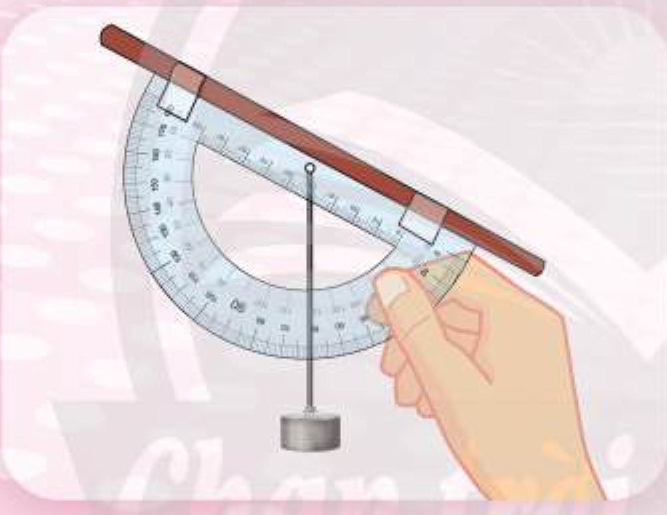
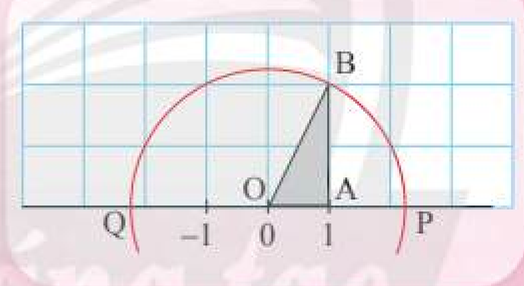
Chân trời sáng tạo

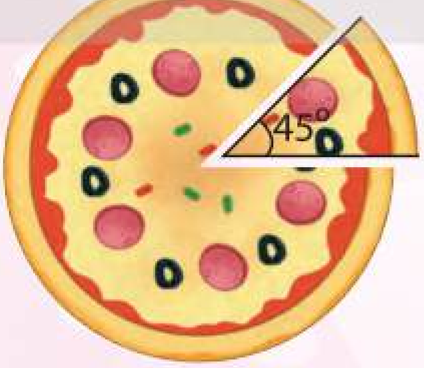
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN VĂN HIỂN – NGÔ HOÀNG LONG
HUỲNH NGỌC THANH – NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

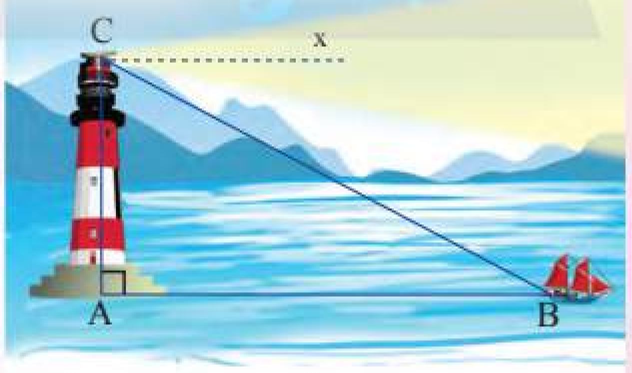
TOÁN 9

TẬP MỘT









NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 9

(Theo Quyết định số 1551/QĐ-BGDĐT ngày 05 tháng 6 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

ĐOÀN QUỲNH (Chủ tịch), NGUYỄN TIẾN QUANG (Phó Chủ tịch)
PHẠM ĐỨC TÀI (Uỷ viên, Thư kí), VŨ THỊ BÌNH – LÊ THỊ THU HÀ
TẠ MINH HIẾU – NGUYỄN THỊ HỢP – BÙI THỊ HẠNH LÂM
NGUYỄN VĂN NGƯ – VŨ ĐÌNH PHƯỢNG – TẠ CÔNG SƠN (Uỷ viên)

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGUYỄN VĂN HIỂN – NGÔ HOÀNG LONG
HUỲNH NGỌC THANH – NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

TOÁN

(Bản in thử)

9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý một số vấn đề giúp học sinh tìm ra kiến thức mới.
	Kiến thức trọng tâm
Thực hành	Giúp học sinh làm những bài tập cơ bản áp dụng kiến thức vừa học.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức đã biết vào một tình huống, điều kiện mới hoặc để giải quyết vấn đề.
	Các kiến thức, kĩ năng học sinh đạt được sau mỗi bài học.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Sách Toán 9 thuộc bộ sách giáo khoa **Chân trời sáng tạo** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cấu trúc sách Toán 9 được chia thành hai tập.

Tập một bao gồm hai phần:

Số và Đại số gồm ba chương: *Phương trình và hệ phương trình; Bất đẳng thức. Bất phương trình bậc nhất một ẩn; Căn thức.*

Hình học và Đo lường gồm hai chương: *Hệ thức lượng trong tam giác vuông; Đường tròn.*

Cấu trúc mỗi bài học thường được thống nhất theo các bước: khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng và cuối mỗi bài học có nội dung để học sinh tự đánh giá. Các bài học sẽ tạo nên môi trường học tập tương tác tích cực; đồng thời khai thác được các ứng dụng công nghệ thông tin vào học Toán.

Nội dung sách hướng đến mục đích đảm bảo dễ dạy, dễ học, gắn Toán học với thực tiễn. Các hoạt động học tập được chọn lọc phù hợp với lứa tuổi và khả năng nhận thức của học sinh, thể hiện tinh thần tích hợp, gắn bó môn Toán với các môn học khác, đáp ứng được nhu cầu của học sinh trên mọi miền đất nước.

Chúng tôi tin tưởng rằng với cách biên soạn này, sách giáo khoa Toán 9 sẽ hỗ trợ giáo viên hạn chế được những khó khăn trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các em học sinh hứng thú hơn khi học tập.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo, phụ huynh và các em học sinh để sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Phần SỐ VÀ ĐẠI SỐ

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Trong chương này, các em sẽ tìm hiểu về phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn với hai dạng là phương trình tích và phương trình chứa ẩn ở mẫu. Các em cũng sẽ tìm hiểu về phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn và giải quyết một số vấn đề thực tiễn liên quan đến các phương trình, hệ phương trình đó.

Việc lập và giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có thể cần thiết để lập kế hoạch sản xuất.

Bài 1 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Độ cao h (mét) của một quả bóng gôn sau khi được đánh t giây được cho bởi công thức $h = t(20 - 5t)$. Có thể tính được thời gian bay của quả bóng từ khi được đánh đến khi chạm đất không?

1. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

1 Cho phương trình $(x + 3)(2x - 5) = 0$. (1)

a) Các giá trị $x = -3$, $x = \frac{5}{2}$ có phải là nghiệm của phương trình không? Tại sao?

b) Nếu số x_0 khác -3 và khác $\frac{5}{2}$ thì x_0 có phải là nghiệm của phương trình không? Tại sao?

Phương trình (1) được gọi là *phương trình tích*.
Để giải phương trình (1), ta giải hai phương trình $x + 3 = 0$ và $2x - 5 = 0$, rồi lấy các nghiệm của hai phương trình này.
Từ 1, ta có cách giải phương trình tích như sau:

Muốn giải phương trình $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$, ta giải hai phương trình $a_1x + b_1 = 0$ và $a_2x + b_2 = 0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $3x(x + 7) = 0$; b) $(x - 5)(2x - 4) = 0$.

Giải

a) Ta có: $3x(x + 7) = 0$

$3x = 0$ hoặc $x + 7 = 0$

$x = 0$ hoặc $x = -7$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -7$.

b) Ta có: $(x - 5)(2x - 4) = 0$

$x - 5 = 0$ hoặc $2x - 4 = 0$

$x = 5$ hoặc $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 5$ và $x = 2$.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp, để giải một phương trình, ta biến đổi để đưa phương trình đó về dạng phương trình tích.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $x^2 + 7x = 0$; b) $(3x + 2)^2 - 4x^2 = 0$.

Giải

a) Ta có: $x^2 + 7x = 0$

$x(x + 7) = 0$

$x = 0$ hoặc $x + 7 = 0$

$x = 0$ hoặc $x = -7$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -7$.

b) Ta có: $(3x + 2)^2 - 4x^2 = 0$

$(3x + 2 + 2x)(3x + 2 - 2x) = 0$

$(5x + 2)(x + 2) = 0$

$5x + 2 = 0$ hoặc $x + 2 = 0$

$x = -\dfrac{2}{5}$ hoặc $x = -2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\dfrac{2}{5}$ và $x = -2$.

Thực hành 1. Giải các phương trình:

a) $(x - 7)(5x + 4) = 0$; b) $(2x + 9)\left(\dfrac{2}{3}x - 5\right) = 0$.

Thực hành 2. Giải các phương trình:

a) $2x(x + 6) + 5(x + 6) = 0$; b) $x(3x + 5) - 6x - 10 = 0$.

Vận dụng 1. Giải bài toán trong (trang 6).

2. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

2 Xét hai phương trình

$$2x + \frac{1}{x-2} - 4 = \frac{1}{x-2} \quad (1) \qquad \text{và} \qquad 2x - 4 = 0 \quad (2).$$

a) Có thể biến đổi như thế nào để chuyển phương trình (1) về phương trình (2)?

b) $x = 2$ có là nghiệm của phương trình (2) không? Tại sao?

c) $x = 2$ có là nghiệm của phương trình (1) không? Tại sao?

Trong 2, phương trình (1) chứa ẩn trong mẫu thức của phân thức $\dfrac{1}{x-2}$ nên ta nói (1) là phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình (1) có điều kiện xác định là $x - 2 \neq 0$ hay $x \neq 2$.

Tổng quát, ta có định nghĩa:

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 gọi là *điều kiện xác định của phương trình*.

Nhận xét: Những giá trị của ẩn không thoả mãn điều kiện xác định thì không thể là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{x+3}=1$;   b) $\frac{-2x}{2x+5}=\frac{1}{4-x}-1$.

Giải

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x + 3 \neq 0$ hay $x \neq -3$.

b) Ta có $2x + 5 \neq 0$ khi $x \neq \frac{-5}{2}$ và $4 - x \neq 0$ khi $x \neq 4$.

Vậy điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{-5}{2}$ và $x \neq 4$.

Thực hành 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{5}{x+7}=\frac{-14}{x-5}$;   b) $\frac{3}{3x-2}=\frac{x}{x+2}-1$.

3 Cho phương trình $\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x+1}+1$.

a) Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

b) Xét các phép biến đổi như sau:

$$\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x+1}+1$$
$$\frac{x}{x-2}=\frac{x+2}{x+1}$$
$$\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$x^2+x=x^2-4$$
$$x=-4$$

Hãy giải thích cách thực hiện mỗi phép biến đổi trên.

c) $x = -4$ có là nghiệm của phương trình đã cho không?

Từ 3, một cách tổng quát, ta có cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu như sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.
Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.
Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.
Bước 4: Xét mỗi giá trị tìm được ở Bước 3, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định thì đó là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-2}{x}=2;$ b) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x+5}{(x-2)(x+1)}.$

Giải

a) Điều kiện xác định: $x \neq 3$ và $x \neq 0$.

Ta có: $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-2}{x}=2$

$$\dfrac{(x+3)x}{x(x-3)}+\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)}=\dfrac{2x(x-3)}{x(x-3)}$$

$$(x+3)x+(x-2)(x-3)=2x(x-3)$$

$$x^2+3x+x^2-3x-2x+6=2x^2-6x$$

$$4x=-6$$

$x=-\dfrac{3}{2}$ (thoả mãn điều kiện xác định).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{3}{2}$.

b) Điều kiện xác định: $x \neq 2$ và $x \neq -1$.

Ta có: $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$

$$3(x+1)+2(x-2)=2x+5$$

$$3x+3+2x-4=2x+5$$

$$3x=6$$

$x=2$ (không thoả mãn điều kiện xác định).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Thực hành 4. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x+6}{x+5}+\dfrac{3}{2}=2;$ b) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{3x-20}{(x-3)(x-2)}.$

Vận dụng 2. Hai thành phố A và B cách nhau 120 km. Một ô tô di chuyển từ A đến B, rồi quay trở về A với tổng thời gian đi và về là 4 giờ 24 phút. Tính tốc độ lúc đi của ô tô, biết tốc độ lúc về lớn hơn tốc độ lúc đi 20%.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $5x(2x-3)=0;$ b) $(2x-5)(3x+6)=0;$

c) $\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)=0;$ d) $(2{,}5t-7{,}5)(0{,}2t+5)=0.$

2. Giải các phương trình:

a) $3x(x-4)+7(x-4)=0;$ b) $5x(x+6)-2x-12=0;$

c) $x^2-x-(5x-5)=0;$ d) $(3x-2)^2-(x+6)^2=0.$

3. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x+5}{x-3}+2=\dfrac{2}{x-3};$ b) $\dfrac{3x+5}{x+1}+\dfrac{2}{x}=3;$

c) $\dfrac{x+3}{x-2}+\dfrac{x+2}{x-3}=2;$ d) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{16}{x^2-4}.$

4. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60 km. Sau 1 giờ 40 phút, trên cùng quãng đường đó, một xe máy cũng đi từ A đến B và đến B sớm hơn xe đạp 1 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 3 lần tốc độ của xe đạp.

5. Một xí nghiệp dự định chia đều 12 600 000 đồng để thưởng cho các công nhân tham gia hội thao nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thao chỉ có 80% số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thao được nhận thêm 105 000 đồng. Tính số công nhân dự định tham gia lúc đầu.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Giải được phương trình tích có dạng $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$.

– Giải được phương trình chứa ẩn ở mẫu quy về phương trình bậc nhất.

Bài 2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài toán cổ:

Một đàn em nhỏ đứng bên sông
To nhỏ bàn nhau chuyện chia hồng
Mỗi người năm trái thừa năm trái
Mỗi người sáu trái một người không
Hỏi người bạn trẻ đang dừng bước
Có mấy em thơ, mấy trái hồng?

Làm thế nào để tính được số em nhỏ (em thơ) và số trái hồng?

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Để chuyển đổi từ độ F (kí hiệu x) sang độ C (kí hiệu y), ta dùng công thức:

$$y = \frac{5}{9}(x - 32).$$

a) Biến đổi công thức trên về dạng $x - 1,8y = 32$. (1)

b) Hỏi 20 °C tương ứng với bao nhiêu độ F?

c) Hỏi 98,6 °F tương ứng với bao nhiêu độ C?

Ta gọi (1) là *phương trình bậc nhất hai ẩn* x *và* y.
Khi x = 68 và y = 20 thì hai vế của (1) có giá trị bằng nhau, đều bằng 32. Ta nói cặp số (68; 20) là một *nghiệm* của phương trình (1).
Tổng quát, ta có định nghĩa:

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức có dạng

$$ax + by = c,$$

trong đó a, b, c là các số đã biết (gọi là hệ số), a và b không đồng thời bằng 0.
Nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình.
Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

a) $3x + 5y = -3$; b) $0x - 2y = 7$; c) $-4x + 0y = 5$; d) $0x + 0y = 8$.

Giải

a) $3x + 5y = -3$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 3$, $b = 5$, $c = -3$.

b) $0x - 2y = 7$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 0$, $b = -2$, $c = 7$.

c) $-4x + 0y = 5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = -4$, $b = 0$, $c = 5$.

d) $0x + 0y = 8$ không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = 0$ và $b = 0$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $3x - y = 1$. Trong hai cặp số (1; 2) và (1; – 2), cặp số nào là nghiệm của phương trình đã cho?

Giải

Cặp số (1; 2) là nghiệm của phương trình đã cho vì $3 . 1 - 2 = 1$.

Cặp số (1; –2) không là nghiệm của phương trình đã cho vì $3 . 1 - (-2) = 5 \neq 1$.

Chú ý:

a) Mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tất cả các nghiệm của phương trình đó được biểu diễn bởi một đường thẳng.

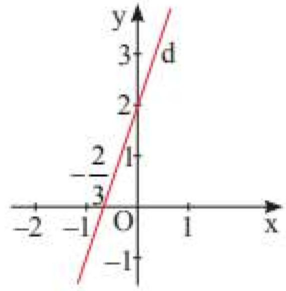
Ví dụ 3. Biểu diễn tất cả các nghiệm của mỗi phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) $-3x + y = 2$; b) $0x + y = -2$; c) $2x + 0y = 3$.

Giải

a) Viết lại phương trình thành $y = 3x + 2$.

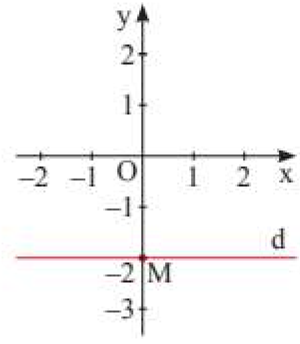
Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d: $y = 3x + 2$ (Hình 1).



Hình 1

b) Viết lại phương trình thành y = –2.

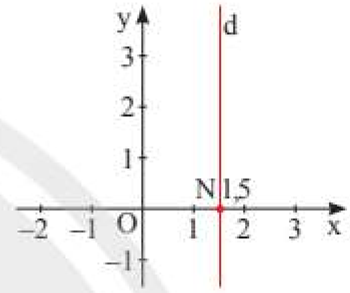
Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Oy tại điểm M(0; –2) (Hình 2).



Hình 2

c) Viết lại phương trình thành x = 1,5.

Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Ox tại điểm N(1,5; 0) (Hình 3).



Hình 3

Thực hành 1. Xác định các hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $x + 5y = -4$; b) $\sqrt{3}x + y = 0$; c) $0x - \frac{3}{2}y = 6$; d) $2x + 0y = -1,5$.

