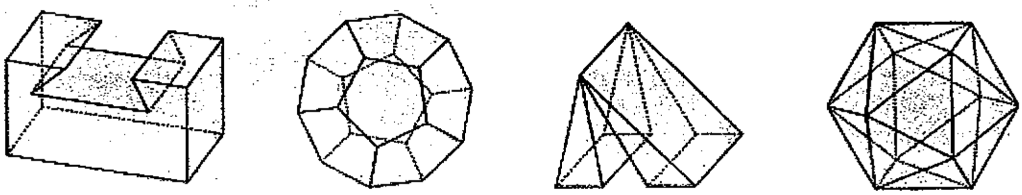
Khối đa diện đều		Số đỉnh (V)	Số cạnh (E)	Số mặt (F)	Loại $\{p;q\}$
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$
Khối bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Khối 12 mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Khối 20 mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Vì mỗi cạnh nối hai đỉnh, mỗi cạnh kề hai mặt nên chúng ta có: $pF = 2E = qV$

Một quan hệ khác giữa các giá trị này cho bởi **công thức Euler:** $V - E + F = 2$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: [334806] Vật nào trong các vật thể sau không phải khối đa diện.



A **B.** **C.** **D.**

Lời giải:

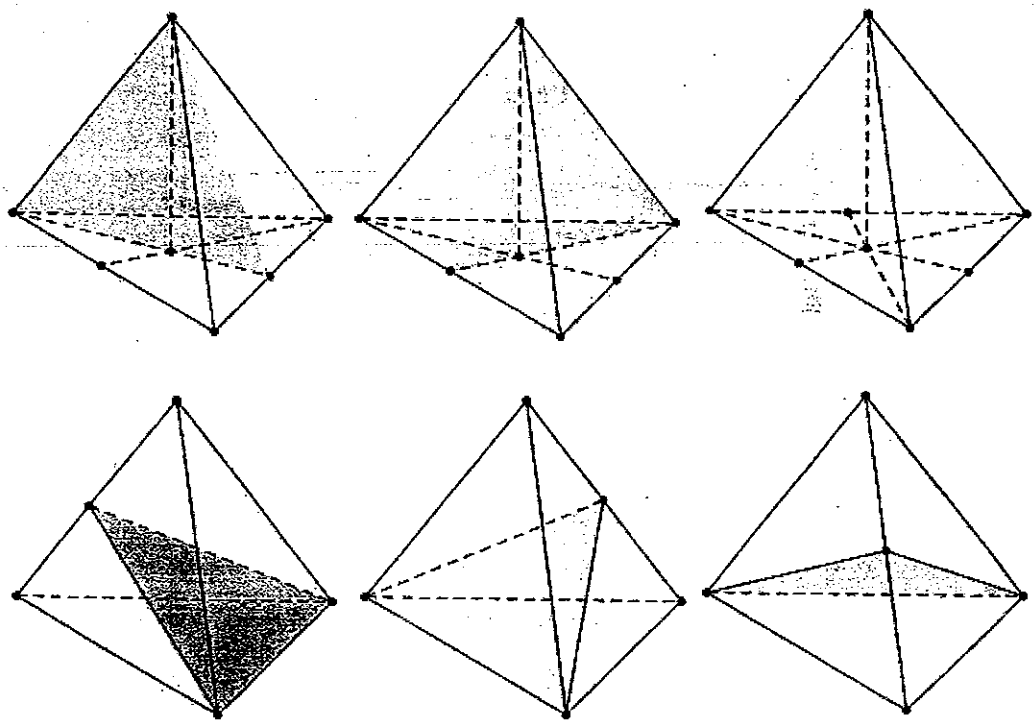
Khối đa diện có tính chất, mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng 2 đa giác nên ta thấy **C** không phải khối đa diện vì có 1 cạnh là cạnh chung của 4 đa giác. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Số mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều là:

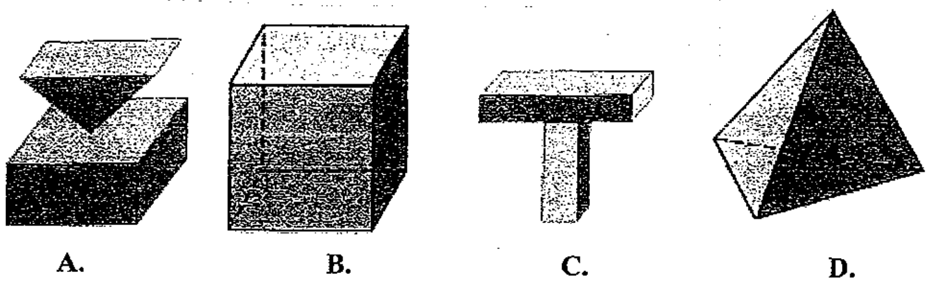
A. 3 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 9

Lời giải:

Tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng đó là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện. **Chọn C.**



Ví dụ 3: Hình nào dưới đây không phải là một khối đa diện?



Lời giải:

Khối hình ở đáp án **A** không phải khối đa diện vì không thỏa mãn tính chất hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Khối 12 mặt đều là khối đa diện thuộc loại::

A. $\{4;3\}$ **B.** $\{3;4\}$ **C.** $\{3;5\}$ **D.** $\{5;3\}$

Lời giải:

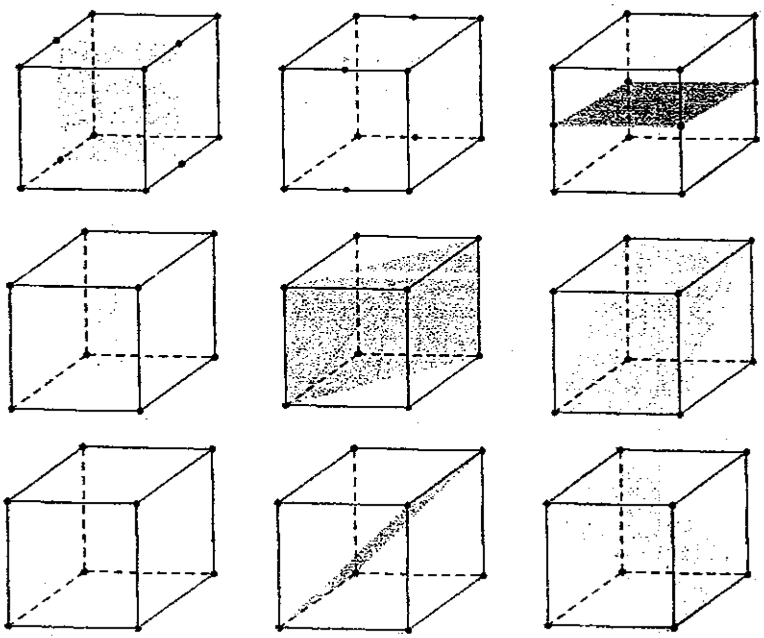
Khối 12 mặt đều thuộc loại $\{5;3\}$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là:

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Lời giải:

Hình lập phương có 9 mặt phẳng đối xứng. **Chọn B.**



Ví dụ 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai.**

A. Hình lập phương là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình hộp là đa diện lồi.

D. Hình tạo bởi 2 tứ diện đều ghép lại với nhau là đa diện lồi.

Lời giải:

Lấy ví dụ hình tạo bởi 2 tứ diện đều không bằng nhau ghép lại với nhau không chắc chắn là đa diện lồi. **Chọn D.**

Ví dụ 7: [Trích đề thi thử nghiệm của BGD&ĐT] Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng.

A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều.

C. Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải:

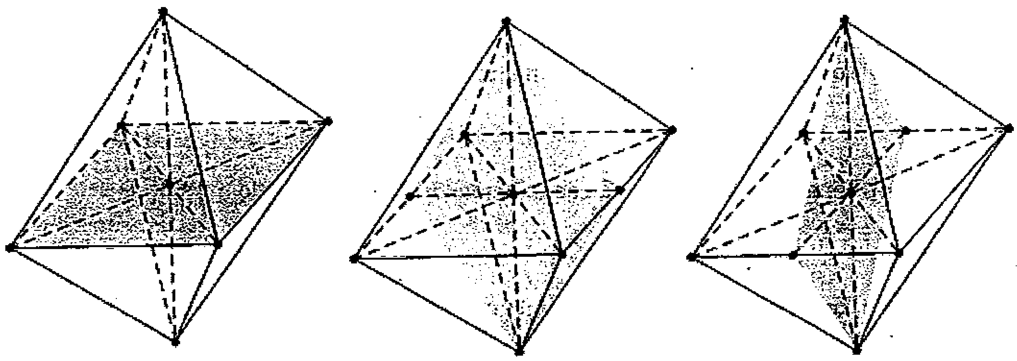
Tứ diện đều không có tâm đối xứng. **Chọn A.**

