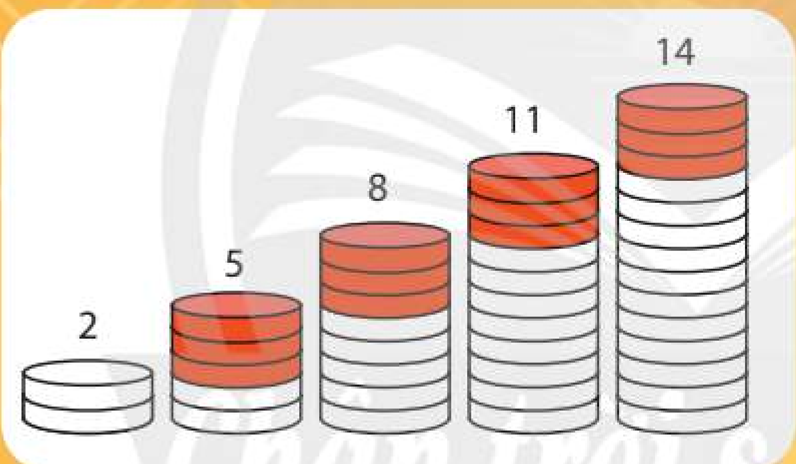
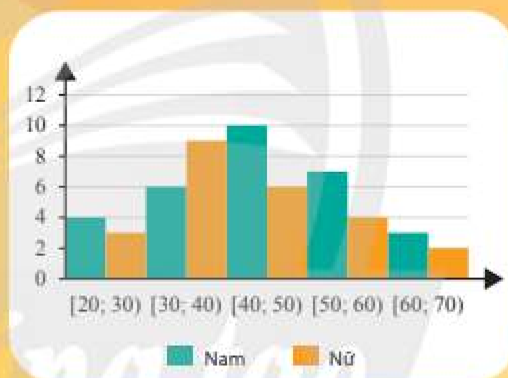
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAM – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

11

TẬP MỘT





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢN MẪU

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn: TOÁN – LỚP 11

TT	Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
1	Ông Lê Mậu Hải	Chủ tịch
2	Bà Cao Thị Hà	Phó Chủ tịch
3	Ông Phạm Đức Tài	Uỷ viên, Thư kí
4	Ông Phạm Khắc Ban	Uỷ viên
5	Ông Nguyễn Hắc Hải	Uỷ viên
6	Ông Nguyễn Doãn Phú	Uỷ viên
7	Ông Nguyễn Chiến Thắng	Uỷ viên
8	Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên	Uỷ viên
9	Ông Đinh Cao Thượng	Uỷ viên
10	Bà Vũ Thị Như Trang	Uỷ viên
11	Ông Phạm Đình Tùng	Uỷ viên

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAM – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

11

TẬP MỘT

Chân trời sáng tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách **Toán 11** thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Sách ***Toán 11*** thuộc bộ sách giáo khoa ***Chân trời sáng tạo*** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách ***Toán 11*** được chia thành hai tập.

Tập một bao gồm ba phần:

Đại số và Một số yếu tố Giải tích gồm ba chương: *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác; Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân; Giới hạn. Hàm số liên tục*.

Hình học và Đo lường gồm một chương: *Đường thẳng và mặt phẳng. Quan hệ song song trong không gian*.

Thống kê và Xác suất gồm một chương: *Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm*.

Đầu mỗi chương đều có nêu rõ các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chương. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: *khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng*. Sách sẽ tạo nên một môi trường học tập và giảng dạy tương tác tích cực nhằm đảm bảo tính dễ dạy, dễ học đồng thời hỗ trợ các phương pháp giảng dạy hiệu quả.

Nội dung sách thể hiện tính tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác. Những hoạt động trải nghiệm được tăng cường giúp người học có thêm cơ hội vận dụng Toán học vào thực tiễn, đồng thời ứng dụng công nghệ thông tin vào việc học Toán.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa ***Toán 11*** sẽ hỗ trợ quý thầy, cô giáo một cách tích cực và hiệu quả trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Trang

PHẦN THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Lượng giác đóng vai trò quan trọng trong cuộc sống và khoa học. Khởi nguồn từ nhu cầu tính toán trong hình học và thiên văn, đến nay lượng giác có vô số ứng dụng trong kiến trúc xây dựng, vật lí, kĩ thuật và công nghệ.

Trong chương này, ta sẽ xây dựng khái niệm góc lượng giác với số đo bất kì và giá trị lượng giác của chúng, đồng thời tìm hiểu các công thức lượng giác, hàm số lượng giác, phương trình lượng giác và một số ứng dụng của lượng giác trong thực tế.

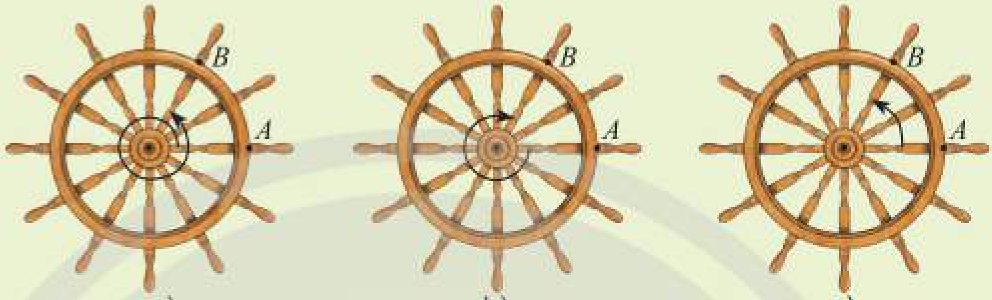
Học xong chương này, bạn có thể:

– Biểu diễn được các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác và tính được các giá trị lượng giác của chúng.
– Sử dụng được các hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác, công thức cộng, công thức góc nhân đôi, công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích để giải các bài toán lượng giác.
– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác.
– Nhận biết được hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và các đặc trưng hình học của đồ thị của chúng.
– Vẽ được đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ và giải thích được các tính chất cơ bản của chúng.
– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số lượng giác.

Bài 1. Góc lượng giác

Từ khoá: Góc lượng giác; Số đo góc lượng giác; Radian; Hệ thức Chasles.

Mỗi hình dưới đây thể hiện chuyển động quay của một điểm trên bánh lái tàu từ vị trí *A* đến vị trí *B*. Các chuyển động này có điểm nào giống nhau, điểm nào khác nhau?



a) b) c)

1. Góc lượng giác

Khái niệm góc lượng giác

1 Một chiếc bánh lái tàu có thể quay theo cả hai chiều. Trong Hình 1 và Hình 2, lúc đầu thanh *OM* ở vị trí *OA*.

a) Khi quay bánh lái ngược chiều kim đồng hồ (Hình 1), cứ mỗi giây, bánh lái quay một góc 60°. Bảng dưới đây cho ta góc quay α của thanh *OM* sau *t* giây kể từ lúc bắt đầu quay. Thay dấu ? bằng số đo thích hợp.

Hình 1

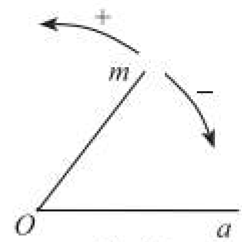
Thời gian *t* (giây)	1	2	3	4	5	6
Góc quay α	60°	120°	?	?	?	?

b) Nếu bánh lái được quay theo chiều ngược lại, nghĩa là quay cùng chiều kim đồng hồ (Hình 2) với cùng tốc độ như trên, người ta ghi –60° để chỉ góc mà thanh *OM* quay được sau mỗi giây. Bảng dưới đây cho ta góc quay α của thanh *OM* sau *t* giây kể từ lúc bắt đầu quay. Thay dấu ? bằng số đo thích hợp.

Hình 2

Thời gian *t* (giây)	1	2	3	4	5	6
Góc quay α	–60°	–120°	?	?	?	?

Khi xét chuyển động quay của một tia Om quanh gốc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo một chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.



Hình 3

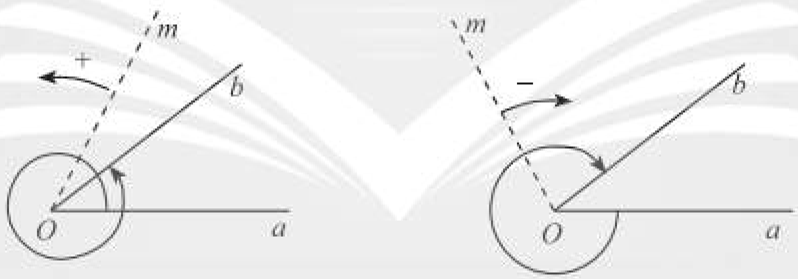
Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc quay 360°, một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay –360°.

Khi tia Om quay:

- nửa vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{2} . 360^\circ = 180^\circ$;
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{6} . 360^\circ = 60^\circ$;
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm thì ta nói Om quay góc $\frac{5}{4} . (-360^\circ) = -450^\circ$.

Cho hai tia Oa, Ob.

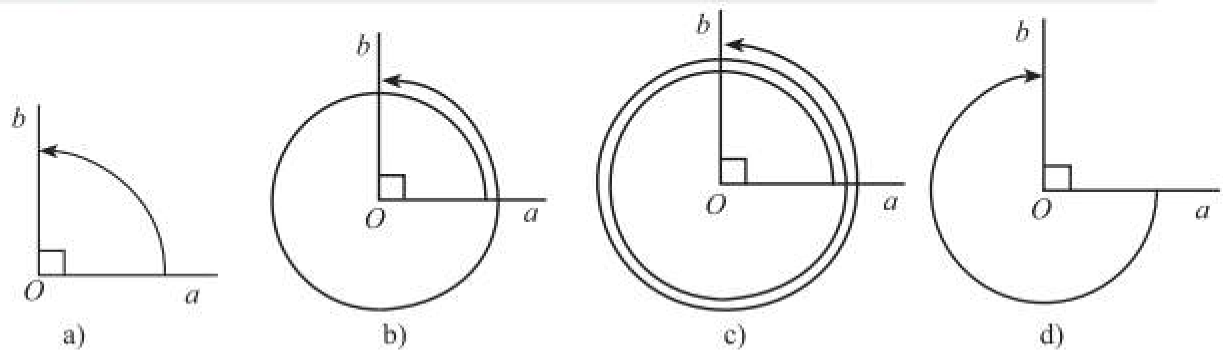
- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một ***góc lượng giác*** có tia đầu Oa, tia cuối Ob, kí hiệu (Oa, Ob).
- Khi tia Om quay một góc α, ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α, kí hiệu sđ$(Oa, Ob) = \alpha$.



Hình 4

Chú ý: Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob. Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

Ví dụ 1. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong Hình 5.



Hình 5

Giải

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong Hình 5a là 90^o.

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong Hình 5b là $90^o + 360^o = 450^o$.

Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong Hình 5c là $90^o + 2 \cdot 360^o = 810^o$.

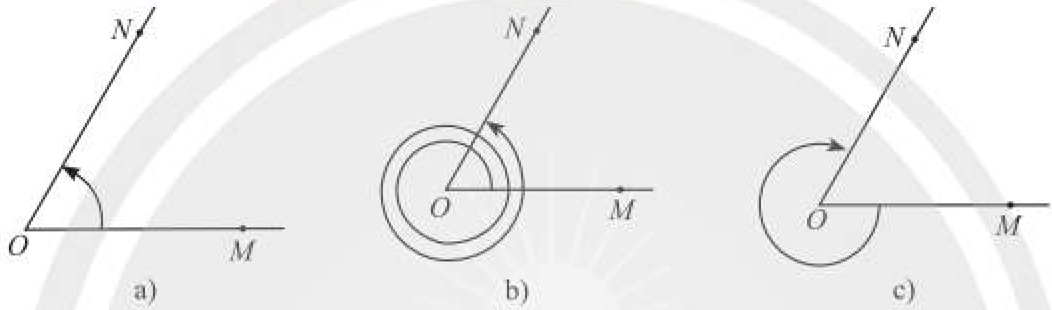
Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong Hình 5d là $\frac{3}{4} \cdot (-360^o) = -270^o$.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360^o nên có công thức tổng quát là:

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^o + k\,360^o \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ thường viết là } (Oa, Ob) = \alpha^o + k\,360^o$$

với α^o là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob. Chẳng hạn, trong Hình 5a, $(Oa, Ob) = 90^o + k\,360^o$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1 Cho $\widehat{MON} = 60^o$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong Hình 6 và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON).



Hình 6

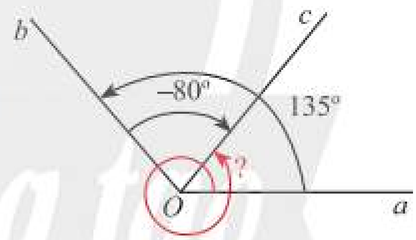
1 Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

2 Cho Hình 7.

a) Xác định số đo các góc lượng giác (Oa, Ob), (Ob, Oc) và (Oa, Oc).

b) Nhận xét về mối liên hệ giữa ba số đo góc này.



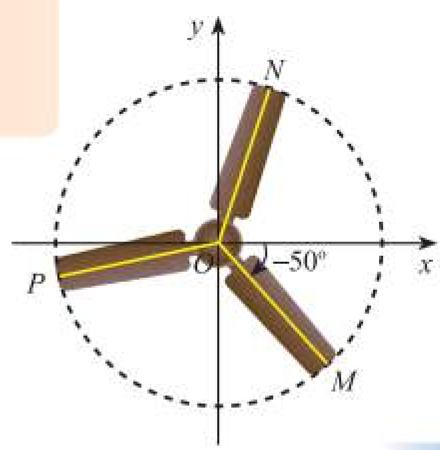
Hình 7

Ta thừa nhận hệ thức sau về số đo của góc lượng giác, gọi là ***hệ thức Chasles***:

Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k\,360^o \ (k \in \mathbb{Z}).$$

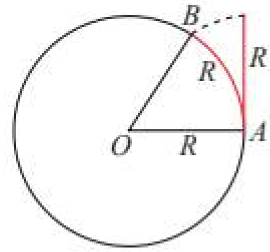
2 Trong Hình 8, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát số đo của góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP).



Hình 8

2. Đơn vị radian

Vẽ đường tròn tâm O bán kính R bất kì. Dùng một đoạn dây mềm đo bán kính và đánh dấu được một cung $\overset{\frown}{AB}$ có độ dài đúng bằng R (Hình 9). Đo và cho biết $\widehat{AOB}$ có số đo bằng bao nhiêu độ.



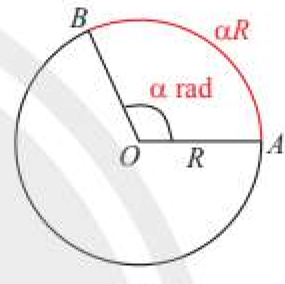
Hình 9

Trên đường tròn bán kính R tuỳ ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 *radian* (đọc là 1 ra-đi-an, viết tắt là 1 rad).

Trên đường tròn bán kính R, một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR (Hình 10).

Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài là πR, nên góc bẹt có số đo theo đơn vị radian là π. Khi đó ta viết

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$



Hình 10

Suy ra, với $\pi \approx 3,14$, ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad $\approx 0,0175$ rad và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$ (hay $57^\circ 17' 45''$).

Do đó ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

- $a^\circ = \frac{\pi a}{180}$ rad
- $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$

Ví dụ 2. Đổi các số đo góc sau đây từ radian sang độ hoặc ngược lại:

a) -60°; b) $\frac{2\pi}{5}$ rad; c) 3 rad.

Giải

a) $-60^\circ = -\frac{60\pi}{180}$ rad $= -\frac{\pi}{3}$ rad;

b) $\frac{2\pi}{5}$ rad $= \left(\frac{2\pi}{5} . \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 72^\circ$;

c) $3 \text{ rad} = \left(3 . \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ \approx 171,89^\circ$.

Hoàn thành bảng chuyển đổi đơn vị đo của các góc sau đây:

Số đo theo độ	0°	?	45°	60°	?	120°	?	150°	180°
Số đo theo rad	?	$\frac{\pi}{6}$ rad	?	?	$\frac{\pi}{2}$ rad	?	$\frac{3\pi}{4}$ rad	?	π rad

Chú ý:

a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo.

Ví dụ, $\frac{\pi}{2}$ rad được viết là $\frac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2.

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob. Lưu ý không được viết $\alpha + k360^o$ hay $a^o + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

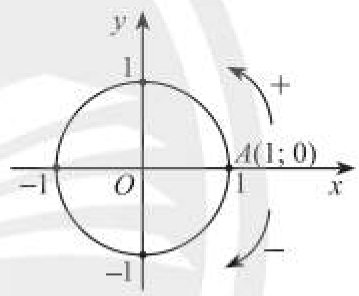
3. Đường tròn lượng giác

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường tròn tâm O bán kính bằng 1 và điểm $A(1; 0)$.

a) Cho điểm $B(0; 1)$. Số đo góc lượng giác (OA, OB) bằng bao nhiêu radian?

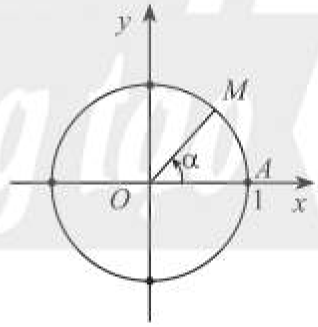
b) Xác định các điểm A' và B' trên đường tròn sao cho các góc lượng giác (OA, OA'), (OA, OB') có số đo lần lượt là π và $-\frac{\pi}{2}$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1; 0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là ***đường tròn lượng giác***.



Hình 11

Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α (Hình 12). Khi đó điểm M được gọi là ***điểm biểu diễn*** của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Hình 12

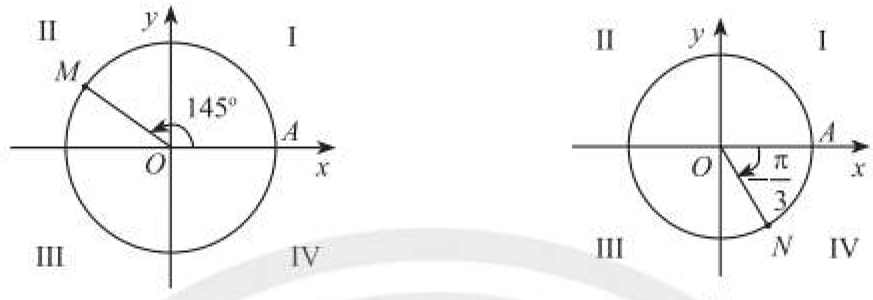
Ví dụ 3. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

a) 865^o; b) $\frac{-7\pi}{3}$.

Giải

a) Ta có $865^\circ = 145^\circ + 2.360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 865° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$ (Hình 13a).

b) Ta có $\dfrac{-7\pi}{3} = \dfrac{-\pi}{3} + (-1).2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\dfrac{-7\pi}{3}$ là điểm N trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AON} = \dfrac{\pi}{3}$ (Hình 13b).



a) b)

Hình 13

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

a) $-1\,485^\circ$; b) $\dfrac{19\pi}{4}$.

BÀI TẬP

1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

a) 38°; b) -115°; c) $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^\circ$.

2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

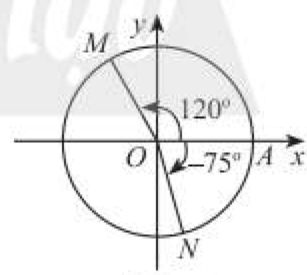
a) $\dfrac{\pi}{12}$; b) -5; c) $\dfrac{13\pi}{9}$.

3. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

a) $\dfrac{-17\pi}{3}$; b) $\dfrac{13\pi}{4}$; c) -765°.

4. Góc lượng giác $\dfrac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

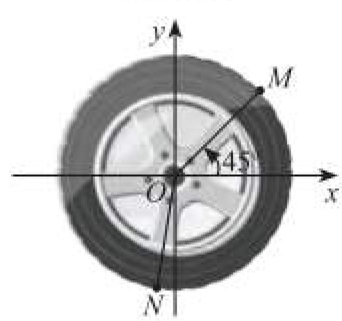
$$\frac{3\pi}{7};\ \frac{10\pi}{7};\ \frac{-25\pi}{7}.$$



Hình 14

5. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong Hình 14.

6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).



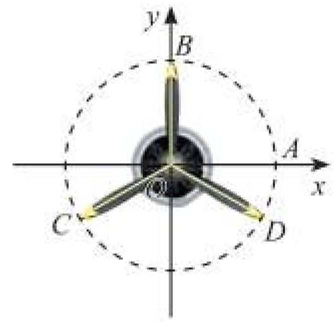
Hình 15

7. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; b) $k\frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

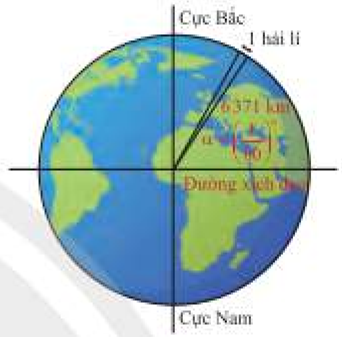
8. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Hình 16

9. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^{o}$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6 371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

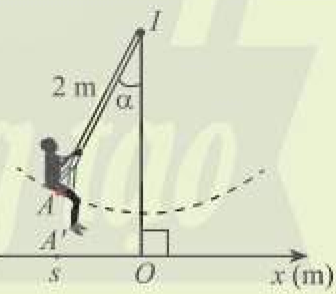


Hình 17

Bài 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

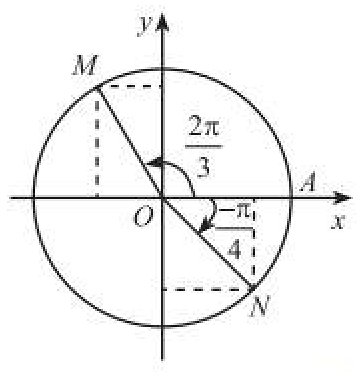
Từ khoá: **Giá trị lượng giác; Góc đối nhau; Góc hơn kém nhau π; Góc bù nhau; Góc phụ nhau.**

Hình bên biểu diễn xích đu *IA* có độ dài 2 m dao động quanh trục *IO* vuông góc với trục *Ox* trên mặt đất và *A'* là hình chiếu của *A* lên *Ox*. Toạ độ *s* của *A'* trên trục *Ox* được gọi là li độ của *A* và $(IO, IA) = \alpha$ được gọi là li độ góc của *A*. Làm cách nào để tính li độ dựa vào li độ góc?



1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trong Hình 1, M và N là điểm biểu diễn của các góc lượng giác $\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{-\pi}{4}$ trên đường tròn lượng giác. Xác định toạ độ của M và N trong hệ trục toạ độ Oxy.

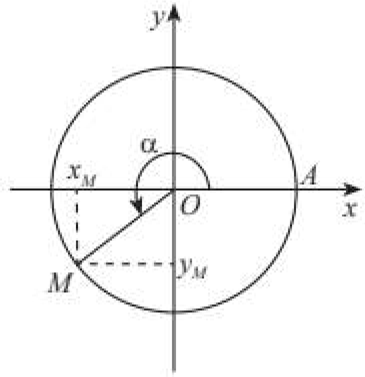


Hình 1

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó:

- Tung độ y_M của M gọi là ***sin*** của α, kí hiệu $\sin\alpha$.
- Hoành độ x_M của M gọi là ***côsin*** của α, kí hiệu $\cos\alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là ***tang*** của α, kí hiệu $\tan\alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{x_M}{y_M} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là ***côtang*** của α, kí hiệu $\cot\alpha$.

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác của góc lượng giác α.*



Hình 2

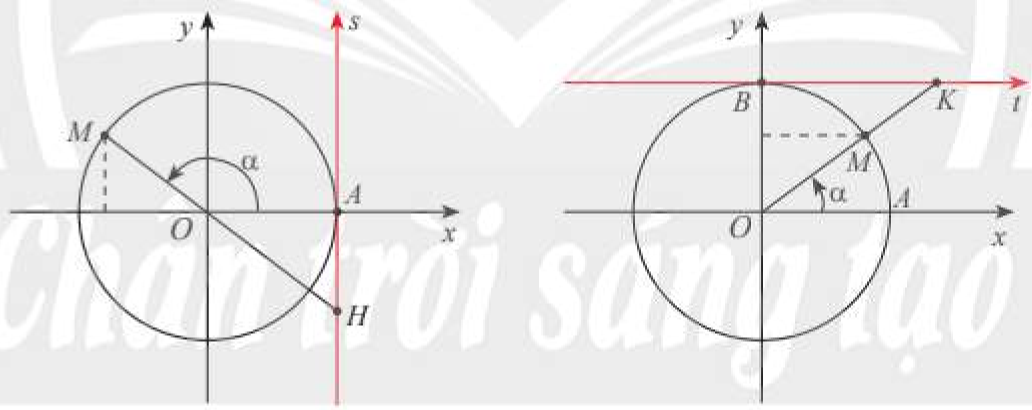
Chú ý:

a) Ta gọi trục hoành là ***trục côsin***, còn trục tung là ***trục sin***.

Trục As có gốc ở điểm $A(1; 0)$ và song song với trục sin (Hình 3a) gọi là ***trục tang***.

Nếu đường thẳng OM cắt trục tang thì tung độ của giao điểm đó chính là $\tan\alpha$.

Trục Bt có gốc ở điểm $B(0; 1)$ và song song với trục côsin (Hình 3b) gọi là ***trục côtang***. Nếu đường thẳng OM cắt trục côtang thì hoành độ của giao điểm đó chính là $\cot\alpha$.



a) b)

Hình 3

b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

$\tan\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

$\cot\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

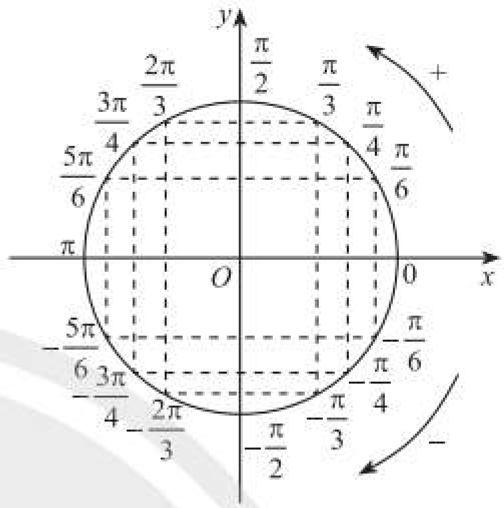
c) Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k, ta có

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$;

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

d) Ta đã biết bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ (hay $0^{\circ} \le \alpha \le 90^{\circ}$) như sau:

α / Giá trị lượng giác	0 (0°)	$\dfrac{\pi}{6}$ (30°)	$\dfrac{\pi}{4}$ (45°)	$\dfrac{\pi}{3}$ (60°)	$\dfrac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0



Hình 4

Sử dụng bảng trên và Hình 4, ta có thể xác định được giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\dfrac{13\pi}{3}$;　　　　b) -45°.

Giải

a) Vì $\dfrac{13\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi$ nên: $\sin\dfrac{13\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\dfrac{13\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;

$$\tan\frac{13\pi}{3} = \frac{\sin\frac{13\pi}{3}}{\cos\frac{13\pi}{3}} = \sqrt{3}; \quad \cot\frac{13\pi}{3} = \frac{\cos\frac{13\pi}{3}}{\sin\frac{13\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Vì điểm biểu diễn của góc -45° và góc 45° trên đường tròn lượng giác đối xứng nhau qua trục hoành (Hình 4), nên chúng có cùng hoành độ và tung độ đối nhau. Do đó ta có:

$$\sin(-45^{\circ}) = -\sin 45^{\circ} = \frac{-\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(-45^{\circ}) = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan(-45^{\circ}) = \frac{\sin(-45^{\circ})}{\cos(-45^{\circ})} = -1; \quad \cot(-45^{\circ}) = \frac{\cos(-45^{\circ})}{\sin(-45^{\circ})} = -1.$$

1 Tính $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ và $\tan 495^{\circ}$.

2. Tính giá trị lượng giác của một góc bằng máy tính cầm tay

Ta có thể tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì bằng máy tính cầm tay. Lưu ý trước khi tính, cần chọn đơn vị đo góc như sau:

– Lần lượt ấn các phím [SHIFT], [MENU] và [2] để màn hình hiện lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc.

– Tiếp tục ấn phím [1] để chọn đơn vị độ (**Degree**) hoặc phím [2] để chọn đơn vị radian.

– Ấn các phím [MENU] [1] để vào chế độ tính toán.

Ví dụ 2. Sử dụng máy tính cầm tay để tính sin (–45°) và $\cot\dfrac{11\pi}{3}$.

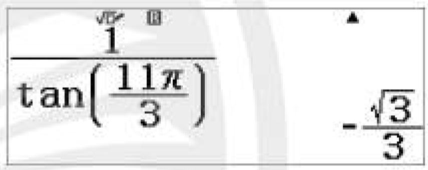
Giải

Chọn đơn vị đo góc là độ. Ấn liên tiếp các phím

[sin] [(–)] [4] [5] [)] [=]

ta được $\sin(-45^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Để tính $\cot\dfrac{11\pi}{3}$, ta tính $\dfrac{1}{\tan\dfrac{11\pi}{3}}$ như sau:



Chọn đơn vị đo góc là radian. Ấn liên tiếp các phím

[1] [▭/▭] [tan] [1] [1] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▭/▭] [3] [▶] [)] [=]

ta được $\cot\dfrac{11\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

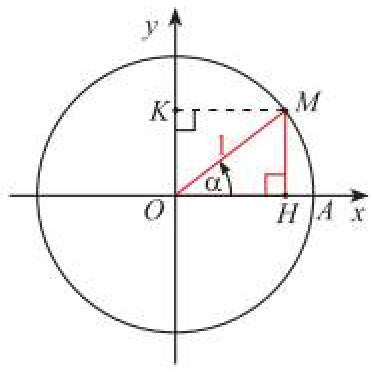
2 Sử dụng máy tính cầm tay để tính cos 75° và $\tan\left(\dfrac{-19\pi}{6}\right)$.

3. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

2 a) Trong Hình 5, M là điểm biểu diễn của góc lượng giác α trên đường tròn lượng giác. Giải thích vì sao $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b) Chia cả hai vế của biểu thức ở câu a) cho $\cos^2\alpha$ ta được đẳng thức nào?

c) Chia cả hai vế của biểu thức ở câu a) cho $\sin^2\alpha$ ta được đẳng thức nào?



Hình 5

Ta có các hệ thức sau liên hệ giữa các giá trị lượng giác của cùng một góc lượng giác α:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$ với $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

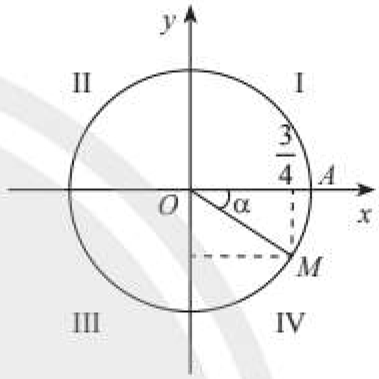
Ví dụ 3. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ với $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Giải

Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{7}{16}$.

Do đó $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ hoặc $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Vì $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên điểm biểu diễn của góc α trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV (Hình 6), do đó $\sin\alpha < 0$.



Hình 6

Suy ra $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

3 Cho $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

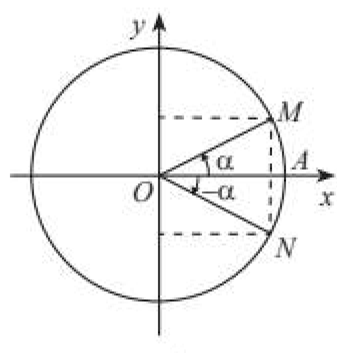
4. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

3 Cho $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Biểu diễn các góc lượng giác $-\alpha$, $\alpha + \pi$, $\pi - \alpha$, $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ trên đường tròn lượng giác và rút ra mối liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc này với giá trị lượng giác của góc α.

Hai góc đối nhau: α và –α

Các điểm biểu diễn của hai góc α và –α đối xứng qua trục Ox (Hình 7), nên ta có:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$

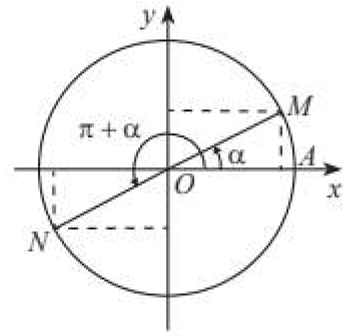


Hình 7

Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc toạ độ O (Hình 8), nên ta có:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$$

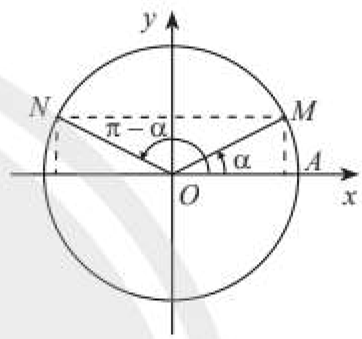


Hình 8

Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 9), nên ta có:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

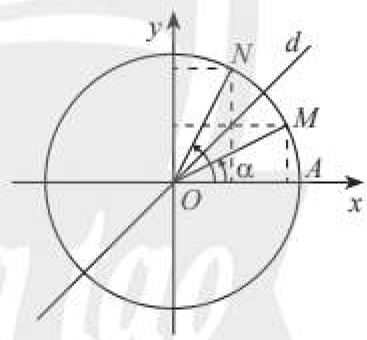


Hình 9

Hai góc phụ nhau: α và $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy (Hình 10), nên ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$



Hình 10

Ví dụ 4. a) Biểu diễn $\sin\dfrac{61\pi}{8}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Biểu diễn $\tan 258^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

Giải

a) $\sin\dfrac{61\pi}{8} = \sin\left(8\pi - \dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right) = -\sin\dfrac{3\pi}{8} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{8}$;

b) $\tan 258^\circ = \tan\left(180^\circ + 78^\circ\right) = \tan 78^\circ = \cot\left(90^\circ - 12^\circ\right) = \cot 12^\circ$.