Thực hành 2. Cho phương trình $3x + 2y = 4$. (1)

a) Trong hai cặp số (1; 2) và (2; –1), cặp số nào là nghiệm của phương trình (1)?

b) Tìm y_0 để cặp số (4; y_0) là nghiệm của phương trình (1).

c) Tìm thêm hai nghiệm của phương trình (1).

d) Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình (1) trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

2 Một ô tô đi từ A đến B, cùng lúc đó một xe máy đi từ B về A. Gọi x (km/h) là tốc độ của ô tô, y (km/h) là tốc độ của xe máy (x > 0, y > 0). Biết rằng:

(1) Tốc độ của ô tô hơn tốc độ xe máy 15 km/h;

(2) Quãng đường AB dài 210 km và hai xe gặp nhau sau 2 giờ.

a) Từ dữ kiện (1), hãy lập một phương trình hai ẩn x, y.

b) Từ dữ kiện (2), hãy lập thêm một phương trình hai ẩn x, y.

c) Bạn An khẳng định rằng tốc độ của ô tô và xe máy lần lượt là 60 km/h và 45 km/h. Có thể dùng hai phương trình lập được để kiểm tra khẳng định của bạn An là đúng hay sai không?

Trong , ta lập được hai phương trình bậc nhất hai ẩn là $x - y = 15$ và $2x + 2y = 210$.
Hai phương trình này tạo thành hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn được viết là

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 210. \end{cases}$$

Tổng quát, ta có định nghĩa:

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c'. & (2) \end{cases}$$

Trong đó, a, b, c, a′, b′, c′ là các số đã biết (gọi là hệ số), a và b không đồng thời bằng 0, a′ và b′ không đồng thời bằng 0.

Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2) thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của hệ (I).

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

Ví dụ 4. Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số của mỗi hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

a) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = -4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0x + 0y = -5 \\ 2x + 7y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 0y = 0 \\ 0x - 3y = 1. \end{cases}$

Giải

a) Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ và $a' = 2$, $b' = 1$, $c' = -4$.

b) Hệ phương trình $\begin{cases} 0x + 0y = -5 \\ 2x + 7y = 3; \end{cases}$ không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = b = 0$.

c) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 0y = 0 \\ 0x - 3y = 1. \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ và $a' = 0$, $b' = -3$, $c' = 1$.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 3y = -1. \end{cases}$

Trong hai cặp số (2; 1) và (–1; 3), cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

Giải

Cặp số (2; 1) là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 2 \,.\, 2 + 3 \,.\, 1 = 7 \\ 2 - 3 \,.\, 1 = -1. \end{cases}$

Cặp số (–1; 3) không là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, 3 = 7 \\ -1 - 3 \,.\, 3 = -10 \, (\neq -1). \end{cases}$

Thực hành 3. Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = -4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3}x + 0y = -5 \\ 0x + \dfrac{4}{5}y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 0x + 0y = 9. \end{cases}$

Thực hành 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 5y = 10 \\ 2x - y = -13. \end{cases}$

Trong hai cặp số (0; 2) và (–5; 3), cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

Vận dụng. Đối với bài toán trong (trang 10), nếu gọi x là số em nhỏ, y là số quả hồng thì ta nhận được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn nào?

BÀI TẬP

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

a) $2x + 5y = -7$; b) $0x - 0y = 5$; c) $0x - \dfrac{5}{4}y = 3$; d) $0{,}2x + 0y = -1{,}5$.

2. Trong các cặp số (1; 1), (–2; 5), (0; 2), cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau?

a) $4x + 3y = 7$; b) $3x - 4y = -1$.

3. Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của mỗi phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) $2x + y = 3$; b) $0x - y = 3$; c) $-3x + 0y = 2$; d) $-2x + y = 0$.

4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7. \end{cases}$

Cặp số nào dưới đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) (2; 2); b) (1; 2); c) (–1; –2).

5. Cho hai đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$.

a) Vẽ hai đường thẳng đó trên cùng mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Xác định toạ độ giao điểm A của hai đường thẳng trên.

c) Toạ độ của điểm A có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ không? Tại sao?

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nhận biết được khái niệm nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 3 GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tại một cửa hàng, chị An mua 1,2 kg thịt lợn và 0,7 kg thịt bò hết 362 000 đồng; chị Ba mua 0,8 kg thịt lợn và 0,5 kg thịt bò cùng loại hết 250 000 đồng. Làm thế nào để tính được giá tiền 1 kg mỗi loại thịt lợn và thịt bò?

1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

1

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ -2x + 3y = -1. & (2) \end{cases}$

Thực hiện giải hệ phương trình này theo hướng dẫn sau:

– Từ phương trình (1), hãy biểu diễn x theo y.

– Thế x được biểu diễn ở trên vào phương trình (2), để nhận được một phương trình ẩn y.

– Giải phương trình ẩn y đó, rồi suy ra nghiệm của hệ.

Cách giải như trên gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp thế*.

Tổng quát, để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, ta biểu diễn ẩn này theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để nhận được một phương trình một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn đó rồi suy ra nghiệm của hệ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 3 & (1) \\ -2x - 3y = 5. & (2) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (1), ta có $y = 3 - 3x$. (3)

Thay $y = 3 - 3x$ vào phương trình (2), ta được: $-2x - 3(3 - 3x) = 5$.

Giải phương trình này, ta được $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình (3), ta được $y = -3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; -3)$.

Chú ý:

Ta có thể trình bày việc giải hệ phương trình trên như sau:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ -2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ -2x - 3(3 - 3x) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ 7x = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (2; –3) hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases}$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1. \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4x + 2(1 - 2x) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 0x = 0 \end{cases}$$

Phương trình $0x = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. Các nghiệm của hệ được viết như sau: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - 2x. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2(2y + 4) - 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 0y = -7 \end{cases}$$

Phương trình $0y = -7$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Thực hành 1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -2x + y = 11; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4. \end{cases}$

2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

2 Cho hai hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x + y = 5; \end{cases} \text{(I)} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases} \text{(II)}$$

a) Giải hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế. Có nhận xét gì về nghiệm của hai hệ này?

b) Bằng cách cộng từng vế hai phương trình của hệ (II), ta nhận được một phương trình mới. Thay phương trình thứ nhất của hệ (II) bằng phương trình mới đó. Có nhận xét gì về kết quả nhận được?

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ -x + y = 3. \end{cases}$

Để giải hệ phương trình trên, ta làm như sau:

– Nhân hai vế phương trình thứ hai của hệ với 2, ta được

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ -2x + 2y = 6. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ này, ta được phương trình $3x = 9$. Suy ra $x = 3$.

– Thay $x = 3$ vào phương trình $-x + y = 3$, ta được $-3 + y = 3$, do đó $y = 6$.

– Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6. \end{cases}$

Cách giải như trên gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.*

Tổng quát, để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ để được một phương trình một ẩn và giải phương trình đó.

Bước 3: Thế giá trị của ẩn tìm được ở Bước 2 vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Kết luận nghiệm của hệ.

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + 3y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

Giải

a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $3x = 6$. Suy ra $x = 2$.

Thay x = 2 vào phương trình thứ hai của hệ, ta được 2 + 3y = 11. Do đó y = 3.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (2; 3).

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2, nhân hai vế của phương trình thứ hai với –3, ta được

$$\begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ -6x - 9y = -9. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được – 5y = 5. Suy ra y = – 1.

Thay y = – 1 vào phương trình 3x + 2y = 7, ta được 3x + 2 . (– 1) = 7. Do đó x = 3.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (3; –1).

Thực hành 2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 2x + 3y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 6x - 4y = 11. \end{cases}$

Vận dụng 1. Xác định a, b để đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm A(2; –2) và B(–1; 3).

3. TÌM NGHIỆM CỦA HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Để tìm nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng máy tính cầm tay thích hợp, ta thực hiện như sau:

– Ấn nút ON để khởi động máy.

– Ấn nút MODE, màn hình máy sẽ hiện ra các dòng như hình sau:

```
1:COMP    2:CMPLX
3:STAT    4:BASE-N
5:EQN     6:MATRIX
7:TABLE   8:VECTOR
```

– Ấn nút 5, màn hình sẽ hiện ra các dòng:

```
1:anX+bnY=cn
2:anX+bnY+cnZ=dn
3:aX²+bX+c=0
4:aX³+bX²+cX+d=0
```

– Ấn nút 1, rồi nhập các hệ số.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của hệ phương trình sau bằng máy tính cầm tay $\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ -3x + y = -11. \end{cases}$

Giải

– Ấn nút ON để khởi động máy.

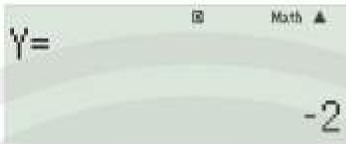
– Ấn nút MODE, ấn nút 5, ấn nút 1, rồi nhập các hệ số như sau:

2 = 5 = (−) 4 =

(−) 3 = 1 = (−) 1 1 = =

Màn hình hiện ra kết quả như hình sau:

Ấn =, kết quả như hình sau:



Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (3; –2).

Chú ý: Khi hệ phương trình vô nghiệm hoặc vô số nghiệm, máy sẽ báo các dòng chữ tương ứng.

Thực hành 3. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau bằng máy tính cầm tay:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 5y = -19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + 5y = 12 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

3 Hai lớp 9A và 9B có tổng số 82 học sinh. Trong dịp tết trồng cây năm 2022, mỗi học sinh lớp 9A trồng được 3 cây, mỗi học sinh lớp 9B trồng được 4 cây nên cả hai lớp trồng được tổng số 288 cây.