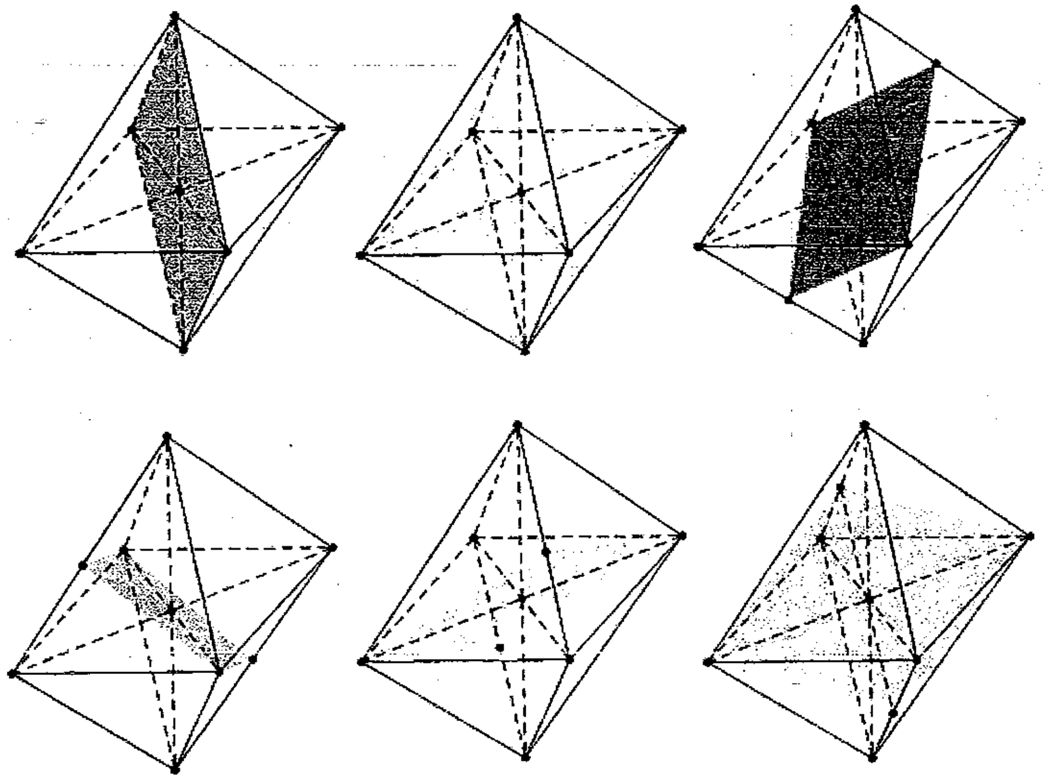
Ví dụ 8: Số mặt phẳng đối xứng của bát diện đều là.

A. 5 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 8

Lời giải:

Hình bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng. **Chọn B.**





III. [TT6042] BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [511371] Trong các mặt của các khối đa diện, số cạnh cùng thuộc một mặt tối thiểu là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 2: [511372] Khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ có tên gọi là:

A. Khối lập phương. **B.** Khối bát diện đều.

C. Khối hai mươi mặt đều. **D.** Khối mười hai mặt đều.

Câu 3: [511373] Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 12π. **D.** 10π.

Câu 4: [511374] Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ là:

A. 4π. **B.** 6π. **C.** 8π. **D.** 10π.

Câu 5: [511375] Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là:

A. 4π. **B.** 6π. **C.** 8π. **D.** 10π.

Câu 6: [511376] Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{5;3\}$ là:

A. 12π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 24π.

Câu 7: [511377] Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là:

A. 12π. **B.** 16π. **C.** 20π. **D.** 24π.

Câu 8: [511378] Số đỉnh của một bát diện đều là:

A. 6. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 9: [511380] Số đỉnh của một hình mười hai mặt đều là:

A. 12. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 24.

Câu 10: [511381] Số cạnh của một bát diện đều là:

A. 8. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 11: [511382] Số cạnh của một hình mười hai mặt đều là:

A. 12. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 24.

Câu 12: [511383] Tổng diện tích tất cả các mặt của hình tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **B.** $2\sqrt{3}a^2$. **C.** $\sqrt{3}a^2$. **D.** $4\sqrt{3}a^2$.

Câu 13: [511384] Tổng diện tích tất cả các mặt của hình tám mặt đều cạnh a bằng:

A. $4\sqrt{3}a^2$. **B.** $6\sqrt{3}a^2$. **C.** $2\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a^2$.

Câu 14: [511386] Tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a bằng:

A. $4a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $8a^2$. **D.** $10a^2$.

Câu 15: [511387] Tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ cạnh a bằng:

A. $5\sqrt{3}a^2$. **B.** $6\sqrt{3}a^2$. **C.** $3\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a^2$.

Câu 16: [511388] Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt bằng:

A. 4; 6; 4. **B.** 12; 30; 20. **C.** 6; 12; 8. **D.** 8; 12;6.

Câu 17: [511389] Khối đa diện đều loại $\{3;3\}$ có số đỉnh, só cạnh và số mặt lần lượt bằng:

A. 4; 6; 4. **B.** 12; 30; 20. **C.** 6; 12; 8. **D.** 8; 12; 6.

Câu 18: [511390] Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ có số đỉnh, só cạnh và số mặt lần lượt bằng:

A. 4; 6; 4. **B.** 12; 30; 20. **C.** 6; 12; 8. **D.** 8; 12; 6.

Câu 19: [511392] Tâm của các mặt của hình tám mặt đều đều là các đỉnh của

A. hình lập phương. **B.** hình tám mặt đều.

C. hình hộp chữ nhật. **D.** hình tứ diện đều.

Câu 20: [511393] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.

B. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.

C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.

D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

Câu 21: [511394] Có bao nhiêu khối đa diện đều ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 22: [511396] Các khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần số mặt là:

A. $\{3;3\},\{3;4\},\{3;5\},\{4;3\},\{5;3\}$. **B.** $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{5;3\},\{3;5\}$.

C. $\{3;3\},\{3;4\},\{4;3\},\{3;5\},\{5;3\}$. **D.** $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{3;5\},\{5;3\}$.

Câu 23: [511397] Một hình đa diện có các mặt là những tam giác thì số mặt M và số cạnh C của đa diện đó thỏa mãn:

A. $3C=2M$. **B.** $C=M+2$. **C.** $M\ge C$. **D.** $3M=2C$.

Câu 24: [511398] Các khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh D và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

A. $D=C-2$. **B.** $D\ge C$. **C.** $3D=2C$. **D.** $3C=2D$.

Câu 25: [511399] Khối tứ diện đều, khối bát diện đều và khối hai mươi mặt đều có số đỉnh D, số cạnh C, số mặt M thỏa mãn:

A. $C=\frac{2M}{3}$. **B.** $M=\frac{2C}{3}$. **C.** $M=D$. **D.** $C=2D$.

Câu 26: [511400] Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất:

A. năm mặt. **B.** bốn mặt. **C.** hai mặt. **D.** ba mặt.

Câu 27: [511402] Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

A. 10. **B.** 9 **C.** 6. **D.** 4.

Câu 28: [511403] Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 29: [511404] Số mặt phẳng đối xứng của đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 30: [511405] Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' cắt Δ khi và chỉ khi:

A. $\Delta \subset (P)$. **B.** Δ cắt (P).

C. Δ không vuông góc với (P). **D.** Δ cắt (P) nhưng không vuông góc với (P).

Câu 31: [511407] Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình hộp là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép vào nhau là một hình đa diện lồi.

D. Hình lập phương là đa diện lồi.

Câu 32: [511408] Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba canh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 33: [511410] Hình chóp tứ giác đều có mấy mặt phẳng đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34: [511411] Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng $2a$ là:

A. $4a^2\sqrt{3}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** $2a^2\sqrt{3}$. **D.** $8a^2\sqrt{3}$.

Câu 35: [511412] Có thể chia hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 36: [511414] Số các đỉnh hoặc số các mặt của hình đa diện nào cũng

A. lớn hơn 4. **B.** lớn hơn hoặc bằng 5.

C. lớn hơn 5. **D.** lớn hơn hoặc bằng 4.

Câu 37: [511415] Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn

A. lớn hơn 6. **B.** lớn hơn 7.

C. lớn hơn hoặc bằng 6. **D.** lớn hơn hoặc bằng 8.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

01. B	02. D	03. C	04. A	05. C	06. B	07. C	08. A	09. C	10. B
11. C	12. C	13. C	14. B	15. A	16. D	17. A	18. C	19. A	20. D
21. D	22. B	23. D	24. C	25. B	26. D	27. C	28. D	29. A	30. D
31. C	32. C	33. D	34. A	35. D	36. D	37. C			

Chủ đề 24
CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ HÌNH KHÔNG GIAN TỪ CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2017

I. KHỐI CHÓP

Câu 1: [CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH] Tìm thể tích của hình chóp $S.ABC$ biết $SA=a, SB=a\sqrt{2}, SC=2a$ và có $\widehat{BSA}=60^0, \widehat{BSC}=90^0, \widehat{CSA}=120^0$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

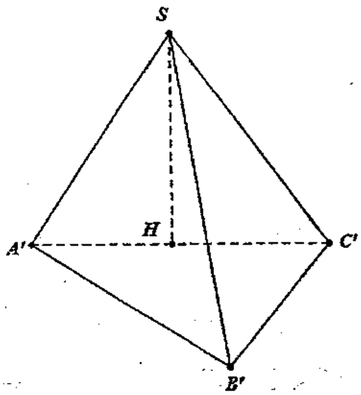
Lời giải:

Trên SA, SB, SC ta lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho

$SA'=SB'=SC'=1$. Khi đó $A'B'=1; B'C'=\sqrt{2}$

$A'C'=\sqrt{SA'^2+SC'^2-2SA'SB'\cos\widehat{C'SA'}}=\sqrt{3}$ nên tam giác $A'B'C'$ vuông tại B'. Mặt khác

$SA'=SB'=SC'=1$ nên hình chiếu vuông góc của S xuống $(A'B'C')$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ khi đó H là trung điểm của $A'C'$



Ta có: $SH=\sqrt{SA'^2-A'H^2}=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $V_{S.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Mặt khác $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{2a^3\sqrt{2}}\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{3}$. **Chọn D.**

Câu 2: [CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH]] Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng a và trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\dfrac{11a^2}{2}$ là mặt cầu

A. $S(G;a)$. **B.** $S(G;2a)$. **C.** $S(B;a)$. **D.** $S(C;2a)$.

Lời giải:

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=4MG^2+\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2=\dfrac{11a^2}{2}$.