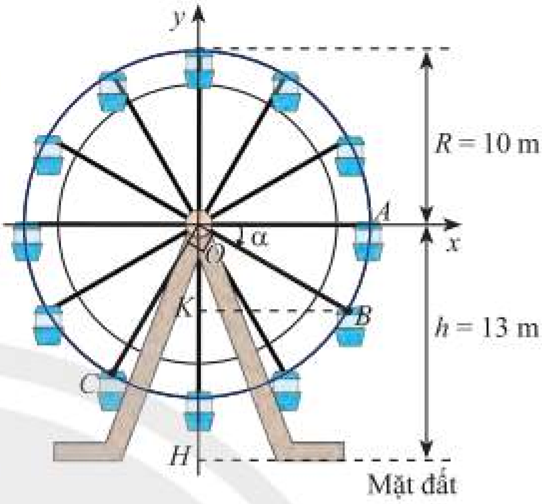
a) Biểu diễn $\cos 638^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

b) Biểu diễn $\cot\dfrac{19\pi}{5}$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$.

Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 11

BÀI TẬP

1. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{2}$; c) $\tan\alpha = 3$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$.

2. Cho $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\dfrac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

3. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu:

a) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; b) $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; d) $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

4. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$ hoặc từ 0 đến 45° và tính:

a) $\cos\dfrac{21\pi}{6}$; b) $\sin\dfrac{129\pi}{4}$; c) $\tan 1\,020^\circ$.

5. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

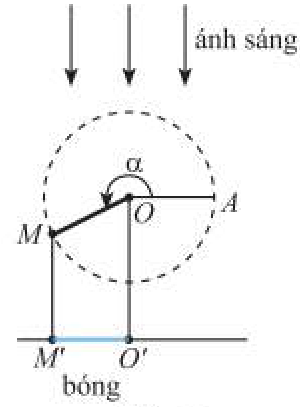
a) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$; b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{1}{\tan\alpha + 1} + \dfrac{1}{\cot\alpha + 1}$; b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$;

c) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi)\cot(3\pi - \alpha)$.

7. Thanh *OM* quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục *O* của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là *OA*. Hỏi độ dài bóng *O′M′* của *OM* khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh *OM* là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

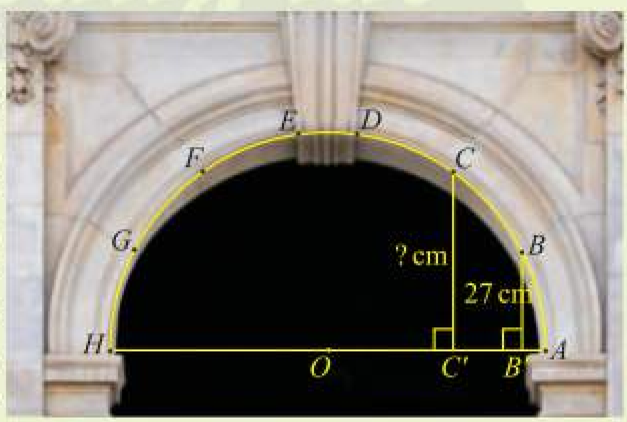
8. Khi xe đạp di chuyển, van *V* của bánh xe quay quanh trục *O* theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí *A*. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 13

Bài 3. Các công thức lượng giác

Từ khoá: Công thức cộng; Công thức góc nhân đôi; Công thức biến đổi tổng thành tích; Công thức biến đổi tích thành tổng.

Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung *AB*, *BC*, *CD*, *EF*, *FG*, *GH* bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính *AH*, làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm *C* đến *AH*?



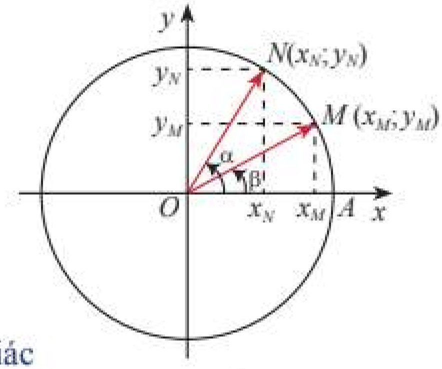
1. Công thức cộng

1 Quan sát Hình 1. Từ hai cách tính tích vô hướng của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ sau đây:

$$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{ON} = x_M x_N + y_M y_N,$$

hãy suy ra công thức tính $\cos(\alpha - \beta)$ theo các giá trị lượng giác của α và β. Từ đó, hãy suy ra công thức $\cos(\alpha + \beta)$ bằng cách thay β bằng $-\beta$.



Hình 1

Từ đây, khi không nói gì thêm, chỉ xét các góc lượng giác mà tại đó các giá trị lượng giác được đề cập có nghĩa.

Công thức cộng

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Ví dụ 1. Tính giá trị của $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Giải

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

1 Tính $\sin\dfrac{\pi}{12}$ và $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

2. Công thức góc nhân đôi

2 Hãy áp dụng công thức cộng cho trường hợp $\beta = \alpha$ và tính các giá trị lượng giác của góc 2α.

Công thức tính các giá trị lượng giác của góc 2α qua các giá trị lượng giác của góc α được gọi là ***công thức góc nhân đôi***.

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Ví dụ 2. Tính $\sin\frac{\pi}{8}$.

Giải

Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$. Suy ra $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Vì $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\frac{\pi}{8}>0$. Suy ra $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2 Tính $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\tan\frac{\pi}{8}$.

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

3 Từ công thức cộng, hãy tính tổng và hiệu của:

a) $\cos(\alpha-\beta)$ và $\cos(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha-\beta)$ và $\sin(\alpha+\beta)$.

Từ công thức cộng, ta suy ra được ***công thức biến đổi tích thành tổng*** sau đây:

- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $\cos\frac{11\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

Giải

$$\cos\frac{11\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

3 Tính giá trị của biểu thức $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$ và $\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}$.

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

4 Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng cho hai góc lượng giác $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$ và $b=\frac{\alpha-\beta}{2}$, ta được các đẳng thức nào?

Các công thức dưới đây được gọi là ***công thức biến đổi tổng thành tích***.

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

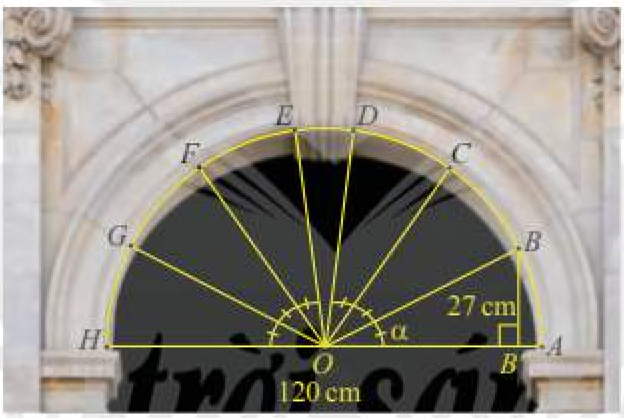
Ví dụ 4. Tính $\sin\dfrac{5\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Giải

$$\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4 Tính $\cos\dfrac{7\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Trong bài toán khởi động, cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

BÀI TẬP

1. Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\dfrac{5\pi}{12}$; b) -555^o.

2. Tính $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ biết $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$ và $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

3. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α, biết:

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\alpha$;

b) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

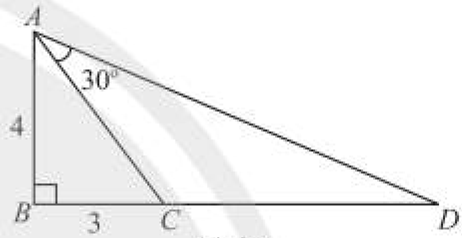
5. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos 2\alpha = \dfrac{2}{5}$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{9}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.

6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$.

7. Trong Hình 3, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thoả mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan\widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD.

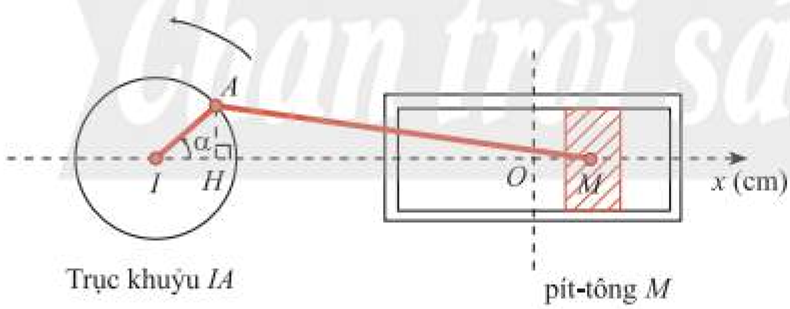


Hình 3

8. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.

a) Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính toạ độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

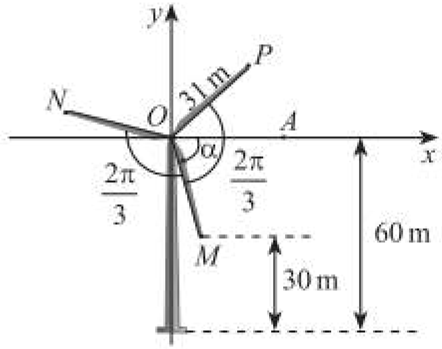


Hình 4

9. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\dfrac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

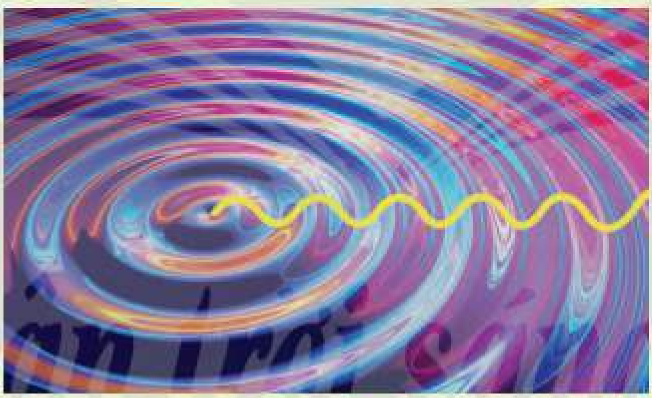


Hình 5

Bài 4. Hàm số lượng giác và đồ thị

Từ khoá: Hàm số chẵn; Hàm số lẻ; Hàm số tuần hoàn; Hàm số sin; Hàm số côsin; Hàm số tang; Hàm số côtang.

Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?

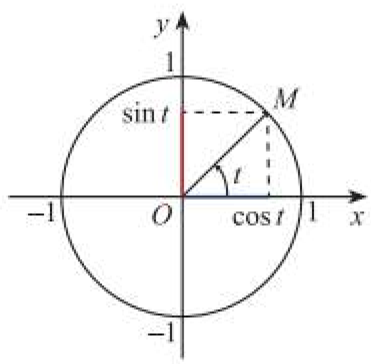


1. Hàm số lượng giác

1 Cho số thực t và M là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo t rad trên đường tròn lượng giác. Sử dụng định nghĩa của các giá trị lượng giác, hãy giải thích vì sao xác định duy nhất:

a) Giá trị $\sin t$ và $\cos t$;

b) Giá trị $\tan t$ (nếu $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) và $\cot t$ (nếu $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$).



Hình 1

Hàm số sin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.

Hàm số côsin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

Như vậy:

– Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

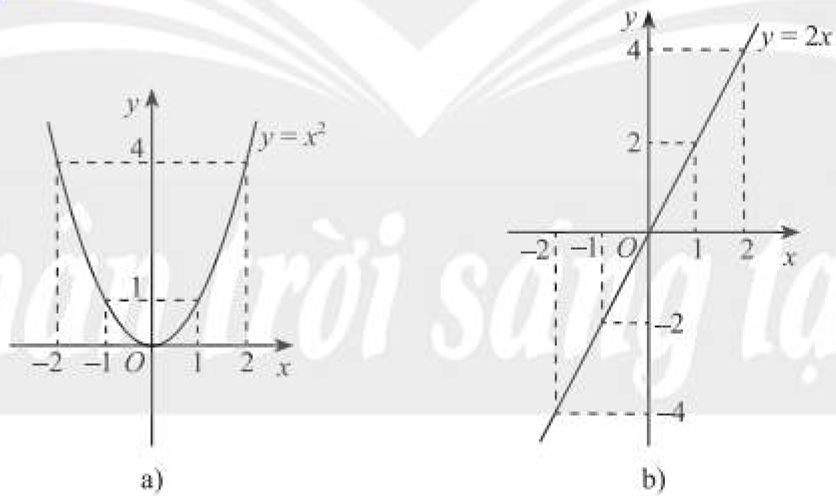
– Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

– Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

2 Xét hai hàm số $y = x^2$, $y = 2x$ và đồ thị của chúng trong Hình 2. Đối với mỗi trường hợp, nêu mối liên hệ của giá trị hàm số tại 1 và –1, 2 và –2. Nhận xét về tính đối xứng của mỗi đồ thị hàm số.



Hình 2

Hàm số $y = x^2$ là một ví dụ về hàm số chẵn và hàm số $y = 2x$ là một ví dụ về hàm số lẻ. Ta có định nghĩa sau:

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là ***hàm số chẵn*** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là ***hàm số lẻ*** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác $y = \cos x$, $y = \tan x$.

Giải

a) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\cos(-x) = \cos x$. Do đó hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ta có $-x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

cũng có nghĩa là $-x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ hay $-x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Mặt khác $\tan(-x) = -\tan x$. Do đó hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

1 Chứng minh rằng hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cot x$ là các hàm số lẻ.

Hàm số tuần hoàn

3 Hãy chỉ ra một số thực T sao cho $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là ***hàm số tuần hoàn*** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$ ta có $x \pm T \in D$ và $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là ***chu kì*** của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kì T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T.

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \tan x$.

Giải

Ta có: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

$\tan(x + \pi) = \tan x$ với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số $y = \sin x$ và $y = \tan x$ là các hàm số tuần hoàn.

2 Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \cos x$ và hàm số $y = \cot x$.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng:

a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π;

b) Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì π.

3. Đồ thị của các hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$

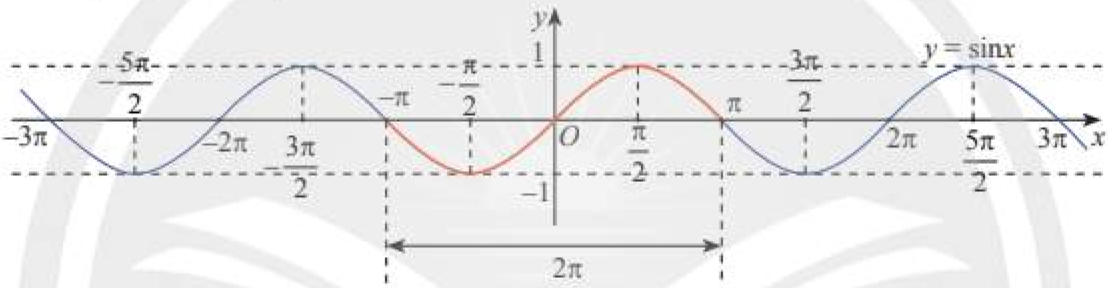
4 Hoàn thành bảng giá trị sau đây và xác định các điểm tương ứng trên mặt phẳng toạ độ.

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 3.

Vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài 2π.

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Hình 3

Chú ý: Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua gốc toạ độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau:

– Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \cos x$

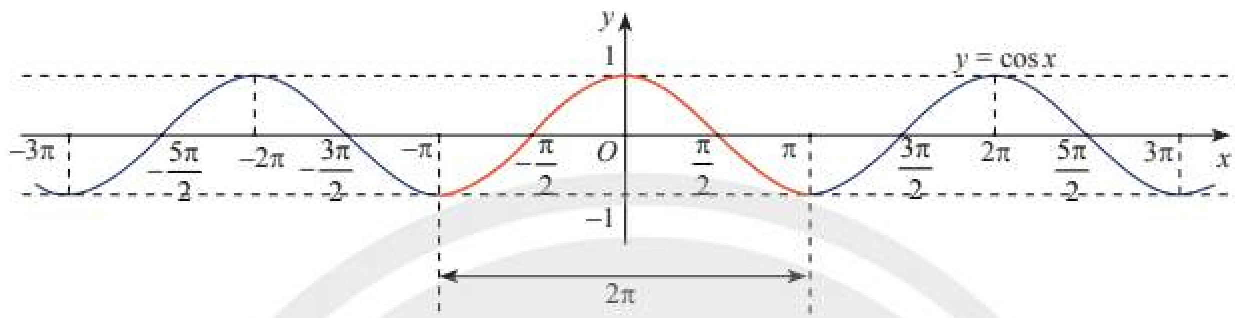
5 Hoàn thành bảng giá trị sau đây và xác định các điểm tương ứng trên mặt phẳng toạ độ.

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cos x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 4.

Vì hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài 2π.

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Hình 4

Chú ý: Vì $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau:

– Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 3. Nhiệt độ ngoài trời T (tính bằng °C) vào thời điểm t giờ trong một ngày ở một thành phố được tính bởi công thức $T = 20 + 4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{5\pi}{6}\right)$. Để bảo quản các tác phẩm nghệ thuật, hệ thống điều hoà nhiệt độ của một bảo tàng sẽ được tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ 22 °C trở lên. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định khoảng thời gian t trong ngày $(0 \le t \le 24)$ hệ thống điều hoà được bật.

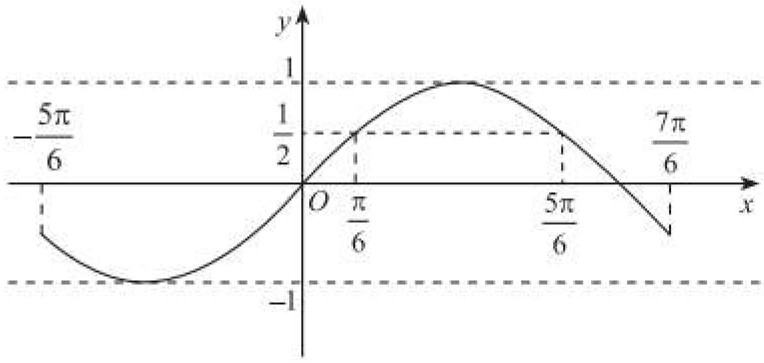
(Theo *https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168192385900139*)

Giải

Ta có $T \ge 22$ khi và chỉ khi $20 + 4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{5\pi}{6}\right) \ge 22$ hay $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{5\pi}{6}\right) \ge \dfrac{1}{2}$.

Vì $0 \le t \le 24$ nên $-\dfrac{5\pi}{6} \le \dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{5\pi}{6} \le \dfrac{7\pi}{6}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}\right]$ (Hình 5).



Hình 5

Ta thấy $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{5\pi}{6}\right)\geq\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{5\pi}{6}\leq\dfrac{5\pi}{6}$ hay $12\leq t\leq 20$.

Vậy hệ thống điều hoà được bật trong khoảng thời gian từ 12 giờ đến 20 giờ trong ngày.

3 Li độ s (cm) của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2\cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1; 1]$ (cm).

(Theo *https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion*)

Hình 6

Hàm số $y = \tan x$

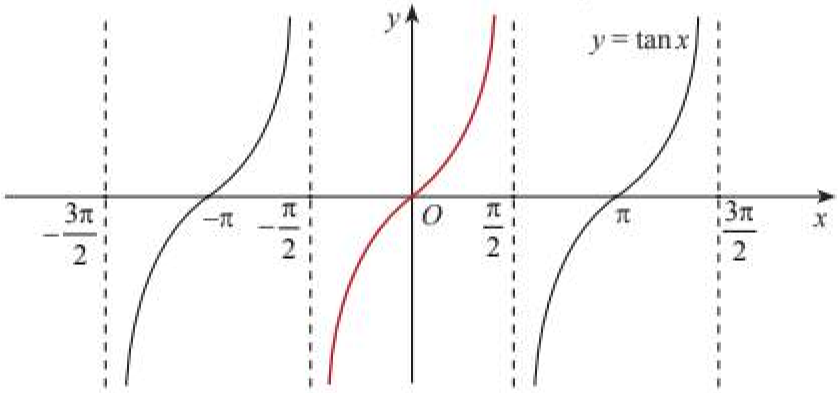
6 Hoàn thành bảng giá trị sau đây và xác định các điểm tương ứng trên mặt phẳng toạ độ.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; \tan x)$ với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 7.

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π, nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài π.

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ như sau:



Hình 7

Chú ý: Vì $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có thể vẽ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc toạ độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

– Hàm số tuần hoàn với chu kì π.
– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.
– Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \cot x$

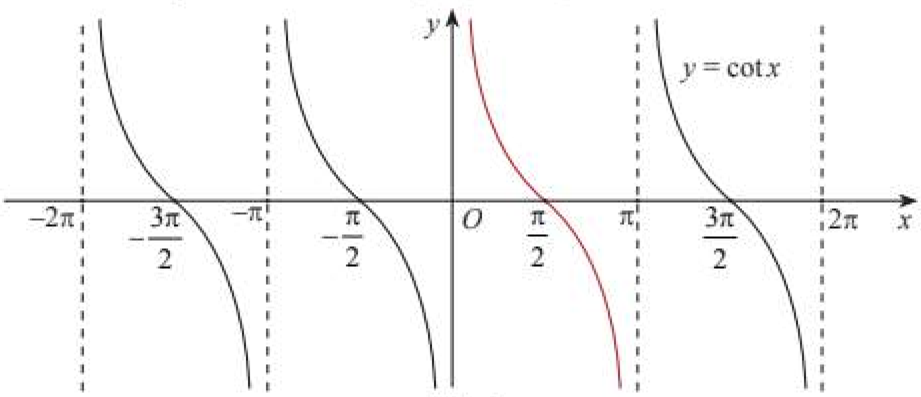
7 Hoàn thành bảng giá trị sau đây và xác định các điểm tương ứng trên mặt phẳng toạ độ.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cot x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; \cot x)$ với $x \in (0; \pi)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 8.

Vì hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ta vẽ đồ thị của hàm số trên khoảng $(0; \pi)$, sau đó tịnh tiến đồ thị trên khoảng này theo phương song song với trục hoành từng đoạn có độ dài π.

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ như sau:



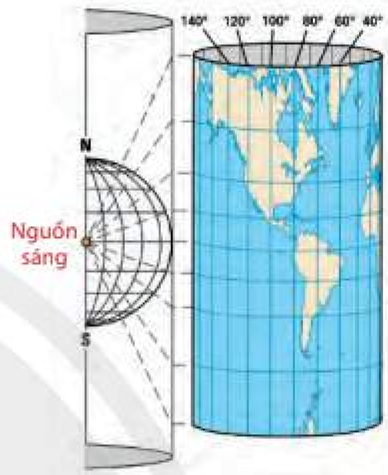
Hình 8

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

– Hàm số tuần hoàn với chu kì π.
– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.
– Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 4. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0^o làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ^o $(-90 < \varphi < 90)$ được cho bởi hàm số $y = 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm).

Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ.
(Theo *https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/*)



Hình 9

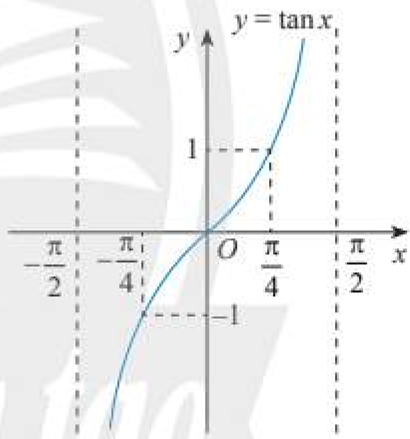
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ nên ta có $-20 \le y \le 20$.

Khi đó $-20 \le 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \le 20$ hay $-1 \le \tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \le 1$.

Ta có $-90 < \varphi < 90$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{180}\varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).



Hình 10

Ta thấy $-1 \le \tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right) \le 1$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{180}\varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ hay $-45 \le \varphi \le 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20 cm nằm ở vĩ độ từ -45^o đến 45^o.

4 Có bao nhiêu giá trị x trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ thoả mãn điều kiện $\tan x = 2$?

BÀI TẬP

1. Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?
a) $y = 5\sin^2 x + 1$; b) $y = \cos x + \sin x$; c) $y = \tan 2x$.

2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:
a) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; b) $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; c) $y = \dfrac{1}{2 - \sin^2 x}$.

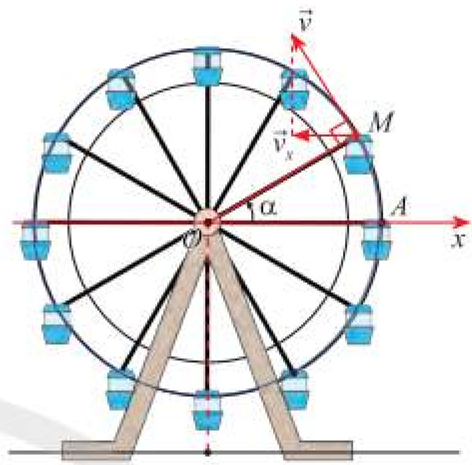
3. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\cos x + 1$.

4. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thoả mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

5. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha$ (m/s) (Hình 11).

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \le \alpha \le 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

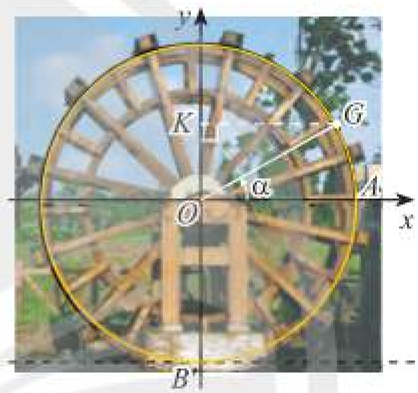


Hình 11

6. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).

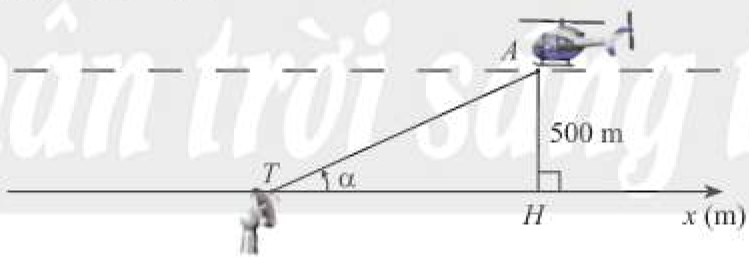
a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 m.



Hình 12

7. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác (Tx, TA) $(0 < \alpha < \pi)$.



Hình 13

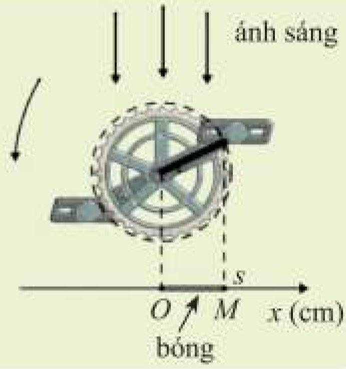
a) Biểu diễn toạ độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào.

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 5. Phương trình lượng giác cơ bản

Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17\cos 5\pi t$ với s (cm) là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10 cm?



1. Phương trình tương đương

Xác định và so sánh tập nghiệm của các phương trình sau:

a) $x - 1 = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $\sqrt{2x^2 - 1} = x$.

Hai phương trình được gọi là ***tương đương*** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1. Phương trình $x^2 - 4 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

a) $2x^2 = 8$; b) $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$.

Giải

a) Hai phương trình $x^2 - 4 = 0$ và $2x^2 = 8$ có cùng tập nghiệm $\{-2; 2\}$ nên hai phương trình này tương đương.

b) Ta có $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$, nhưng không là nghiệm của phương trình $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$. Do đó hai phương trình này không tương đương với nhau.

Chú ý:

a) Để giải phương trình, ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:

• Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

• Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

b) Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu "⇔".

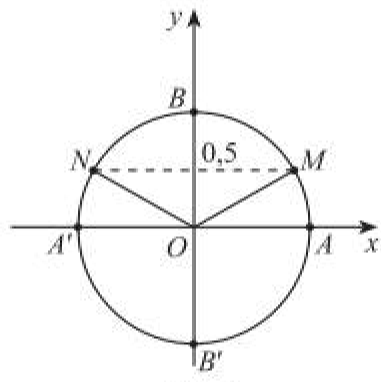
1 Chỉ ra lỗi sai trong phép biến đổi phương trình dưới đây:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

2. Phương trình $\sin x = m$

2 a) Có giá trị nào của x để $\sin x = 1{,}5$ không?

b) Trong Hình 1, những điểm nào trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác x có $\sin x = 0{,}5$? Xác định số đo của các góc lượng giác đó.



Hình 1

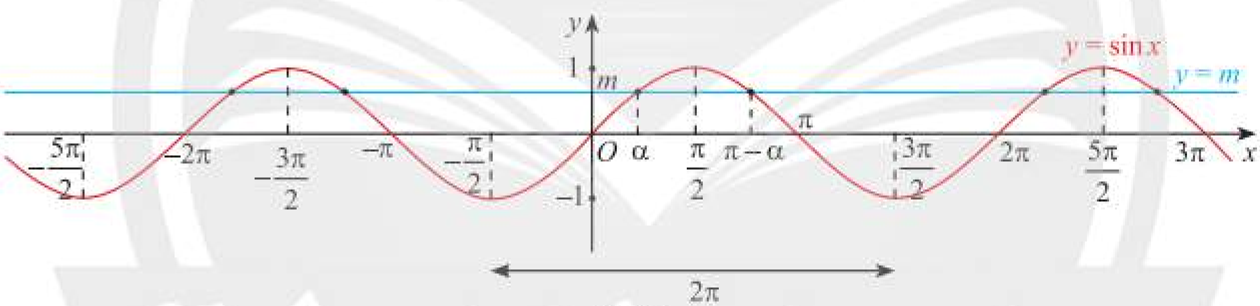
Xét phương trình $\sin x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \le 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.



Hình 2

Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$;   b) $\sin x = -\frac{3}{2}$;   c) $\sin 2x = \sin 3x$.

Giải

a) Vì $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ nên phương trình $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ có các nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Vì $-\frac{3}{2} < -1$ nên phương trình $\sin x = -\frac{3}{2}$ vô nghiệm.

c) $\sin 2x = \sin 3x \Leftrightarrow 3x = 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x = \pi - 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

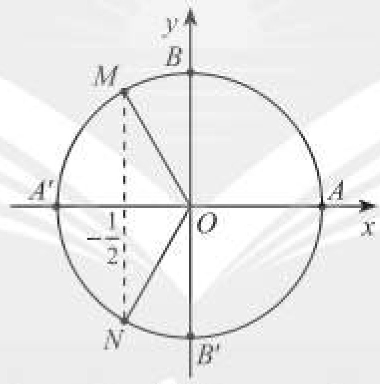
2 Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$.

3. Phương trình cosx = m

3 Trong Hình 3, những điểm nào trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác x có $\cos x = -\frac{1}{2}$? Xác định số đo của các góc lượng giác đó.



Hình 3

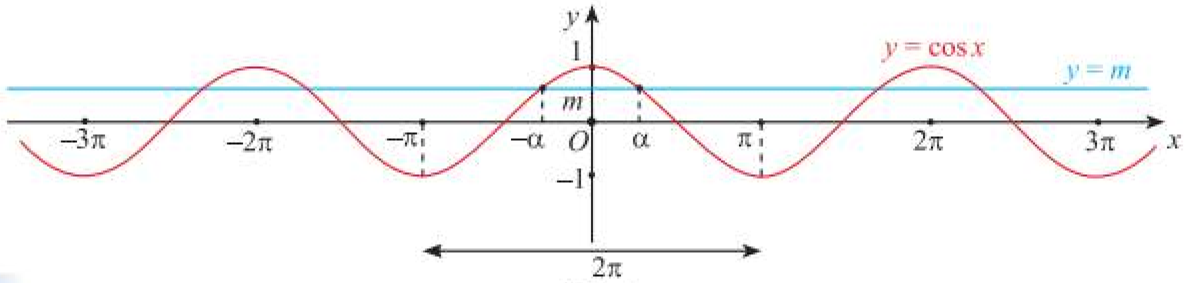
Xét phương trình $\cos x = m$.

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \le 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.



Hình 4

Chú ý: a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = \cos a^o \Leftrightarrow x = a^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x = \cos(x + 60^o)$; c) $\cos 3x = \sin x$.

Giải

a) Vì $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ nên phương trình $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ có các nghiệm là

$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos 2x = \cos(x + 60^o) \Leftrightarrow 2x = x + 60^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $2x = -(x + 60^o) + k360^o, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 60^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -20^o + k120^o, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 60^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -20^o + k120^o, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

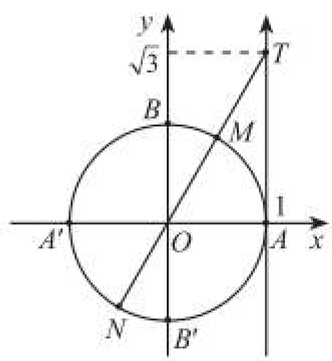
Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3 Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -3$; b) $\cos x = \cos 15^o$; c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{3\pi}{12}$.