Gọi x, y lần lượt là số học sinh lớp 9A và lớp 9B ($x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$).

a) Từ dữ liệu đã cho, lập hai phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị số học sinh của hai lớp và số cây trồng được.

b) Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn và cho biết mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Trong 3, ta tìm được số học sinh của mỗi lớp bằng cách lập và giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Tổng quát, để giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Lập hệ phương trình.

– Chọn hai ẩn biểu thị hai đại lượng chưa biết và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn.

– Biểu diễn các đại lượng liên quan theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình nhận được.

Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được ở Bước 2 có thoả mãn điều kiện của ẩn hay không, rồi trả lời bài toán.

Ví dụ 5. Hai ngăn của một kệ sách có tổng cộng 400 cuốn sách. Nếu chuyển 80 cuốn sách từ ngăn thứ nhất sang ngăn thứ hai thì số sách ở ngăn thứ hai gấp 3 lần số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số sách ở ngăn thứ nhất, ngăn thứ hai lúc đầu ($x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$).
Tổng số sách ở hai ngăn là 400 cuốn, nên ta có phương trình

$$x + y = 400. \qquad (1)$$

Sau khi chuyển thì số sách ở ngăn thứ hai gấp 3 lần số sách ở ngăn thứ nhất, nên ta có phương trình

$$y + 80 = 3(x - 80). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ y + 80 = 3(x - 80). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 180 \\ y = 220 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy lúc đầu ngăn thứ nhất có 180 cuốn sách, ngăn thứ hai có 220 cuốn sách.

Ví dụ 6. Cân bằng phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.

$$P + O_2 \to P_2O_5$$

Giải

Gọi x, y lần lượt là hệ số của P và O_2 thoả mãn cân bằng phương trình hoá học

$$xP + yO_2 \to P_2O_5$$

Cân bằng số nguyên tử P, số nguyên tử O ở hai vế, ta được hệ

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $x = 2$, $y = \frac{5}{2}$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hoá học, ta có

$$2P + \frac{5}{2}O_2 \to P_2O_5$$

Do các hệ số của phương trình hoá học phải là số nguyên nên nhân hai vế của phương trình hoá học trên với 2, ta được

$$4P + 5O_2 \to 2P_2O_5$$

Thực hành 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 64 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 88 m^2. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn đó.

Thực hành 5. Cân bằng phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.

$$NO + O_2 \to NO_2$$

Vận dụng 2. Giải bài toán trong (trang 15).

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ 2x - y = -8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ -3y = 5. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y\sqrt{2} = 0 \\ 2x + y\sqrt{2} = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5. \end{cases}$

3. Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) A(1; 2) và B(3; 8); b) A(2; 1) và B(4; –2).

4. Trong tháng thứ nhất, hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. So với tháng thứ nhất, trong tháng thứ hai, tổ một sản xuất vượt 15%, tổ hai sản xuất vượt 20% nên trong tháng này, cả hai tổ đã sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

5. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo khoác xuất khẩu. Nếu tổ thứ nhất may trong 7 ngày và tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1 540 chiếc áo. Biết rằng mỗi ngày tổ thứ hai may được nhiều hơn tổ thứ nhất 20 chiếc áo. Hỏi trong một ngày mỗi tổ may được bao nhiêu chiếc áo? (Năng suất may áo của mỗi tổ trong các ngày là như nhau.)

6. Trên một cánh đồng, người ta cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 660 tấn thóc. Hỏi năng suất lúa giống mới trên 1 ha bằng bao nhiêu? Biết rằng 3 ha trồng lúa giống mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa giống cũ là 3 tấn.

7. Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.

a) $Ag + Cl_2 \rightarrow AgCl$ b) $CO_2 + C \rightarrow CO$

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Giải được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.
– Tìm được nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng máy tính cầm tay.
– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Tất cả các nghiệm của phương trình $(x + 3)(2x - 6) = 0$ là

A. $x = -3$. B. $x = 3$. C. $x = 3$ và $x = -3$. D. $x = 2$.

2. Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{2x+3}{x-4} + 2 = \dfrac{1}{x-3}$ là

A. $x \neq 4$. B. $x \neq 3$. C. $x \neq 4$ và $x \neq 3$. D. $x = 4$ và $x = 3$.

3. Nghiệm của phương trình $\dfrac{x+2}{x-4} - 1 = \dfrac{30}{(x+3)(x-4)}$ là

A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $x = 4$. D. $x = -2$.

4. Phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $5x - y = 3$. B. $\sqrt{5}x + 0y = 0$. C. $0x - 4y = \sqrt{6}$. D. $0x + 0y = 12$.

5. Đường thẳng biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3x - y = 2$

A. vuông góc với trục tung. B. vuông góc với trục hoành.

C. đi qua gốc toạ độ. D. đi qua điểm $A(1; 1)$.

6. Cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 4. \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 8. \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7. \end{cases}$ D. $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

7. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 7y = -13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \dfrac{2}{3}y = 3\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

8. Giải các phương trình:

a) $(5x + 2)(2x - 7) = 0$; b) $\left(\dfrac{1}{2}x + 5\right)\left(-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}\right) = 0$;

c) $y^2 - 5y + 2(y - 5) = 0$; d) $9x^2 - 1 = (3x - 1)(2x + 7)$.

9. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3x+4}{(x+2)(x-1)}$; b) $\dfrac{4}{2x-3} - \dfrac{3}{x(2x-3)} = \dfrac{5}{x}$;

c) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{3x-5}{x^2-9}$; d) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{8}{x^2-1}$.

10. Tìm hai số nguyên dương biết tổng của chúng bằng 1 006, nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư là 124.

11. Ở giải bóng đá Ngoại hạng Anh mùa giải 2003 – 2004, đội Arsenal đã thi đấu 38 trận mà không thua trận nào và giành chức vô địch với 90 điểm. Biết rằng với mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không có điểm và nếu hai đội hoà nhau thì mỗi đội được 1 điểm. Mùa giải đó đội Arsenal đã giành được bao nhiêu trận thắng?

12. Nhân kỉ niệm ngày Quốc khánh 2/9, một nhà sách giảm giá mỗi cây bút bi là 20% và mỗi quyển vở là 10% so với giá niêm yết. Bạn Thanh vào nhà sách mua 20 quyển vở và 10 cây bút bi. Khi tính tiền, bạn Thanh đưa 175 000 đồng và được trả lại 3 000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút bi, biết rằng tổng số tiền phải trả nếu không được giảm giá là 195 000 đồng.

13. Giải bài toán cổ sau:

Quýt, cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui
Chia ba mỗi quả quýt rồi
Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh
Trăm người, trăm miếng ngọt lành
Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

14. Trong một xí nghiệp, hai tổ công nhân A và B lắp ráp cùng một loại bộ linh kiện điện tử. Nếu tổ A lắp ráp trong 5 ngày, tổ B lắp ráp trong 4 ngày thì xong 1900 bộ linh kiện. Biết rằng mỗi ngày tổ A lắp ráp được nhiều hơn tổ B 20 bộ linh kiện. Hỏi trong một ngày mỗi tổ ráp được bao nhiêu bộ linh kiện điện tử? (Năng suất lắp ráp của mỗi tổ trong các ngày là như nhau.)

15. Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.

a) $Fe + Cl_2 \rightarrow FeCl_3$ b) $SO_2 + O_2 \xrightarrow[V_2O_5]{t^o} SO_3$ c) $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

16. Nhà máy luyện thép hiện có sẵn loại thép chứa 10% carbon và loại thép chứa 20% carbon. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt. Tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1 000 tấn thép chứa 16% carbon từ hai loại thép trên.

Chương

2

BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về thứ tự trên tập số thực, bất đẳng thức và các tính chất của chúng. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về bất phương trình bậc nhất một ẩn, cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn và ứng dụng để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

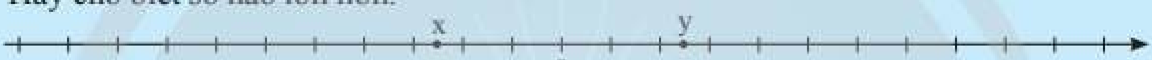
Với biển báo giao thông như hình vẽ, các loại xe phải đi với tốc độ như thế nào để không vi phạm luật giao thông?

Bài 1 BẤT ĐẲNG THỨC

Theo quy định của một hãng bay, khối lượng hành lí xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg. Gọi m là khối lượng hành lí xách tay của một khách hàng phổ thông. Hệ thức nào biểu diễn khối lượng hành lí đúng quy định của hãng bay?

1. KHÁI NIỆM BẤT ĐẲNG THỨC

1 Cho hai số thực x và y được biểu diễn trên trục số (Hình 1). Hãy cho biết số nào lớn hơn.



Hình 1

Trên tập hợp số thực, khi so sánh hai số a và b, xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- Số a lớn hơn b, kí hiệu $a > b$.
- Số a nhỏ hơn b, kí hiệu $a < b$.
- Số a bằng b, kí hiệu $a = b$.

Ta nói tập hợp số thực là tập hợp được sắp thứ tự.

Khi biểu diễn số thực trên trục số (vẽ theo đường nằm ngang như Hình 2), điểm biểu diễn số nhỏ hơn nằm bên trái điểm biểu diễn số lớn hơn. Do đó, trục số được coi là hình ảnh của tập hợp số thực, cho phép chúng ta nhìn thấy được thứ tự của các số thực.