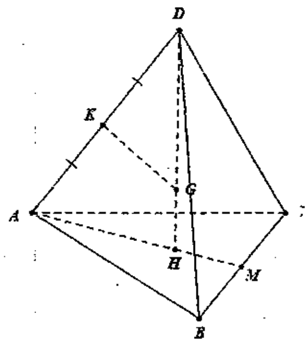
Mặt khác xét tứ diện đều hình vẽ ta có: $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $\Delta DGK \sim \Delta DAH \Rightarrow \frac{DG}{DA} = \frac{DK}{DH}$

Suy ra

$GD = \frac{DA^2}{2DH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = GB = GC = GD \Rightarrow MG^2 = a^2 \Rightarrow MG = a$

Vậy $S(G;a)$. **Chọn A.**



Câu 3: [CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a $(a>0)$. Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45^0. Biết $SB = a$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}.a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Lời giải:

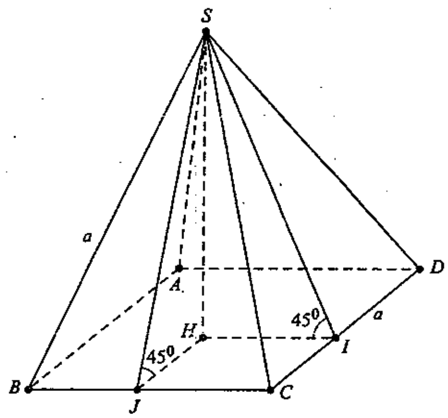
Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, I và J lần lượt là hình chiếu của H lên CD và BC.

$\Rightarrow IH = HJ (= SH) \Rightarrow HICJ$ là hình vuông.

Đặt $BJ = x \Rightarrow CJ = a - x = HJ$

Ta có: $BS^2 = BJ^2 + SJ^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2HJ^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2(a-x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = \frac{a}{3} \end{array}\right.$$



Vì H nằm trong hình vuông $ABCD$ nên $x = \frac{a}{3}$

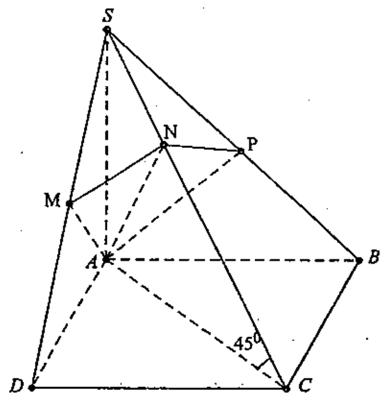
$\Rightarrow SH = HJ = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2a}{3}.a^2 = \frac{2a^3}{9}$. **Chọn D.**

Câu 4: [CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH] Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh a, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC và chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có chứa điểm S và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tìm tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải:



Vì $SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM$.

$DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp MA$

$\Rightarrow AM \perp (SDC) \Rightarrow AM \perp SD$

ΔSAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a$

Ta có: $SA^2 = SM.SD \Rightarrow \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \dfrac{2}{3}$

$SA^2 = SN.SC \Leftrightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{2a^2}{4a^2} = \dfrac{1}{2}$

Do đó $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

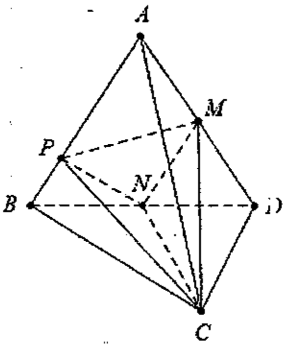
Do tính chất đối xứng $\Rightarrow \dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = 2.\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{ABCD.MNP}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn C.

Câu 5: [THPT NGUYỄN KHUYẾN-2017] Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BD. Lấy điểm không đổi P trên cạnh AB (khác A, B). Thể tích khối chóp $P.MNC$ bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải:



Ta có $d\left(P;(MNC)\right)=d\left(D;(MNC)\right)\Rightarrow V_{P.MNC}=V_{D.MNC}$.

$\Rightarrow V_{D.MNC}=\frac{1}{3}.d\left(M;(BCD)\right).S_{\Delta NCD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.d\left(A;(BCD)\right).\frac{1}{2}.S_{\Delta BCD}$

$\Rightarrow V_{P.MNC}=V_{D.MNC}=\frac{1}{12}.d\left(A;(BCD)\right).S_{\Delta BCD}=\frac{1}{4}.V_{ABCD}=\frac{3^3\sqrt{2}}{48}=\frac{9\sqrt{2}}{16}$

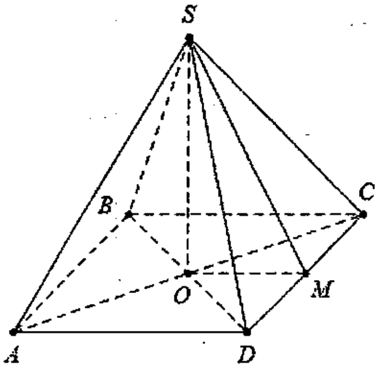
Chú ý: Thể tích tứ diện đều cạnh a là $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **Chọn A.**

Câu 6: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 4-2017] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=a,\widehat{BAD}=60^0,SO\perp(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$

C. $V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$ **D.** $V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$

Lời giải:



Hình thoi $ABCD$ cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$

$\Rightarrow AC=a\sqrt{3},\ BD=a$

Kẻ $OM\perp CD,\ M\in(CD)$ mà

$SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp CD$.

Suy ra

$CD\perp(SMO)\Rightarrow\widehat{\left((SCD);(ABCD)\right)}=\widehat{(SM;OM)}=\widehat{SMO}$.

Xét ΔOCD vuông tại O, có $OM=\frac{OC.OD}{\sqrt{OC^2+OD^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSMO vuông tại O, có

$\tan\widehat{SMO}=\frac{SO}{OM}\Rightarrow SO=\tan\widehat{SMO}.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\tan 60^0.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{3a}{4}$

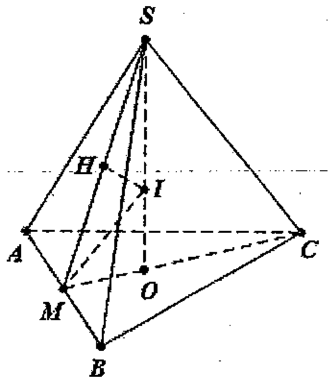
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **Chọn C.**

Câu 7: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 4-2017] Cho một mặt cầu có bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng bằng bao nhiêu?

A. $\min V = 4\sqrt{3}$. **B.** $\min V = 8\sqrt{3}$. **C.** $\min V = 9\sqrt{3}$. **D.** $\min V = 16\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi O là tâm tam giác ABC, M là trung điểm AB, tia phân giác $\widehat{SMO}$ cắt SO tại I, ta có I chính là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.



Đặt $AB = a \Rightarrow OM = \dfrac{CM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; IO = 1; \widehat{SMO} = 2x$

$$OM\tan x = IO = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{a}$$

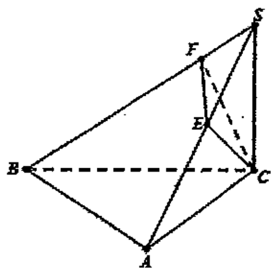
$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{a}}{1-\frac{12}{a^2}}$$

$$V = \frac{1}{3}SO.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.OM.\tan 2x = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{4a\sqrt{3}}{a^2-12}$$

$\Rightarrow V = V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\dfrac{a^4}{a^2-12}$ với $a^2 > 12$. Xét $f(t) = \dfrac{t^2}{t-12}\,(t > 12)$

$f'(t) = \dfrac{t(t-24)}{(t-12)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 24 \Rightarrow Min\, f(t) = 48 \Rightarrow V_{\min} = 8\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 8: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 4 - 2017]
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E, F. Tính thể tích $S.CEF$.



A. $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **B.** $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3}{36}$.

C. $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3}{18}$. **D.** $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải:

Ta có $SC \perp (ABC) \Rightarrow SC \perp AB$ mà $AC \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp CE$ (1).

Mà $SB \perp (P) \Rightarrow SB \perp CE$ (2). Từ $(1),(2) \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SA$.