4. Phương trình $\tan x = m$

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho T là điểm trên trục tang có toạ độ là $(1; \sqrt{3})$ (Hình 5). Những điểm nào trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác x có $\tan x = \sqrt{3}$? Xác định số đo của các góc lượng giác đó.

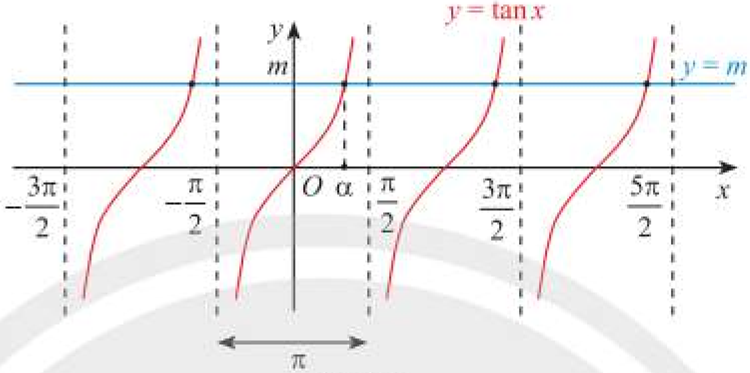


Hình 5

Với mọi số thực m, phương trình $\tan x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$.



Hình 6

Chú ý: $\tan x = \tan a^{\circ} \Leftrightarrow x = a^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$;   b) $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{11}$.

Giải

a) Vì $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ nên phương trình $\tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{11} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{11} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

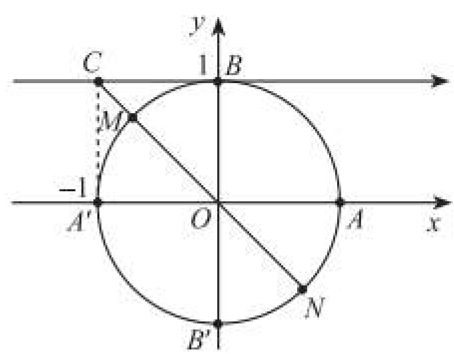
Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{22} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = 0$;   b) $\tan(30^{\circ} - 3x) = \tan 75^{\circ}$.

5. Phương trình $\cot x = m$

5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho C là điểm trên trục côtang có toạ độ là $(-1; 1)$ (Hình 7). Những điểm nào biểu diễn góc lượng giác x có $\cot x = -1$? Xác định số đo của các góc lượng giác đó.

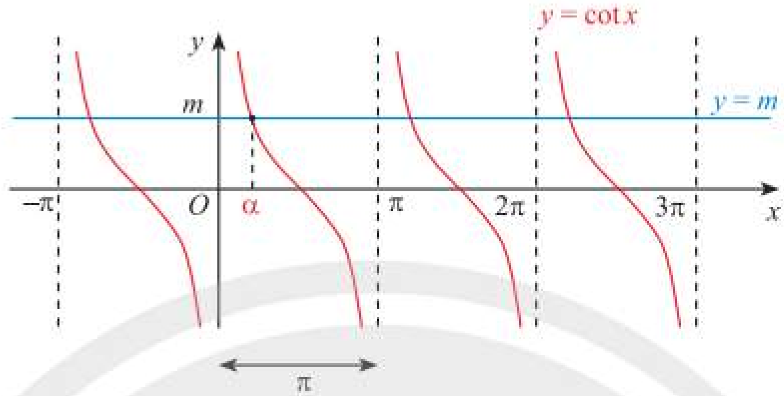


Hình 7

Với mọi số thực m, phương trình $\cot x = m$ có nghiệm

$$x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.



Hình 8

Chú ý: $\cot x = \cot a^{o} \Leftrightarrow x = a^{o} + k180^{o},\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;　　　　b) $\cot 3x = \cot \dfrac{\pi}{7}$.

Giải

a) Vì $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cot \dfrac{2\pi}{3}$ nên phương trình $\cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cot \dfrac{2\pi}{3}$ có các nghiệm là

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cot 3x = \cot \dfrac{\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{21} + k\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

5 Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = 1$;　　　　b) $\cot(3x + 30^{o}) = \cot 75^{o}$.

6. Giải phương trình lượng giác bằng máy tính cầm tay

Ta có thể giải phương trình lượng giác dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$ và $\cot x = m$ bằng máy tính cầm tay như trong ví dụ sau:

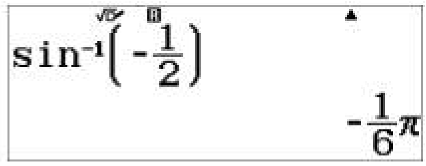
Ví dụ 6. Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau:

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$. Kết quả ghi theo đơn vị radian.

b) $\cot x = 3$. Kết quả ghi theo đơn vị độ.

Giải

a) Chọn đơn vị đo góc là radian.



Ấn liên tiếp các phím

SHIFT sin (−) 1 ▭ 2 ▶) =

ta được một góc có sin bằng $-\frac{1}{2}$ là $-\frac{\pi}{6}$.

Do đó, ta có các nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{1}{2}$ là

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Chọn đơn vị đo góc là độ.

Ấn liên tiếp các phím

SHIFT tan 1 ▭ 3 ▶) =

ta được một góc có côtang bằng 3 là $18{,}43^o$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Do đó, ta có các nghiệm của phương trình $\cot x = 3$ là $x \approx 18{,}43^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý: Để giải phương trình $\cot x = m$ $(m \neq 0)$, ta giải phương trình $\tan x = \frac{1}{m}$.

6 Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau:

a) $\cos x = 0{,}4$; b) $\tan x = \sqrt{3}$.

Kết quả ghi theo đơn vị radian và làm tròn đến hàng phần trăm.

Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x = 17\cos 5\pi t$ (cm) với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng 10 cm. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}$; c) $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 4x = \cos\frac{5\pi}{12}$; c) $\cos^2 x = 1$.

3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\tan x = \tan 55^{\circ}$; b) $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

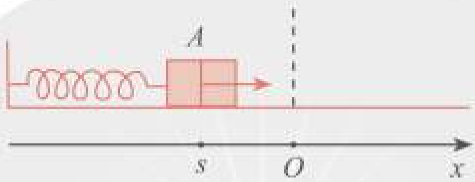
4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$; b) $\cot 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=\cos x$ và $y=\sin x$ giao nhau?

6. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s=-5\sqrt{3}$ cm?

(Theo *https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion*)



Hình 9

7. Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\dfrac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo *https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology*)

Hình 10

a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t.

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N=-1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

A. $\frac{16\pi}{5}$. B. $\left(\frac{16}{5}\right)^{o}$.

C. $1\,152^{o}$. D. $1\,152\pi$.

2. Trong trường hợp nào dưới đây $\cos\alpha = \cos\beta$ và $\sin\alpha = -\sin\beta$?

A. $\beta = -\alpha$. B. $\beta = \pi - \alpha$.

C. $\beta = \pi + \alpha$. D. $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

3. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

4. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $-\frac{\pi}{9}$. B. $-\frac{5\pi}{3}$.

C. $-\frac{7\pi}{9}$. D. $-\frac{13\pi}{9}$.

5. Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right)$ là

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

6. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\frac{\pi}{12}(t - 9)$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?
(Theo *https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168192385900139*)

A. 32 °C, lúc 15 giờ.

B. 29 °C, lúc 9 giờ.

C. 26 °C, lúc 3 giờ.

D. 26 °C, lúc 0 giờ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

7. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

8. Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính:

a) $\sin\alpha$; b) $\sin 2\alpha$;

c) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

9. Chứng minh đẳng thức lượng giác:

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

b) $\cos^4\alpha - \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha$.

10. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x=0$ là bao nhiêu?

11. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x+\cos 3x=0$;

b) $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

c) $\sin x+\sin 2x=0$.

12. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0{,}8\cos 0{,}5t + 4$.

(Theo *https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidal-modelling.pdf*)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

13. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v=-3\sin\left(1{,}5t+\frac{\pi}{3}\right).$$

(Theo *https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion*)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

14. Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

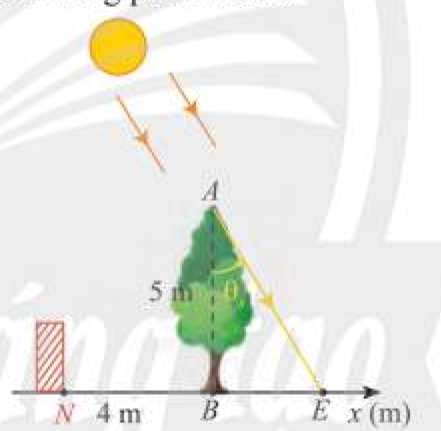
$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12) \text{ rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo *https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle)*

a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

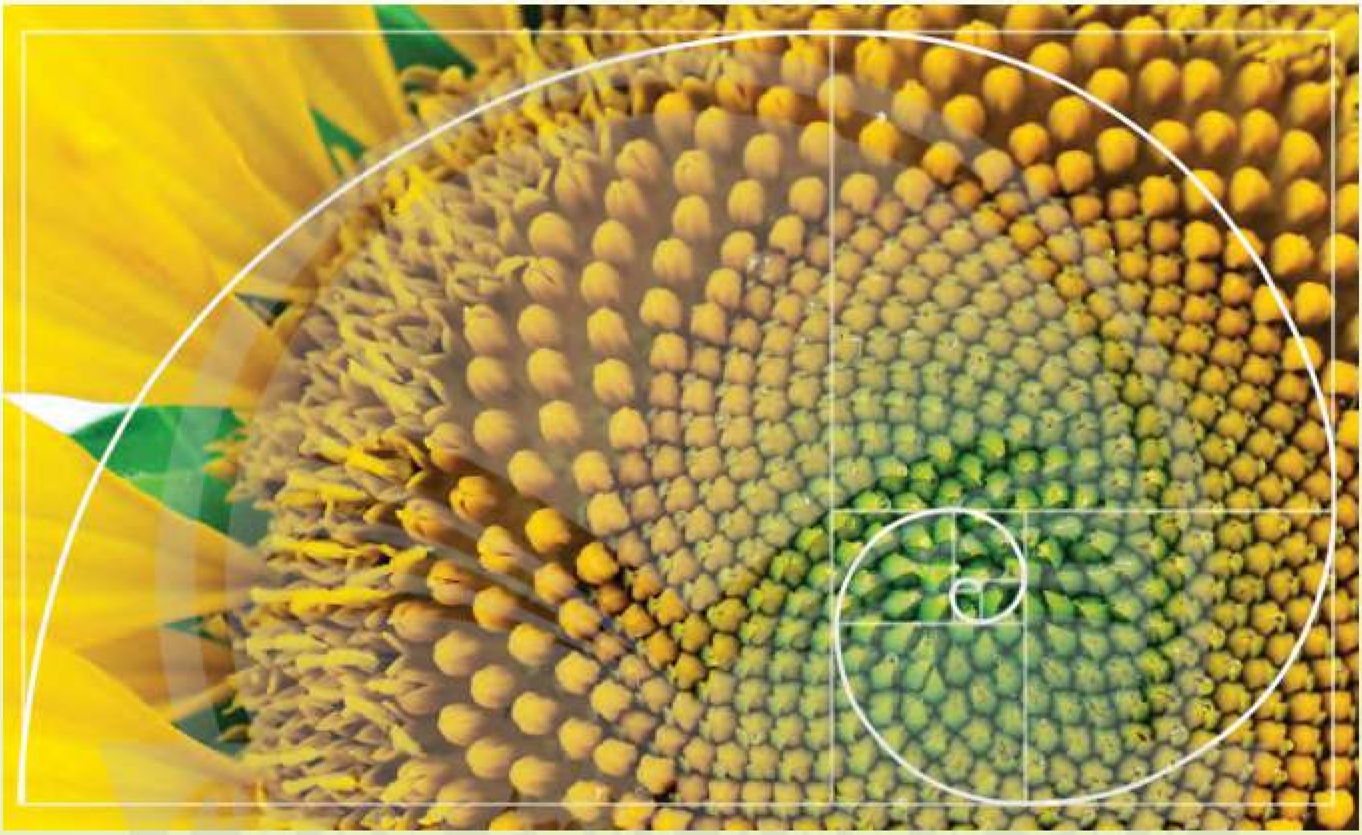


Hình 1

Chương II

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Trong chương này, các bạn sẽ tìm hiểu về khái niệm dãy số và các tính chất cơ bản của một dãy số. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về hai loại dãy số đặc biệt quan trọng là cấp số cộng và cấp số nhân cũng như những ứng dụng của dãy số trong giải toán và trong các hoạt động thực tiễn.



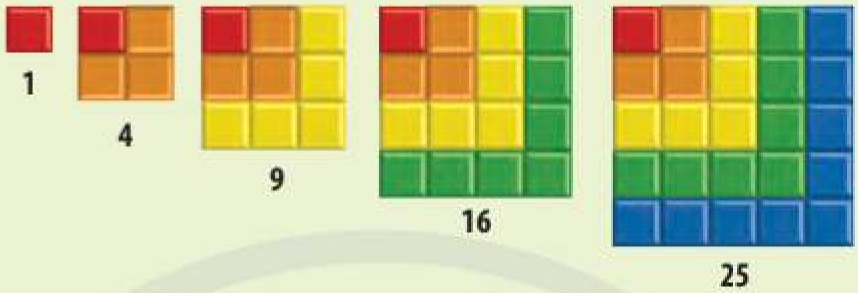
Trong hình trên, độ dài cạnh của các hình vuông theo thứ tự từ nhỏ đến lớn lần lượt là: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...
Dãy số này chứa đựng những điều kì diệu gì của khoa học và nghệ thuật?

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được khái niệm, các tính chất cơ bản và cách xác định một dãy số.
– Nhận biết được cấp số cộng và cấp số nhân. Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng và cấp số nhân.
– Tính được tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng và cấp số nhân.
– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với dãy số.

Bài 1. Dãy số

Từ khoá: **Dãy số (hữu hạn, vô hạn); Số hạng đầu; Số hạng thứ *n* (số hạng tổng quát); Dãy số tăng; Dãy số giảm; Dãy số bị chặn; Công thức tính số hạng thứ *n* của dãy số.**



Gọi $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n$ lần lượt là diện tích các hình vuông có độ dài cạnh là 1; 2; 3; …; *n*. Tính u_3 và u_4.

1. Dãy số là gì?

1 Cho hàm số:

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = n^2. \end{aligned}$$

Tính $u(1)$; $u(2)$; $u(50)$; $u(100)$.

Trong thực tiễn, chúng ta thường có nhu cầu đánh số thứ tự một loạt các giá trị số cần phải xử lí, từ đó đưa đến khái niệm dãy số:

Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n = u(n). \end{aligned}$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n).

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$

Chú ý:

a) $u_1 = u(1)$ gọi là ***số hạng đầu***, $u_n = u(n)$ gọi là ***số hạng thứ n*** (hay ***số hạng tổng quát***) của dãy số.

b) Nếu $u_n = C$ với mọi n, ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

Ví dụ 1. Hàm số trong **1** có là dãy số hay không? Nếu có, hãy tìm số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và số hạng tổng quát của dãy số.

Giải

Hàm số trong 1 xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ nên nó là một dãy số.

Ta có: $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$ và $u_n = n^2$.

2 Cho hàm số:

$$v: \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto v(n) = 2n.$$

Tính $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$, $v(4)$, $v(5)$.

Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \ldots; m\}$ thì được gọi là một ***dãy số hữu hạn***. Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là ***số hạng đầu*** và u_m là ***số hạng cuối***.

Ví dụ 2. Dãy gồm 10 số tự nhiên lẻ đầu tiên 1; 3; 5; ...; 19 có phải là dãy số hữu hạn không? Nếu có, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số.

Giải

Đây là một dãy số hữu hạn. Ta có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng cuối $u_{10} = 19$.

1 Cho dãy số:

$$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = n^3.$$

a) Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.

b) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

1 Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính 1; 2; 3; 4; 5.

a) Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

2. Cách xác định dãy số

3 Cho các dãy số (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) được xác định như sau.

- $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$.
- $b_n = 2n$.
- $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 1 \ (n \geq 2). \end{cases}$
- d_n là chu vi của đường tròn có bán kính n.

Tìm bốn số hạng đầu tiên của các dãy số trên.

Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).

Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n.

Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).

Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

Trong 3, (a_n) là dãy số chỉ có 5 số hạng được cho bằng cách liệt kê, (b_n) được cho bởi công thức của số hạng tổng quát, (c_n) được cho bởi hệ thức truy hồi và (d_n) được cho bằng cách mô tả.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$.

a) Tìm ba số hạng đầu tiên.

b) Tính u_{50} và u_{99}.

Giải

a) Ba số hạng đầu tiên là: $u_1 = 0$; $u_2 = \dfrac{1}{7}$; $u_3 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

b) Ta có: $u_{50} = \dfrac{50-1}{3\,.\,50+1} = \dfrac{49}{151}$; $u_{99} = \dfrac{99-1}{3\,.\,99+1} = \dfrac{98}{298} = \dfrac{49}{149}$.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ \ (n \geq 3). \end{cases}$

Tính u_5.

Giải

Ta có: $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$; $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$; $u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$.

Vậy $u_5 = 5$.

2 Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \ \ (n \geq 1). \end{cases}$

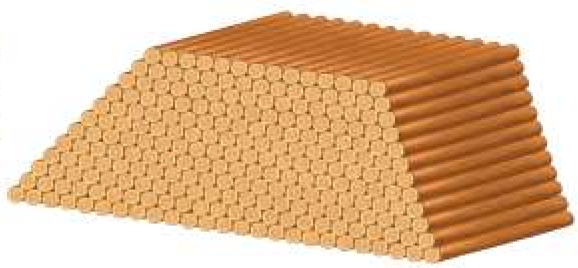
a) Chứng minh $u_2 = 2\,.\,3$; $u_3 = 2^2\,.\,3$; $u_4 = 2^3\,.\,3$.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

2 Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Viết hệ thức truy hồi.



Hình 1

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

4 Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau: $a_n = 3n + 1$; $b_n = -5n$.

a) So sánh a_n và a_{n+1}, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) So sánh b_n và b_{n+1}, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cho dãy số (u_n).

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \dfrac{1}{n}$; b) (b_n) với $b_n = n^2$; c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$.

Giải

a) Ta có: $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) là dãy số giảm.

b) Ta có: $b_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số tăng.

c) Ta có: $c_1 = -2$; $c_2 = 4$; $c_3 = -8$, suy ra $c_1 < c_2$, $c_2 > c_3$. Vậy (c_n) không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

Ví dụ 6. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; b) (b_n) với $b_n = n - n^2$.

Giải

a) Ta nhận thấy các số hạng của dãy (a_n) đều là số dương. Ta lập tỉ số hai số hạng liên tiếp của dãy: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{n+1}{n+2}}{\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \dfrac{1}{n^2+2n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) là dãy số tăng.

b) Ta có $b_{n+1} - b_n = [n + 1 - (n+1)^2] - (n - n^2) = -n^2 - n - n + n^2 = -2n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $b_{n+1} < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số giảm.

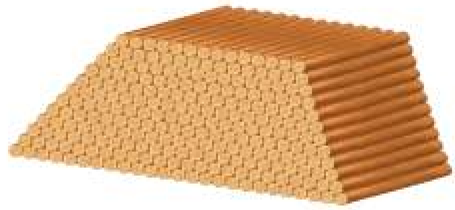
3 Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau:

a) (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; b) (x_n) với $x_n = \dfrac{n+2}{4^n}$; c) (t_n) với $t_n = (-1)^n . n^2$.

3 Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.



Hình 2

4. Dãy số bị chặn

5 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$. So sánh các số hạng của dãy số với 0 và 1.

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho

$$m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Giải

Ta có: $u_n = \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) bị chặn trên.

$u_n = \frac{1}{2^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.

Ta thấy dãy số (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới, suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

4 Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \cos\frac{\pi}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

BÀI TẬP

1. Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{3} + \cos \dfrac{n\pi}{4}$;

b) (u_n) với $u_n = \dfrac{6n-4}{n+2}$.

5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

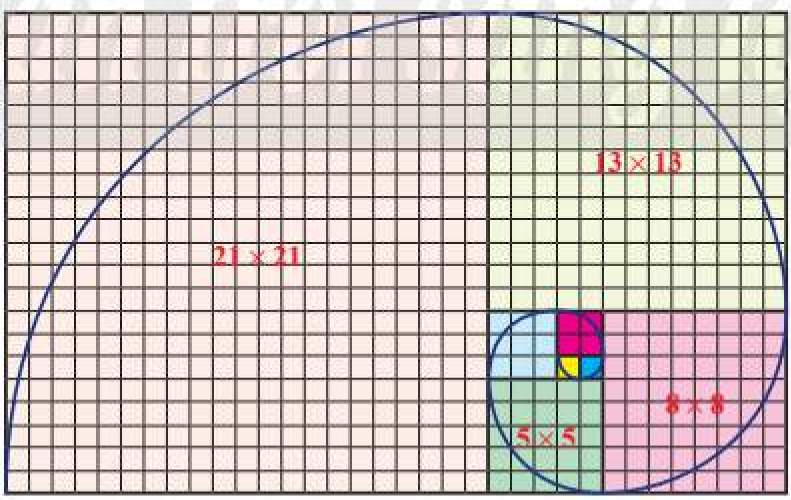
Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để:

a) (u_n) là dãy số tăng;

b) (u_n) là dãy số giảm.

7. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Bạn có biết?

DÃY SỐ FIBONACCI

Fibonacci (Phi-bô-na-xi) (còn có tên là Leonardo Fibonacci) là một nhà toán học nổi tiếng người Ý. Trong cuốn sách Liber Abaci, năm 1202, ông có viết bài toán sau:

"*Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái); mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng 1) có một đôi thỏ sơ sinh*?"

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/science/Fibonacci-number)

Hình 4. Leonardo Fibonacci

Rõ ràng ở tháng 1, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng 3 sẽ có 1 + 1 = 2 đôi thỏ. Sang tháng 4, vì chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này có 1 + 2 = 3 đôi thỏ. Sang tháng 5, hai đôi thỏ gồm đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3 cũng sinh con nên tháng này có 3 + 2 = 5 đôi thỏ; ...

Hình 5

Khái quát, nếu kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n, thì với $n \geq 3$, ta có:

$F_n = F_{n-1}$ + số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n.

Do các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $(n - 1)$ chưa thể sinh con ở tháng thứ n và mỗi đôi thỏ có ở tháng thứ $(n - 2)$ sẽ sinh ra một đôi thỏ con, nên số đôi thỏ con được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2} (số đôi thỏ có ở tháng thứ $(n - 2)$).

Như vậy: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Việc giải quyết bài toán trên của Fibonacci dẫn đến việc khảo sát dãy số:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

Dãy số trên sau này được nhà toán học Pháp Edouard Lucas gọi là dãy số Fibonacci.

Áp dụng quy luật dãy số trên, ta tính được số đôi thỏ sau một năm là $F_{12} = 144$.

Bài 2. Cấp số cộng

Từ khoá: **Cấp số cộng; Số hạng đầu; Công sai; Tổng của *n* số hạng đầu tiên.**

Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh hoạ dưới đây.

Bạn hãy đếm và nêu nhận xét về số ghế của năm hàng đầu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

1. Cấp số cộng

1 Tìm điểm giống nhau của các dãy số sau:

a) 2; 5; 8; 11; 14 (xem Hình 1).

Hình 1

b) 2; 4; 6; 8.

c) 5; 10; 15; 20; 25.

d) –5; –2; 1; 4; 7; 10.

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

Ví dụ 1. Tìm cấp số cộng trong các dãy số sau:

a) 5; 10; 15; 20; 25; 30.

b) 1; 2; 4; 8.

c) 7; 7; 7; 7; 7.

Giải

a) Dãy số: 5; 10; 15; 20; 25; 30 là cấp số cộng với công sai $d = 5$.

b) Dãy số: 1; 2; 4; 8 có $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ nên không phải là cấp số cộng.

c) Dãy số: 7; 7; 7; 7; 7 là cấp số cộng với công sai $d = 0$.

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng: 3; 6; 9; 12; ... . Tìm số hạng đầu, công sai và u_5.

Giải

Cấp số cộng đã cho có số hạng đầu $u_1 = 3$; công sai $d = 3$.

Ta có $u_4 = 12$ nên $u_5 = u_4 + d = 12 + 3 = 15$.

Ví dụ 3. Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$.

b) Dãy số (v_n) với $v_n = -3n + 5$.

Giải

a) Ta có: $u_1 = 2 \,.\, 1 + 1 = 3$,

$$u_{n+1} = 2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$.

b) Ta có: $v_1 = -3 \,.\, 1 + 5 = 2$,

$$v_{n+1} = -3(n+1) + 5 = (-3n+5) - 3 = v_n + (-3), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 2$ và công sai $d = -3$.

Ví dụ 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tính b theo a và c.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có $d = b - a = c - b$. Do đó $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Nhận xét: Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \ (k \geq 2).$$

1 Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

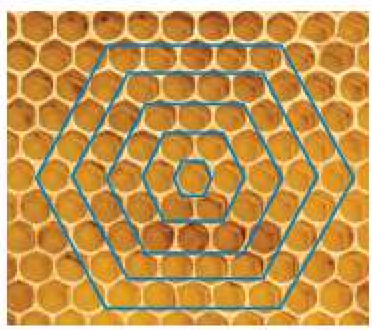
a) 3; 7; 11; 15; 19; 23.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.

c) Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

2 Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

1 Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n). Hãy cho biết các hiệu số sau đây gấp bao nhiêu lần công sai d của (u_n):
$u_2 - u_1$; $u_3 - u_1$; $u_4 - u_1$; …; $u_n - u_1$.

Định lí 1

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, n \geq 2.$$

Ví dụ 5. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 9$.

Giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \,.\, 9 = 9n - 6$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 9n - 6$.

Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau:

a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;

b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

3. Tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d.

a) Tính các tổng: $u_1 + u_n$; $u_2 + u_{n-1}$; $u_3 + u_{n-2}$; …; $u_k + u_{n-k+1}$ theo u_1, n và d.

Hình 3

b) Chứng tỏ rằng $2(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = n(u_1 + u_n)$.

Định lí 2

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$\text{hay } S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Ví dụ 6.

a) Tính tổng 100 số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50}.

Giải

a) Ta có thể sắp xếp 100 số nguyên dương đầu tiên thành cấp số cộng có $u_1 = 1$, $u_{100} = 100$.

Suy ra $S_{100} = \dfrac{100(1+100)}{2} = 50 \,.\, 101 = 5\,050$.

b) Ta có $u_4 + u_6 = (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 2u_1 + 8d = 20$. Suy ra $S_9 = \dfrac{9(2u_1 + 8d)}{2} = \dfrac{9 \,.\, 20}{2} = 90$.

c) Ta có: $S_3 = \dfrac{3(2v_1 + 2d)}{2} = -3$, suy ra $v_1 + d = -1$; (1)

$S_5 = \dfrac{5(2v_1 + 4d)}{2} = -15$, suy ra $v_1 + 2d = -3$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} v_1 + d = -1 \\ v_1 + 2d = -3. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $v_1 = 1$ và $d = -2$.

Do đó $S_{50} = \dfrac{50(2v_1 + 49d)}{2} = \dfrac{50 \,.\, [2 \,.\, 1 + 49 \,.\, (-2)]}{2} = -2\,400$.

4 a) Tính tổng 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20}.

3 Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, ... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).

a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

b) Tính tổng số ghế có trong rạp.

Hình 4

BÀI TẬP

1. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: 1; –3; –7; –11; –15.

2. Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12}.

b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

4. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3 - 4n$;

b) $u_n = \dfrac{n}{2} - 4$;

c) $u_n = 5^n$;

d) $u_n = \dfrac{9-5n}{3}$.

5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80; \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \,.\, u_3 = 24. \end{cases}$

6. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.

a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Hình 5

7. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

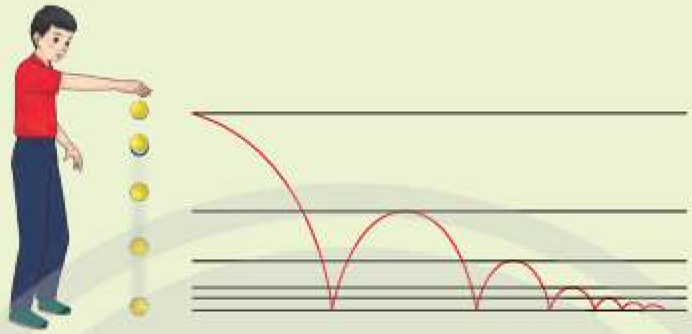
b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Hình 6

8. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Bài 3. Cấp số nhân

Từ khoá: **Cấp số nhân; Công bội; Tổng của *n* số hạng đầu tiên.**



Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao 120 cm. Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.

Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và u_2; u_3; ...; u_n; ... là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

1. Cấp số nhân

1 a) Tính thương của hai số hạng liên tiếp trong dãy số: 2; 4; 8; 16; 32; 64.

b) Tìm điểm giống nhau của các dãy số sau:

i) 3; 6; 12; 24; 48. ii) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$. iii) 2; –6; 18; –54; 162; –486.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Ví dụ 1:

Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

a) 3; 6; 12; 24; 48;...; b) 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;...; c) 9; 9; 9; 9; 9; ....

Giải

a) Dãy số: 3; 6; 12; 24; 48; … là cấp số nhân với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.

b) Dãy số: $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16};\ldots$ là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

c) Dãy số: 9; 9; 9; 9; 9,... là cấp số nhân với $u_1 = 9$ và công bội $q = 1$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 11; 121; 12 321; 1 234 321. b) 1; –1; 1; –1; 1. c) 4; 8; 12; 16.

Giải

a) Dãy số: 1; 11; 121; 12 321; 1 234 321 là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 11$.

b) Dãy số: 1; –1; 1; –1; 1 là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -1$.

c) Dãy số: 4; 8; 12; 16 có $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên không là cấp số nhân.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân: 1; 10; 100; 1 000; 10 000. Biểu diễn số hạng 10 và 100 theo hai số hạng kề nó.

Giải

Ta có: $10^2 = 1 \,.\, 100$; $100^2 = 10 \,.\, 1\,000$.

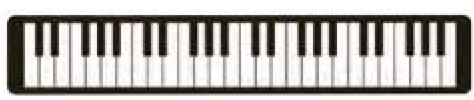
Chú ý: Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì

$$u_n^2 = u_{n-1} \,.\, u_{n+1} \text{ với } n \geq 2.$$

1 Cho ba số tự nhiên m, n, p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số 2^m, 2^n, 2^p theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

1 Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

2 Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (*theo:* https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc)). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 1

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Tính u_2, u_3, u_4 và u_{10} theo u_1 và q.

Định lí 1

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4 374, số hạng cuối là 2. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Giải

Ta có $u_1 = 4\,374$ và $u_8 = 2$. Gọi q là công bội của cấp số nhân này, ta có:

$$u_8 = u_1 \cdot q^7, \text{ suy ra } q^7 = \frac{u_8}{u_1} = \frac{2}{4374} = \frac{1}{2187} = \left(\frac{1}{3}\right)^7, \text{ do đó } q = \frac{1}{3}.$$

Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) 5; 10; 20; 40; 80; ...

b) 1; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10\,000}$; ...

Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (*theo:* https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7 314 ngày (khoảng 20 năm).

3. Tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

a) So sánh $q \cdot S_n$ và $(u_2 + u_3 + ... + u_n) + q \cdot u_n$;

b) So sánh $u_1 + q \cdot S_n$ và $S_n + u_1 \cdot q^n$.

Định lí 2

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Chú ý: Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ 5. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Giải

Áp dụng công thức $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$, ta có $S_{10} = \frac{1.(1-2^{10})}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023$.

3 Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5$; $q = 0,1$; $n = 5$; b) $u_1 = 10$; $u_2 = -20$; $n = 5$.

4 Trong bài toán ở ▶ đầu bài học, tính tổng các độ cao của quả bóng sau 10 lần rơi đầu tiên.

BÀI TẬP

1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$; b) $u_n = (-1)^{n+1} . 7^n$; c) $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

2. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$

3. a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

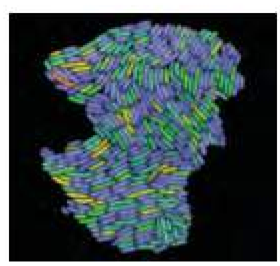
b) Viết sáu số xen giữa các số –2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

4. Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

5. Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$; b) $S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{n \text{ chữ số } 9}$.

6. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

7. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

8. Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.

a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.

b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Hình 3

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) lần lượt là

A. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{27}$. B. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{26}$.

C. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{25}$. D. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{28}$.

2. Cho dãy số: $\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3^2}; \dfrac{1}{3^3}; \dfrac{1}{3^4}; \dfrac{1}{3^5}; \ldots$.

Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3^{n+1}}$. B. $u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.