Hình 2

Nếu $x > y$ hoặc $x = y$, ta viết $x \geq y$ (ta nói x *lớn hơn hoặc bằng* y hay x *không nhỏ hơn* y).

Nếu $x < y$ hoặc $x = y$, ta viết $x \leq y$ (ta nói x *nhỏ hơn hoặc bằng* y hay x *không lớn hơn* y).

Chẳng hạn: Để diễn tả

– Bình phương của số a luôn lớn hơn hoặc bằng 0, ta viết: $a^2 \geq 0$.

– Số c không âm, ta viết: $c \geq 0$.

– Số m không dương, ta viết: $m \leq 0$.

Ta có định nghĩa sau đây:

Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) được gọi là *bất đẳng thức* và a được gọi là *vế trái*, b được gọi là *vế phải* của bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Hãy chỉ ra một bất đẳng thức diễn tả số a lớn hơn 3. Vế trái, vế phải của bất đẳng thức đó là gì?

Giải

Để diễn tả số a lớn hơn 3, ta có bất đẳng thức $a > 3$. Khi đó a là vế trái, 3 là vế phải của bất đẳng thức.

Thực hành 1. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) x nhỏ hơn 5; b) a không lớn hơn b; c) m không nhỏ hơn n.

2. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Tính chất bắc cầu

2 Cho a, b, c là ba số thoả mãn $a > b$ và $b > c$. Trong hai số a và c, số nào lớn hơn? Vì sao?

Hình 3

Từ 2, ta có:

Cho ba số a, b, c. Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$ (tính chất bắc cầu).

Chú ý: Tính chất bắc cầu vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<$, $\geq$, $\leq$.

Ví dụ 2. So sánh hai số x và y, biết $x > 3{,}4$ và $y < 3{,}4$.

Giải

Do $x > 3{,}4$ và $3{,}4 > y$ nên theo tính chất bắc cầu ta suy ra $x > y$.

Thực hành 2. So sánh hai số m và n, biết $m \leq \pi$ và $n \geq \pi$.

Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

3 Thay mỗi ? sau bằng dấu thích hợp (>, <):

a) $4 > 1$ b) $-10 < -5$

$4 + 15 \boxed{?} 1 + 15$ $-10 + (-15) \boxed{?} -5 + (-15)$

Hai bất đẳng thức $a > b$ và $m > n$ được gọi là hai bất đẳng thức *cùng chiều*.

Hai bất đẳng thức $a > b$ và $m < n$ được gọi là hai bất đẳng thức *ngược chiều*.

Từ 3, ta thấy: Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức mới *cùng chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Một cách tổng quát, ta có:

Cho ba số a, b và c. Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

Chú ý: Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<$, $\geq$, $\leq$.

Ví dụ 3. Chứng tỏ $2023 + (-2^{29}) > 2022 + (-2^{29})$.

Giải

Ta có $2023 > 2022$. Cộng hai vế của bất đẳng thức với -2^{29}, ta được:

$$2023 + (-2^{29}) > 2022 + (-2^{29}).$$

Ví dụ 4. Cho hai số a và b thoả mãn $a < b$. Chứng tỏ $a + 3 < b + 5$.

Giải

Cộng 3 vào hai vế của bất đẳng thức $a < b$, ta được:

$$a + 3 < b + 3. \qquad (1)$$

Cộng b vào hai vế của bất đẳng thức $3 < 5$, ta được:

$$3 + b < 5 + b \text{ hay } b + 3 < b + 5. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + 3 < b + 5$ (tính chất bắc cầu).

Thực hành 3. So sánh hai số $-3 + 23^{50}$ và $-2 + 23^{50}$.

Thực hành 4. Cho hai số m và n thoả mãn $m > n$. Chứng tỏ $m + 5 > n + 4$.

Vận dụng 1. Gọi a là số tuổi của bạn Na, b là số tuổi của bạn Toàn, biết rằng bạn Toàn lớn tuổi hơn bạn Na. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau ba năm nữa.

Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

4 Thay mỗi ? sau bằng dấu thích hợp (>, <):

a) $3 > 2$

$3 \,.\, 17 \boxed{?} 2 \,.\, 17$

b) $-10 < -2$

$(-10) \,.\, 5 \boxed{?} (-2) \,.\, 5$

c) $5 > 3$

$5 \,.\, (-2) \boxed{?} 3 \,.\, (-2)$

d) $-10 < -2$

$(-10) \,.\, (-7) \boxed{?} (-2) \,.\, (-7)$

Từ 4, ta thấy:

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số *dương* thì được một bất đẳng thức mới *cùng chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số *âm* thì được một bất đẳng thức mới *ngược chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Một cách tổng quát, ta có:

Cho ba số a, b, c và $a > b$.

– Nếu $c > 0$ thì $a \,.\, c > b \,.\, c$;

– Nếu $c < 0$ thì $a \,.\, c < b \,.\, c$.

Chú ý: Tính chất này vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \geq, \leq$.

Ví dụ 5. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: 1962 . 12 và 1963 . 12.

Giải

Ta có 1962 < 1963. Nhân hai vế của bất đẳng thức với 12, ta được:

$1962 . 12 < 1963 . 12.$

Ví dụ 6. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: 47 . (–19) và 50 . (–19).

Giải

Ta có 47 < 50. Nhân hai vế của bất đẳng thức với –19, ta được:

$47 . (-19) > 50 . (-19).$

Ví dụ 7. Cho hai số a, b thoả mãn $a^2 > b^2 > 0$. Chứng tỏ $5a^2 > 4b^2$.

Giải

Nhân hai vế của bất đẳng thức $a^2 > b^2$ với 5, ta được:

$5a^2 > 5b^2$.   (1)

Vì $b^2 > 0$ nên khi nhân hai vế của bất đẳng thức 5 > 4 với b^2, ta được:

$5b^2 > 4b^2$.   (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5a^2 > 4b^2$ (tính chất bắc cầu).

Thực hành 5. Hãy so sánh: $(-163) . (-75)^{15}$ và $(-162) . (-75)^{15}$.

Thực hành 6. Cho hai số m, n thoả mãn $0 < m^2 < n^2$. Chứng tỏ $\frac{3}{2}m^2 < 2n^2$.

Vận dụng 2. Cho biết $-10m \leq -10n$, hãy so sánh m và n.

BÀI TẬP

1. Dùng các dấu >, <, ≥, ≤ để diễn tả:

a) Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4a.

b) Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4b.

a)

b)

Hình 4

2. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) m lớn hơn 8; b) n nhỏ hơn 21;

c) x nhỏ hơn hoặc bằng 4; d) y lớn hơn hoặc bằng 0.

3. Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

a) Cộng hai vế của bất đẳng thức $m > 5$ với -4;

b) Cộng hai vế của bất đẳng thức $x^2 \leq y + 1$ với 9;

c) Nhân hai vế của bất đẳng thức $x > 1$ với 3, rồi tiếp tục cộng với 2;

d) Cộng vào hai vế của bất đẳng thức $m \leq -1$ với -1, rồi tiếp tục cộng với -7.

4. So sánh hai số x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x + 5 > y + 5$; b) $-11x \leq -11y$;

c) $3x - 5 < 3y - 5$; d) $-7x + 1 > -7y + 1$.

5. Cho hai số a, b thoả mãn $a < b$. Chứng tỏ:

a) $b - a > 0$; b) $a - 2 < b - 1$;

c) $2a + b < 3b$; d) $-2a - 3 > -2b - 3$.

Đố vui

Tìm lỗi **sai** trong lập luận sau:

Bạn Trang nhỏ tuổi hơn bạn Mai, bạn Mai nhẹ cân hơn bạn Tín. Gọi a và b lần lượt là số tuổi của bạn Trang và bạn Mai; b và c là số cân nặng của bạn Mai và bạn Tín. Vì $a < b$ và $b < c$ nên theo tính chất bắc cầu ta suy ra $a < c$. Vậy bạn Trang nhỏ tuổi hơn bạn Tín.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được thứ tự trên tập hợp các số thực.

– Nhận biết được bất đẳng thức và mô tả được một số tính chất cơ bản của bất đẳng thức (tính chất bắc cầu; tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân).

Bài 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Để hưởng ứng phong trào "Trồng cây gây rừng", lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN, NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1

Ông Trí dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng ông Trí đã chạy được 4 000 m. Gọi x là số mét ông Trí chạy bộ vào buổi chiều. Viết hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để ông Trí chạy được như dự định.

Để ông Trí chạy được như dự định, x phải thoả mãn hệ thức

$$4000 + x \geq 6500. \qquad (1)$$

Hệ thức (1) được gọi là *bất phương trình với ẩn là* x.

Trong bất phương trình này, 4 000 + x được gọi là *vế trái*, 6 500 được gọi là *vế phải*.

Ta có định nghĩa sau đây:

Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn* (ẩn là x).

Ví dụ 1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

$$x + 2023 > 0; \qquad 0x - 5 < 0; \qquad 5x - 7 \leq 0; \qquad x^2 + 1 \leq 0.$$

Giải

Bất phương trình $x + 2023 > 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn với $a = 1$ và $b = 2023$.