Mặt khác ΔSAC vuông cân tại C nên E là trung điểm của $SA \Rightarrow SE : SA = 1:2$

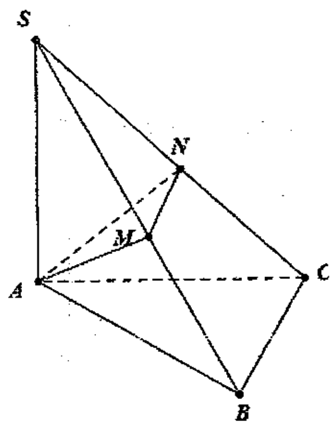
Xét ΔSBC vuông tại C, có $CF = \dfrac{SC.BC}{\sqrt{SC^2+BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SF = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SF : SB = 1:3$

Lại có $\dfrac{V_{S.CEF}}{V_{S.CAB}} = \dfrac{SE}{SA}.\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.CEF} = \dfrac{V_{S.ABC}}{6} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{36}$. **Chọn B.**

Câu 9: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 3 - 2017] Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAB),(SAC)$ cùng vuông góc với đáy; cạnh bên SB tạo với đáy một góc 60^0, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC Tính thể tích của khối đa diện $ABMNC$?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải:



Ta có $(SAB),(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó

$$\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow \tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB}.$$

$\Rightarrow SA = \tan 60^0.AB = a\sqrt{3}$. Lại có:

$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{4}.V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABMNC} = \dfrac{3}{4}.V_{S.ABC}$

Mặt khác $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow V_{ABMNC} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn D.**

Câu 10: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 3 - 2017] Xét các hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA=a, SB=2a, SC=3a$ với a là hằng số cho trước, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$?

A. $6a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** a^3. **D.** $3a^3$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của C lên mặt phẳng (SAB).

Và α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.CH.S_{\Delta SAB}=\frac{1}{6}.CH.SA.SB.\sin\widehat{ASB}$.

Mặt khác $CH=SC.\sin\alpha$ nên suy ra $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.SA.SB.SC.\sin\widehat{ASB}.\sin\alpha$.

Ta có $\begin{cases}\sin\widehat{ASB}\le 1\\ \sin\alpha\le 1\end{cases}\Rightarrow V_{S.ABC}\le\frac{1}{6}.SA.SB.SC=a^3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi SA, SB, SC đôi một vuông góc. **Chọn C.**

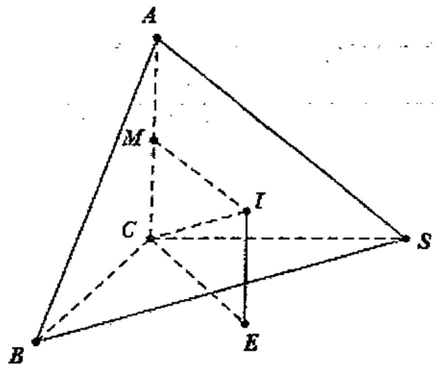
Câu 11: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 3 - 2017] Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C với $CA=CB=a$; $SA=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{5}$ và $SC=a\sqrt{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{11}.}{6}$ **B.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

Lời giải:

Ta có $SC^2+AC^2=SA^2\Rightarrow SC\perp AC$

Mà $AC\perp BC$ suy ra $AC\perp(SBC)$. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC, từ E dựng đường thẳng song song với AC cắt mặt phẳng trung trực của AC tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đã cho.



Ta có:

$$\cos\widehat{BCS}=\frac{BC^2+SC^2-SB^2}{2.BC.CS}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{BCS}=135^0$$

Suy ra $r_{BCS}=r=\frac{SB}{2\sin C}=\frac{a\sqrt{5}}{2.\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

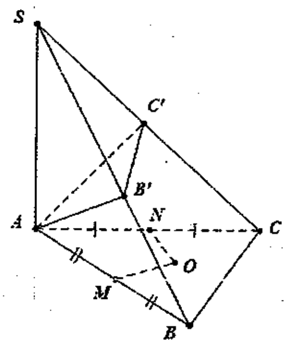
Do đó $R=IC=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+r^2}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 12: [THPT CHUYÊN HƯNG YÊN - 2017] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; $AC=b,\ AB=c,\ \widehat{BAC}=\alpha$. Gọi $B',\ C'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên $SB,\ SC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ theo $b,\ c,\ \alpha$.

A. $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.   **B.** $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin2\alpha}$.

C. $R=2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$.   **D.** $R=\dfrac{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Lời giải:



Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC.
Khi đó M và N là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác vuông $AB'B$ và $AC'C$. Dựng các đường thẳng d_1 qua M vuông góc với (ABB') và đường thẳng d_2 qua N vuông góc với (ACC').
Khi đó $O=d_1\cap d_2$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối $A.BCC'B'$

Khi đó $R_{A.BCC'B'}=R=OA=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Chọn A.

Câu 13: [THPT NINH GIANG - BẮC GIANG] Một hình hộp chữ nhật kích thước $6\times6\times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 3 và 8 khối cầu nhỏ bán kính bằng $\dfrac{3}{2}$. Biết rằng các khối cầu đều tiếp xúc nhau và tiếp xúc với các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Thể tích của hình hộp là:

A. $64+32\sqrt7$.   **B.** $108+36\sqrt7$.

C. $108+108\sqrt7$.   **D.** $32+32\sqrt7$.

Lời giải:

Gọi tâm của khối cầu lớn là S và A,B,C,D là tâm của bốn khối cầu nhỏ phía trên.

Khi đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là $AB=3$ và cạnh bên $SA=\dfrac{9}{2}$.

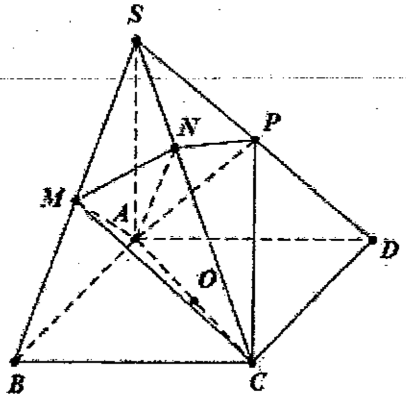
Suy ra chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ là $h=\dfrac{3\sqrt7}{2}\Rightarrow$ Chiều cao của hình hộp là $2.\left(h+\dfrac{3}{2}\right)=3\left(1+\sqrt7\right)$.

Thể tích của hình hộp là $V=h.S=3.\left(1+\sqrt7\right).6^2=108+108\sqrt7$. **Chọn C.**

Câu 14: [SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng qua A và vuông góc SC với cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V=\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{125\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{108\pi}{3}$.

Lời giải



Ta có: $SC\perp AM$, mặt khác $AM\perp SB$.

Do đó $AM\perp MC$.

Như vậy $\widehat{AMC}=90^0$ tương tự $\widehat{APC}=90^0$

Lại có $\widehat{ANC}=90^0$ vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là trung điểm của AC suy ra $R=\dfrac{AC}{2}=2\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$.

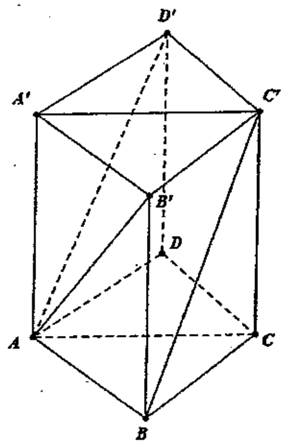
Chọn C.

II. KHỐI LĂNG TRỤ

Câu 1: [CHUYÊN HƯNG YÊN - 2017] Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB'\perp BC'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A. $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $V=\dfrac{7a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{8}$. **D.** $V=\sqrt{6}a^3$.

Lời giải:



Dựng hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ suy ra $ABCD$ là hình thoi có tam giác ABC đều.

Khi đó $BC'//AD'$ suy ra $AB'\perp AD'\Rightarrow AB'^2+AD'^2=B'D'^2$

Đặt $BB'=h\Rightarrow AB'=A'D=\sqrt{a^2+h^2}$; $B'D=BD=a\sqrt{3}$

Suy ra $2\left(a^2+h^2\right)=3a^2\Rightarrow h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

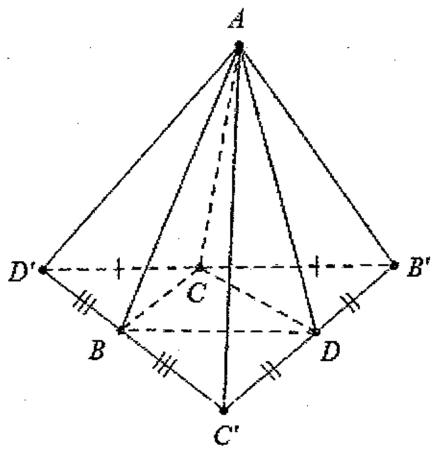
Khi đó $V=\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **Chọn C.**

Câu 2: [THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH] Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = \sqrt{6}\,(cm); AC = BD = \sqrt{7}\,(cm)$ và $AB = CD = 3\,(cm)$. Thể tích khối tứ diện là:

A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}\left(cm^2\right)$ **B.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}\left(cm^2\right)$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}\left(cm^2\right)$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}\left(cm^2\right)$

Lời giải:

Dựng hình chóp $A.B'C'D'$ sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của $C'D'; B'D'; B'C'$ khi đó $AC = BD = \frac{1}{2}B'D'$ suy ra tam giác $AB'D'$ vuông tại A hay $AB' \perp AD'$.