C. $u_n = \dfrac{1}{3^n}$. D. $u_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng và bị chặn.

B. Dãy số giảm và bị chặn.

C. Dãy số giảm và bị chặn dưới.

D. Dãy số giảm và bị chặn trên.

4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1, công sai d. Khi đó, với $n \geq 2$ ta có

A. $u_n = u_1 + d$. B. $u_n = u_1 + (n+1)d$.

C. $u_n = u_1 - (n-1)d$. D. $u_n = u_1 + (n-1)d$.

5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

A. $u_3 = 4$. B. $u_3 = 2$.

C. $u_3 = -5$. D. $u_3 = 7$.

6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

A. 11. B. 50.

C. 10. D. 25.

7. Có bao nhiêu số thực x để $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

8. Một tam giác có số đo các góc lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Số đo các góc của tam giác đó lần lượt là

A. $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$.

C. $\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n - 1}{2^n}$.

10. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

11. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1\,170. \end{cases}$

12. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

13. Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110 000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư là 2%/năm, tử vong là 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

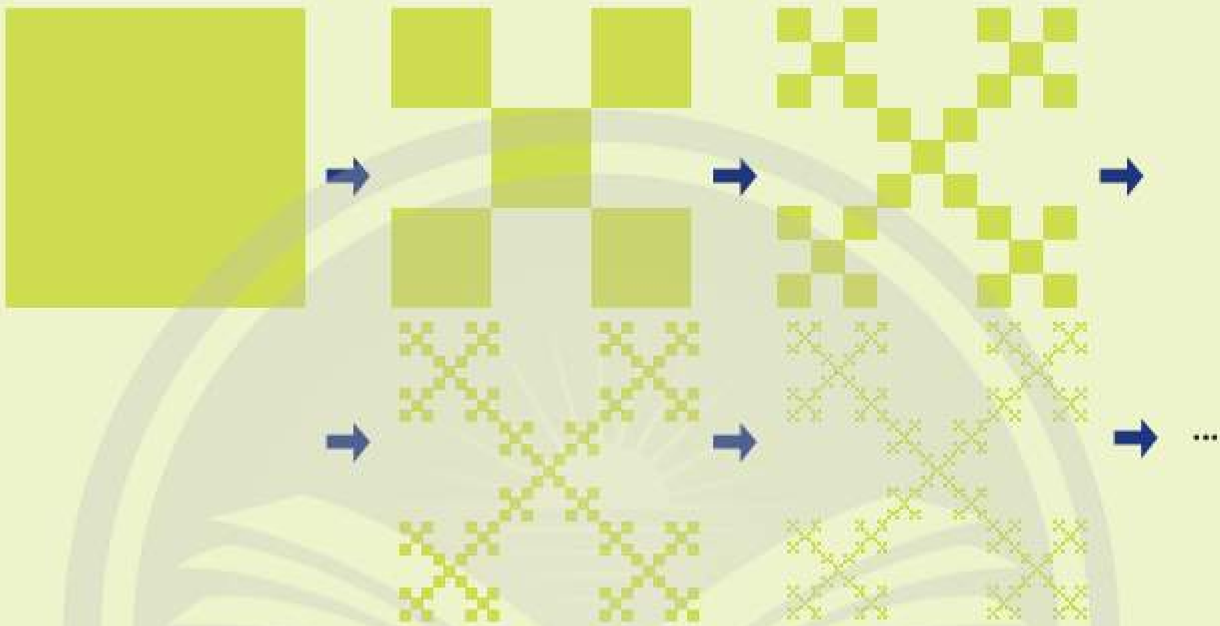
14. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím La Cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (*nguồn:* https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

15. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo *Niên giám thống kê năm 2020*). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Chương III GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về một phép toán mới: phép toán giới hạn. Nhờ phép toán này, người ta xây dựng nên những khái niệm cơ bản của Giải tích toán học như tính liên tục, đạo hàm và tích phân.

Nội dung của chương này gồm: giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số và tính liên tục của hàm số.



Quá trình tạo ra một hình fractal

Học xong chương này, bạn có thể:

– Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số, vận dụng các giới hạn cơ bản và các phép toán giới hạn để tìm giới hạn một số dãy số đơn giản.

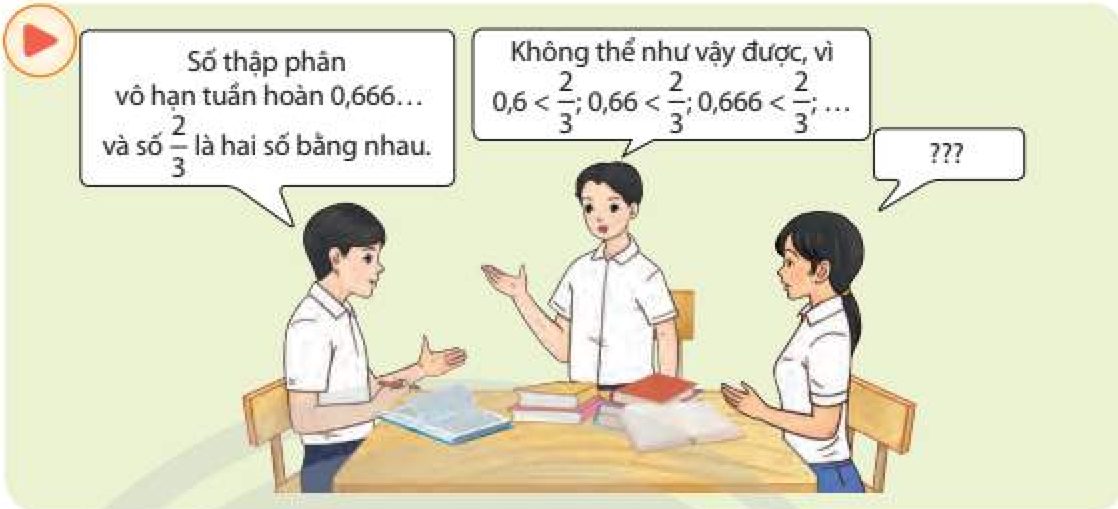
– Tính được tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng vào giải quyết những vấn đề trong toán học và cuộc sống.

– Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn, giới hạn một phía của hàm số tại một điểm, tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm thông qua xét một số giới hạn cơ bản; tính giới hạn của hàm số bằng cách dùng những giới hạn cơ bản và các phép toán trên giới hạn hàm số; giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn hàm số.

– Nhận dạng được hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, hoặc trên một đoạn; nhận biết tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục, tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.

Bài 1. Giới hạn của dãy số

Từ khoá: Giới hạn hữu hạn của dãy số; Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.



1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Giới hạn 0 của dãy số

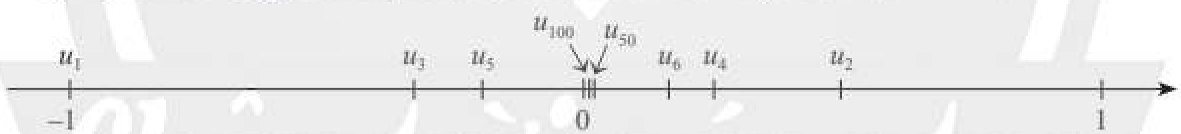
Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

n	10	20	50	100	1 000
$\lvert u_n \rvert$	0,1	0,05	0,02	?	?

b) Với n như thế nào thì $|u_n|$ bé hơn 0,01; 0,001?

c) Một số số hạng của dãy số được biểu diễn trên trục số như Hình 1.



Hình 1

Từ các kết quả trên, có nhận xét gì về khoảng cách từ điểm u_n đến điểm 0 khi n trở nên rất lớn?

Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn*** 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta còn viết là $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1. Với dãy số $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ở 1, sử dụng định nghĩa, chứng tỏ rằng $\lim u_n = 0$.

Giải

Với số thực dương d bé tuỳ ý cho trước, lấy số tự nhiên N sao cho $N > \frac{1}{d}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên n sao cho $n \geq N$, ta có $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < d$.

Theo định nghĩa, $\lim u_n = 0$.

Ta thừa nhận một số giới hạn cơ bản dưới đây. Chúng thường được sử dụng để tìm giới hạn của nhiều dãy số khác.

- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.

Ví dụ 2. Áp dụng giới hạn cơ bản, tìm $\lim \dfrac{1}{(\sqrt{3})^n}$.

Giải

Ta có $\dfrac{1}{(\sqrt{3})^n} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Do $\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên $\lim \dfrac{1}{(\sqrt{3})^n} = \lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$.

1 Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1}{n^2}$;

b) $\lim \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Giới hạn hữu hạn của dãy số

2 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$

a) Cho dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 2$. Tìm giới hạn $\lim v_n$.

b) Biểu diễn các điểm u_1, u_2, u_3, u_4 trên trục số. Có nhận xét gì về vị trí của các điểm u_n khi n trở nên rất lớn?

Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn hữu hạn*** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Chú ý: Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

Ví dụ 3. Dùng định nghĩa, tìm giới hạn $\lim \dfrac{3n^2+1}{n^2}$.

Giải

Đặt $u_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2}$. Ta có $u_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$ hay $u_n - 3 = \dfrac{1}{n^2}$.

Suy ra $\lim (u_n - 3) = \lim \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Theo định nghĩa, ta có $\lim u_n = 3$. Vậy $\lim \dfrac{3n^2+1}{n^2} = 3$.

2 Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \left(2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$;

b) $\lim \left(\dfrac{1-4n}{n}\right)$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Ở trên ta đã biết $\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=\lim\frac{3n^2+1}{n^2}=1.$

a) Tìm các giới hạn lim 3 và $\lim\frac{1}{n^2}$.

b) Từ đó, nêu nhận xét về $\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)$ và $\lim 3+\lim\frac{1}{n^2}$.

Để tìm giới hạn hữu hạn của dãy số, người ta thường vận dụng các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số.

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(c\,.\,u_n) = c\,.\,a$
- $\lim(u_n\,.\,v_n) = a\,.\,b$
- $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$
- Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{3n+2}{2n-1}$;

b) $\lim\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.

Giải

a) Ta có $\frac{3n+2}{2n-1}=\frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$ (chia cả tử và mẫu cho n).

Từ đó $\lim\frac{3n+2}{2n-1}=\lim\frac{3+2\,.\,\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\left(3+2\,.\,\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim 3+2\lim\frac{1}{n}}{\lim 2-\lim\frac{1}{n}}=\frac{3+2\,.\,0}{2-0}=\frac{3}{2}.$

b) Ta có $\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}=\frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2}}=\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2}}=\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}$.

Từ đó $\lim\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}=\lim\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\lim\left(9+\frac{1}{n^2}\right)}=\sqrt{\lim 9+\lim\frac{1}{n^2}}=\sqrt{9+0}=3.$

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{2n^2+3n}{n^2+1}$;

b) $\lim\frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$.

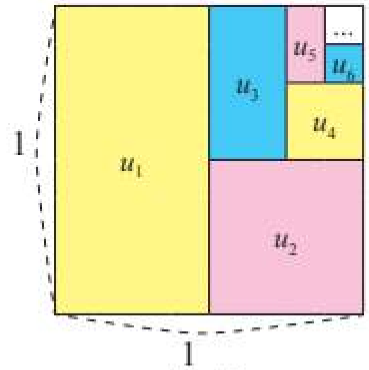
3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

4 Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).

a) Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ k ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

b) Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ n ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

c) Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.



Hình 2

Xét cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$.

Tổng S_n của n số hạng đầu của cấp số nhân này là:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$ và do đó

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}\lim q^n = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}\,.\,0 = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là ***tổng*** của cấp số nhân (u_n), kí hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là ***cấp số nhân lùi vô hạn***.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ví dụ 5. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \ldots$.

Giải

Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{4}$ nên

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

Ví dụ 6. Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,666… là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0{,}666\ldots = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots = 0{,}6 + 0{,}6.\frac{1}{10} + 0{,}6.\frac{1}{10^2} + \ldots.$$

Hãy viết 0,666… dưới dạng phân số.

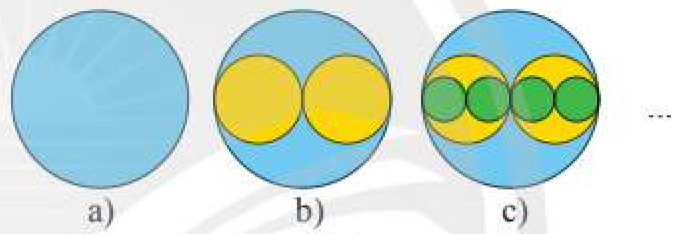
Giải

Số 0,666… là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng 0,6 và công bội bằng $\frac{1}{10}$.

Do đó $0{,}666\ldots = \dfrac{0{,}6}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

4 Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots$.

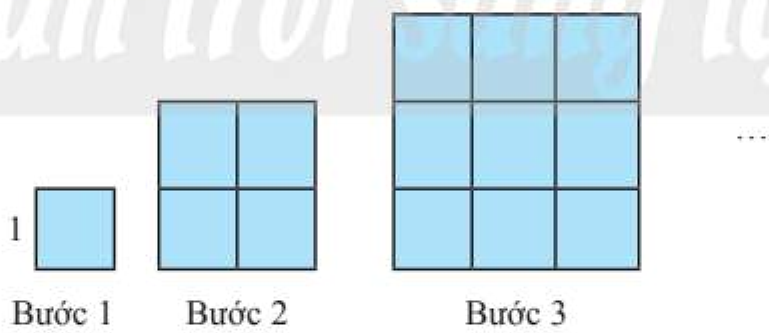
1 Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



Hình 3

4. Giới hạn vô cực

5 Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n.



Hình 4

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá 10 000; 1 000 000?

b) Cho hình có diện tích S. Với n như thế nào thì u_n vượt quá S?

- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn*** là $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn*** là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim(-u_n) = -\infty$;

b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$;

c) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Ví dụ 7. Tìm giới hạn $\lim q^n$ với $q > 1$.

Giải

Từ $q > 1$ suy ra $0 < \dfrac{1}{q} < 1$. Do đó, $\lim \dfrac{1}{q^n} = \lim \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = 0$.

Mà $q^n > 0$ với mọi n nên $\lim q^n = +\infty$.

Nhận xét:

a) $\lim n^k = +\infty$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$;

b) $\lim q^n = +\infty$ $(q > 1)$.

BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{-2n+1}{n}$; b) $\lim \dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$;

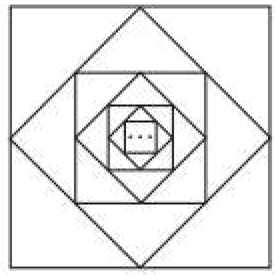
c) $\lim \dfrac{4}{2n+1}$; d) $\lim \dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}$.

2. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\ldots$; b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\ldots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\ldots$.

3. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,444… dưới dạng một phân số.

4. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



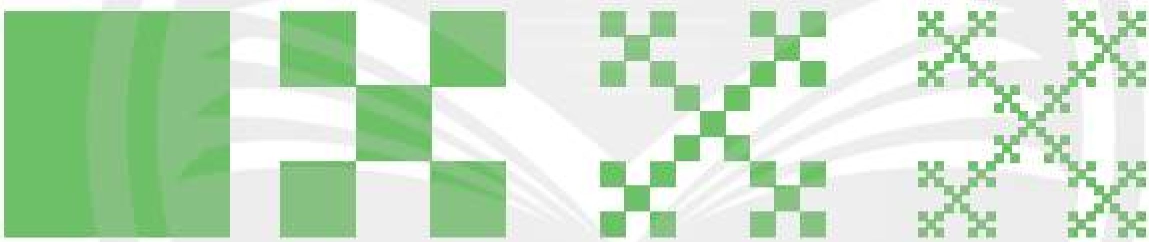
Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

5. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$).



H_0 a) H_1 b) H_2 c) H_3 d)

Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \,.\, 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$; ....

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

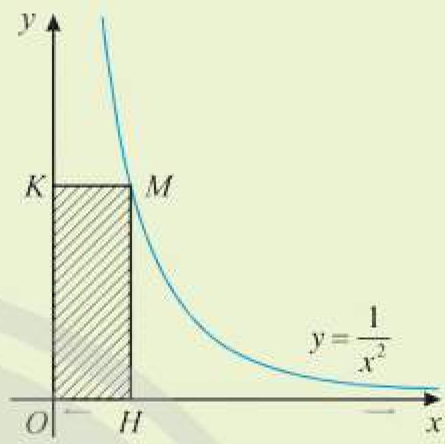
(*Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích* $\lim S_n$ *và chu vi* $\lim p_n$).

Bài 2. Giới hạn của hàm số

Từ khoá: **Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm; Giới hạn một phía của hàm số; Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực; Giới hạn vô cực của hàm số.**

Quan sát hình bên, cho biết hình chữ nhật *OHMK* thay đổi nhưng điểm *M* luôn nằm trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x^2}$ ($x > 0$).

Diện tích hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào khi điểm *H* tiến gần đến gốc toạ độ? Khi *H* tiến xa sang phía bên phải thì sao?



1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

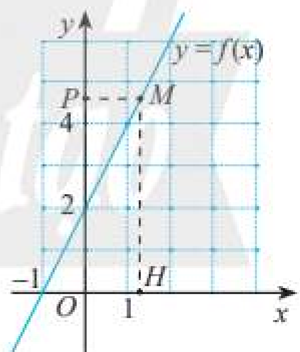
a) Bảng sau đây cho biết giá trị của hàm số tại một số điểm gần điểm 1.

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,5	2
$f(x)$	2	3	3,8	3,98	3,998	||	4,002	4,02	4,2	5	6

Có nhận xét gì về giá trị của hàm số khi x càng gần đến 1?

b) Ở Hình 1, M là điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$; H và P lần lượt là hình chiếu của M trên trục hoành và trục tung.

Khi điểm H thay đổi gần về điểm (1; 0) trên trục hoành thì điểm P thay đổi như thế nào?



Hình 1

Xét hàm số ở 1. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $\lim x_n = 1$. Ta có

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2 - 2}{x_n - 1} = \frac{2(x_n + 1)(x_n - 1)}{x_n - 1} = 2x_n + 2.$$

Do đó, $\lim f(x_n) = \lim (2x_n + 2) = 2 \lim x_n + 2 = 2 \,.\, 1 + 2 = 4$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là 4 khi x dần tới 1.

Dưới đây, ta viết là khoảng K thay cho các khoảng $(a; b)$, $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$ hay $(-\infty; +\infty)$.

Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

Giải

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq -2$ với mọi n và $x_n \to -2$ khi $n \to +\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n + 2} = \lim (x_n - 2) = \lim x_n - 2 = -2 - 2 = -4.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số).

1 Tìm các giới hạn sau: a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - x)$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

2 Cho hai hàm số $y = f(x) = 2x$ và $y = g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $x_n \neq -1$ với mọi n và $x_n \to 1$ khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn $\lim [f(x_n) + g(x_n)]$.

b) Từ đó, tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$, và so sánh với $\lim\limits_{x \to 1} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Từ các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số, ta nhận được các kết quả sau đây:

a) Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \,.\, g(x)] = L \,.\, M$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (với $M \neq 0$)

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$.)

Nhận xét:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau: a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 2)$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-2}{2x+1}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 2) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 - \lim\limits_{x \to 1} (4x) + \lim\limits_{x \to 1} 2 = 1^2 - 4 \lim\limits_{x \to 1} x + 2 = 1 - 4 \,.\, 1 + 2 = -1.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-2}{2x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} (3x-2)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x+1)} = \dfrac{3 \lim\limits_{x \to 2} x - 2}{2 \lim\limits_{x \to 2} x + 1} = \dfrac{3 \,.\, 2 - 2}{2 \,.\, 2 + 1} = \dfrac{4}{5}.$

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau: a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2 + 2 = 4.$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$ (nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{x+1}+2$)

$$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 3} (\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 3} (x+1)} + 2} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 3} x + 1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}.$$

2 Tìm các giới hạn sau: a) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5x - 2)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

3. Giới hạn một phía

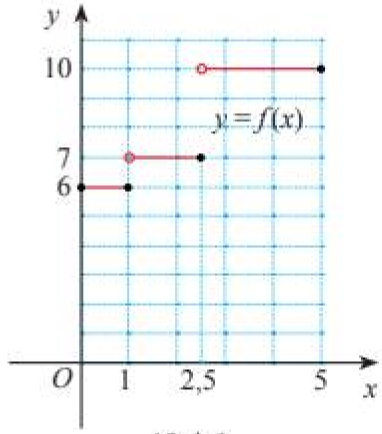
3 Giá cước vận chuyển bưu kiện giữa hai thành phố do một đơn vị cung cấp được cho bởi bảng sau:

Khối lượng bưu kiện (100 gam)	Giá cước cận vùng (nghìn đồng)
đến 1	6
trên 1 đến 2,5	7
từ 2,5 đến 5	10
...	...

Nếu chỉ xét trên khoảng từ 0 đến 5 (tính theo 100 gam) thì hàm số giá cước (tính theo nghìn đồng) xác định như sau:

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{khi } x\in(0;\,1]\\ 7 & \text{khi } x\in(1;\,2,5]\\ 10 & \text{khi } x\in(2,5;\,5].\end{cases}$$

Đồ thị của hàm số như Hình 2.



Hình 2

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì sao cho $x_n \in (1;\,2,5)$ và $\lim x_n = 1$. Tìm $\lim f(x_n)$.

b) Giả sử (x'_n) là dãy số bất kì sao cho $(x'_n) \in (0;\,1)$ và $\lim x'_n = 1$. Tìm $\lim f(x'_n)$.

c) Nhận xét về kết quả ở a) và b).

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;\, b)$.

  Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;\, x_0)$.

  Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn bên trái*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý:

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$;
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \to x_0$ bằng $x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } x<0\\ 1 & \text{khi } x>0.\end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Giải

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > 0$ và $x_n \to 0$. Khi đó $f(x_n) = 1$ nên $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < 0$ và $x_n \to 0$. Khi đó $f(x_n) = 0$ nên $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ (nếu có).

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

4 Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ có đồ thị như Hình 3.

a) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

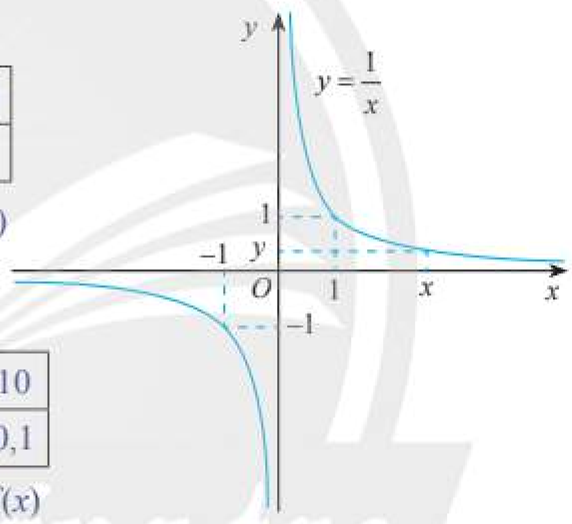
x	10	100	1 000	10 000	100 000
$y = f(x)$	0,1	0,01	?	?	?

Từ đồ thị và bảng trên, nêu nhận xét về giá trị $f(x)$ khi x càng lớn (dần tới $+\infty$)?

b) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

x	–100 000	–10 000	–1 000	–100	–10
$y = f(x)$	?	?	?	–0,01	–0,1

Từ đồ thị và bảng trên, nêu nhận xét về giá trị $f(x)$ khi x càng bé (dần tới $-\infty$)?



Hình 3

Xét hàm số $y = f(x)$ ở 4. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 0$ và $\lim x_n = +\infty$. Khi đó

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{x_n} = 0.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

  Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

  Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Giải

Hàm số xác định trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n>-2$ và $x_n\to+\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n)=\lim\frac{2x_n-1}{x_n+2}=\lim\frac{2-\dfrac{1}{x_n}}{1+\dfrac{2}{x_n}}=\frac{2-\lim\dfrac{1}{x_n}}{1+\lim\dfrac{2}{x_n}}=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$.

Chú ý:

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to\pm\infty} c=c \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bằng $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x}{2x^2+1}$.

Giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}}{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

4 Tìm các giới hạn sau: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+2x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}$.

1 Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3. Người ta ngọt hoá nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ 2 m^3/phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

5 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị như Hình 4.

a) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

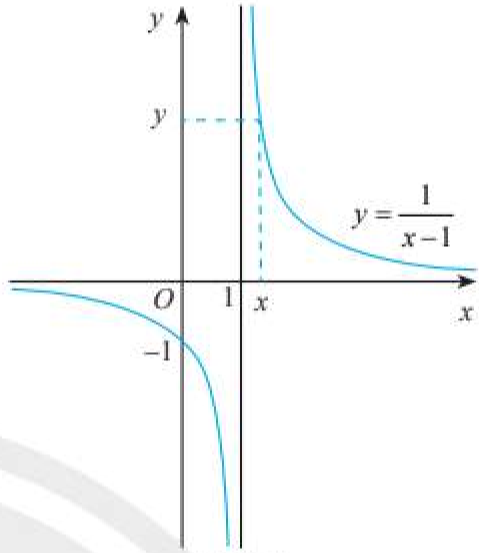
x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$y=f(x)$	10	100	?	?

Từ đồ thị và bảng trên, có nhận xét gì về giá trị $f(x)$ khi x dần tới 1 phía bên phải?

b) Tìm các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999
$y=f(x)$	–10	–100	?	?

Từ đồ thị và bảng trên, có nhận xét gì về giá trị $f(x)$ khi x dần tới 1 phía bên trái?



Hình 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $+\infty$ khi $x\to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, thì $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0^+$.
- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $-\infty$ khi $x\to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, thì $f(x_n)\to-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0^+$.

Chú ý:

a) Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ $(a\in\mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ nếu k là số chẵn;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ nếu k là số lẻ.

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = -\infty$) thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} [f(x) \,.\, g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} [f(x) \,.\, g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty, -\infty$).

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1-2x}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1)$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} (1-2x) = 1 - 2\lim\limits_{x \to 2^+} x = 1 - 2 \,.\, 2 = -3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1-2x}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \left[(1-2x) \,.\, \dfrac{1}{x-2}\right] = -\infty$.

b) Viết $x^2 + 1 = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$.

Do đó $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+1) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$.

5 Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-1)$.

2 Xét tình huống ở ▶ đầu bài học. Gọi x là hoành độ điểm H. Tính diện tích $S(x)$ của hình chữ nhật $OHMK$ theo x. Diện tích này thay đổi như thế nào khi $x \to 0^+$ và khi $x \to +\infty$.

BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-7x+4)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$.

2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{khi } x<1\\ x & \text{khi } x\ge 1.\end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (nếu có).

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x+3}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{3x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-x^2\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x}{3-x}$.

5. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

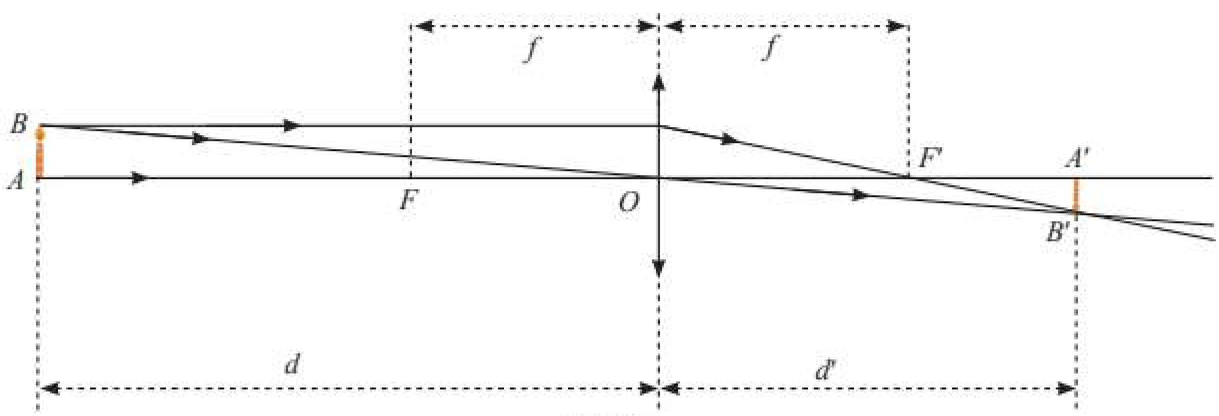
a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t\to +\infty$.

6. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f>0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5). Ta có công thức: $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$ hay $d'=\dfrac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d)=\dfrac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim\limits_{d\to f^+}g(d)$; b) $\lim\limits_{d\to +\infty}g(d)$.

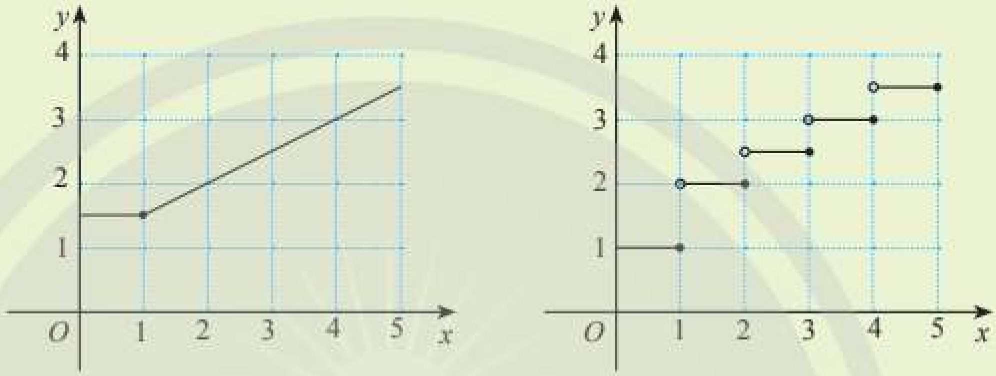


Hình 5

Bài 3. Hàm số liên tục

Từ khoá: **Hàm số liên tục tại một điểm; Hàm số liên tục trên một khoảng; Hàm số liên tục trên một đoạn; Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục; Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.**

Hai đồ thị ở hai hình dưới đây cho biết phí gửi xe *y* của ô tô con (tính theo 10 nghìn đồng) theo thời gian gửi *x* (tính theo giờ) của hai bãi xe. Có nhận xét gì về sự thay đổi của số tiền phí phải trả theo thời gian gửi ở mỗi bãi xe?



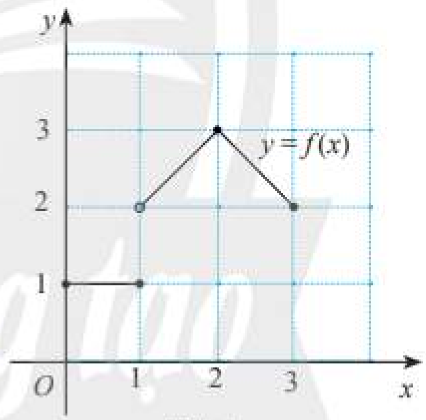
a) Bãi xe A **b) Bãi xe B**

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 1 + x & \text{khi } 1 < x \le 2 \\ 5 - x & \text{khi } 2 < x \le 3 \end{cases}$

có đồ thị như Hình 1.

Tại mỗi điểm $x_0 = 1$ và $x_0 = 2$, có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không? Nếu có, giới hạn đó có bằng $f(x_0)$ không?



Hình 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***liên tục tại điểm*** x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nhận xét: Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau:

1. Hàm số xác định tại x_0; 2. Tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chú ý:

Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ ***gián đoạn tại điểm*** x_0 và x_0 được gọi là ***điểm gián đoạn*** của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Giải

a) Ta có $f(2) = 3$ và $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2 \,.\, 2 + 3 = 3$, suy ra $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

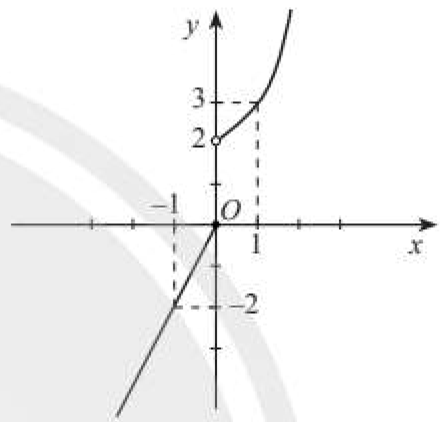
b) Ta có: $f(0) = 2 \,.\, 0 = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(2x) = 2\lim\limits_{x \to 0^-} x = 2 \,.\, 0 = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^2 + 2) = 0 + 2 = 2$.

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.



Hình 2

1 Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = 1 - x^2$ tại điểm $x_0 = 3$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 1 \\ -x & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

2 Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } 1 < x \le 2 \\ k & \text{khi } x = 1. \end{cases}$

a) Xét tính liên tục của hàm số tại mỗi điểm $x_0 \in (1; 2)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ và so sánh giá trị này với $f(2)$.

c) Với giá trị nào của k thì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = k$?

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

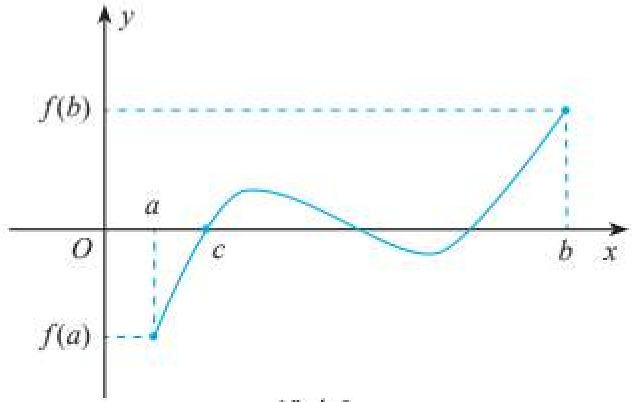
  Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***liên tục trên khoảng*** $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.