Bất phương trình $5x - 7 \leq 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn với $a = 5$ và $b = -7$.

Hai bất phương trình $0x - 5 < 0$ và $x^2 + 1 \leq 0$ không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Thực hành 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

$$0x < 0; \qquad 3x < 0; \qquad x^3 + 1 \geq 0; \qquad -x + 1 \leq 0.$$

Nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn

2 Cho bất phương trình $x + 3 > 0$. (1)
Trong hai giá trị $x = 0$ và $x = -5$, giá trị nào thoả mãn bất phương trình?

Khi thay $x = 2$ vào bất phương trình (1), ta được $2 + 3 > 0$ là khẳng định đúng.
Ta nói $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình.
Khi thay $x = -10$ vào bất phương trình (1), ta được $-10 + 3 > 0$ là khẳng định sai.
Ta nói $x = -10$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Với bất phương trình bậc nhất có ẩn là x, số x_0 được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình nếu ta thay $x = x_0$ thì nhận được một khẳng định đúng.
Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 2. Trong hai giá trị $x = 1$ và $x = 2$, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình $3x - 4 \leq 0$?

Giải

Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 1 - 4 \leq 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 2 - 4 \leq 0$ là khẳng định sai. Vậy $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thực hành 2. Tìm một số là nghiệm và một số không phải là nghiệm của bất phương trình $4x + 5 > 0$.

2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

3 Hãy cho biết bất đẳng thức nhận được khi thực hiện các phép biến đổi sau:

a) Cộng hai vế của bất đẳng thức $x + 1 > 0$ với -1;

b) Nhân hai vế của bất đẳng thức $2x > 1$ với $\frac{1}{2}$;

c) Nhân hai vế của bất đẳng thức $-\frac{3}{2}x \leq 1$ với $-\frac{2}{3}$.

Tổng quát, áp dụng các tính chất của bất đẳng thức ta có cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn như sau:

Xét bất phương trình $ax + b > 0$ $(a \neq 0)$.

– Cộng hai vế của bất phương trình với $-b$, ta được bất phương trình:

$$ax > -b.$$

– Nhân hai vế của bất phương trình nhận được với $\frac{1}{a}$:

+ Nếu $a > 0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > -\frac{b}{a}$.

+ Nếu $a < 0$ thì nhận được nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < -\frac{b}{a}$.

Với các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, ta thực hiện các bước giải tương tự.

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình:

a) $2x + 1 > 0$; b) $0,5x - 6 \leq 0$; c) $-2x + 3 \leq 0$.

Giải

a) Ta có: $2x + 1 > 0$

$2x > -1$ ← *cộng hai vế với* -1

$(2x) . \frac{1}{2} > (-1) . \frac{1}{2}$ ← *nhân hai vế với* $\frac{1}{2}$

$x > -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $0,5x - 6 \leq 0$

$0,5x \leq 6$ ← *cộng hai vế với* 6

$(0,5x) . 2 \leq 6 . 2$ ← *nhân hai vế với* 2

$x \leq 12$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 12$.

c) Ta có: $-2x + 3 \leq 0$

$$-2x \leq -3 \quad \longleftarrow \textit{cộng hai vế với } -3$$

$$(-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \geq (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \longleftarrow \textit{nhân hai vế với } -\frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{3}{2}$.

Chú ý: Bằng cách sử dụng các tính chất của bất đẳng thức, ta có thể giải một số bất phương trình đưa được về bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $2x - 5 \leq 4x + 3$.

Giải

Ta có: $2x - 5 \leq 4x + 3$

$$-5 - 3 \leq 4x - 2x$$

$$-8 \leq 2x$$

$$-4 \leq x.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -4$.

Ví dụ 5. Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm số môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất phải bằng 8. Bạn Na đã đạt 9,1 điểm môn Toán và 6,9 điểm môn Ngữ văn. Hãy lập và giải bất phương trình để tìm điểm số Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Na phải đạt để trúng tuyển.

Giải

Gọi x là điểm số môn Tiếng Anh của bạn Na.

Theo đề bài, để bạn Na trúng tuyển, ta phải có

$$\frac{2.9{,}1 + 2.6{,}9 + x}{5} \geq 8$$

$$2 \cdot 9{,}1 + 2 \cdot 6{,}9 + x \geq 40$$

$$18{,}2 + 13{,}8 + x \geq 40$$

$$x \geq 8.$$

Vậy để trúng tuyển, bạn Na phải đạt ít nhất 8 điểm môn Tiếng Anh.

Thực hành 3. Giải các bất phương trình:

a) $5x - 3 < 0$; b) $-6x - 2 \geq 0$.

Thực hành 4. Giải bất phương trình $5 + 7x > 4x - 7$.

Vận dụng. Giải bài toán trong (trang 30) bằng cách lập bất phương trình bậc nhất một ẩn.

BÀI TẬP

1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?
   a) $2x - 5 > 0$;
   b) $3y + 1 \geq 0$;
   c) $0x - 3 < 0$;
   d) $x^2 > 0$.

2. Tìm x sao cho:
   a) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ là số dương;
   b) Giá trị của biểu thức $3x - 5$ là số âm.

3. Giải các bất phương trình:
   a) $6 < x - 3$;
   b) $\frac{1}{2}x > 5$;
   c) $-8x + 1 \geq 5$;
   d) $7 < 2x + 1$.

4. Giải các bất phương trình:
   a) $x - 7 < 2 - x$;
   b) $x + 2 \leq 2 + 3x$;
   c) $4 + x > 5 - 3x$;
   d) $-x + 7 \geq x - 3$.

5. Giải các bất phương trình:
   a) $\frac{2}{3}(2x + 3) < 7 - 4x$;
   b) $\frac{1}{4}(x - 3) \leq 3 - 2x$.

6. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc và viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ năng này. Bạn Hà đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6,5; 6,5; 5,5. Hỏi bạn Hà cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để kết quả đạt được của bài thi ít nhất là 6,25?

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn, nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn.

– Giải được bất phương trình bậc nhất một ẩn.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Bất đẳng thức $n \leq 3$ có thể được phát biểu là
   A. n lớn hơn 3.
   B. n nhỏ hơn 3.
   C. n không nhỏ hơn 3.
   D. n không lớn hơn 3.

2. Cho các số thực x, y, z biết $x < y$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
   A. $x + z < y + z$.
   B. $xz < yz$ nếu z âm.
   C. $xz < yz$ nếu z dương.
   D. $x - z < y - z$.

3. Hệ thức nào sau đây là bất đẳng thức?
A. $1 - x = 0$. B. $x^2 - 5x + 6 = 0$. C. $y^2 \geq 0$. D. $x = y$.

4. Bất phương trình $3x - 5 > 4x + 2$ có nghiệm là
A. $x > -7$. B. $x < -7$. C. $x < 7$. D. $x \leq -7$.

5. Bất phương trình $2x - 1 \leq x + 4$ có nghiệm là
A. $x \leq 5$. B. $x \geq 5$. C. $x \leq -5$. D. $x < 5$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Cho $a > b$, chứng minh:
a) $a - 2 > b - 2$; b) $-5a < -5b$; c) $2a + 3 > 2b + 3$; d) $10 - 4a < 10 - 4b$.

7. Giải các bất phương trình:
a) $3 - 0,2x < 13$; b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{1}{4}$;
c) $3 < \frac{2x-2}{8}$; d) $\frac{2x-3}{3} \leq \frac{3x-2}{4}$.

8. Tìm x sao cho:
a) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $3x - 5$;
b) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $3x - 5$.

9. Trong cuộc thi "Đố vui để học", mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi, mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng thi tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

10. Tìm lỗi **sai** trong các lời giải sau:

a) Giải bất phương trình $-3x > 9$.

Ta có: $-3x > 9$
$x > 9 + 3$
$x > 12$.
Vậy nghiệm của bất phương trình là
$x > 12$.

b) Giải bất phương trình $-\frac{2}{3}x \leq 5$.

Ta có: $-\frac{2}{3}x \leq 5$
$\left(-\frac{2}{3}\right)x.\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 5.\left(-\frac{3}{2}\right)$
$x \leq -\frac{15}{2}$.
Vậy nghiệm của bất phương trình là
$x \leq -\frac{15}{2}$.

Chương 3

CĂN THỨC

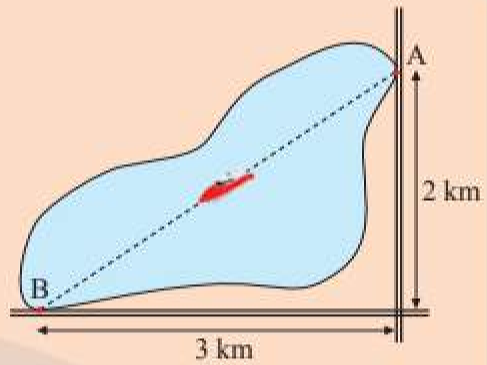
Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về phép khai căn bậc hai (phép khai phương) và phép khai căn bậc ba cùng với những tính chất cơ bản của chúng. Các phép toán này thường xuyên được sử dụng trong toán học, trong các môn học khác và trong ứng dụng thực tế.