Tương tự suy ra AB', AC', AD' đôi một vuông góc.

Ta có: $AB' = b; AC' = c; AD' = d$ thì:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = B'C'^2 = 4AD^2 \\ c^2 + d^2 = C'D'^2 = 4AB^2 \\ b^2 + d^2 = 4AC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \\ d = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Suy ra $V_{A.BCD} = \frac{1}{4}V_{A.B'C'D'} = \frac{1}{24}.AB'.AC'.AD' = \frac{1}{24}bcd = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

Câu 3: [CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH] Cho hình hộp đứng có chu vi đáy bằng $20\,cm$, độ dài 2 đường chéo của hình hộp $BD' = 3\sqrt{5}\,(cm)$ và $AC' = \sqrt{87}\,(cm)$, cạnh bên bằng $2\sqrt{2}\,(cm)$. Khi đó thể tích khối hộp đã cho là:

A. $42\sqrt{3}\left(cm^3\right)$ **B.** $21\sqrt{6}\left(cm^3\right)$ **C.** $21\sqrt{2}\left(cm^3\right)$ **D.** $21\sqrt{3}\left(cm^3\right)$

Lời giải:

Ta có: $BD = \sqrt{BD'^2 - h^2} = \sqrt{45 - 8} = \sqrt{37}$, $AC = \sqrt{87 - 8} = \sqrt{79}$.

Đặt $AB = a; AD = b$ và $\widehat{BAD} = \alpha$ suy ra $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ và $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

Suy ra $\begin{cases} a^2 + b^2 = 58 \\ ab\cos\alpha = \frac{21}{2} \end{cases}$. Lại có $2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = 21$

Do đó $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = S_d.h = 21\sqrt{6}$. **Chọn B.**

Câu 4: [THPT ĐẶNG THÚC HỨA] Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và có thể tích bằng $\frac{3a^3}{4}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và $A'C$

A. $d=\frac{a\sqrt{5}}{15}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải:

Thể tích lăng trụ $V=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{3a^3}{4}\Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$.

Ta có $AB\,//\,A'B'\Rightarrow AB\,//\left(A'B'C\right)\Rightarrow d\left(AB;AC'\right)=d\left(AB;\left(A'B'C\right)\right)$.

$=d\left(A;\left(A'B'C\right)\right)=d\left(C';\left(A'B'C\right)\right)\Rightarrow d\left(AB;A'C\right)=d\left(C';\left(A'B'C\right)\right)$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ $\Rightarrow MC'\perp A'B'$ (1).

Mà $CC'\perp\left(A'B'C'\right)\Rightarrow CC'\perp A'B'$ (2).

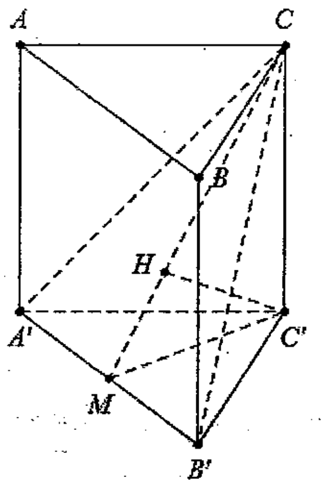
Từ $(1),(2)\Rightarrow A'B'\perp\left(CC'M\right)$

Kẻ $C'H\perp CM$ mà

$A'B'\perp C'H\subset\left(CC'M\right)\Rightarrow C'H\perp\left(A'B'C\right)$.

Xét $\Delta CC'M$ vuông tại C', có $C'H=\frac{CC'MC'}{\sqrt{CC'^2+MC'^2}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

$\Rightarrow d\left(C';\left(A'B'C\right)\right)=\frac{a\sqrt{15}}{5}\Rightarrow d\left(AB;A'C\right)=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **Chọn D.**



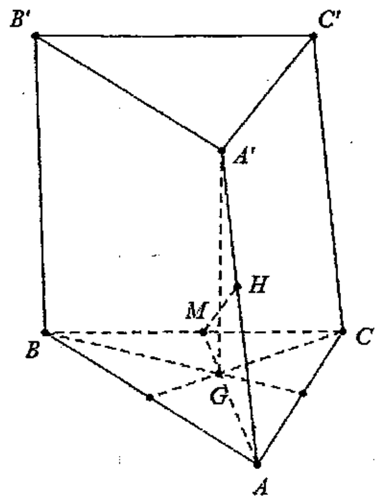
Câu 5: [SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải:

Gọi M là trung điểm của BC khi đó ta có $A'G \perp BC$ và $AM \perp BC$ do đó $BC \perp (A'AM)$.

Từ M dựng $MH \perp AA'$ suy ra MH là đoạn vuông góc chung của BC và AA' suy ra $MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Suy ra $d(G;AA') = \frac{2}{3}d(M;(AA')) = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{4}}{6} = d$

(do $MA = \frac{2}{3}GA$) $\Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{A'G^2} \Rightarrow A'G = \frac{a}{3}$

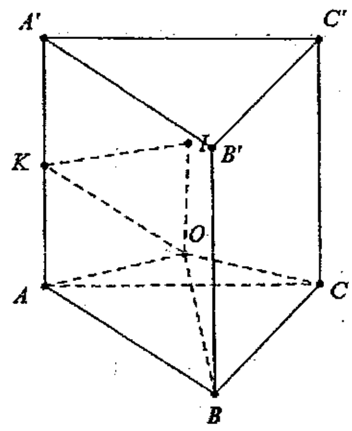
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **Chọn C.**

Câu 6: [CHUYÊN ĐH VINH LẦN 2 - 2017] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng:

A. a. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải:

Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng đã cho.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt khác $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = -\frac{1}{2}$

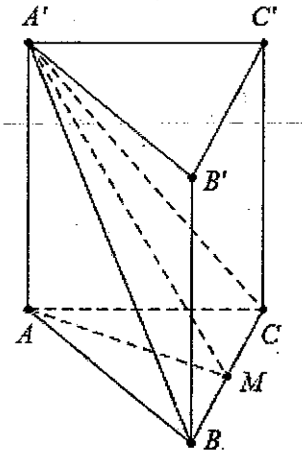
Ta có: $R_{ABC} = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{a\sqrt{3}}{2.\sin 120^0} = a$ do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 7: [THPT LÊ QUÝ ĐÔN - NINH THUẬN] Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là 60^0. Tính thể tích khối chóp $ABCC'B'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của BC, ΔABC đều nên $AM \perp BC$.

Tam giác $A'BC$ đều nên $A'M \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Ta có $\begin{cases} (A'AM) \cap (A'BC) = A'M \\ (A'AM) \cap (ABC) = AM \end{cases} \Rightarrow \widehat{(A'BC);(ABC)}$

$= \widehat{(A'M;AM)} = \widehat{A'MA}$

Xét $\Delta AA'M$ vuông tại A,

có $\tan \widehat{A'MA} = \dfrac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = \tan 60^0.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật có diện tích $S_{BCC'B'} = BB'.BC = \dfrac{3a^2}{2}$.

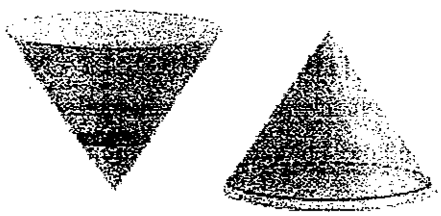
Mà $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d\left(A;(BCC'B')\right) = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $ABCC'B'$ là $V_{ABCC'B'} = \dfrac{1}{3}.d\left(A;(BCC'B')\right).S_{BCC'B'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn C.**

III. KHỐI TRÒN XOAY

Câu 1: [THPT LƯƠNG THẾ VINH - HÀ NỘI LẦN 1 - 2017]

Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi đảo lộn phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu ? Biết rằng chiều cao của phễu bằng 15 cm.



A. $0,3\ (cm)$. **B.** $0,5\ (cm)$. **C.** $0,216\ (cm)$. **D.** $0,188\ (cm)$.

Lời giải:

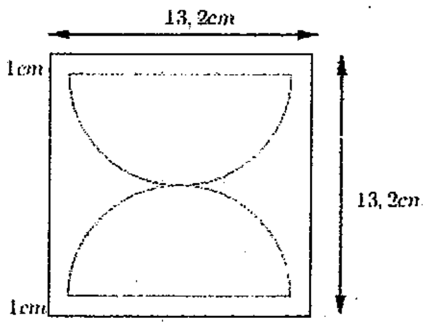
Gọi V là thể tích của phễu. Khi đó thể tích nước trong bình là $V_1 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$ và thể tích phần không chưa nước là $V_2 = \dfrac{26V}{27}$. Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$; $\dfrac{V_2}{V} = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^3$ (với h_2 là chiều cao cần tính)

Suy ra $\dfrac{26}{27} = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^3 \Rightarrow h_2 = h\sqrt[3]{\dfrac{26}{27}} \Rightarrow h_{ct} = h - h_2 \approx 0,188\ (cm)$ (với h_{ct} là chiều cao cần tìm).

Chọn D.