  Hàm số $f(x)$ được gọi là ***liên tục trên đoạn*** $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối (Hình 3). Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \,.\, f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Hình 3

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Giải

Với mọi $x_0 \in (-1; 1)$, ta có:

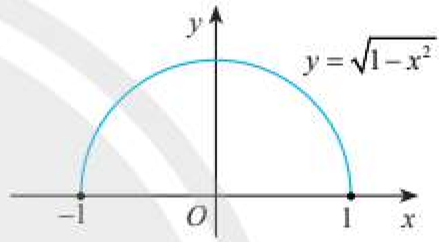
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \to x_0} x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0).$$

Do đó $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (-1; 1)$.

Ta lại có:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \to -1^+} x^2} = \sqrt{1-1} = 0 = f(-1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \lim_{x \to 1^-} x^2} = \sqrt{1-1} = 0 = f(1).$$



Hình 4

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ (Hình 4).

2 Xét tính liên tục của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ trên $[1; 2]$.

1 Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau:

$$P(x) = \begin{cases} 4{,}5x & \text{khi } 0 < x \le 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases} \quad (k \text{ là một hằng số}).$$

a) Với $k = 0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0; +\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$?

3. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

3 Cho hai hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ và $y = g(x) = \sqrt{4-x}$.

a) Tìm tập xác định của mỗi hàm số đã cho.

b) Mỗi hàm số trên liên tục trên những khoảng nào? Giải thích.

Nhờ các phép tính trên giới hạn hàm số, có thể kiểm tra các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ở 3 liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng. Mở rộng hơn, ta thừa nhận các kết quả sau:

- Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Nhận xét: Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là ***hàm số sơ cấp***.

Sau đây, khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của nó.

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$;   b) $y = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$.

Giải

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) $y = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$ là hàm số phân thức, có tập xác định $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$;

3 Xét tính liên tục của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

4 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2 Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 10000 & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 10000 + (x - 0,7) \,.\, 14000 & \text{khi } 0,7 < x \leq 20 \\ 280200 + (x - 20) \,.\, 12000 & \text{khi } x > 20. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Hình 5

4. Tổng, hiệu, tích thương của hàm số liên tục

4 Cho hai hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ và $y = g(x) = \sqrt{4 - x}$.

Hàm số $y = f(x) + g(x)$ có liên tục tại $x = 2$ không? Giải thích.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \,.\, g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{x+1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số: $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Các hàm số $y = \sin x$ và $y = x + 1$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = \dfrac{\sin x}{x+1}$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \neq -1$ (hay liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$).

5 Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2+1} + 3 - x$;

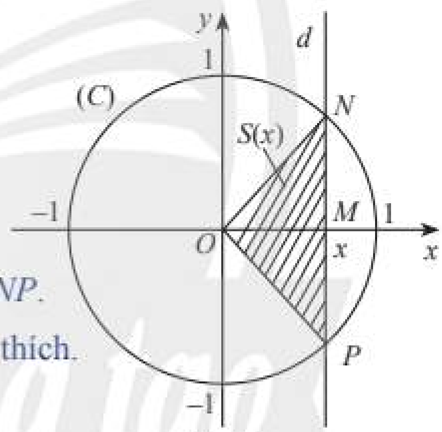
b) $y = \dfrac{x^2-1}{x} . \cos x$.

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x $(-1 < x < 1)$ và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).

a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP.

b) Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1; 1)$ không? Giải thích.

c) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x)$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} S(x)$.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$; c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

4. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Xét tính liên tục hàm số $y = f(x)\,.\,g(x)$ và $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60\,000 \text{ khi } 0 < x \leq 2; \\ 100\,000 \text{ khi } 2 < x \leq 4; \\ 200\,000 \text{ khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

6. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn.
Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. $\lim \dfrac{n+3}{n^2}$ bằng:

A. 1. B. 0.

C. 3. D. 2.

2. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$M = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n} + ... \text{ bằng:}$$

A. $\dfrac{3}{4}$. B. $\dfrac{5}{4}$.

C. $\dfrac{4}{3}$. D. $\dfrac{6}{5}$.

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ bằng:

A. 0. B. 6.

C. 3. D. 1.

4. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 2$ khi

A. $m = 3$. B. $m = 5$.

C. $m = -3$. D. $m = -5$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x}$ bằng:

A. 2. B. -1.

C. 0. D. 1.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

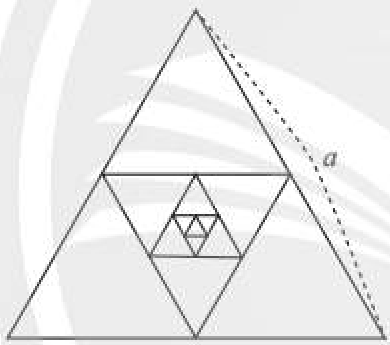
6. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{3n-1}{n}$; b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n}$;

c) $\lim \dfrac{2}{3n+1}$; d) $\lim \dfrac{(n+1)(2n+2)}{n^2}$.

7. Cho tam giác đều có cạnh bằng a, gọi là tam giác H_1. Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2. Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác H_1, H_2, H_3, ….

Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.



Hình 1

8. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - x + 2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$.

9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x+2}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-2}{x^2}$.

10. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{2-x}$.

11. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2\cos x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

12. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{khi } x \neq 5 \\ a & \text{khi } x = 5. \end{cases}$$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

13. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10 °C, mỗi phút tăng 2 °C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3 °C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo °C) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases}$$

(k là hằng số).

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k.

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IV ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về khái niệm đường thẳng, mặt phẳng trong không gian và quan hệ song song giữa các đường thẳng và mặt phẳng cũng như ứng dụng các tính chất của đường thẳng, mặt phẳng, quan hệ song song vào việc giải toán và giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

Các mặt ruộng bậc thang ngập nước cho ta hình ảnh của các mặt phẳng song song.

Học xong chương này, bạn có thể:

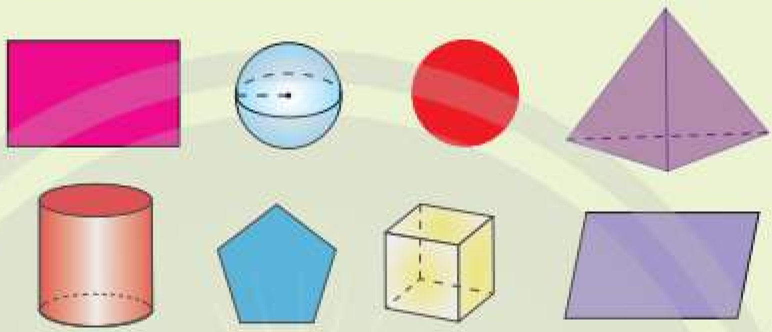
– Mô tả được cách xác định mặt phẳng. Xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng. Nhận biết được hình chóp, hình tứ diện.
– Nhận biết và vận dụng được các tính chất về quan hệ song song giữa các đường thẳng và mặt phẳng. Biết sử dụng định lí Thalès trong không gian. Giải thích được tính chất cơ bản của hình lăng trụ và hình hộp.
– Nhận biết được phép chiếu song song. Sử dụng được phép chiếu song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

Từ khoá: Mặt phẳng; Giao tuyến; Hình chóp; Tứ diện; Tứ diện đều.

Môn học Hình học phẳng tìm hiểu tính chất của các hình cùng thuộc một mặt phẳng. Môn học Hình học không gian tìm hiểu tính chất của các hình trong không gian, những hình này có thể chứa những điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Hãy phân loại các hình sau thành hai nhóm hình khác nhau.



1. Mặt phẳng trong không gian

1 Mặt bàn, mặt bảng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Hãy chỉ thêm các ví dụ khác về hình ảnh một phần của mặt phẳng.

Hình 1

Điểm, đường thẳng và mặt phẳng là ba đối tượng cơ bản của *hình học không gian*. Ta đã làm quen với điểm và đường thẳng trong hình học phẳng. Trong phần này, chúng ta sẽ làm quen với mặt phẳng.

Mặt bảng, mặt bàn, mặt sàn nhà, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc để biểu diễn mặt phẳng và dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để kí hiệu mặt phẳng.

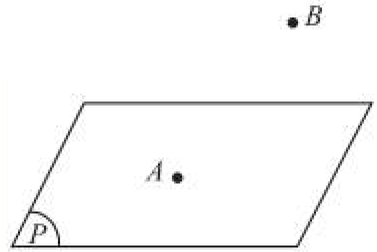
a) Mặt phẳng (P) b) Mặt phẳng (α)

Hình 2

Chú ý: Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là mp(P) hoặc (P).

Điểm thuộc mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P) như Hình 3.



Hình 3

– Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A, hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.

– Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.

Biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng

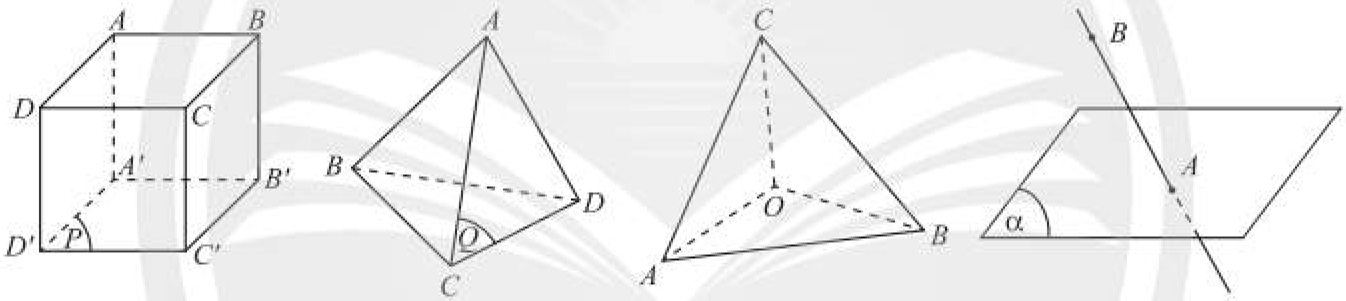
Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng, ...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

– Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.

– Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.

– Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.



a) b) c) d)

Hình 4

a) Vẽ hình biểu diễn của một hình hộp chữ nhật.

b) Quan sát Hình 4a và cho biết điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc mặt phẳng (P).

c) Quan sát Hình 4b và cho biết điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc mặt phẳng (Q).

2. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian

Quan sát Hình 5 và cho biết muốn gác một cây sào tập nhảy cao, người ta cần dựa nó vào mấy điểm trên hai cọc đỡ.


Hình 5

Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Hình 6

Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt A, B được kí hiệu là AB. Ta cũng nói đường thẳng AB xác định bởi hai điểm A, B.

Ví dụ 1. Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

Giải

Do qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng nên qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng M, N, P, ta xác định được ba đường thẳng là MN, NP và PM.

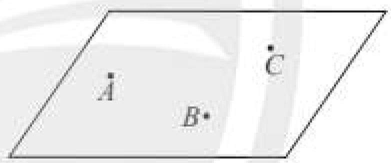
Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong bốn điểm đã cho?

Quan sát Hình 7 và cho biết giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại mấy điểm. Tại sao giá đỡ máy ảnh thường có ba chân?


Hình 7

Tính chất 2

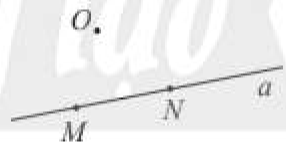
Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



Hình 8

Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 2. Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O?



Hình 9

Giải

Do O không thuộc a nên ba điểm M, N, O không thẳng hàng. Do đó chỉ có một mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O.

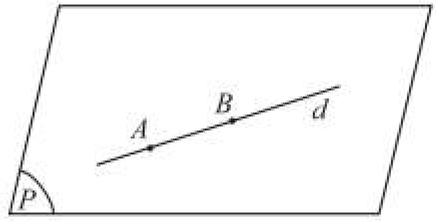
Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba đỉnh của tam giác MNP?

Quan sát Hình 10 và cho biết người thợ mộc kiểm tra mặt bàn có phẳng hay không bằng một cây thước thẳng như thế nào.


Hình 10

Tính chất 3

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



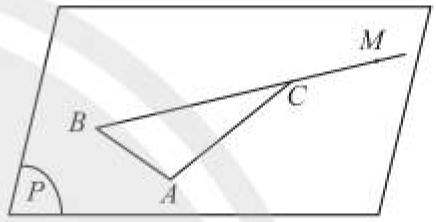
Hình 11

Chú ý: Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thường được kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C. Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

Giải

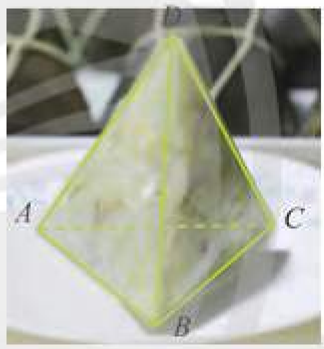
Áp dụng tính chất 2, ta có (P) là mặt phẳng duy nhất đi qua ba điểm A, B, C. Áp dụng tính chất 3, ta có mọi điểm của đường thẳng BC đều thuộc mặt phẳng (P). Ta lại có $M \in BC$ (giả thiết). Suy ra $M \in (P)$.



Hình 12

4 Cho mặt phẳng (Q) đi qua bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$. Các điểm nằm trên các đường chéo của tứ giác $ABCD$ có thuộc mặt phẳng (Q) không? Giải thích.

5 Quan sát Hình 13 và cho biết bốn đỉnh A, B, C, D của cái bánh giò có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không.



Hình 13

Tính chất 4

Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Chú ý: Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng *không đồng phẳng*.

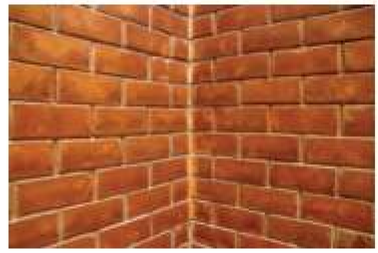
Ví dụ 4. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đã cho?

Giải

Gọi A, B, C, D là bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng trong không gian (tồn tại theo tính chất 4). Ta xác định được bốn mặt phẳng phân biệt là: (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

5 Cho tam giác MNP và cho điểm O không thuộc mặt phẳng chứa ba điểm M, N, P. Tìm các mặt phẳng phân biệt được xác định từ bốn điểm M, N, P, O.

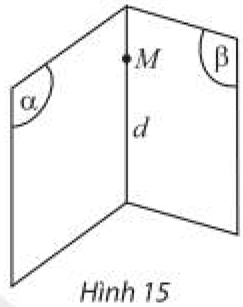
6 Quan sát Hình 14 và mô tả phần giao nhau của hai bức tường.



Hình 14

Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



Hình 15

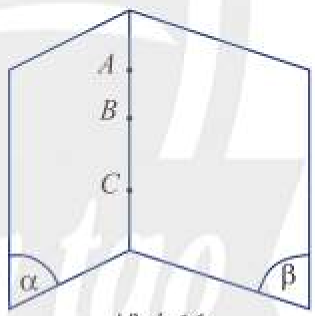
Chú ý: Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là ***giao tuyến*** của (P) và (Q), kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và một điểm O không thuộc mặt phẳng (ABC). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC).

Giải

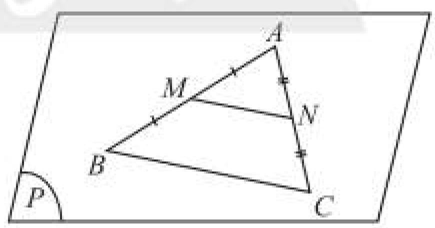
Ta có A, B là hai điểm chung của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC). Suy ra AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC).

6 Cho A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) (Hình 16). Chứng minh A, B, C thẳng hàng.



Hình 16

7 Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC (Hình 17). Tính tỉ số $\frac{MN}{BC}$.



Hình 17

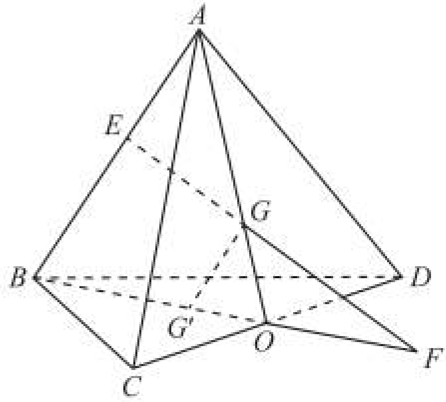
Tính chất 6

Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Ví dụ 6. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a) Gọi O là trung điểm của CD, G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD. Chứng minh $GG' \,//\, AB$.

b) Cho điểm E trên AB sao cho EG cắt mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D tại F. Chứng minh bốn điểm B, G', O, F thẳng hàng.



Hình 18

Giải

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm O, A, B được xác định theo tính chất 2.

Trong mặt phẳng (P) ta có:

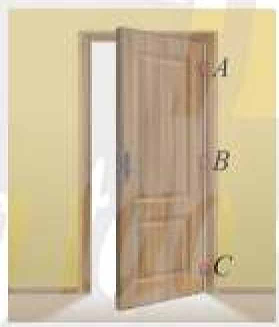
$\frac{OG}{OA} = \frac{1}{3}$ (vì G là trọng tâm của tam giác ACD);

$\frac{OG'}{OB} = \frac{1}{3}$ (vì G' là trọng tâm của tam giác BCD).

Suy ra $\frac{OG}{OA} = \frac{OG'}{OB}$. Áp dụng tính chất 6, suy ra $GG' \,//\, AB$.

b) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D. Các điểm B, G', O, F là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Theo tính chất 5, chúng phải cùng nằm trên giao tuyến của (P) và (Q). Vậy B, G', O, F thẳng hàng.

1 Tại sao muốn cánh cửa đóng mở được êm thì các điểm gắn bản lề A, B, C của cánh cửa và mặt tường (Hình 19) phải cùng nằm trên một đường thẳng?



Hình 19

3. Cách xác định mặt phẳng

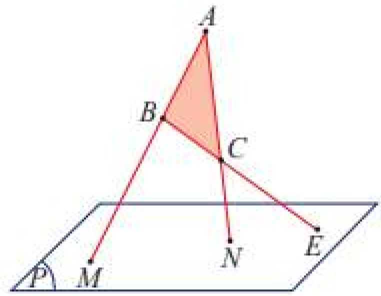
Theo tính chất 2 đã biết:

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Hình 20

Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là mp(ABC) hay (ABC) (Hình 20).

Ví dụ 7. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không nằm trong mặt phẳng (P). Biết ba đường thẳng AB, AC, BC lần lượt cắt (P) tại các điểm M, N, E (Hình 21). Ba điểm M, N, E có thẳng hàng không? Giải thích.

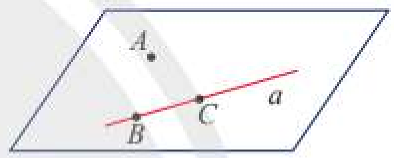


Hình 21

Giải

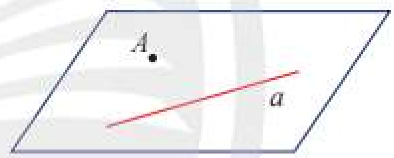
Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C.
Ta có $M \in AB$ và $AB \subset (Q)$, suy ra $M \in (Q)$.
Mặt khác, $M \in (P)$. Vậy $M \in (P) \cap (Q)$.
Tương tự, ta cũng có $N \in (P) \cap (Q)$ và $E \in (P) \cap (Q)$.
Suy ra ba điểm M, N, E thẳng hàng vì cùng nằm trên đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

8 Cho đường thẳng a và điểm A không nằm trên a. Trên a lấy hai điểm B, C. Đường thẳng a có nằm trong mặt phẳng (ABC) không? Giải thích.



Hình 22

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.



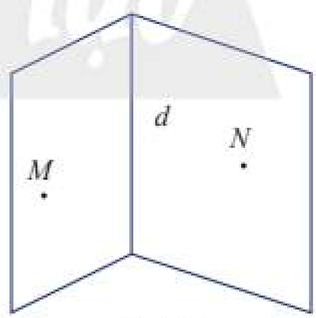
Hình 23

Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là mp(A, a) hay (A, a) (Hình 23).

Ví dụ 8. Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d, ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

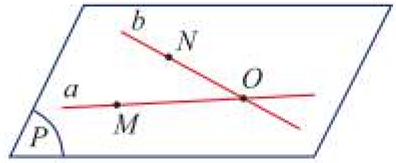
Giải

Với đường thẳng d và điểm M không thuộc d, ta xác định được mặt phẳng thứ nhất là (M, d). Nếu điểm N thuộc (M, d) thì ta chỉ xác định được một mặt phẳng. Nếu điểm N không thuộc (M, d) thì ta xác định được mặt phẳng thứ hai là (N, d) (Hình 24).



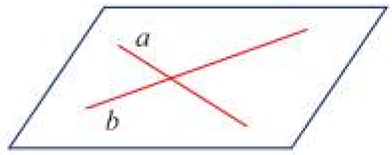
Hình 24

9 Hai đường thẳng phân biệt a và b cắt nhau tại điểm O. Trên a, b lấy lần lượt hai điểm M, N khác O. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O (Hình 25). Mặt phẳng (P) có chứa cả hai đường thẳng a và b không? Giải thích.



Hình 25

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.



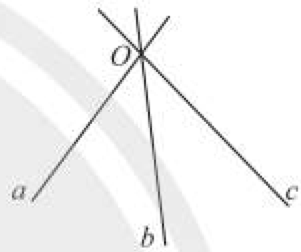
Hình 26

Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là mp(a, b) (Hình 26).

Ví dụ 9. Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O (Hình 27), ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Giải

Từ ba cặp đường thẳng cắt nhau a và b, b và c, c và a, ta xác định được ba mặt phẳng là mp(a, b), mp(b, c), mp(c, a).



Hình 27

7 Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O và điểm M không thuộc mp(a, b).

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b).

b) Lấy A, B lần lượt là hai điểm trên a, b và khác với điểm O. Tìm giao tuyến của (MAB) và mp(a, b).

c) Lấy điểm A' trên đoạn MA và điểm B' trên đoạn MB sao cho đường thẳng $A'B'$ cắt mp(a, b) tại C. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

2 Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

Hình 28

Hình 29

3 Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường trong Hình 29.

4. Hình chóp và hình tứ diện

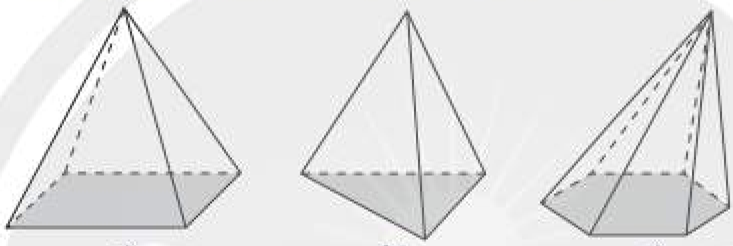
Hình chóp

10 a) Các công trình kiến trúc, đồ vật trong Hình 30 có mặt bên là hình gì?

a) b) c)

Hình 30

b) Tìm điểm giống nhau của các hình trong Hình 31.



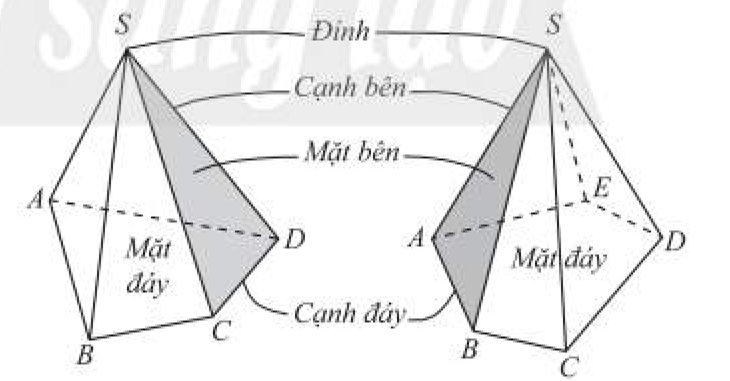
a) b) c)

Hình 31

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α). Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là ***hình chóp***, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, ta gọi:
- Điểm S là ***đỉnh***;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các ***mặt bên***;
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ là ***mặt đáy***;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các ***cạnh bên***;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các ***cạnh đáy***.

Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, … lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

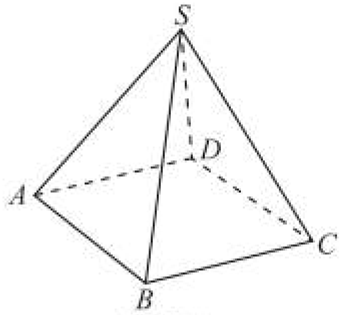


Hình chóp tứ giác *S.ABCD* Hình chóp ngũ giác *S.ABCDE*

Hình 32

Ví dụ 10. Cho hình chóp *S.ABCD* (Hình 33). Gọi tên các mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp *S.ABCD*.

Giải



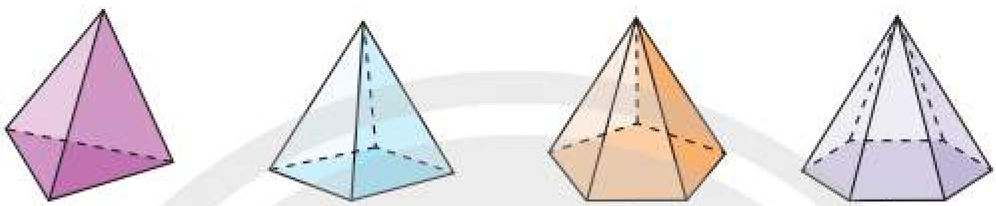
Hình 32

Hình chóp $S.ABCD$ có:

- Các mặt bên: SAB, SBC, SCD, SDA;
- Mặt đáy $ABCD$;
- Các cạnh bên: SA, SB, SC, SD;
- Các cạnh đáy: AB, BC, CD, DA.

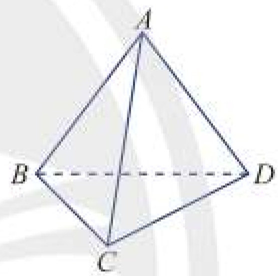
Hình tứ diện

11 Trong Hình 34, hình chóp nào có số mặt ít nhất?



Hình 34

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là ***hình tứ diện*** (hay ***tứ diện***), kí hiệu $ABCD$.



Hình 35

Trong tứ diện $ABCD$ (Hình 35), ta gọi:

– Các điểm A, B, C, D là các ***đỉnh***.

– Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, BD là các ***cạnh*** của tứ diện.

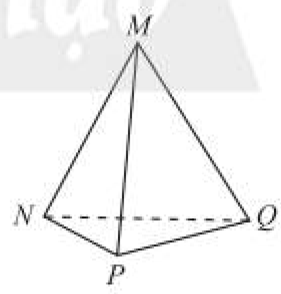
– Hai cạnh không đi qua một đỉnh là ***hai cạnh đối diện***.

– Các tam giác ABC, ACD, ADB, BCD là các ***mặt*** của tứ diện.

– Đỉnh không thuộc một mặt của tứ diện là ***đỉnh đối diện*** với mặt đó.

Ví dụ 11. Gọi tên các mặt, các cặp cạnh đối diện của tứ diện $MNPQ$ (Hình 36).

Giải



Hình 36

Tứ diện $MNPQ$ có:

- Các mặt: MNP, MPQ, MQN, NPQ.
- Các cặp cạnh đối diện: MN và PQ, MP và NQ, MQ và NP.

Chú ý:

a) Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là ***hình tứ diện đều***.

b) Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tuỳ ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

Ví dụ 12. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

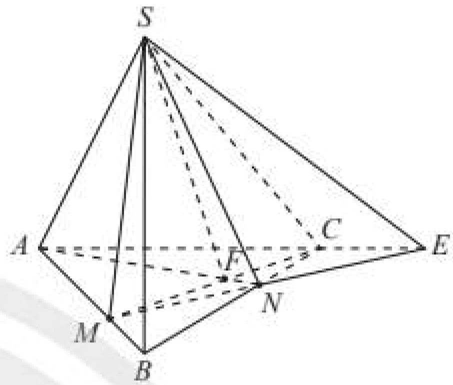
b) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SMN) và (SAC); (SAN) và (SCM).

Giải

a) Trong mặt phẳng (ABC), vẽ giao điểm E của MN và AC. Ta có $E \in AC$, suy ra $E \in (SAC)$. Vậy E là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

b) Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC), suy ra $(SMN) \cap (SAC) = SE$.

Trong mặt phẳng (ABC), vẽ giao điểm F của AN và MC. Ta có S và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM), suy ra $(SAN) \cap (SCM) = SF$.

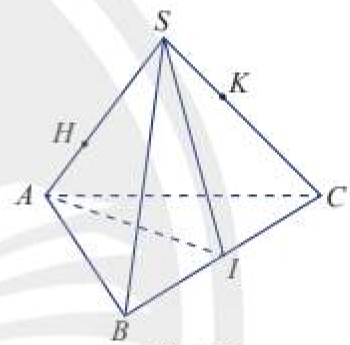


Hình 37

8 Cho tứ diện $SABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA và SC ($H \neq S, A$; $K \neq S, C$) sao cho HK không song song với AC. Gọi I là trung điểm của BC (Hình 38).

a) Tìm giao điểm của đường thẳng HK và mặt phẳng (ABC).

b) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAI) và (ABK); (SAI) và (BCH).

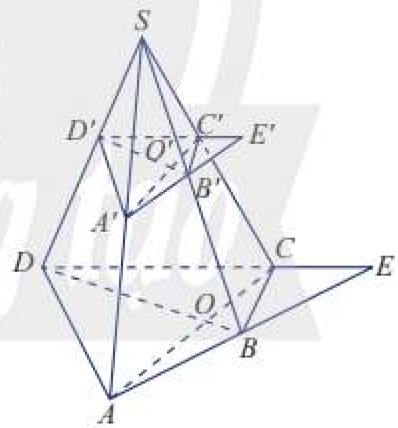


Hình 38

4 Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các cạnh bên của hình chóp lấy lần lượt các điểm A', B', C', D'. Cho biết AC cắt BD tại O, $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O', AB cắt DC tại E và $A'B'$ cắt $D'C'$ tại E' (Hình 39). Chứng minh rằng:

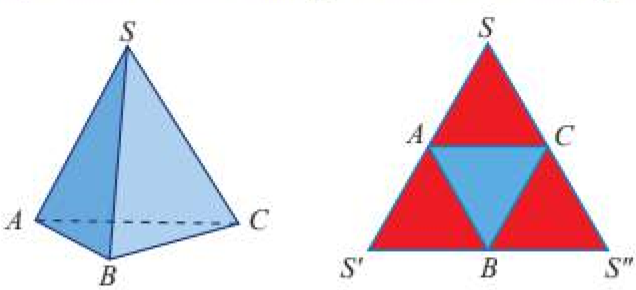
a) S, O', O thẳng hàng;

b) S, E', E thẳng hàng.



Hình 39

5 Nêu cách tạo lập tứ diện đều $SABC$ từ tam giác đều $SS'S''$ theo gợi ý ở Hình 40.



Hình 40

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP).

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I $(I \neq C)$, EG cắt AD tại H $(H \neq D)$.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD); (EFG) và (ACD).

b) Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

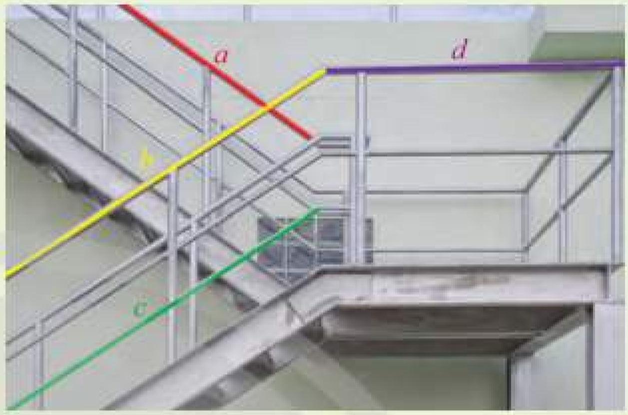
5. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng (Hình 41). Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.

Hình 41

Bài 2. Hai đường thẳng song song

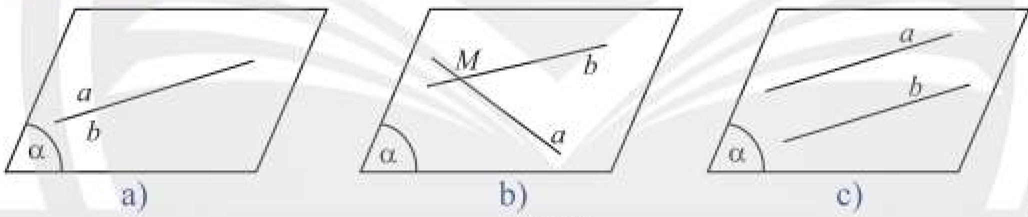
Từ khoá: **Hai đường thẳng đồng phẳng; Hai đường thẳng song song; Hai đường thẳng chéo nhau.**

Mô tả vị trí giữa các cặp đường thẳng a và b, b và c, c và d có trong hình bên.



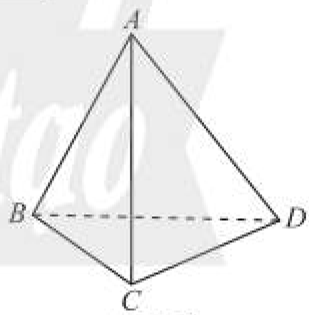
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

a) Nêu các trường hợp có thể xảy ra đối với hai đường thẳng a, b cùng nằm trong một mặt phẳng.