Cảng Cát Lái, Thành phố Hồ Chí Minh

Để thiết kế, sản xuất những phương tiện như cần trục tại các bến cảng, các kĩ sư phải thực hiện nhiều phép tính trong đó có phép tính khai căn.

Bài 1 CĂN BẬC HAI

Hai bến thuyền A và B nằm sát hai con đường vuông góc với nhau và cách chỗ giao nhau lần lượt là 2 km và 3 km (hình bên). Một ca nô chạy thẳng từ A đến B. Quãng đường ca nô đi được dài bao nhiêu kilômét?



1. CĂN BẬC HAI

1 Cho trục số được vẽ trên lưới ô vuông đơn vị như Hình 1.

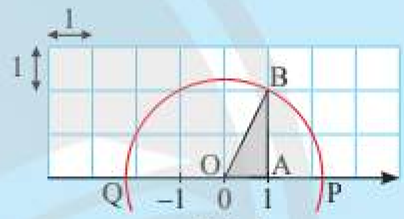
a) Tính độ dài cạnh huyền OB của tam giác vuông OAB.

b) Vẽ đường tròn tâm O bán kính OB, đường tròn này cắt trục số tại hai điểm P và Q.

Gọi x là số thực được biểu diễn bởi điểm P, y là số thực được biểu diễn bởi điểm Q.

Thay mỗi $\boxed{?}$ bằng số thích hợp để có các đẳng thức:

$$x^2 = \boxed{?},\ y^2 = \boxed{?}.$$



Hình 1

Từ 1, ta có định nghĩa:

Cho số thực a không âm. Số thực x thoả mãn $x^2 = a$ được gọi là một *căn bậc hai* của a.

Ta có kết quả sau đây:

– Mỗi số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương là $\sqrt{a}$ (*căn bậc hai số học* của a), số âm là $-\sqrt{a}$.

– Số 0 chỉ có đúng một căn bậc hai là chính nó, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

Chú ý:

a) Số âm không có căn bậc hai.

b) Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là *phép khai căn bậc hai* hay *phép khai phương* (gọi tắt là *khai phương*).

c) Ở lớp 7 ta đã biết, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Từ đó suy ra

$$-\sqrt{a} < -\sqrt{b} < 0 < \sqrt{b} < \sqrt{a}.$$

Ví dụ 1. Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 64; b) $\frac{9}{16}$; c) 0,25.

Giải

a) Ta có $8^2 = 64$, nên 64 có hai căn bậc hai là 8 và –8.

b) Ta có $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, nên $\frac{9}{16}$ có hai căn bậc hai là $\frac{3}{4}$ và $-\frac{3}{4}$.

c) Ta có $(0,5)^2 = 0,25$, nên 0,25 có hai căn bậc hai là 0,5 và –0,5.

Ví dụ 2. Sử dụng dấu căn bậc hai ($\sqrt{\ }$) để viết các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 5; b) 1,6; c) –4.

Giải

a) Các căn bậc hai của 5 là $\sqrt{5}$ và $-\sqrt{5}$.

b) Các căn bậc hai của 1,6 là $\sqrt{1,6}$ và $-\sqrt{1,6}$.

c) Do –4 là số âm nên nó không có căn bậc hai.

Chú ý: Từ định nghĩa căn bậc hai của một số thực a không âm, ta có

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ và } \sqrt{a^2} = a.$$

Ví dụ 3. Tính:

a) $\sqrt{81}$; b) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$; c) $-\sqrt{1,21}$.

Giải

a) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$; b) $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$;

c) $-\sqrt{1,21} = -\sqrt{(1,1)^2} = -1,1$.

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{16} + \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(-\sqrt{0,16}\right)^2$.

Giải

$$A = \sqrt{16} + \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(-\sqrt{0,16}\right)^2 = \sqrt{4^2} + 8 + 0,16 = 4 + 8 + 0,16 = 12,16.$$

Thực hành 1. Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 36; b) $\frac{4}{49}$; c) 1,44; d) 0.

Thực hành 2. Sử dụng dấu căn bậc hai để viết các căn bậc hai của mỗi số:

a) 11; b) 2,5; c) –0,09.

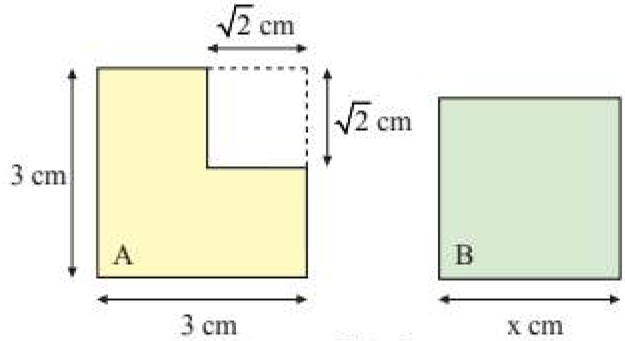
Thực hành 3. Tính:

a) $\sqrt{1600}$; b) $\sqrt{0,81}$; c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$.

Thực hành 4. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\left(\sqrt{12}\right)^2$; b) $\left(-\sqrt{0,36}\right)^2$; c) $\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{1,21}\right)^2$.

Vận dụng 1. Biết rằng hình A và hình vuông B trong Hình 2 có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của hình vuông B.



Hình 2

2. TÍNH CĂN BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Ta có thể tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai của một số thực không âm bằng máy tính cầm tay.

Ví dụ 5. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sqrt{15}$; b) Các căn bậc hai của 9,45.

Giải

a) Để tính $\sqrt{15}$, ấn liên tiếp các nút:

ta được kết quả như hình bên (với một số loại máy tính cầm tay, cần ấn thêm nút S⇔D để chuyển từ hiển thị dưới dạng có chứa dấu căn sang hiển thị dưới dạng số thập phân).

Từ đó, $\sqrt{15}\approx 3,873$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Để tính $\sqrt{9,45}$, ấn liên tiếp các nút:

ta được kết quả như hình bên.

Từ đó, ta có hai căn bậc hai của 9,45 là $\sqrt{9,45}\approx 3,074$ và $-\sqrt{9,45}\approx -3,074$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Thực hành 5. Sử dụng máy tính cầm tay, tính gần đúng các số sau (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{7,64}$; c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Thực hành 6. Sử dụng máy tính cầm tay để:

a) Tìm các căn bậc hai của 10,08 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư).

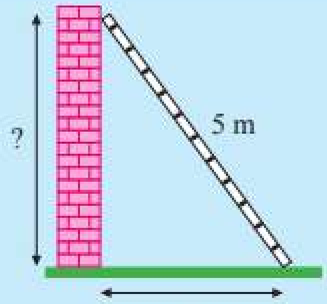
b) Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ năm).

3. CĂN THỨC BẬC HAI

2 Một chiếc thang dài 5 m tựa vào bức tường như Hình 3.

a) Nếu chân thang cách chân tường x (m) thì đỉnh thang ở độ cao bao nhiêu so với chân tường?

b) Tính độ cao trên khi x nhận giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4.



Hình 3

Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A, còn A được gọi là *biểu thức lấy căn* hoặc *biểu thức dưới dấu căn*.

Chú ý:

a) Ta cũng nói $\sqrt{A}$ là một biểu thức. Biểu thức $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A nhận giá trị không âm.

b) Khi A nhận giá trị không âm nào đó, khai phương giá trị này ta nhận được giá trị tương ứng của biểu thức $\sqrt{A}$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức $A = \sqrt{5-2x}$.

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định?

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -2$ và khi $x = 3$.

Giải

a) Biểu thức A xác định khi $5 - 2x \geq 0$ hay $2x \leq 5$ hay $x \leq \frac{5}{2}$.

b) Ta thấy $x = -2$ thoả mãn điều kiện xác định và khi $x = -2$ ta có $A = \sqrt{5-2.(-2)} = \sqrt{9} = 3$.

Ta thấy $x = 3 > \frac{5}{2}$ nên A không xác định tại $x = 3$.

Ví dụ 7. Cho biểu thức $P = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Tính giá trị của P khi:

a) $a = 3, b = 10, c = 3$; b) $a = 2, b = 6, c = 5$.

Giải

a) Với $a = 3, b = 10, c = 3$, ta có $b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 3 = 100 - 36 = 64$.

Khi đó, $P = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$.

b) Với $a = 2, b = 6, c = 5$, ta có $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, 5 = 36 - 40 = -4$. Vì $-4 < 0$ nên biểu thức P không xác định tại $a = 2, b = 6, c = 5$.

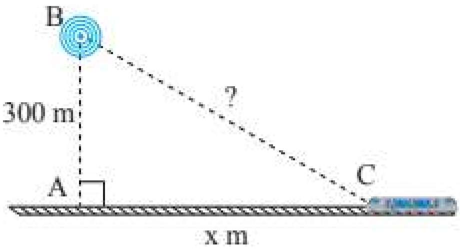
Thực hành 7. Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = \sqrt{3x+6}$ xác định? Tính giá trị của A khi $x = 5$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Thực hành 8. Cho biểu thức $P = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tính giá trị của P khi:

a) $a = 5, b = 0$; b) $a = 5, b = -5$; c) $a = 2, b = -4$.