Câu 2: [CHUYÊN ĐH VINH LẦN 2 - 2017]

Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần không tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau



A. $711,6cm^3$. **B.** $1070,8cm^3$. **C.** $602,2cm^3$. **D.** $6021,3cm^3$.

Lời giải:

Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.6,6^2.13,2\ cm^3 = 1806,39\ cm^3$.

Thể tích hình cầu chứa cát là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{13,2-2}{2}\right)^3 = 735,62\ cm^3$.

Vậy lượng thủy tinh cần phải làm là $V = V_1 - V_2 = 1070,77\ cm^3$. **Chọn B.**

Câu 3: [THANH CHƯƠNG 1 - NGHỆ AN - 2017] Cho hình thang vuông $ABCD$ (vuông tại A và D) có độ dài các cạnh là $AD = a,\ AB = 5a,\ CD = 2a$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay quanh hình thang trên quanh trục AB.

A. $V = 5\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{5}{3}\pi a^3$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{11}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của C trên AB.

$\Rightarrow ADCH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = 2a,\ BH = 3a$.

Khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục AB, ta được;

- Khối trụ thể tích V_1, có chiều cao $h_1 = AH = 2a$.

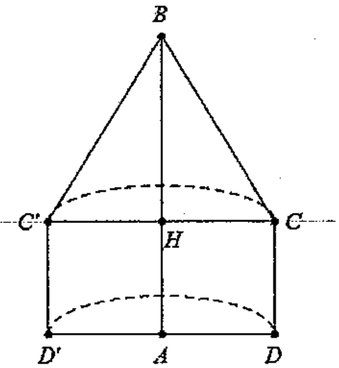
bán kính đường tròn đáy $r = AD = a \Rightarrow V_1 = 2\pi a^3$.

- Khối nón thể tích V_2, có chiều cao $h_2 = BH = 3a$.

bán kính đường tròn đáy $r = CH = a \Rightarrow V_2 = \pi a^3$.

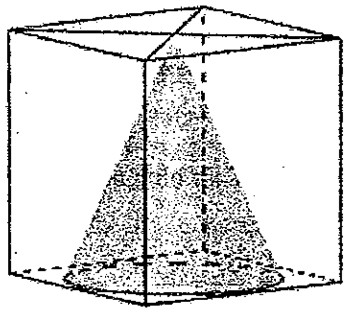
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 + V_2 = 3\pi a^3$.

Chọn C.



Câu 4: [THPT ĐẶNG THÚC HỨA LẦN 1 - 2017]

Một chiếc thùng đựng nước có hình của một khối lập phương cạnh 1 m chứa đầy nước. đặt vào trong thùng đó một khối có dạng nón sao cho đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại ở trong thùng và lượng nước trào ra ngoài.



A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{12-\pi}$. **C.** $\dfrac{12-\pi}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{11}$.

Lời giải:

Khối nón có chiều cao $h = 1\,m$ và bán kính đường tròn đáy là $r = 0{,}5\,m$ $\Rightarrow V_n = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{12}\,m^3$.

Lượng nước trào ra ngoài chính bằng thể tích khối nón $\Rightarrow$ Lượng nước còn lại trong thùng là $V = V_t - V_n$.

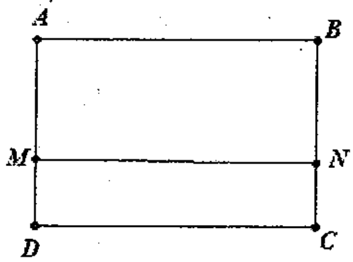
Với $V_t = 1\,m^3$ là thể tích của thùng hình lập phương

$\Rightarrow V = 1 - \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow \dfrac{V}{V_n} = \left(1 - \dfrac{\pi}{12}\right) : \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{12-\pi}{\pi}$. **Chọn C.**

Câu 5: [THPT PHAN BỘI CHÂU - LẦN 1 - 2017] Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $BC = 3a$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AD, BC sao cho $MA = 2MD$, $NB = 2NC$. Khi quay quanh AB, các đường gấp khúc $AMNB$, $ADCB$ sinh ra các hình trụ có diện tích toàn phần S_1, S_2. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{12}{21}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{15}$.

Lời giải:



Hình trụ khi quay đường gấp khúc $AMNB$ quanh AB có bán kính đáy là $r_1 = AM = 2a$; $h_1 = AB = 2a$..

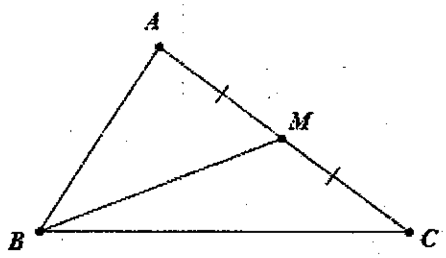
Tương tự $r_2 = AD = 3a$; $h_2 = AB = 2a$.

Khi đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_1^2}{2\pi r_2 h_2 + 2\pi r_2^2} = \frac{8}{15}$. **Chọn D.**

Câu 6: [THPT PHAN BỘI CHÂU - LẦN 1 - 2017] Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3a$; $AC = 4a$. Gọi M là trung điểm AC. Khi quay quanh AB, các đường gấp khúc AMB, ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1, S_2. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{10}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

Lời giải:



Khi quay đường gấp khúc AMB quanh AB ta được hình nón có bán kính đáy $r_1 = AM = 2a$; đường cao $h_1 = AB = 3a$.

Khi đó $S_1 = \pi r_1 l_1 = \pi.2a.\sqrt{(2a)^2 + (3a)^2} = 2\pi a\sqrt{13}$

Tương tự khi quay đường gấp khúc ACB quanh AB ta được hình nón có $r_2 = AC = 4a; h_2 = AB = 3a \Rightarrow S_2 = \pi r_2 l_2 = 20a^2$

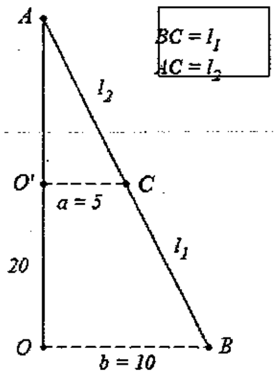
Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{10}$. **Chọn A.**

Câu 7: [THPT PHAN BỘI CHÂU - LẦN 2 - 2017] Một chiếc xô hình nón cụt đựng hóa chất ở phòng thí nghiệm có chiều cao $20\,cm$, đường kính hai đáy lần lượt là $10\,cm$ và $20\,cm$. Cô giáo giao cho bạn An sơn mặt ngoài của xô (trừ đáy). Tính diện tích bạn An phải sơn (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. $1942,97\,cm^2$. **B.** $561,25\,cm^2$. **C.** $971,48\,cm^2$. **D.** $2107,44\,cm^2$.

Lời giải:

Kí hiệu mặt phẳng thiết diện qua trục như hình vẽ.



- $\Delta AO'C$ và ΔAOB đồng dạng nên $\dfrac{l_2}{l_1+l_2}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow l_2=\dfrac{a}{b-a}l_1$.
- Diện tích xung quanh của hình nón lớn là $S_{xql}=\pi.b.(l_1+l_2)$.
- Diện tích xung quanh của hình nón nhỏ là $S_{xqn}=\pi.a.l_2$.
- Diện tích xung quanh của hình nón cụt là

$S_{xqnc}=S_{xql}-S_{xqn}=\pi.b.(l_1+l_2)-\pi.a.l_2$.

Áp dụng bài toán trên, với $a=5\ cm,\ b=10\ cm$ và $l_1=5\sqrt{17}\ cm$.

Diện tích bạn An cần phải sơn là:

$$S=\pi.10.2.5\sqrt{17}-\pi.5.5\sqrt{17}=75\pi\sqrt{17}\ cm^2.$$

Chọn C.

Câu 8: [THPT PHAN BỘI CHÂU - LẦN 2 - 2017] Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9\,cm$, đường kính $6\,cm$, mặt đáy phẳng và dày $1\,cm$, thành cốc dày $0,2\,cm$. Đổ vào cốc $120\,ml$ nước, sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2\,cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)?

A. $3,67\,cm$. **B.** $2,67\,cm$. **C.** $3,28\,cm$. **D.** $2,28\,cm$.

Lời giải:

Thể tích của 5 viên bi có bán kính $R=1\ cm$ là $V_{bi}=5.\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{20\pi}{3}\ cm^3$.

Tổng thể tích mà cốc nước chứa được là $V=120+\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{360+20\pi}{3}\ cm^3$.

Chiều cao của khối nước sau khi thả 5 viên bi là $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ với $r=2,8\ cm$.

Vậy mặt nước cách mép cốc một đoạn bằng $8-h=8-\dfrac{360+20\pi}{3.(2,8)^2.\pi}\approx 2,28\ cm$.**Chọn D.**

Câu 9: [SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐT HÀ NỘI 2017] Cho mặt cầu (S) bán kính R. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h theo R sao cho diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất.