Hình 1

b) Cho tứ diện $ABCD$. Hai đường thẳng AB và CD có cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào không?



Hình 2

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

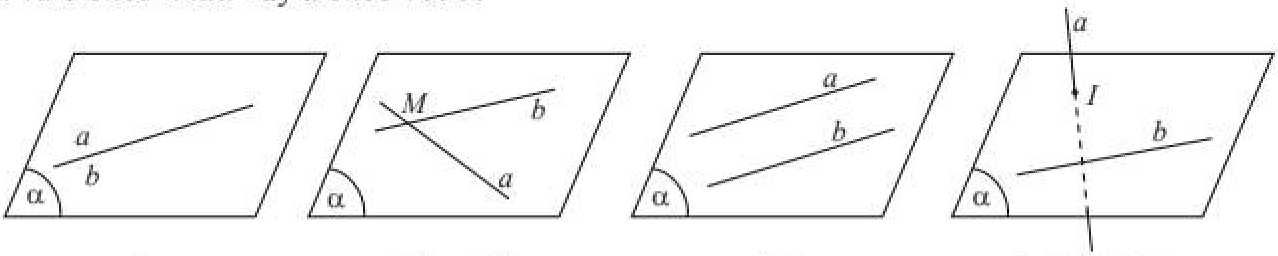
– Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b. Khi đó ta nói *a và b đồng phẳng*. Theo kết quả của hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra:

• Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b, kí hiệu $a \equiv b$.

• Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói *a và b cắt nhau* tại M, kí hiệu $a \cap b = M$.

• Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói *a và b song song với nhau,* kí hiệu $a \,//\, b$.

– **Trường hợp 2:** Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b. Khi đó ta nói hai đường thẳng *a và b chéo nhau* hay *a chéo với b*.



$a \equiv b$ | $a \cap b = M$ | $a \,//\, b$ | a, b chéo nhau

a) | b) | c) | d)

Hình 3

Hai đường thẳng gọi là ***song song*** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chú ý:

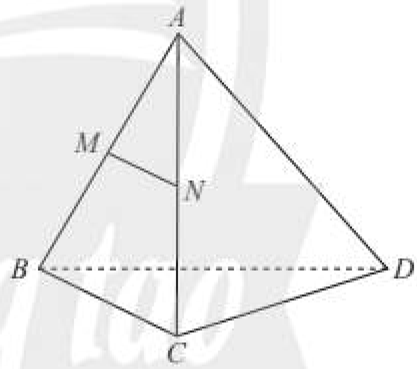
a) Hai đường thẳng gọi là ***chéo nhau*** nếu chúng không đồng phẳng.

b) Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu mp(a, b).

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) MN và BC; b) AN và CD; c) MN và CD.

Giải



Hình 4

a) Trong mặt phẳng (ABC), ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \,//\, BC$.

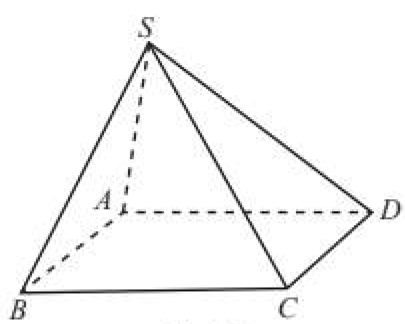
b) Trong mặt phẳng (ACD), ta có AN cắt CD tại điểm C.

c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P), suy ra đường thẳng NC nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm A. Tương tự, ta cũng có AM nằm trong (P), suy ra (P) chứa điểm B. Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$. Điều này vô lí.

Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong bất kì mặt phẳng nào, suy ra MN chéo với CD.

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) AB và CD; b) SA và SC; c) SA và BC.



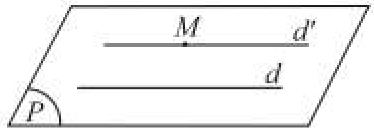
Hình 5

1 Hãy chỉ ra các ví dụ về hai đường thẳng song song, cắt nhau và chéo nhau trong hình cầu sắt ở Hình 6.

Hình 6

2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

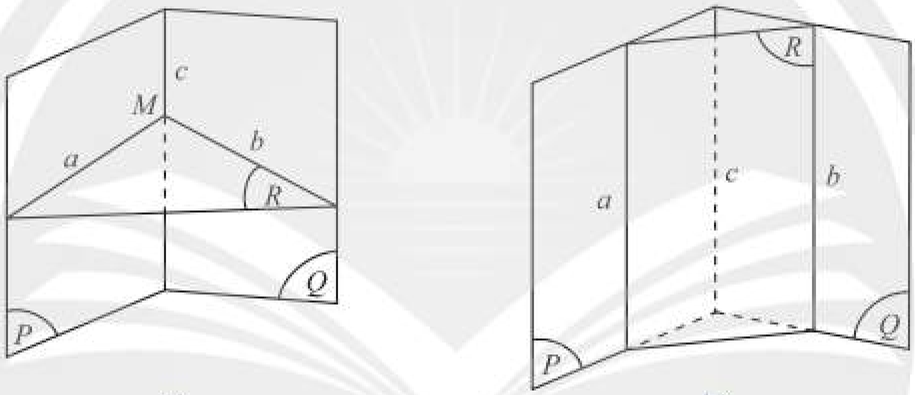
2 a) Trong không gian, cho điểm M ở ngoài đường thẳng d. Đặt $(P) = \text{mp}(M, d)$. Trong (P), qua M vẽ đường thẳng d' song song với d, đặt $(Q) = \text{mp}(d, d')$. Có thể khẳng định hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau không?



Hình 7

b) Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cắt nhau theo ba giao tuyến a, b, c phân biệt với $a = (P) \cap (R)$; $b = (Q) \cap (R)$; $c = (P) \cap (Q)$ (Hình 8).

Nếu a và b có điểm chung M thì điểm M có thuộc c không?



a) b)

Hình 8

Từ khám phá trên, ta có các định lí sau:

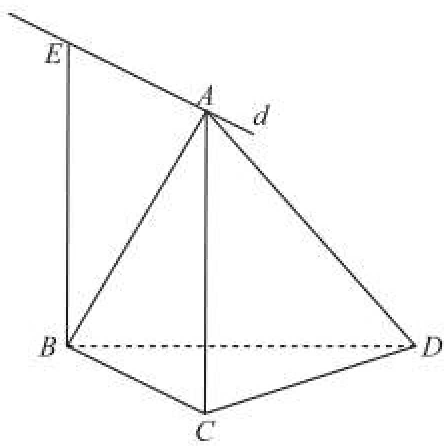
Định lí 1

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình bình hành $ACBE$. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua A và song song với BC. Chứng minh điểm E thuộc đường thẳng d.

Giải

Ta có $ACBE$ là hình bình hành, suy ra $AE \parallel BC$. Do trong không gian chỉ có duy nhất một đường thẳng đi qua A và song song với BC, suy ra AE phải trùng d, vậy điểm E phải thuộc d.



Hình 9

2 Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS. Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD. Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD).

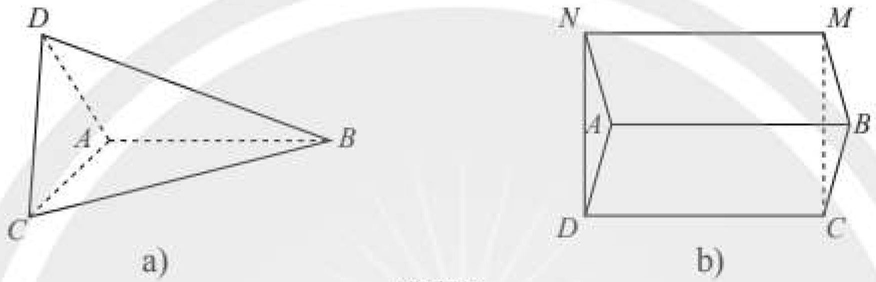
Định lí 2

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ví dụ 3.

a) Trong Hình 10a, hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy.

b) Trong Hình 10b, hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song.



Hình 10

Giải

a) Trong Hình 10a, ta có:

$(BAC) \cap (BAD) = BA$; $(BAC) \cap (BCD) = BC$; $(BCD) \cap (BAD) = BD$.

Ba giao tuyến vừa nêu đồng quy tại B. Vậy ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến đồng quy là (BAC) và (BAD); (BAC) và (BCD); (BCD) và (BAD).

b) Trong Hình 10b, ta có:

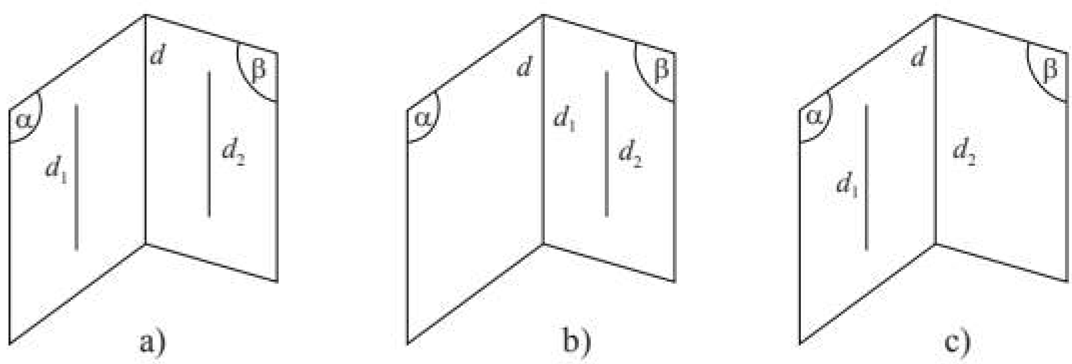
$(ABCD) \cap (ABMN) = AB$; $(ABCD) \cap (CDNM) = CD$; $(CDNM) \cap (ABMN) = MN$.

Ta có $AB \parallel CD \parallel MN$. Vậy ba cặp mặt phẳng có ba giao tuyến song song là $(ABCD)$ và $(ABMN)$; $(ABCD)$ và $(CDNM)$; $(CDNM)$ và $(ABMN)$.

Từ Định lí 2, ta có hệ quả sau:

Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

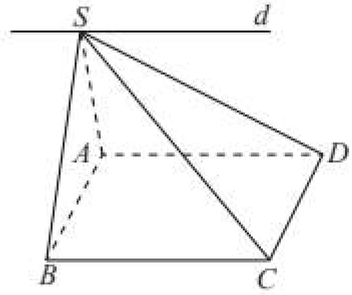


Hình 11

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Giải

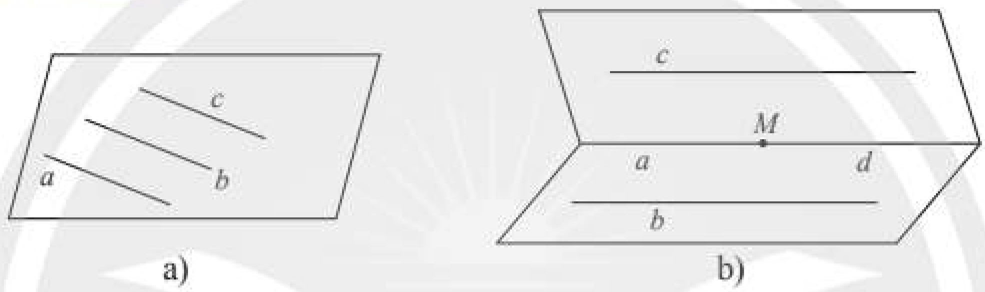
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD, suy ra theo hệ quả của Định lí 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD (Hình 12).



Hình 12

3 Ta đã biết trong cùng một mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau (Hình 13a).

Trong không gian, cho ba đường thẳng a, b, c không đồng phẳng, a và b cùng song song với c. Gọi M là điểm thuộc a, d là giao tuyến của mp(a, c) và mp(M, b) (Hình 13b). Do $b \parallel c$ nên ta có $d \parallel b$ và $d \parallel c$. Giải thích tại sao d phải trùng với a. Từ đó, nêu kết luận về vị trí giữa a và b.



Hình 13

Định lí 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

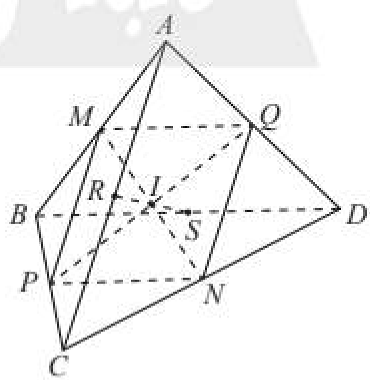
Chú ý: Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a \parallel b \parallel c$ và gọi là *ba đường thẳng song song*.

Ví dụ 5. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như Hình 14. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

Giải

Ta có MP là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MP \parallel AC$ và $MP = \dfrac{AC}{2}$.

Ta cũng có QN là đường trung bình của tam giác ADC, suy ra $QN \parallel AC$ và $QN = \dfrac{AC}{2}$.



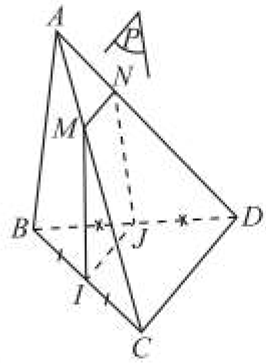
Hình 14

MP và QN cùng song song với AC suy ra MP // QN. Tứ giác $MPNQ$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành, suy ra MN và QP có cùng trung điểm I. Chứng minh tương tự ta cũng có MN và RS có cùng trung điểm I. Vậy các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

3 Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.

b) Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

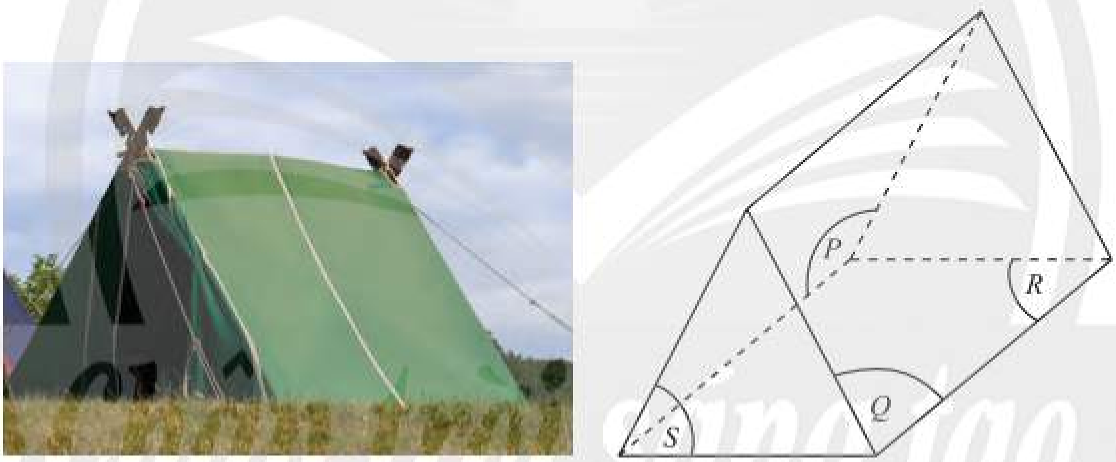


Hình 15

2 Một chiếc lều (Hình 16a) được minh hoạ như Hình 14b.

a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.

b) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.



a) b)

Hình 16

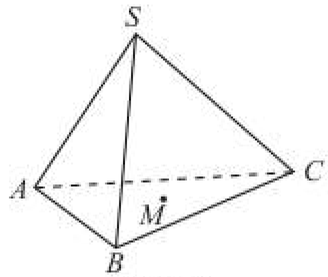
BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng song song a và b. Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b.

b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17). Qua M, vẽ đường thẳng d song song với SA, cắt (SBC) tại N. Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN).



Hình 17

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB).

b) Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

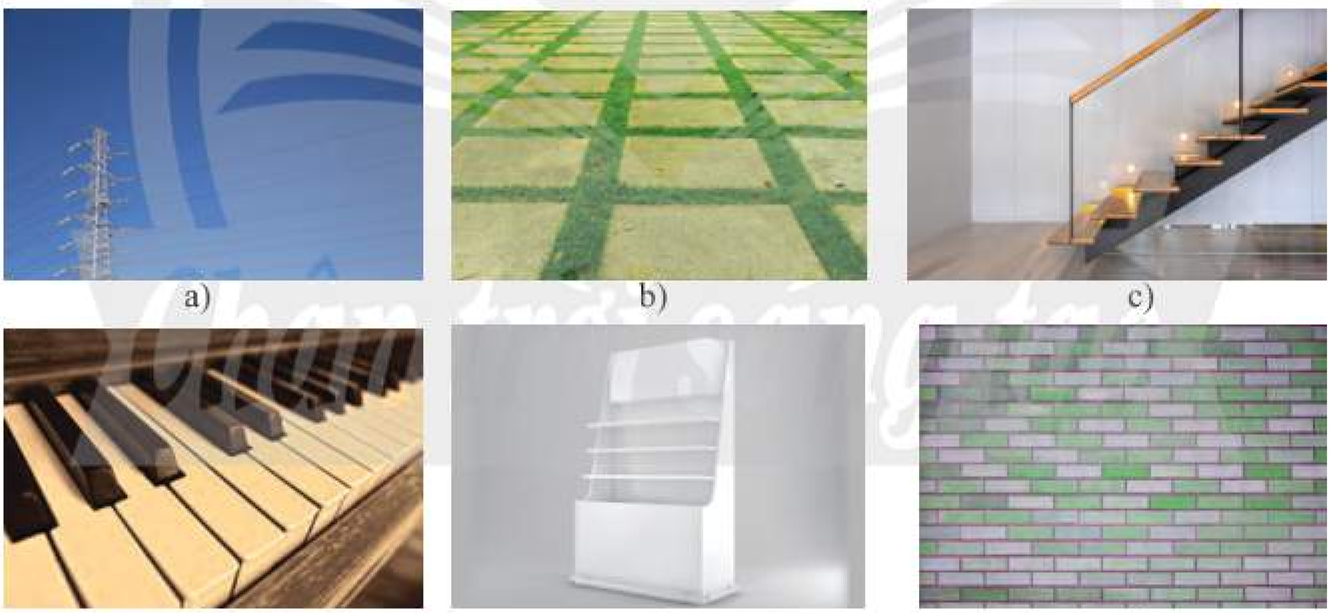
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD. Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx. Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N.

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N. Cho $AB = a$. Tính MN theo a.

b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

6. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



a) b) c)

d) e) g)

Hình 18

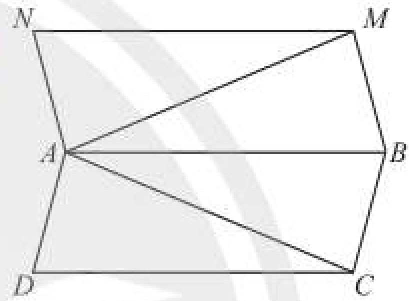
Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song

Từ khoá: **Đường thẳng song song với mặt phẳng.**

Đường thẳng *a* trên mép hiên của toà nhà có điểm nào chung với mặt (*P*) của phố đi bộ Nguyễn Huệ không?

1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABMN* không đồng phẳng. Tìm số giao điểm của mặt phẳng (*ABCD*) lần lượt với các đường thẳng *MN*, *MA* và *AC*.



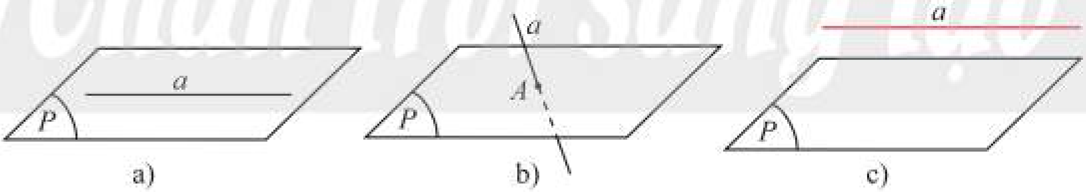
Hình 1

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Khi đó có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

– **Trường hợp 1:** a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình 2a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P), ta nói a nằm trong (P), kí hiệu $a \subset (P)$.

– **Trường hợp 2:** a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình 2b), ta nói a cắt (P) tại A, kí hiệu $a \cap (P) = A$.

– **Trường hợp 3:** a và (P) không có điểm chung nào (Hình 2c), ta nói a song song với (P), kí hiệu $a \,//\, (P)$.



Hình 2

Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

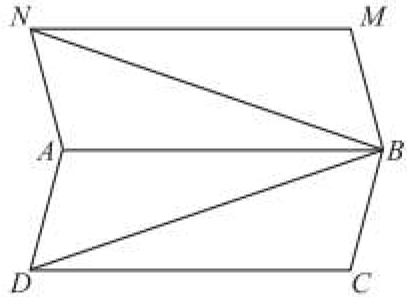
Ví dụ 1. Trong 1, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng (*ABMN*) lần lượt với các đường thẳng *CD*, *BD* và *BN*.

Giải

Nếu CD có điểm chung O với $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$, suy ra CD cắt AB (mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành). Vậy $CD \parallel (ABMN)$.

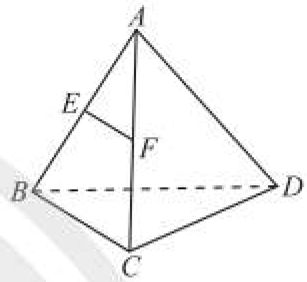
BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN)$, suy ra BD cắt $(ABMN)$ tại B.

BN có hai điểm chung B và N với $(ABMN)$, suy ra $BN \subset (ABMN)$.



Hình 3

1 Cho E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC của tứ diện $ABCD$. Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng BC, AD và EF với mặt phẳng (BCD).



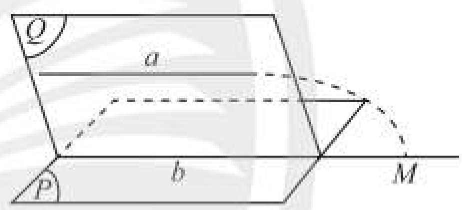
Hình 4

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

2 Cho đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Đặt $(Q) = \text{mp}(a, b)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Giả sử a có điểm chung M với (P) thì điểm M phải nằm trên đường thẳng nào? Điều này có trái với giả thiết $a \parallel b$ hay không?

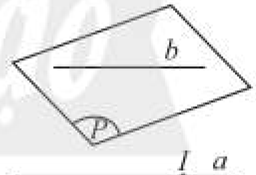


Hình 5

Ta có định lí:

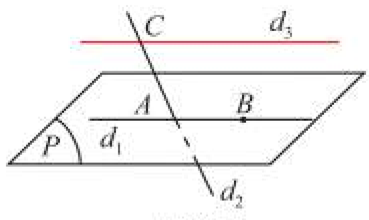
Định lí 1

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P).



Hình 6

Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P). Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B; d_2 đi qua A, C; d_3 đi qua C và song song với AB (Hình 7). Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P). Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3.



Hình 7

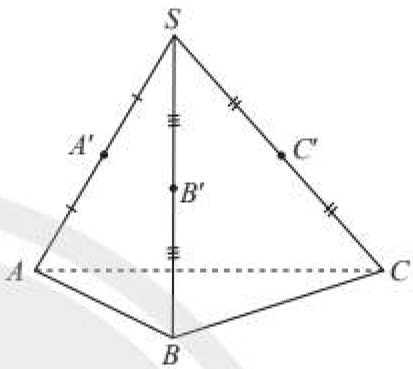
Giải

Đường thẳng d_1 chứa hai điểm A, B thuộc (P), vậy $d_1 \subset (P)$.

Đường thẳng d_2 không nằm trong (P) vì có chứa điểm C không thuộc (P). Mặt khác, d_2 lại có điểm A chung với (P), suy ra d_2 cắt (P) tại A.

Đường thẳng d_3 không nằm trong (P) và song song với đường thẳng d_1 nằm trong (P), suy ra $d_3 \mathbin{/\!/} (P)$.

Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm các đường thẳng lần lượt nằm trong, cắt, song song với mặt phẳng (ABC).



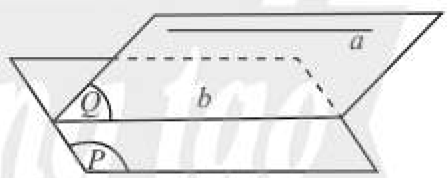
Hình 8

Hãy chỉ ra trong Hình 9 các đường thẳng lần lượt nằm trong, song song, cắt mặt phẳng sàn nhà.

Hình 9

3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b (Hình 10). Trong (Q), hai đường thẳng a, b có bao nhiêu điểm chung?



Hình 10

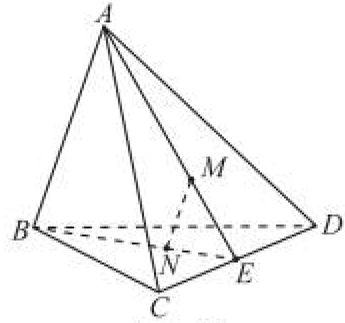
Ta có định lí:

Định lí 2

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a, cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD (Hình 11). Chứng minh đường thẳng MN song song với các mặt phẳng (CAB) và (DAB).

Giải



Hình 11

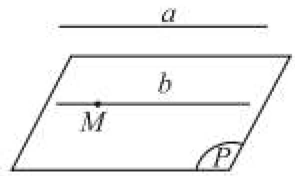
Gọi E là trung điểm của CD. Do M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD nên ta có $\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EB} = \frac{1}{3}$, suy ra $MN \parallel AB$.

Đường thẳng MN không nằm trong (CAB) và song song với đường thẳng AB nằm trong (CAB), suy ra $MN \parallel (CAB)$. Tương tự ta cũng có $MN \parallel (DAB)$.

Từ Định lí 2, ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 1

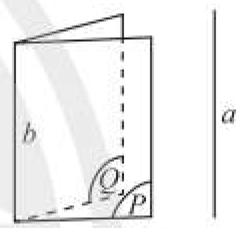
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).



Hình 12

Hệ quả 2

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Hình 13

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA, (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

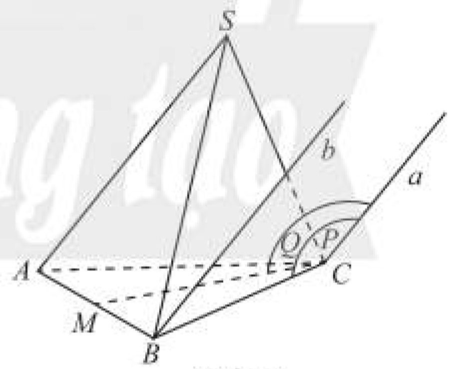
b) Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$.

Chứng minh $b \subset (P)$.

Giải

a) Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA, suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a \parallel SA$.

b) Ta có $SA \parallel (P)$ và B thuộc (P), b là đường thẳng đi qua B và $b \parallel SA$, suy ra $b \subset (P)$.



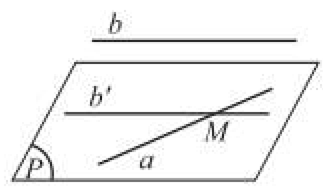
Hình 14

Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường còn lại

4 Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Lấy một điểm M trên a, vẽ đường thẳng b' đi qua M và song song với b. Đặt (P) là mặt phẳng đi qua a, b'.

a) Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa b và (P).

b) Gọi (P') là mặt phẳng chứa a và song song với b. Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa b' và (P'); (P) và (P')?



Hình 15

Định lí 3

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a, có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$.

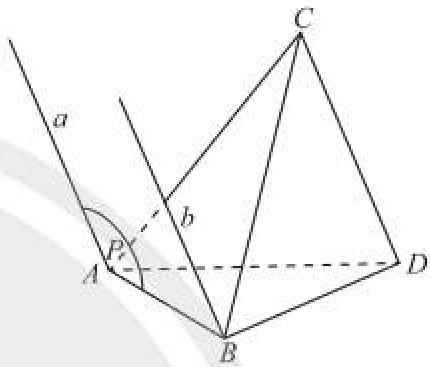
a) Nêu cách vẽ mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD. Ta có thể vẽ bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (BCD).

Giải

a) Vẽ đường thẳng a đi qua A và song song với CD. Đặt $(P) = \text{mp}(a, AB)$. Ta có $CD \parallel a$, suy ra $CD \parallel (P)$. Do AB và CD chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng (P) duy nhất chứa AB và $(P) \parallel CD$.

b) Ta có B là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (BCD). Ta lại có (BCD) chứa CD và $CD \parallel (P)$, suy ra giao tuyến của (P) và (BCD) là đường thẳng b đi qua B và song song với CD.

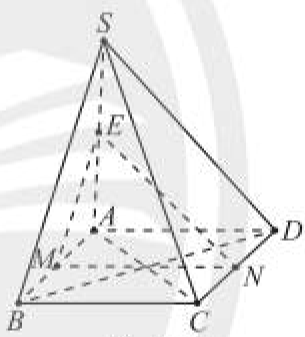


Hình 16

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (Hình 17). Chứng minh rằng:

a) MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD);

b) SB và SC song song với mặt phẳng (MNE).



Hình 17

2 Làm thế nào để đặt cây thước kẻ a để nó song song với các trang của một cuốn sách?

Hình 18

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng ($CDEF$), (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE. Chứng minh MN // ($CDFE$).

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và ($ABCD$).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD. Một mặt phẳng (α) qua M, song song với CD và SA, cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gì?

b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD.

4. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD, (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

6. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà (Hình 19).

Hình 19

Bài 4. Hai mặt phẳng song song

Từ khoá: **Hai mặt phẳng song song; Định lí Thalès; Hình lăng trụ; Hình hộp.**

Bề mặt trên của mỗi bậc thang này được đặt như thế nào so với mặt đất?

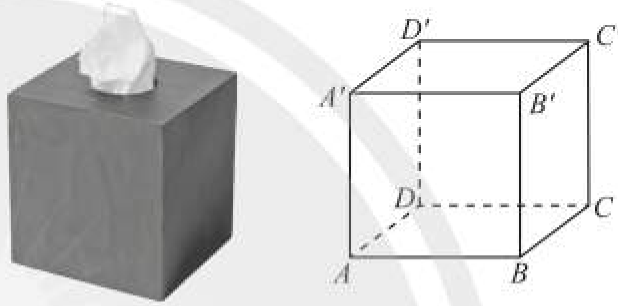
1. Hai mặt phẳng song song

Hộp giấy có các mặt là hình vuông ở Hình 1a được vẽ lại với các đỉnh là A, B, C, D, A', B', C', D' như Hình 1b. Gọi tên cặp mặt phẳng:

a) Có ba điểm chung không thẳng hàng.

b) Là hai mặt phẳng phân biệt và có một điểm chung.

c) Không có bất kì điểm chung nào.



a) b)

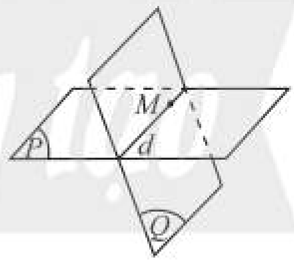
Hình 1

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

– **Trường hợp 1:** (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.

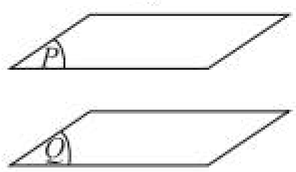
a)

– **Trường hợp 2:** (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, kí hiệu $(P) \cap (Q) = d$.



b)

– **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \varnothing$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu $(P) // (Q)$ hoặc $(Q) // (P)$.



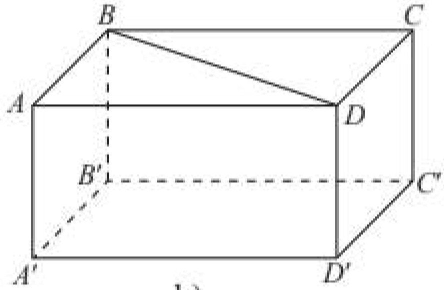
c)

Hình 2

Hai mặt phẳng được gọi là ***song song*** với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Ví dụ 1. Hộp giấy có các mặt là hình chữ nhật ở Hình 3a được vẽ lại với các đỉnh là $A, B, C, D, A', B', C', D'$ như Hình 3b. Quan sát hộp giấy và chỉ ra các cặp mặt phẳng song song với nhau ở Hình 3b.

a)



b)

Hình 3

Giải

Các cặp mặt phẳng song song với nhau ở Hình 3b là:

$(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$; $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$; $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

1 Tìm một số mặt phẳng song song có trong hình chụp căn phòng ở Hình 4.

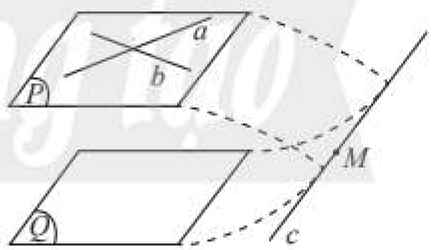
Hình 4

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

2 Cho mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q). Giả sử (P) và (Q) có điểm chung M thì (P) cắt (Q) theo giao tuyến c (Hình 5).

a) Giải thích tại sao đường thẳng c phải cắt ít nhất một trong hai đường thẳng a, b. Điều này có trái với giả thiết a và b cùng song song với (Q) không?

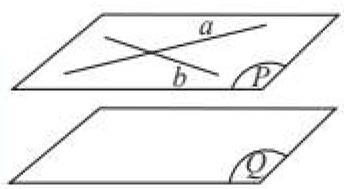
b) Rút ra kết luận về số điểm chung và vị trí tương đối của (P) và (Q).



Hình 5

Định lí 1

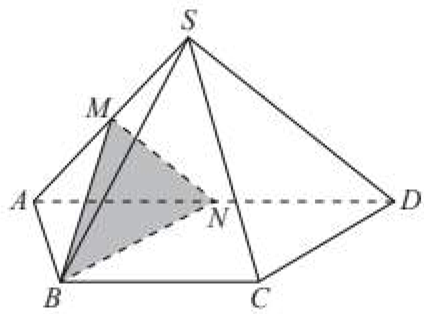
Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).



Hình 6

Chú ý: Chẳng hạn nếu A, B, C không thẳng hàng và AB // MN và AC // MP thì (ABC) // (MNP).

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và AD (Hình 7). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BMN) và (SCD) song song với nhau.



Hình 7

Giải

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD, suy ra MN // SD,

do đó MN // (SCD). (1)

Tứ giác $BCDN$ có BC // ND và $BC = ND$ nên là hình bình hành, suy ra BN // CD,

do đó BN // (SCD). (2)

Mặt khác ta có MN và BN cùng chứa trong (BMN), $MN \cap BN = N$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra (BMN) // (SCD).

1 Cho tứ diện $ABCD$ có E, F, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Chứng minh (EFH) // (BCD).

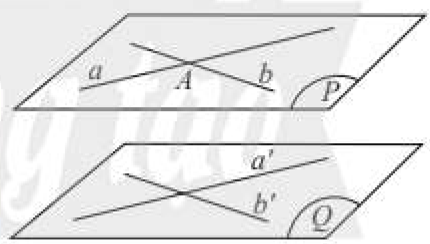
3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

3 a) Cho điểm A ở ngoài mặt phẳng (Q). Trong (Q) vẽ hai đường thẳng cắt nhau a' và b'. Làm thế nào để vẽ hai đường thẳng a và b đi qua A và song song với (Q)?

b) Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa mp(a, b) và (Q)?

Định lí 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

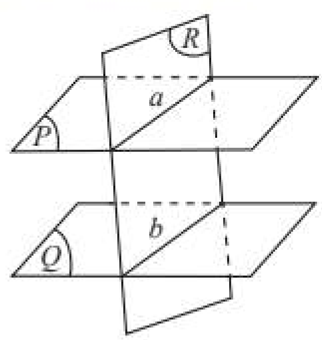


Hình 8

4 Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) thoả mãn (P) // (Q), $(R) \cap (P) = a$ và $(R) \cap (Q) = b$. Xét vị trí tương đối của a và b.

Định lí 3

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



Hình 9

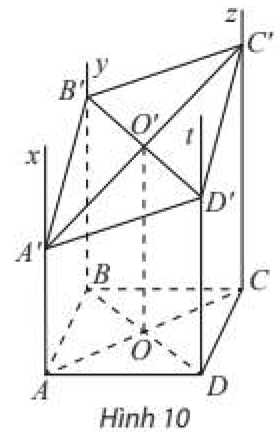
Ví dụ 3. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song với nhau, nằm về một phía đối với (P) và lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh mp(AA', BB') song song với mp(CC', DD').

b) Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

c) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Chứng minh $OO' \parallel AA'$.



Hình 10

Giải

a) Ta có $AB \parallel CD$, $AA' \parallel DD'$, suy ra mp$(AA', BB') \parallel$ mp(CC', DD').

b) Mặt phẳng (P) cắt hai mặt phẳng song song mp(AA', BB') và mp(CC', DD') theo hai giao tuyến $A'B'$ và $C'D'$, suy ra $A'B' \parallel C'D'$.

Tương tự ta cũng có $A'D' \parallel B'C'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

c) Hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ lần lượt đi qua hai đường thẳng song song AA', DD' và cắt nhau theo giao tuyến OO', suy ra $OO' \parallel AA'$.

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo, tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và cắt đoạn thẳng AC. Chứng minh các giao tuyến của (α) với hình chóp tạo thành một tam giác đều.

Khi dùng dao cắt các lớp bánh (Hình 11), giả sử bề mặt của các lớp bánh là các mặt phẳng song song và con dao được xem như mặt phẳng (P), nêu kết luận về các giao tuyến tạo bởi (P) với các bề mặt của các lớp bánh. Giải thích.

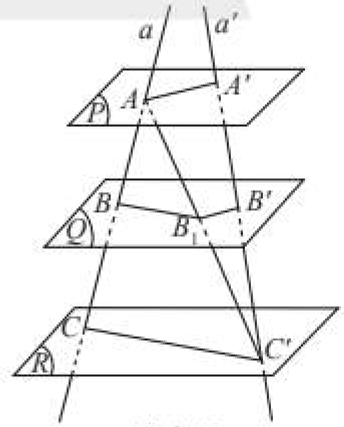

Hình 11

4. Định lí Thalès trong không gian

Cho ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt cắt hai đường thẳng a và a' tại các điểm A, B, C và A', B', C'. Gọi B_1 là giao điểm của AC' với (Q) (Hình 12).

a) Trong tam giác ACC', có nhận xét gì về mối liên hệ giữa $\dfrac{AB}{BC}$ và $\dfrac{AB_1}{B_1C'}$?

b) Trong tam giác $AA'C'$, có nhận xét gì về mối liên hệ giữa $\dfrac{AB_1}{B_1C'}$ và $\dfrac{A'B'}{B'C'}$?



Hình 12

c) Từ đó, nêu nhận xét về mối liên hệ giữa các tỉ số $\dfrac{AB}{A'B'}$, $\dfrac{BC}{B'C'}$, $\dfrac{AC}{A'C'}$.

Chúng ta đã làm quen với định lí Thalès trong phần hình học phẳng ở cấp Trung học cơ sở, trong không gian, định lí Thalès phát biểu như sau:

Định lí 4 (Định lí Thalès)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 4. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song. Hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Cho $AB = 3$, $BC = 7$, $A'C' = 20$. Tính các độ dài $A'B'$, $B'C'$.

Giải

Áp dụng định lí Thalès trong không gian đối với ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) và hai cát tuyến d, d', ta có:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{7}, \text{ suy ra } \frac{A'B'}{3} = \frac{B'C'}{7} = \frac{A'B' + B'C'}{3+7} = \frac{A'C'}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Suy ra $A'B' = 6$; $B'C' = 14$.

3 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9$, $SB = 12$, $SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4$, $MN = 3$, $NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), lần lượt đi qua M, N, cắt SB theo thứ tự tại M', N' và cắt SC theo thứ tự tại M'', N''. Tính độ dài các đoạn thẳng SM', $M'N'$, $M''N''$, $N''C$.

5. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình lăng trụ

6 Hình dạng của các đồ vật như hộp phấn, lồng đèn, hộp quà, lăng kính có đặc điểm gì giống nhau?

a) b) c) d)

Hình 13

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại A_1', A_2', ..., A_n'. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A_n'$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ gọi là ***hình lăng trụ***, kí hiệu $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$, ta gọi:

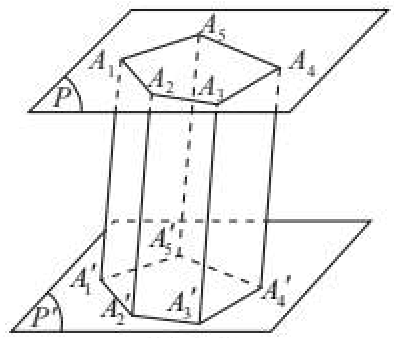
– Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A'_1A'_2\ldots A'_n$ là hai ***mặt đáy*** nằm trên hai mặt phẳng song song;

– Các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n'$ là các ***đỉnh***;

– Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, …, $A_nA_1A_1'A_n'$ là các ***mặt bên***;

– Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2', …, A_nA_n' là các ***cạnh bên***. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

– Các cạnh của hai đa giác đáy là các ***cạnh đáy***. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.



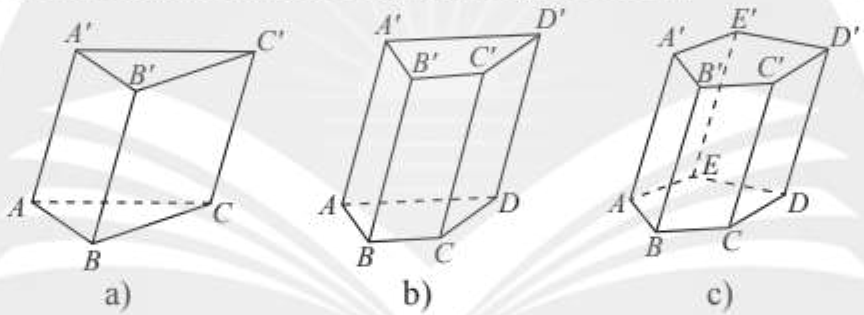
Hình 14

Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, … tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, …

Ví dụ 5.

a) Gọi tên các hình lăng trụ trong Hình 15.

b) Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong Hình 15a.



Hình 15

Giải

a) Hình 15a là hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

Hình 15b là hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

Hình 15c là hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$.

b) Hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ trong Hình 15a có:

- Hai mặt đáy là các tam giác ABC, $A'B'C'$;
- Sáu đỉnh: A, B, C, A', B', C';
- Ba mặt bên là các hình bình hành: $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'A'A$;
- Ba cạnh bên: AA', BB', CC'.

Hình hộp

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng:

a) Bốn mặt bên và mặt đáy còn lại của hình lăng trụ là các hình bình hành;

b) Các mặt $AA'C'C$ và $BB'D'D$ là hình bình hành;

c) Bốn đoạn thẳng $A'C$, AC', $B'D$, BD' có cùng trung điểm.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

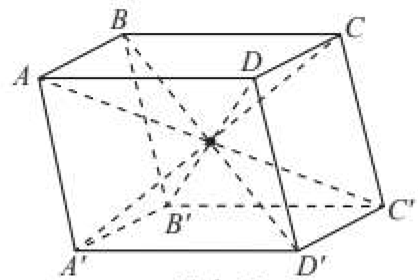
Trong một hình hộp ta có:

– Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là ***hai mặt đối diện***;

– Hai đỉnh không cùng nằm trên một mặt gọi là ***hai đỉnh đối diện***;

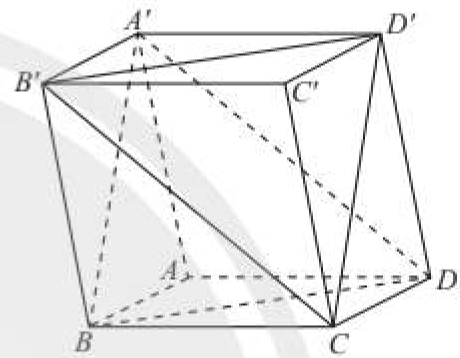
– Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là ***đường chéo***;

– Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 16

Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.



Hình 17

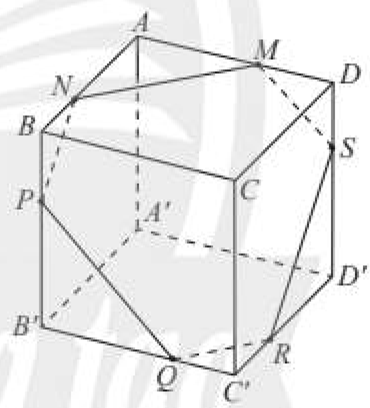
Giải

Ta có $BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD'$, suy ra $BB'D'D$ là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$.

Tương tự ta cũng có $A'B \parallel D'C$.

Từ đó suy ra $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

4 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như Hình 18. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song với nhau.



Hình 18

3 Tìm hình lăng trụ có thể lấy một mặt bất kì làm mặt đáy.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

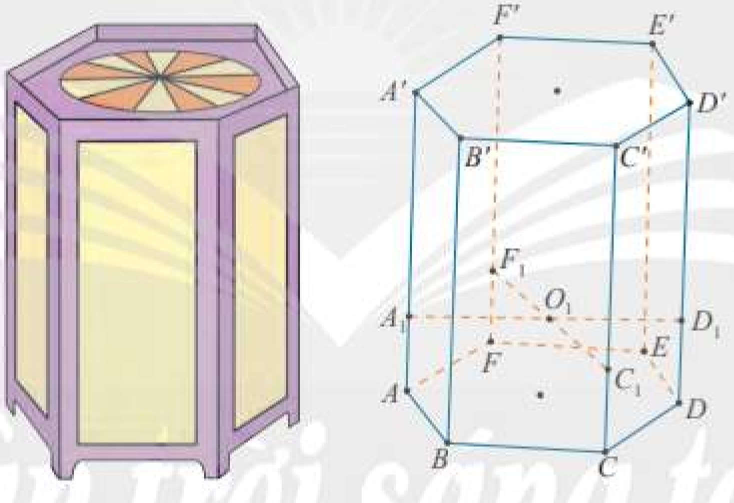
$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.
   a) Chứng minh rằng (OMN) // (SBC).
   b) Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON. Chứng minh EF song song với (SBC).

3. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.
   a) Chứng minh (CBE) // (ADF).
   b) Chứng minh (DEF) // $(MNN'M')$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$. Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

5. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình 19).
   a) Xác định giao tuyến của mp(A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.
   b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm. Tính CC_1 và C_1C'.



Hình 19

6. Chỉ ra các mặt phẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các mặt phẳng song song trong thực tế.

a) b)

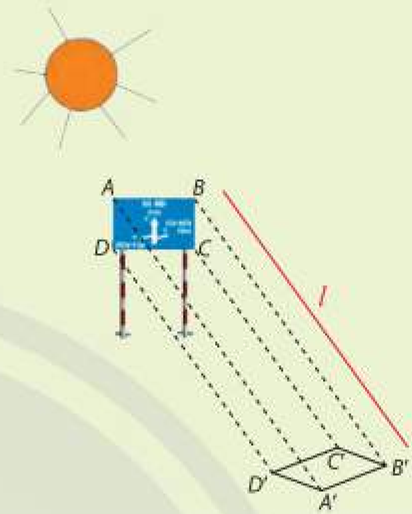
Hình 20

Bài 5. Phép chiếu song song

Từ khoá: **Phép chiếu song song; Phương chiếu; Mặt phẳng chiếu; Ảnh; Hình biểu diễn của một hình.**

Các tia nắng song song theo phương *l* khi chiếu tới biển báo giao thông hình chữ nhật *ABCD* tạo thành bóng trên mặt đường (xem hình bên).

Bóng của biển báo này có dạng hình gì? Tại sao?



1. Khái niệm phép chiếu song song

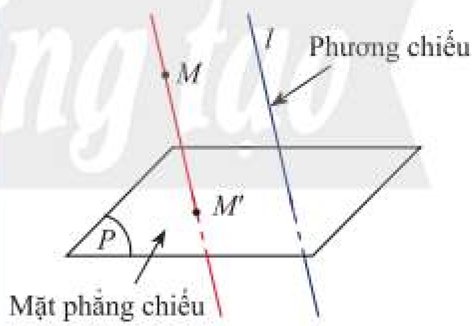
Trong ▶:

a) Các tia sáng AA', BB', DD' có song song với nhau hay không?

b) Nêu cách xác định bóng C' của điểm C trên mặt đường.

Phép chiếu song song thường được dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l. Đường thẳng này cắt (P) tại M'. Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là ***phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l***.



Hình 1

Mặt phẳng (P) được gọi là ***mặt phẳng chiếu*** và đường thẳng l được gọi là ***phương chiếu*** của phép chiếu song song nói trên.

Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là ***phép chiếu theo phương l***.

Điểm M' gọi là ***ảnh*** của điểm M qua phép chiếu theo phương l.

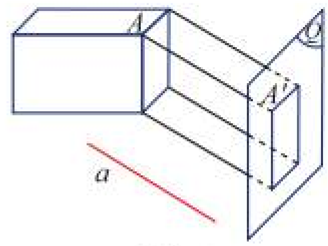
Cho hình $\mathscr{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathscr{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là ***hình chiếu song song*** của $\mathscr{H}$ lên mặt phẳng (P).

Ví dụ 1. Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong ▶.

Giải

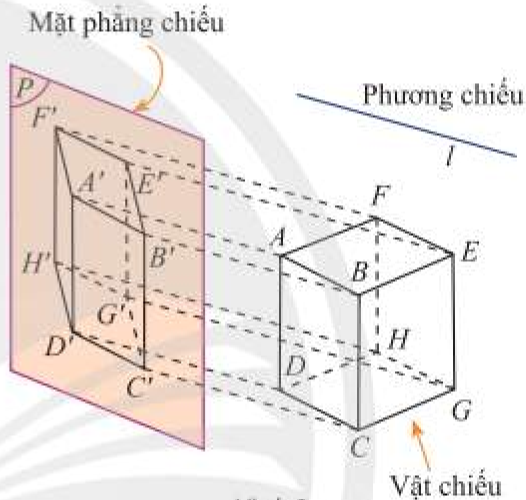
Trong ▶, ta có phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) của mặt đường theo phương l của tia nắng.

1 Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong Hình 2.



Hình 2

1 Tìm ảnh của hình hộp $ABEF.DCGH$ qua phép chiếu song song được mô tả trong Hình 3.



Hình 3

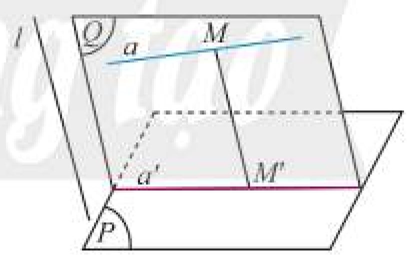
2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Dưới đây ta chỉ xét ảnh của các đường thẳng, tia, đoạn thẳng không song song với phương chiếu.

2 Trong Hình 4, xét phép chiếu theo phương l lên mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và song song với phương chiếu.

a) Khi điểm M thay đổi trên đường thẳng a thì ảnh M' của nó thay đổi ở đâu?

b) Từ đó hãy chỉ ra ảnh của đường thẳng a qua phép chiếu theo phương l lên mặt phẳng (P).

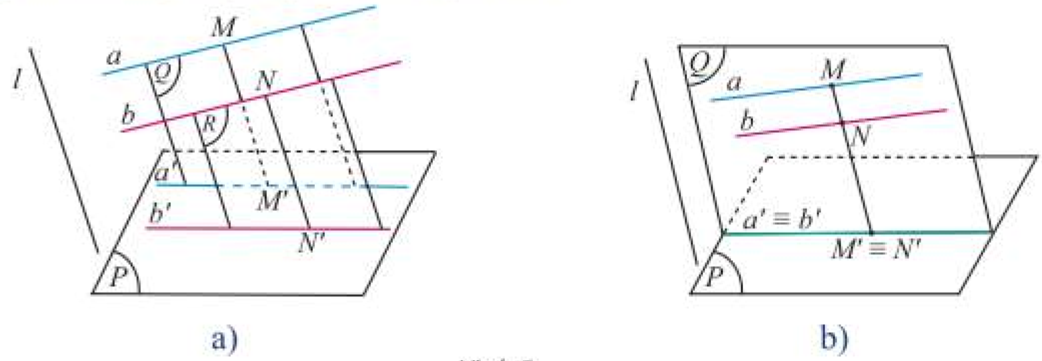


Hình 4

Tính chất 1

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

Trong Hình 5, xét phép chiếu theo phương l với mặt phẳng chiếu (P). Biết $a \parallel b$ với $a \subset (Q)$ và $b \subset (R)$. Nêu nhận xét về vị trí tương đối của hình chiếu a', b' của a, b trong hai trường hợp: $(Q) \parallel (R)$; $(Q) \equiv (R)$.



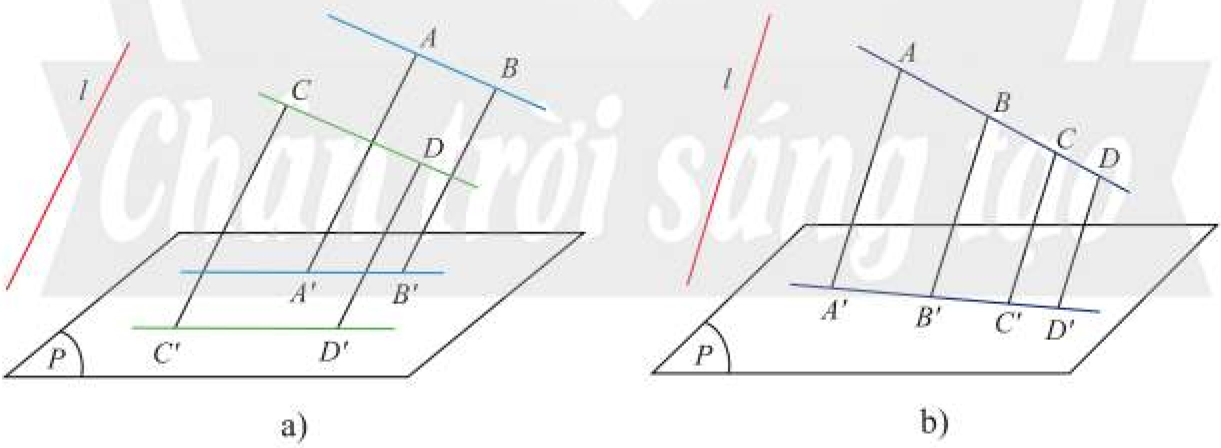
Hình 5

Tính chất 2

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



Hình 6

Ví dụ 2.

a) Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC, tia AB và đường thẳng AD trong Hình 6b.

b) Quan sát Hình 6a và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.

c) Quan sát Hình 6b và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.

Giải

a) Trong Hình 6b, hình chiếu song song của đoạn thẳng AC, tia AB và đường thẳng AD lần lượt là đoạn thẳng $A'C'$, tia $A'B'$ và đường thẳng $A'D'$.

b) Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song nên trong Hình 6a, ta có: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

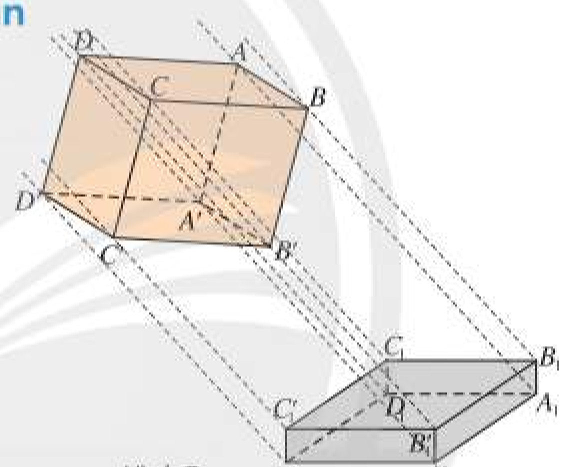
c) Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng thuộc một đường thẳng nên trong Hình 6b, ta có: $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{D'A'}{D'B'}$.

Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB và $AB = 2CD$, hình chiếu song song của $ABCD$ là tứ giác $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ cũng là một hình thang và $A'B' = 2C'D'$.

Cho G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC và hình chiếu song song của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng hình chiếu M' của M là trung điểm của $B'C'$ và hình chiếu G' của G cũng là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Quan sát Hình 7 và cho biết các tia nắng song song đã tạo ra hình chiếu của hình hộp như thế nào trên nền nhà.



Hình 7

Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Chú ý: Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như:

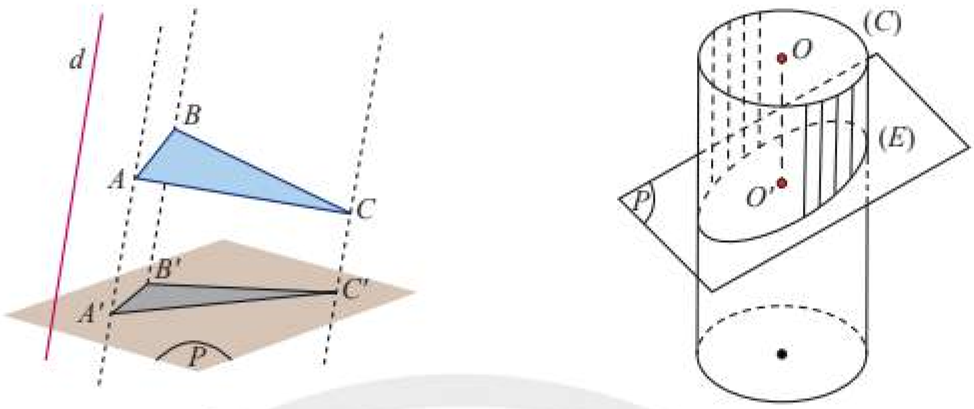
a) Nếu trên hình $\mathscr{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathscr{H}$.

b) Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì

- Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
- Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
- Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

Ví dụ 3. Quan sát Hình 8 và tìm hình biểu diễn của:

a) đoạn thẳng AB; b) tam giác ABC; c) đường tròn (C) tâm O.



a) b)

Hình 8

Giải

a) Hình biểu diễn của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng $A'B'$ với A' và B' lần lượt là ảnh của A và B.

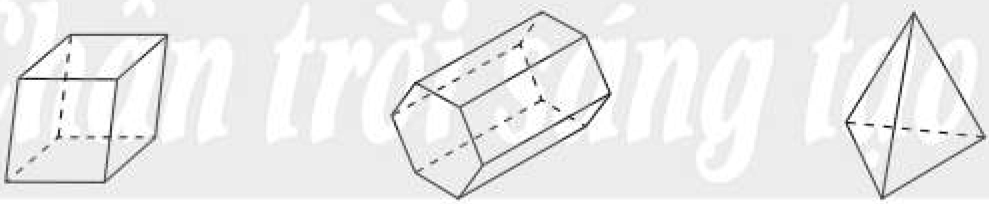
b) Hình biểu diễn của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$ với A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C.

c) Hình biểu diễn của đường tròn (C) là elip (E) với tâm O' là ảnh của O.

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau:

a) Hình hộp; b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều; c) Tứ diện.

Giải



a) b) c)

Hình 9

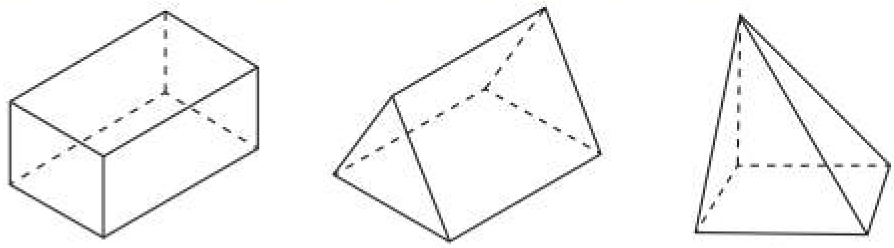
a) Hình biểu diễn của các mặt là các hình bình hành.

b) Hình biểu diễn của mặt đáy là lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, đồng thời song song với đường chéo nối hai đỉnh còn lại. Hình biểu diễn của mặt bên là hình bình hành.

c) Hình biểu diễn của bốn mặt là bốn tam giác.

d) Hình biểu diễn của mặt đáy là elip, hình biểu diễn của các đường sinh là các đoạn thẳng song song và bằng nhau.

Gọi tên các hình khối có hình biểu diễn là các hình trong Hình 10.



a) b) c)

Hình 10

Vẽ hình biểu diễn của một hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

BÀI TẬP

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó;

b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

2. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

3. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

4. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α). Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d. Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho:

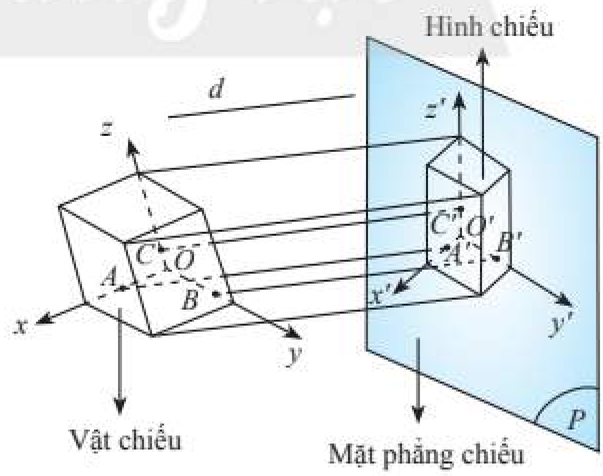
a) $A'B' = AB$; b) $A'B' = 2AB$.

5. Vẽ hình biểu diễn của:

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;

b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;

c) Hình hộp.



Hình 11

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

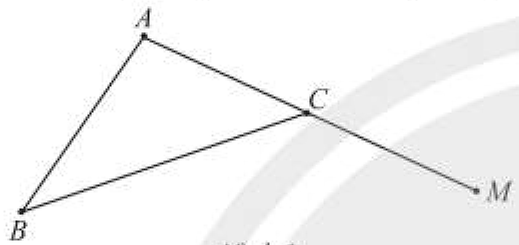
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình 1). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $M \in (ABC)$. B. $C \in (ABM)$.

C. $A \in (MBC)$. D. $B \in (ACM)$.



Hình 1

2. Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng.

B. Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.

C. Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng.

D. Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD)?

A. SM. B. SN.

C. SB. D. SC.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường nào **không song song** với IJ?

A. EF. B. DC.

C. AD. D. AB.

5. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AB. B. AC.

C. BC. D. SA.

6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{400}{9}$. B. $\frac{200}{3}$.

C. $\frac{40}{9}$. D. $\frac{200}{9}$.

7. Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

A. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q).

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AA', $A'C'$, BC. Ta có:

A. $(MNP) // (BCA)$.

B. $(MNQ) // (A'B'C')$.

C. $(NQP) // (CAB)$.

D. $(MPQ) // (ABA')$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác SAD đều. M là điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) // (SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x.

11. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C.

a) Tứ giác $MNCA$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài MN nhỏ nhất.

12. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB, cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng:

a) $MN // DE$;

b) $M_1N_1 // (DEF)$;

c) $(MNN_1M_1) // (DEF)$.

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương V CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Trong thực tế ta thường gặp những tập số liệu rất lớn, ví dụ như điểm thi tốt nghiệp Trung học phổ thông của học sinh cả nước hay số tiền thuế thu nhập cá nhân mỗi cá nhân phải đóng trong năm. Để thuận tiện cho việc lưu trữ, trình bày và biểu diễn các số liệu này, người ta thường sử dụng bảng số liệu ghép nhóm, trong đó các số liệu riêng lẻ có giá trị gần nhau được sắp xếp vào từng nhóm.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu cách xác định, ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm.

Học xong chương này, bạn có thể:

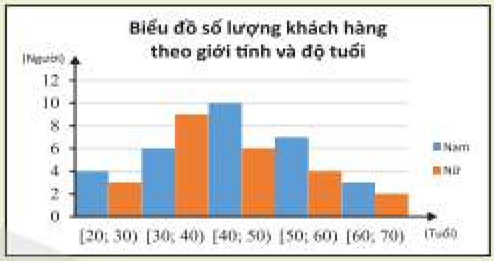
– Tính được các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm: số trung bình cộng (hay số trung bình), trung vị, tứ phân vị, mốt.
– Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
– Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong chương trình lớp 11 và trong thực tiễn.

Bài 1. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ khoá: Số trung bình; Mốt.

Một đại lí bảo hiểm đã thống kê số lượng khách mua bảo hiểm nhân thọ trong một ngày ở biểu đồ bên.

Hãy so sánh độ tuổi trung bình của khách hàng nam và nữ.



1. Số liệu ghép nhóm

Sử dụng dữ liệu ở biểu đồ trong, hoàn thiện bảng thống kê về số lượng khách hàng nữ theo tuổi sau:

Khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số khách hàng nữ	3	?	?	?	?

Một số loại số liệu điều tra có thể nhận rất nhiều những giá trị khác nhau, hoặc khó xác định được giá trị chính xác, ví dụ như chiều cao, cân nặng, tuổi thọ, …. Để thuận tiện cho việc lưu trữ và xử lí các loại số liệu này, người ta thường ghép các số liệu gần nhau lại thành nhóm.

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Chú ý:

• Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

• Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

• Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm ***giá trị đại diện*** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

• Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là ***độ dài*** của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Ví dụ 1. Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ở 1.

Giải

Khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Giá trị đại diện	25	35	45	55	65
Độ dài của nhóm	10	10	10	10	10

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

– Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu.
Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k\ .\ L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

– Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

Ví dụ 2. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4	62,6	54,2	56,8	58,8	59,4	60,7	58	59,5	63,6	61,8	52,3	63,4	57,9
49,7	45,1	56,2	63,2	46,1	49,6	59,1	55,3	55,8	45,5	46,8	54	49,2	52,6

Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 63,6 - 45,1 = 18,5$.

Độ dài mỗi nhóm $L > \dfrac{R}{k} = \dfrac{18,5}{5} = 3,7$.

Ta chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành các nhóm [45; 49), [49; 53), [53; 57), [57; 61), [61; 65).

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Cân nặng	[45; 49)	[49; 53)	[53; 57)	[57; 61)	[61; 65)
Giá trị đại diện	47	51	55	59	63
Số học sinh	4	5	7	7	5

Chú ý:

• Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.

• Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12	29	12	19	15	21	19	29	28	12	15	25	16	20	29
21	12	24	14	10	12	10	23	27	28	18	16	10	20	21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

2. Số trung bình

Các bạn học sinh lớp 11A1 trả lời 40 câu hỏi trong một bài kiểm tra. Kết quả được thống kê ở bảng sau:

Số câu trả lời đúng	[16; 21)	[21; 26)	[26; 31)	[31; 36)	[36; 41)
Số học sinh	4	6	8	18	4

a) Tính giá trị đại diện c_i, $1 \le i \le 5$, của từng nhóm số liệu.

b) Tính $n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5$.

c) Tính $\overline{x} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + n_4c_4 + n_5c_5}{40}$.