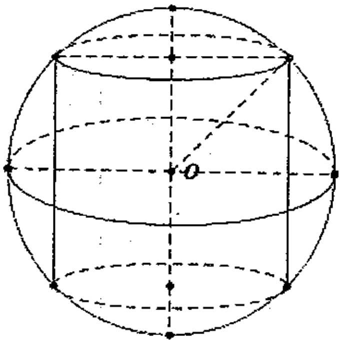
A. $h=\dfrac{R}{2}$ **B.** $h=R$ **C.** $h=R\sqrt{2}$ **D.** $h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

Ta có: $r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2=R^2$. Diện tích xung quanh của trụ $S_{xq}=2\pi rh$

Lại có $r^2+\dfrac{h^2}{4}\geq 2\sqrt{r^2.\dfrac{h^2}{4}}=rh=\dfrac{S_{xq}}{2\pi}\Rightarrow 2\pi R^2\geq S_{xq}$

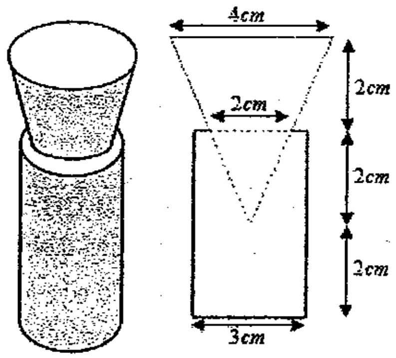
Do đó S_{xq} lớn nhất $\Leftrightarrow r=\dfrac{h}{2}\Rightarrow R^2=\dfrac{h^2}{2}\Rightarrow h=R\sqrt{2}$.



Chọn C.

Câu 10: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 4-2017]

Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục (H) cắt (H) theo một thiết diện cho trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị: cm^3)

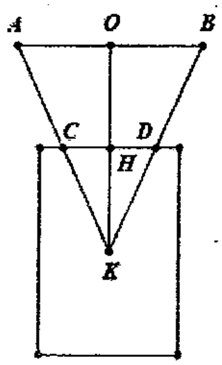


A. $V_{(H)}=\dfrac{41\pi}{3}$. **B.** $V_{(H)}=13\pi$.

C. $V_{(H)}=23\pi$. **D.** $V_{(H)}=17\pi$.

Lời giải:

Xét mặt cắt và đặt tên các điểm như hình vẽ:



Thể tích của khối trụ là: $V_t=\pi r_t^2h_t=\pi.(1,5)^2.4=9\pi$

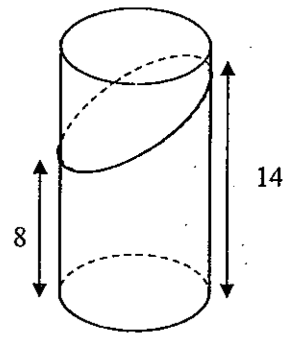
Ta có: $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{HK}{OK}\Rightarrow OK=4\Rightarrow HK=2$

Thể tích khối nón cụt là: $V_n=\dfrac{\pi OA^2OK}{3}-\dfrac{\pi.CH^2.HK}{3}=\dfrac{14\pi}{3}$

Thể tích của (H) là : $V_t+V_n=\dfrac{41\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 11: [CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN LẦN 4-2017]

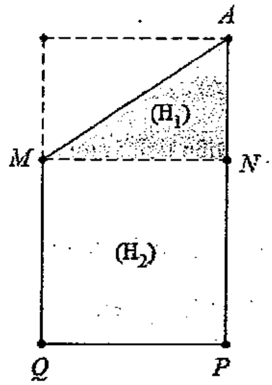
Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng, ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)} = 176\pi$ **B.** $V_{(H)} = 275\pi$

C. $V_{(H)} = 192\pi$ **D.** $V_{(H)} = 704\pi$

Lời giải:



Kí hiệu mặt phẳng thiết diện đi qua trục và vuông góc với mặt phẳng đáy là phần tô màu như hình vẽ bên, ta thấy $AM = 10$, $MQ = 8$ và $AP = 14$.

$\Rightarrow MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{AM^2 - (AP - AN)^2} = 8$ là đường kính của đường tròn đáy của khối trụ $\Rightarrow$ bán kính $R = \dfrac{MN}{2} = 4$.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với trục khối trụ, đi qua MN, ta được

- Khối (H_1) có thể tích bằng $\dfrac{1}{2}$ khối trụ có chiều cao AN và bán kính đường tròn đáy là R

$\Rightarrow V_{(H_1)} = \dfrac{1}{2}.\pi R^2 h_1 = \dfrac{1}{2}.\pi.4^2.6 = 48\pi.$

- Khối (H_2) có chiều cao NP và bán kính đường tròn đáy là

$R \Rightarrow V_{(H_2)} = \pi R^2 h_2 = \pi.4^2.8 = 128\pi.$

Vậy thể tích của khối (H) cần tìm là $V = V_1 + V_2 = 48\pi + 128\pi = 176\pi$. **Chọn A.**

Câu 12: [THPT NGUYỄN KHUYẾN - 2017] Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

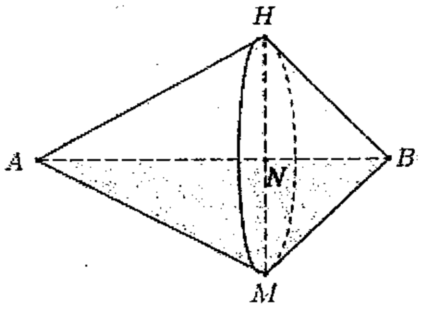
A. $\dfrac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải:

Kẻ HN vuông góc AB và M đối xứng với H qua N.

Ta có $AB = 2a,\ BH = a \Rightarrow AH = a\sqrt{3} \Rightarrow HN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi quay tam giác AHB quanh trục AB ta được hai khối nón:



• Khối nón với mặt cắt qua trục là ΔAHM có độ dài đường sinh $l_1 = AH$ và bán kính đường tròn đáy $r = HN$.

$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh

$S_1 = \pi r l_1 = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

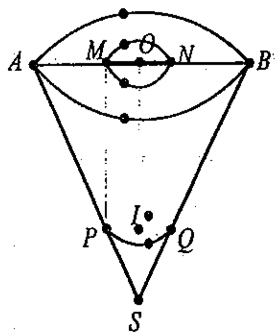
• Khối nón với mặt cắt qua trục là ΔBHM có độ dài đường sinh $l_2 = BH$ và bán kính đường tròn đáy $r = HN$.

$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh $S_2 = \pi r l_2 = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy diện tích cần tính là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **Chọn B.**

Câu 13: [THPT - QUẢNG XƯƠNG 1 - THANH HOÁ - 2017]

Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq} = \dfrac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$. **B.** $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$. **C.** $S_{xq} = 4\pi\ dm^2$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{3\pi}{2}\ dm^2$.

Lời giải:

Xét hình nón : $h = SO = 3r$, $r = OB,\ l = SA$. Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

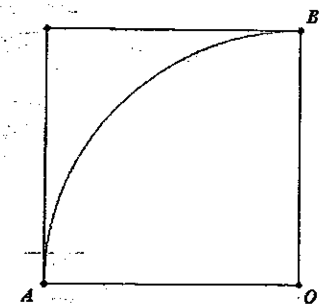
$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \dfrac{QI}{BO} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \dfrac{r}{3}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối trụ là $V_t = \pi r_1^2 h_1 = \dfrac{2\pi r^3}{9} = \dfrac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6$

$\Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$. **Chọn B.**

Câu 14: [CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG - QUẢNG NAM - 2017]

Từ một miếng tôn cạnh bằng 8 dm, người ta cắt ra một hình quạt tâm O bán kính $OA = 8\ dm$ (xem hình). Để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó OA trùng với OB). Chiều cao chiếc phễu đó có số đo gần đúng (làm tròn đến 3 chữ số thập phân) là:



A. $7,748\ dm$ **B.** $7,747\ dm$

C. $7,745\ dm$ **D.** $7,746\ dm$

Lời giải:

Chu vi của đáy hình nón có độ dài bằng cung AB.

Độ dài cung AB là: $l = \frac{1}{4}.(2\pi.8) = 4\pi$.

Suy ra bán kính đường tròn đáy hình nón là : $r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$

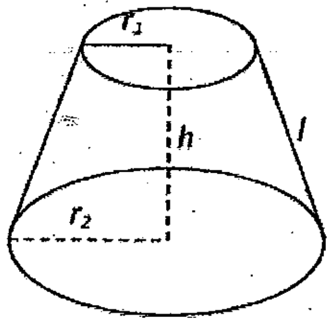
Độ dài đường sinh của hình nón là $l = 8\ dm \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} \approx 7,746\ dm$. **Chọn D.**

Câu 15: [THPT NGUYỄN BỈNH KHIÊM - QUẢNG NAM - 2017] Các bán kính đáy của một hình nón cụt lần lượt là x và $3x$, đường sinh là $2,9x$. Khi đó thể tích khối nón cụt là:

A. $\frac{77\pi x^3}{10}$ **B.** $\frac{\pi x^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi x^3\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{91\pi x^3}{10}$.

Lời giải:

Cách 1: $V = \frac{1}{3}.h.\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$ (với B và B' là diện tích các mặt đáy).



Lại có $h = \sqrt{l^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(2,9x)^2 - (3x - x)^2} = 2,1x$.

Khi đó $B = 9\pi x^2; B' = \pi x^2 \Rightarrow V = \frac{91\pi x^3}{10}$.