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Nhóm 1	Nhóm 2	...	Nhóm k
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau:

$$\overline{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Ví dụ 3. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Giải

Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A xấp xỉ bằng

$(2 . 152,5 + 6 . 157,5 + 12 . 162,5 + 4 . 167,5 + 1 . 172,5) : 25 = 161,7$ (g).

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng B xấp xỉ bằng

$(1 . 152,5 + 3 . 157,5 + 7 . 162,5 + 10 . 167,5 + 4 . 172,5) : 25 = 165,1$ (g).

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

2 Hãy ước lượng trung bình số câu trả lời đúng của các học sinh lớp 11A1 trong 2.

3 Hãy ước lượng cân nặng trung bình của học sinh trong Ví dụ 2 sau khi ghép nhóm và so sánh kết quả tìm được với cân nặng trung bình của mẫu số liệu gốc.

3. Mốt

3 Từ mẫu số liệu ở ▶, hãy cho biết khách hàng nam và khách hàng nữ ở khoảng tuổi nào mua bảo hiểm nhân thọ nhiều nhất. Ta có thể biết mốt của mẫu số liệu đó không?

Xét mẫu số liệu cho ở dạng Bảng 1.

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó ***mốt của mẫu số liệu ghép nhóm***, kí hiệu là M_o, được xác định bởi công thức

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 4. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m^2)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Giải

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [18; 22).

Do đó $u_m = 18$, $n_{m-1} = 78$, $n_m = 120$, $n_{m+1} = 45$, $u_{m+1} - u_m = 22 - 18 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 18 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{758}{39} \approx 19,4.$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá 19,4 triệu đồng/m^2 thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất.

Ví dụ 5. Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Giải

Do số cuộc gọi là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số cuộc gọi	[2,5; 5,5)	[5,5; 8,5)	[8,5; 11,5)	[11,5; 14,5)	[14,5; 17,5)
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [5,5; 8,5).

Do đó $u_m = 5,5$; $n_{m-1} = 5$; $n_m = 13$; $n_{m+1} = 7$; $u_{m+1} - u_m = 8,5 - 5,5 = 3$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 5,5 + \frac{13-5}{(13-5)+(13-7)} \cdot 3 = \frac{101}{14} \approx 7,2.$$

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng khả năng người đó thực hiện 7 cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

– Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

– Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

4 Hãy sử dụng dữ liệu ở để tư vấn cho đại lí bảo hiểm xác định khách hàng nam và nữ ở tuổi nào hay mua bảo hiểm nhất.

BÀI TẬP

1. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

2. Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

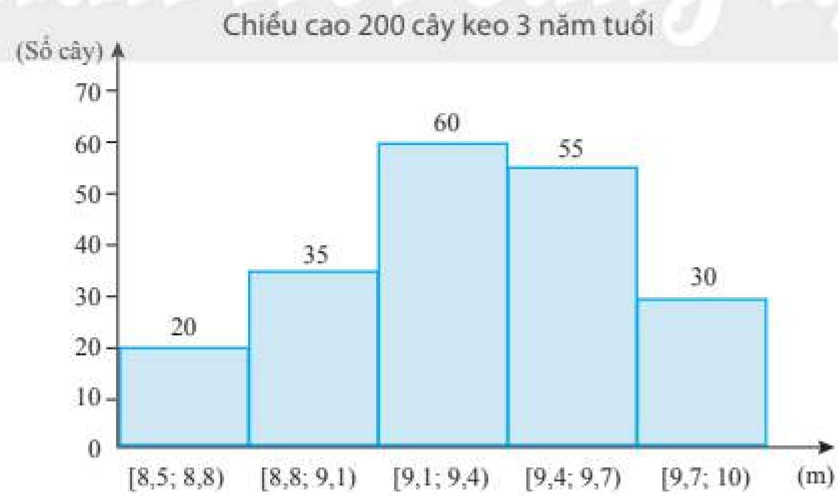
c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

3. Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

4. Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ khoá: Trung vị; Tứ phân vị.

Biểu đồ bên thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của các vận động viên hai đội bóng rổ Sao La và Kim Ngưu.

Hãy so sánh chiều cao của các vận động viên hai đội bóng theo số trung bình và trung vị.

1. Trung vị

a) Sử dụng biểu đồ ở ▶, hoàn thiện bảng thống kê sau:

Chiều cao (cm)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)	[185; 190)	[190; 195)
Đội Sao La	2	4	5	5	4
Đội Kim Ngưu	?	?	?	?	?

b) Tìm các nhóm chứa giá trị trung vị chiều cao thành viên mỗi đội.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{20}$ là chiều cao của 20 thành viên đội Sao La xếp theo thứ tự không giảm.

Từ bảng số liệu trên ta thấy $x_1, x_2 \in [170; 175); x_3, \ldots, x_6 \in [175; 180); x_7, \ldots, x_{11} \in [180; 185)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{20}$ là $\frac{1}{2}(x_{10} + x_{11})$ sẽ thuộc nhóm $[180; 185)$.

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ví dụ 1. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{25}$ là cân nặng của 25 quả bơ xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1 \in [150; 155)$; $x_2, \ldots, x_8 \in [155; 160)$; $x_9, \ldots, x_{20} \in [160; 165)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{25}$ là $x_{13} \in [160; 165)$.

Ta xác định được $n = 25$, $n_m = 12$, $C = 1 + 7 = 8$, $u_m = 160$, $u_{m+1} = 165$.

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 160 + \frac{\frac{25}{2} - 8}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

Ví dụ 2. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ chai nhựa	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)
Số học sinh	53	82	48	39	18

Số học sinh tham gia thu nhặt vỏ chai nhựa là

$$n = 53 + 82 + 48 + 39 + 18 = 240.$$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{240}$ lần lượt là số vỏ chai 240 học sinh khối 11 thu nhặt được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1, \ldots, x_{53} \in [10,5; 15,5)$; $x_{54}, \ldots, x_{135} \in [15,5; 20,5)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{240}$ là

$$\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121}) \in [15,5; 20,5).$$

Ta xác định được $n = 240$, $n_m = 82$, $C = 53$, $u_m = 15,5$, $u_{m+1} = 20,5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{240}{2} - 53}{82} \cdot (20,5 - 15,5) = \frac{803}{41} \approx 19,59.$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

1 Hãy trả lời câu hỏi ở ▶.

1 Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

2. Tứ phân vị

2 Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8;10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Trong 2, số vận động viên được khảo sát là $n = 3 + 8 + 12 + 12 + 4 = 39$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{39}$ là thời gian luyện tập của 39 vận động viên được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, x_2, x_3 \in [0; 2)$; $x_4, \ldots, x_{11} \in [2; 4)$; $x_{12}, \ldots, x_{23} \in [4; 6)$; $x_{24}, \ldots, x_{35} \in [6; 8)$; $x_{36}, \ldots, x_{39} \in [8; 10)$. Do đó đối với dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{39}$ thì

- Tứ phân vị thứ nhất là x_{10} thuộc nhóm [2; 4);
- Tứ phân vị thứ hai là x_{20} thuộc nhóm [4; 6);
- Tứ phân vị thứ ba là x_{30} thuộc nhóm [6; 8).

Ta nói nhóm [2; 4) là nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất; nhóm [4; 6) là nhóm chứa tứ phân vị thứ hai; nhóm [6; 8) là nhóm chứa tứ phân vị thứ ba.

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot \left(u_{m+1} - u_m\right).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot \left(u_{j+1} - u_j\right).$$

Ví dụ 3. Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu trong 2.

Giải

Nhắc lại: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{39}$ là thời gian luyện tập của 39 vận động viên.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{39}$ là $x_{20} \in [4; 6)$. Do đó tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 4 + \frac{\frac{2 \,.\, 39}{4} - (3+8)}{12} \cdot (6-4) = \frac{65}{12} \approx 5,417.$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{39}$ là $x_{10} \in [2; 4)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2 + \frac{\frac{1 \,.\, 39}{4} - 3}{8} \cdot (4-2) = \frac{59}{16} = 3,6875.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{39}$ là $x_{30} \in [6; 8)$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 6 + \frac{\frac{3 \,.\, 39}{4} - (3+8+12)}{12} \cdot (8-6) = \frac{169}{24} \approx 7,042.$$

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ví dụ 4. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

Giải

a) Do số lần gặp sự cố là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số lần gặp sự cố	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số xe	17	33	25	20	5

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \ldots, x_{17} \in [0,5; 2,5)$; $x_{18}, \ldots, x_{50} \in [2,5; 4,5)$; $x_{51}, \ldots, x_{75} \in [4,5; 6,5)$; $x_{76}, \ldots, x_{95} \in [6,5; 8,5)$; $x_{96}, \ldots, x_{100} \in [8,5; 10,5)$.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51})$. Do $x_{50} \in [2,5; 4,5)$ và $x_{51} \in [4,5; 6,5)$ nên tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_2 = 4,5$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm $[2,5; 4,5)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2,5 + \frac{\frac{1.100}{4} - 17}{33} \cdot (4,5 - 2,5) = \frac{197}{66} \approx 2,98.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76})$. Do $x_{75} \in [4,5; 6,5)$ và $x_{76} \in [6,5; 8,5)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 6,5$.

b) Do tứ phân vị thứ nhất $Q_1 \approx 2,98$ nên nhận định trên là hợp lí.

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.
Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.
Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

2 Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2 Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
b) Quản lí phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lí không?

BÀI TẬP

1. Lương tháng của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

2. Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Điểm số	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]
Số trận	?	?	?	?

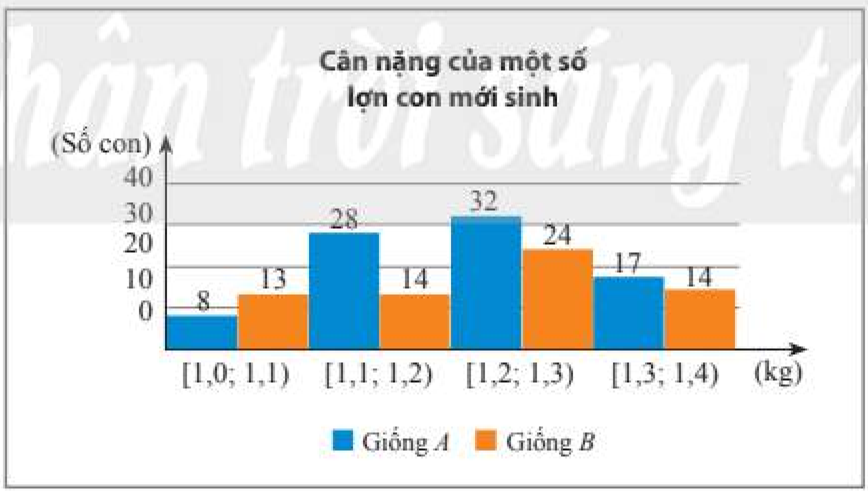
c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu từ bảng tần số ghép nhóm trên.

3. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

4. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

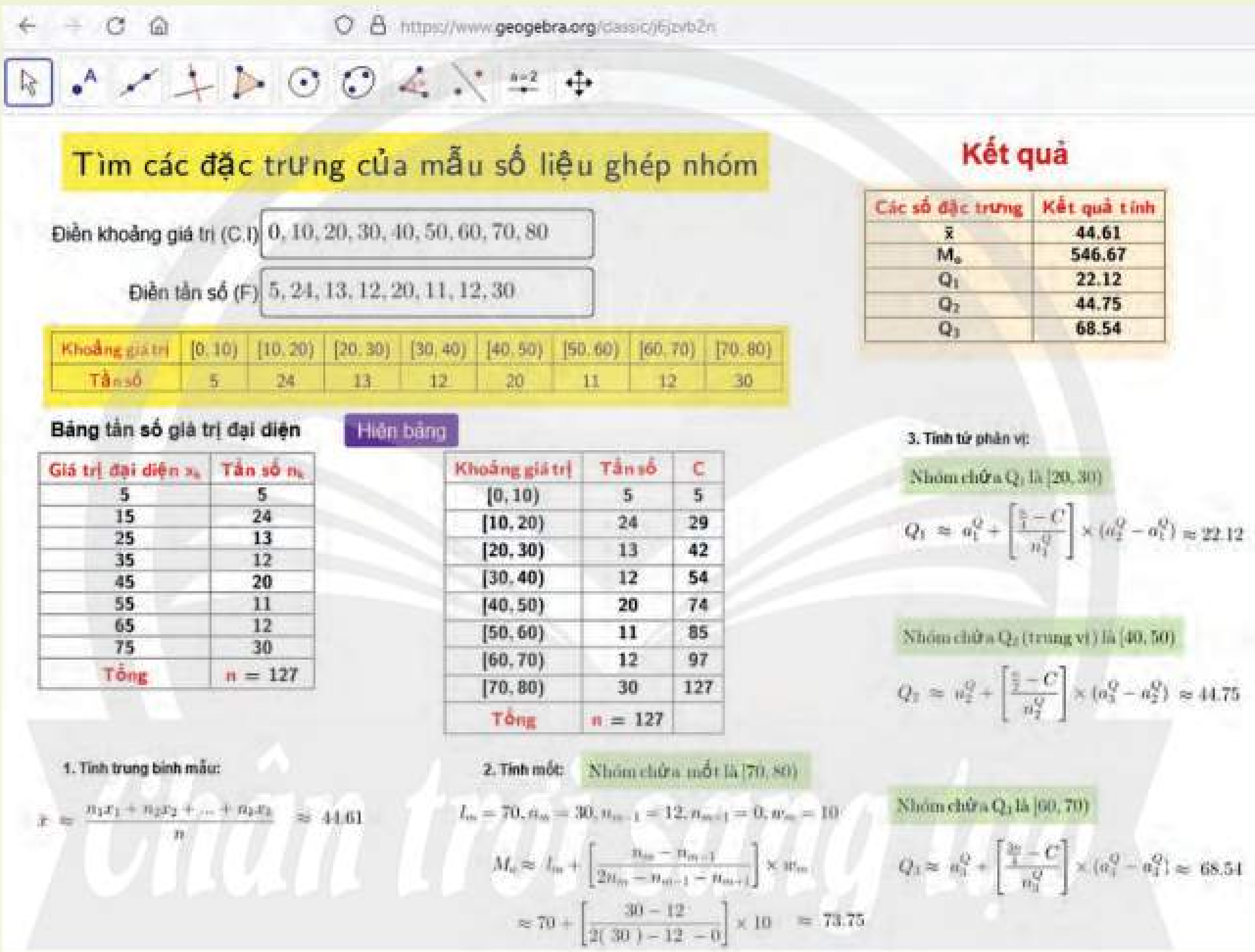
Bạn có biết?

Ở lớp 10 chúng ta đã được làm quen với phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị hàm số bậc hai và vẽ ba đường conic. Phần mềm GeoGebra còn có thể được dùng để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm.

Ví dụ, để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm, hãy vào địa chỉ

https://www.geogebra.org/classic/j6jzvb2n

em sẽ thấy chương trình như dưới đây.



Hướng dẫn sử dụng:

Nhập các đầu mút của mỗi nhóm lần lượt từ nhỏ đến lớn vào ô “Điền khoảng giá trị ($C.I$)”;

Nhập tần số tương ứng vào ô “Điền tần số (F)”.

Sau khi nhập xong dữ liệu trên, ấn vào nút Hiện bảng để xem các số đặc trưng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

1. Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. [7; 9). B. [9; 11). C. [11; 13). D. [13; 15).

2. Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. [7; 9). B. [9; 11). C. [11; 13). D. [13; 15).

3. Mốt của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. [7; 9). B. [9; 11). C. [11; 13). D. [13; 15).

4. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 7. B. 7,6. C. 8. D. 8,6.

5. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)	[8,5; 9)	[9; 9,5)	[9,5; 10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

7. Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)	[15; 17)
Số lần	2	5	7	6	3

a) Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.

b) Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được dưới 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không?

8. Tổng lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm):

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 234,2
165,9 165,9 134 173 169 189 254 168 255

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Xác định số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120; 175)	[175; 230)	[230; 285)	[285; 340)
Số năm	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và mốt của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

9. Bảng sau thống kê số ca nhiễm mới SARS-CoV-2 mỗi ngày trong tháng 12/2021 tại Việt Nam.

Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca
1	15 139	9	15 965	17	15 685	25	16 046
2	14 295	10	15 474	18	16 363	26	15 667
3	14 254	11	16 830	19	16 586	27	15 310
4	14 598	12	15 264	20	15 420	28	14 866
5	14 927	13	16 035	21	16 806	29	14 299
6	15 215	14	15 871	22	17 044	30	20 454
7	14 433	15	16 192	23	16 860	31	17 004
8	15 223	16	15 720	24	16 633		

(*Nguồn:* worldometers.info)

a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ?

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số ca (nghìn)	[14; 15,5)	[15,5; 17)	[17; 18,5)	[18,5; 20)	[20; 21,5)
Số ngày	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Bài 1. Tìm hiểu hàm số lượng giác bằng phần mềm GeoGebra

MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị của hàm số lượng giác.

– Dùng đồ thị giải thích tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn lẻ; tính tuần hoàn; chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số lượng giác.

– Ôn tập và minh hoạ các tính chất đã học về hàm số lượng giác.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 11, tập một – bộ sách Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

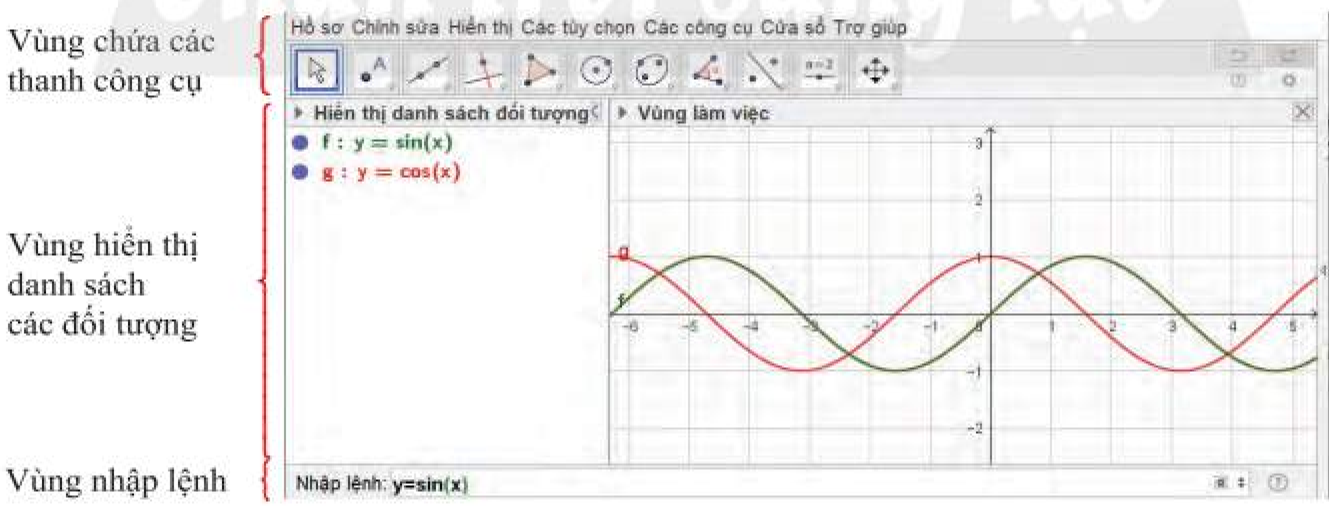
Để vẽ đồ thị trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên bốn vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;

2. Vùng hiển thị danh sách các đối tượng;

3. Vùng làm việc: chứa đồ thị vẽ được của các hàm số lượng giác;

4. Vùng nhập lệnh: để nhập công thức các hàm số và biểu thức.



Hình 1. Các vùng làm việc của GeoGebra Classic 5

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện các hoạt động sau:

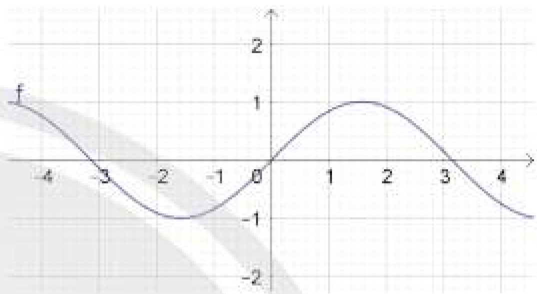
HOẠT ĐỘNG 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

Nhập phương trình theo cú pháp y = sin(x) vào vùng nhập lệnh (Hình 2).

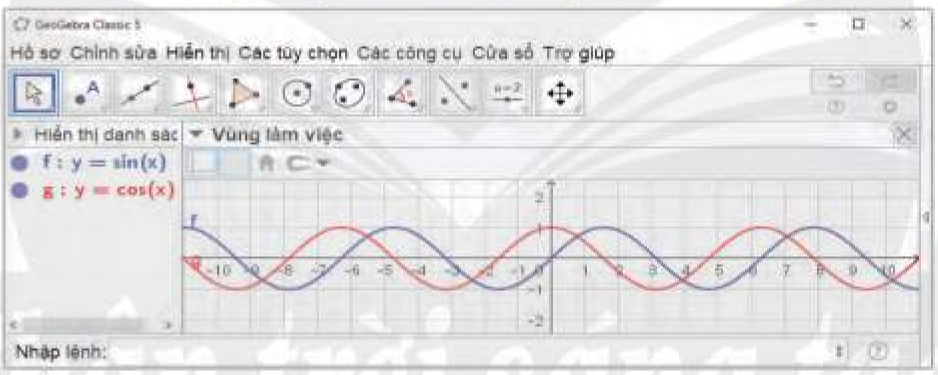
Hình 2



Ta có ngay đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên vùng làm việc như Hình 3.

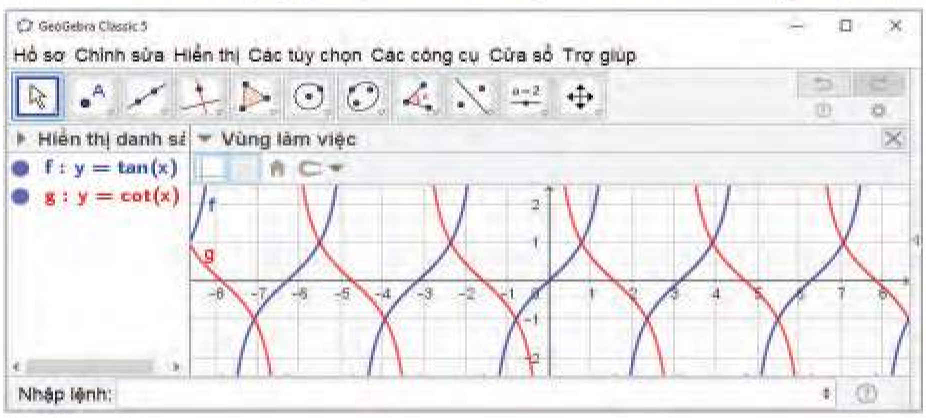
Hình 3

Vẽ đồ thị hàm số lượng giác $y = \cos x$ trên cùng hệ trục toạ độ với hàm số $y = \sin x$.



Hình 4

Vẽ đồ thị các hàm số lượng giác $y = \tan x$ và $y = \cot x$ trên cùng một hệ trục toạ độ.



Hình 5

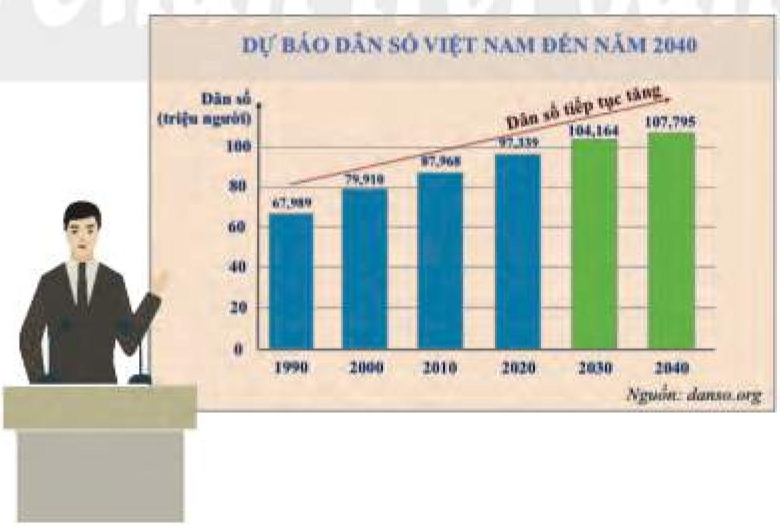
HOẠT ĐỘNG 2. Dùng đồ thị để giải thích tính chất của các hàm số lượng giác

Ví dụ

Hàm số	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Tập xác định	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
Tập giá trị	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Tính chẵn lẻ	Lẻ	Chẵn	Lẻ
Chu kì tuần hoàn	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$
Khoảng đồng biến trong một chu kì	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	$(\pi; 2\pi)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Khoảng nghịch biến trong một chu kì	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$	

3 Dùng đồ thị giải thích tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn lẻ; tính tuần hoàn; chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \cot x$.

Bài 2. Dùng công thức cấp số nhân để dự báo dân số



MỤC TIÊU

– Vận dụng công thức tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân để dự báo dân số.
– Tìm kiếm và sử dụng thông tin từ các nguồn có sẵn để làm dự báo.
– Vận dụng các kĩ năng thống kê để tổ chức, xử lí và biểu diễn dữ liệu.

CHUẨN BỊ

– Máy tính cầm tay hoặc máy tính để bàn, máy tính bảng, máy tính xách tay có cài phần mềm Microsoft Excel.
– Sách giáo khoa Toán 11, tập một – bộ sách Chân trời sáng tạo.

TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 4 đến 8 học sinh.

Nhóm trưởng phân công các thành viên trong nhóm thực hiện công việc theo các bước sau:

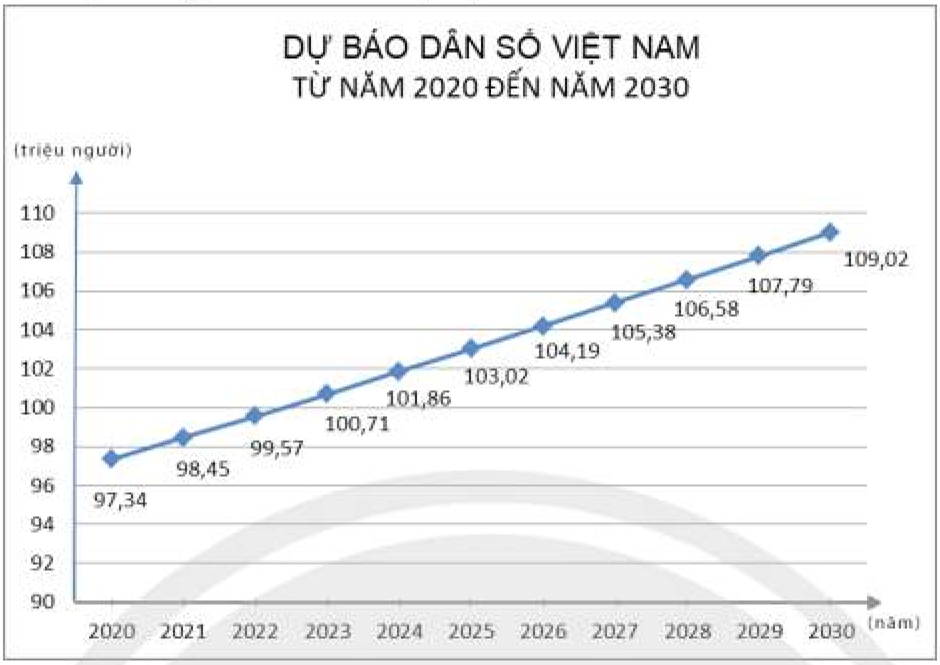
1. Tra cứu dân số Việt Nam ở thời điểm hiện tại. Ví dụ: Năm 2020, dân số Việt Nam là $A = P(1) = 97{,}34$ triệu người.
2. Tra cứu tỉ lệ phần trăm tăng dân số trung bình hằng năm. Ví dụ: $a\% = 1{,}14\%$. (Giả sử tỉ lệ này không đổi qua các năm.)
3. Chọn năm thứ n sau năm hiện tại muốn dự báo dân số. Ví dụ: $n = 5$.
4. Vận dụng công thức $P(n) = A(1 + a\%)^{n-1}$ để tính số hạng thứ n của một cấp số nhân có số hạng đầu là A và công bội là $q = (1 + a\%)$.

   Ví dụ: $P(5) = 97{,}34(1 + 1{,}14\%)^4 = 101{,}86$.
5. Lập bảng thống kê dự báo dân số từng năm từ 2020 đến 2030 theo mẫu sau:

DỰ BÁO DÂN SỐ VIỆT NAM ĐẾN NĂM 2030

NĂM	DÂN SỐ (triệu người)
2020	97,34
2021	98,45
2022	99,57
2023	100,71
2024	101,86
2025	103,02
2026	104,19
2027	105,38
2028	106,58
2029	107,79
2030	109,02

6. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu dự báo dân số theo các năm.



7. Các nhóm báo cáo, thuyết trình, giới thiệu sản phẩm của nhóm trước lớp.

Chú ý:

– Có thể dự báo dân số của địa phương, tỉnh, thành phố nơi đang sinh sống để tăng tính thời sự và kết nối.

– Có thể yêu cầu học sinh dự báo đồng thời một vài quốc gia để học sinh so sánh.

– Học sinh có thể trình bày trên giấy A_3 hoặc trình chiếu.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

C

Cấp số cộng

Một dãy số mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số không đổi.

Cấp số nhân

Một dãy số mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số không đổi.

Cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân có công bội q thoả mãn $|q| < 1$.

D

Dãy số

Là hàm số có tập xác định là tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ (dãy số vô hạn) hoặc tập hợp $\{1; 2; 3; \ldots; m\}$ gồm m số nguyên dương đầu tiên (dãy số hữu hạn).

Đ

Đường thẳng song song với mặt phẳng

Đường thẳng không có điểm chung với mặt phẳng đó.

Định lí Thalès trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Đường tròn lượng giác

Đường tròn có tâm tại gốc O của mặt phẳng Oxy và có bán kính bằng 1, cho phép mỗi góc lượng giác được biểu diễn bằng một điểm trên đường tròn này.

G

Giao tuyến của hai mặt phẳng

Đường thẳng tạo bởi tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

Giới hạn của dãy số

Số a là giới hạn của dãy số (u_n) nếu u_n gần a tuỳ ý khi n đủ lớn, nghĩa là $|u_n - a|$ nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Giới hạn của hàm số

Số L là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 nếu $f(x)$ gần L tuỳ ý khi x $(x \neq x_0)$ đủ gần x_0, nghĩa là $|f(x) - L|$ nhỏ hơn số dương tuỳ ý khi $|x - x_0|$ nhỏ hơn số dương nào đó $(x \neq x_0)$.

Góc lượng giác

Góc quét bởi tia Ox khi nó quay quanh điểm O từ vị trí tia Oa nào đó, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ (chiều dương) hoặc cùng chiều kim đồng hồ (chiều âm) và dừng lại ở vị trí tia Ob nào đó.

H

Hai đường thẳng chéo nhau

Hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng.

Hai đường thẳng đồng phẳng

Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Hai đường thẳng song song

Hai đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Hàm số chẵn

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số lẻ

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Hàm số liên tục

Một hàm số liên tục tại điểm x_0 nếu nó có giới hạn tại điểm x_0 và giới hạn đó bằng giá trị của hàm số tại điểm x_0.

Hàm số lượng giác

Các hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$.

Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $x \pm T \in D$ và $f(x + T) = f(x)$.

P

Phép chiếu song song

Cho đường thẳng l cắt mặt phẳng (P). Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l biến mỗi điểm M thành điểm M' trên mặt phẳng (P) theo quy tắc: vẽ đường thẳng qua M, song song hoặc trùng với l, cắt (P) tại điểm M'. Đường thẳng l được gọi là phương chiếu; mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu.

R

Radian

Là một đơn vị đo góc. Một radian là số đo của góc ở tâm đường tròn chắn một cung có độ dài bằng bán kính của đường tròn.

$$1 \text{ radian} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.$$

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG
Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG – HOÀNG CAO HIỀN
Trình bày bìa: TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ: XUÂN DƯƠNG – TRỌNG SƠN
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Toán 11 – Tập một (Chân trời sáng tạo)
Mã số:
In.........bản, (QĐ in số....) Khổ 19 × 26,5 cm.
Đơn vị in:.........................
Cơ sở in:...........................
Số ĐKXB:
Số QĐXB:......... ngày.... tháng.... năm 20....
In xong và nộp lưu chiểu tháng.... năm 20....
Mã số ISBN: Tập 1:
Tập 2:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 11, Tập một
2. Toán 11, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 11
4. Ngữ văn 11, Tập một
5. Ngữ văn 11, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
7. Tiếng Anh 11
   Friends Global - Student Book
8. Lịch sử 11
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
10. Địa lí 11
11. Chuyên đề học tập Địa lí 11
12. Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
13. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 11
14. Vật lí 11
15. Chuyên đề học tập Vật lí 11
16. Hoá học 11
17. Chuyên đề học tập Hoá học 11
18. Sinh học 11
19. Chuyên đề học tập Sinh học 11
20. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
21. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
22. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
23. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Âm nhạc 11
25. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
26. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (1)
27. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (2)
28. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.