Cách 2: Cho các đường sinh cắt nhau tại S ta lấy $V_{N_2} - V_{N_1}$

Khi đó $\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{3}$. Lại có $l_2 - l_1 = l = 2,9x \Rightarrow \begin{cases} l_2 = 4,35x \\ l_1 = 1,45x \end{cases}$

Do đó $V = \frac{1}{3}\pi\left(r_2^2\sqrt{l_2^2 - r_2^2} - r_1^2\sqrt{l_1^2 - r_1^2}\right) = \frac{91\pi x^3}{10}$. **Chọn D.**

Câu 16: [SỞ GÍAO DỤC- ĐT QUẢNG NINH-2017] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho

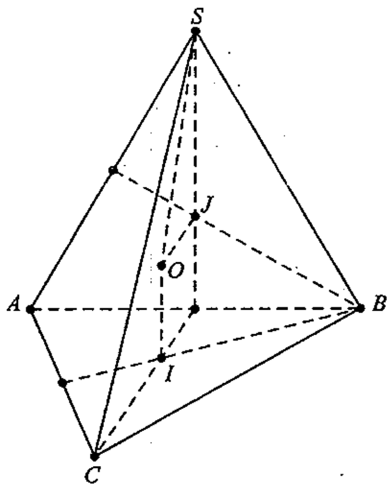
A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Lời giải:

Gọi I,J lần lượt là tâm của các tam giác ABC và SAB.

Đường thẳng qua I và song song với SJ giao với đường thẳng qua J và song song với CI tại O. Khi đó O là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $OJ=\dfrac{1}{2}CI=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$



$SJ=\dfrac{2}{3}.\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

$R=SO=\sqrt{SJ^2+OJ^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

Thể thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là:

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{6}\right)^3=\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$. **Chọn B.**

Câu 17: [CHUYÊN THÁI BÌNH-LẦN 2-2017] Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài 1km, đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng 1m; độ dày của lớp bê tông bằng 10 cm. Biết rằng cứ một khối bê tông phải dùng 10 bao xi măng. Số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước gần đúng với số nào nhất ?

A. 3456 bao. **B.** 3450 bao **C.** 4000 bao. **D.** 3000 bao.

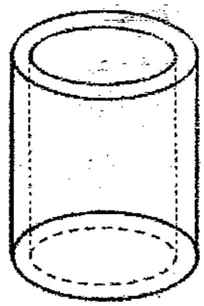
Lời giải:

Bán kính của đường tròn đáy hình trụ không chứa bê tông bên trong đường ống là $(100-10.2):2=40\,cm$.

Thể tích của đường ốnh thoát nước là $V=\pi r^2h=\pi.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2.1000=250\pi\ m^3$.

Thể tích của khối trụ không chứ bê tông (rỗng) là

$V_1 = \pi r^2 h = \pi.\left(\frac{2}{5}\right)^2.1000 = 160\pi\ m^3$.

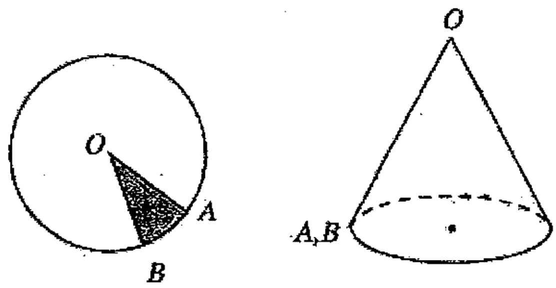


Vậy số bao xi măng công ty cần phải dùng để xây dựng đường ống là 3456 bao.

Chọn A.

Câu 18: [CHUYÊN THÁI BÌNH-LẦN 2-2017]

Cho miếng tôn tròn tâm O bán kính R. Cắt miếng tôn một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không đáy (OA trùng với OB). Gọi S, S' lần lượt là diện tích của miếng tôn hình tròn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\frac{S}{S'}$ để thể tích khối nón lớn nhất.



A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Gọi góc $\widehat{AOB} = \alpha\ rad$, suy ra độ dài dây cung AB là $L_{AB} = \alpha.R$.

Nên độ dài dây cung còn lại là $L_c = 2\pi R - \alpha R = R(2\pi - \alpha)$ là chu vi của đường tròn đáy của hình nón.

Bán kính đường tròn đáy hình nón là:

$$R_0 = \frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi} = R\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.R_0^2.h = \frac{1}{3}\pi.R^2.\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2.h.$$

Mặt khác $h = \sqrt{OA^2 - R_0^2} = \sqrt{R^2 - \left[\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}\right]^2} = R\sqrt{1-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2}$.

Khi đó $V = \frac{1}{3}\pi.R_0^2.h = \frac{1}{3}\pi.R^3.\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2.\sqrt{1-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2}$.

Với $t=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}=\frac{R_0}{R}$, ta xét $f(t)=t^2.\sqrt{1-t^2}$.

Ta có $f'(t)=\frac{2t-3t^3}{\sqrt{1-t^2}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_2=S_{xq}=\pi r_0 l=\pi r R_0.R$.

Diện tích miếng tôn ban đầu là $S_1=\pi R^2$ suy ra $\frac{S_1}{S_2}=\frac{R_0}{R}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 19: [CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 2 - 2017] Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$ đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng$/m^2$. Chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

A. 150 triệu đồng **B.** 75 triệu đồng **C.** 60 triệu đồng **D.** 100 triệu đồng

Lời giải:

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x\ (m)$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x\ (m)$.

Gọi h là chiều cao của bể nên ta có $V=S.h=2x^2.h=\frac{500}{3}\Rightarrow x^2.h=\frac{250}{3}\Leftrightarrow h=\frac{250}{3x^2}$.

Diện tích của bể là $S=2.h.x+2.2h.x+2x^2=2x^2+6.hx=2x^2+6.\frac{250}{3x^2}.x=2x^2+\frac{500}{x}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$2x^2+\frac{500}{x}=2x^2+\frac{250}{x}+\frac{250}{x}\ge 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{250}{x}.\frac{250}{x}}=150.$$

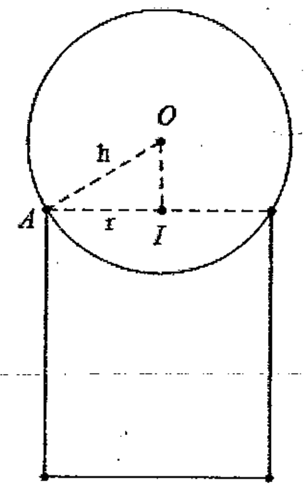
Dấu = xảy ra khi $2x^2=\frac{250}{x}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{125}\Rightarrow$ Chi phí thấp nhất thuê nhân công là $150.\frac{1}{2}=75$ triệu đồng. **Chọn B.**

Câu 20: [CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 3 - 2017] Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó

A. $9V_1=8V_2$. **B.** $3V_1=2V_2$. **C.** $16V_1=9V_2$. **D.** $27V_1=8V_2$.

Lời giải:

Gọi chiều cao của chiếc chén hình trụ là $2h$ và bán kính đường tròn đáy của hình trụ là r. *Bản chất của bài toán chính là bài toán mặt phẳng cắt mặt cầu theo một thiết diện trong tọa độ* $Oxyz$.



Gọi O là tâm của quả bóng bàn, khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng thiết diện bằng $\frac{h}{2}$. Bán kính đường tròn đáy hình trụ là $AI=\sqrt{OA^2-OI^2}=\frac{h\sqrt{3}}{2}$.

- Thể tích của quả bóng bàn là $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.h^3=\frac{4\pi h^3}{3}$.

- Thể tích của chiếc chén là $V_2=\pi.r^2.h_c=\pi.\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^2.2h=\frac{3\pi h^3}{2}$.

Vậy tỉ số $V_1:V_2=\frac{4\pi h^3}{3}:\frac{3\pi h^3}{2}=\frac{4}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\Rightarrow 9V_1=8V_2$.

Chọn A.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập: (04) 39714896
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax(04) 39729436

PRO S – HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TẬP 1

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc - Tổng biên tập: **TS. Phạm Thị Trâm**
Biên tập: **Trịnh Thị Thu Hà**
Biên tập chuyên ngành: **Doãn Phương Thảo**
Sửa bản in: **Phương Nhi**
Chế bản: **Hoàng Vĩnh Giang**
Trình bày bìa: **Nguyễn Tấn Sang**

Liên kết xuất bản
CÔNG TY CP CÔNG NGHỆ GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN ALADANH
Địa chỉ: Tầng 3 No – 25 Tân Lập, Quỳnh Lôi, Hai Bà Trưng, Hà Nội
Điện thoại: 0432999898 Email: moon@moon.vn

Mã số: 1L – 308 PT2017
In 2.000 cuốn, khổ 19 x 27 cm tại Công ty CP Gama Quốc tế.
Địa chỉ: Số 12 đường Giải Phóng, p.Phương Mai, q.Đống Đa – Hà Nội
Số xác nhận ĐKXB: 1490 - 2017/CXB, IPH/07 – 182/ĐHQGHN, ngày 15/05/2017
Quyết định xuất bản số: 316 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN ngày 19/05/2017
In xong và nộp lưu chiểu năm 2017 Mã số ISBN: 978-604-62-8454-3