Vận dụng 2. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300$ m. Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng $AC = x$ (m) (Hình 4).

a) Viết biểu thức (theo x) biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
b) Tính khoảng cách trên khi x = 400, x = 1 000 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Hình 4

BÀI TẬP

1. Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 16; b) 2 500; c) $\frac{4}{81}$; d) 0,09.

2. Tính:

a) $\sqrt{100}$; b) $\sqrt{225}$; c) $\sqrt{2,25}$; d) $\sqrt{\frac{16}{225}}$.

3. Biết rằng $25^2 = 625$, tìm các căn bậc hai của các số 625 và 0,0625.

4. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{24,68}$; c) $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

5. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\left(\sqrt{5,25}\right)^2+\left(-\sqrt{1,75}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{102}\right)^2-\sqrt{98^2}$.

6. Tìm x, biết:

a) $x^2 = 121$; b) $4x^2 = 9$; c) $x^2 = 10$.

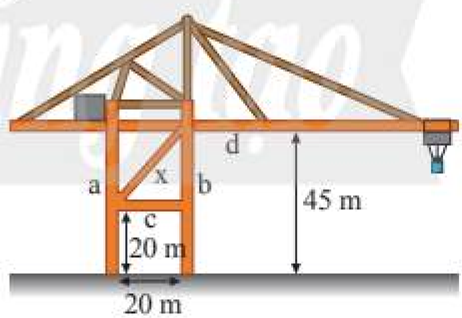
7. Tính giá trị của các biểu thức sau khi x = 16, y = 9.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; b) $\sqrt{x+y}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{xy}$; d) $\frac{1}{6}x\sqrt{y}$.

8. Cho biểu thức $P=\sqrt{x^2-xy+1}$. Tính giá trị của P khi:

a) x = 3, y = –2; b) x = 1, y = 4.

9. Trên cần trục ở Hình 5, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



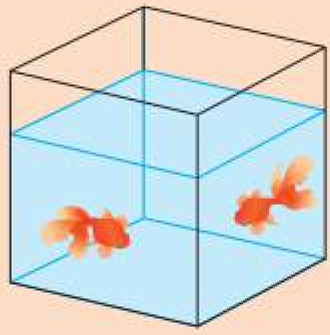
Hình 5

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được khái niệm căn bậc hai của một số thực không âm.
– Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai của một số hữu tỉ bằng máy tính cầm tay.
– Nhận biết được khái niệm căn thức bậc hai của một biểu thức đại số.

Bài 2 CĂN BẬC BA

Một bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm^3. Muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài mỗi cạnh lên bao nhiêu lần?



1. CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ

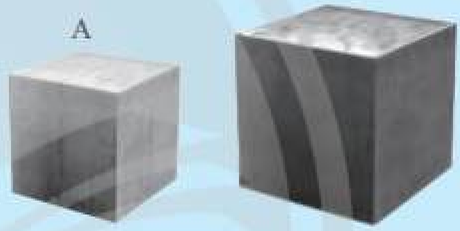
1 Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là 8 dm^3 và 15 dm^3 (Hình 1).

a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi x (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B.

Thay $\boxed{?}$ bằng số thích hợp để có đẳng thức:

$$x^3 = \boxed{?}.$$



Hình 1

– Cho số thực a. Số thực x thoả mãn $x^3 = a$ được gọi là *căn bậc ba* của a.

– Mỗi số thực a đều có đúng một căn bậc ba, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Trong kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, số 3 được gọi là *chỉ số căn*. Phép toán tìm căn bậc ba của một số gọi là *phép khai căn bậc ba*.

Ví dụ 1. Tìm căn bậc ba của mỗi số sau:

a) 1; b) 27; c) – 8.

Giải

a) Ta có $1^3 = 1$, suy ra $\sqrt[3]{1} = 1$;

b) Ta có $3^3 = 27$, suy ra $\sqrt[3]{27} = 3$;

c) Ta có $(-2)^3 = -8$, suy ra $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Chú ý: Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

Ví dụ 2. Tính:

a) $\sqrt[3]{-27}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$; c) $\sqrt[3]{1000}+\left(\sqrt[3]{8,9}\right)^3$.

Giải

a) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^3}=\dfrac{2}{5}$;

c) $\sqrt[3]{1000}+\left(\sqrt[3]{8,9}\right)^3=\sqrt[3]{10^3}+8,9=10+8,9=18,9$.

Thực hành 1. Tìm căn bậc ba của mỗi số sau:

a) -1; b) 64; c) $-0,064$; d) $\dfrac{1}{27}$.

Thực hành 2. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A=\sqrt[3]{8000}+\sqrt[3]{0,125}$; b) $B=\sqrt[3]{12^3}-\sqrt[3]{(-11)^3}$; c) $C=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3+\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3$.

2. TÍNH CĂN BẬC BA BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Ta có thể tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc ba của một số bằng máy tính cầm tay.

Ví dụ 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sqrt[3]{15}$; b) $\sqrt[3]{-12,37}$.

Giải

a) Để tính $\sqrt[3]{15}$, ấn liên tiếp các nút:

ta được kết quả như hình bên.

Từ đó, $\sqrt[3]{15}\approx 2,466$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Để tính $\sqrt[3]{-12,37}$, ấn liên tiếp các nút:

ta được kết quả như hình bên.

Từ đó, $\sqrt[3]{-12,37}\approx -2,313$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Thực hành 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm căn bậc ba của các số sau (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) 25; b) – 100; c) 8,5; d) $\frac{1}{5}$.

Vận dụng. Trả lời câu hỏi trong (trang 42).

3. CĂN THỨC BẬC BA

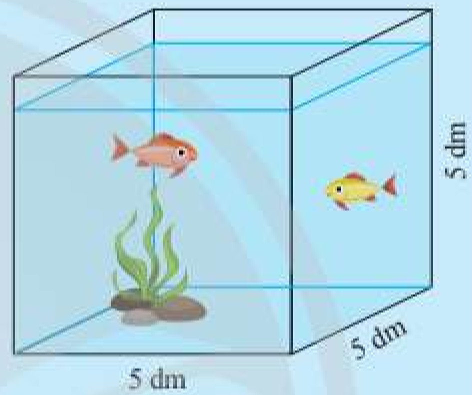
2 Ông An có một bể kính hình lập phương như Hình 2.

Ông An muốn làm thêm một bể kính mới hình lập phương có thể tích gấp n lần thể tích của bể kính cũ (bỏ qua bề dày của kính).

a) Gọi a (dm) là độ dài cạnh của bể kính mới. Thay mỗi $\boxed{?}$ bằng biểu thức thích hợp để nhận được các đẳng thức:

$$a^3 = \boxed{?} \text{ hay } a = \boxed{?}.$$

b) Tính giá trị của a khi n = 8 và khi n = 4 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2

Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là *căn thức bậc ba* của A.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{3x - 2}$. Tính giá trị của P khi x = 3 và khi x = –2 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Giải

Với x = 3, ta có $P = \sqrt[3]{3 \,.\, 3 - 2} = \sqrt[3]{7} \approx 1{,}913$.

Với x = – 2, ta có $P = \sqrt[3]{3 \,.\, (-2) - 2} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Thực hành 4. Cho biểu thức $Q = \sqrt[3]{3x^2}$. Tính giá trị của Q khi x = 2 và khi x = –3 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

BÀI TẬP

1. Tìm căn bậc ba của mỗi số sau:

a) -64; b) 27000; c) $-0,125$; d) $3\dfrac{3}{8}$.

2. Tính:

a) $\sqrt[3]{0,001}$; b) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{64}}$; c) $-\sqrt[3]{11^3}$; d) $\left(\sqrt[3]{-216}\right)^3$.

3. Hoàn thành bảng sau vào vở.

a	1	8	27	64	?	?	?	?	?	?
$\sqrt[3]{a}$	?	?	?	?	5	6	7	8	9	10

4. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $\sqrt[3]{79}$; b) $\sqrt[3]{-6,32}$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{19}+\sqrt[3]{20}}{2}$.

5. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{8^3} + \left(\sqrt[3]{-7}\right)^3$; b) $B = \sqrt[3]{1000000} - \sqrt[3]{0,027}$.

6. Tìm x, biết:

a) $x^3 = -27$; b) $x^3 = \dfrac{64}{125}$; c) $\sqrt[3]{x} = 8$; d) $\sqrt[3]{x} = -0,9$.

7. Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{64n}$ khi $n = 1$, $n = -1$, $n = \dfrac{1}{125}$.

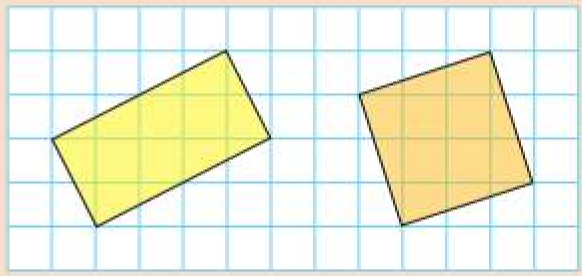
8. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1 000 cm^3. Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được khái niệm căn bậc ba của một số thực.
– Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc ba của một số hữu tỉ bằng máy tính cầm tay.
– Nhận biết được khái niệm căn thức bậc ba của một biểu thức đại số.

Bài 3 TÍNH CHẤT CỦA PHÉP KHAI PHƯƠNG

Một hình chữ nhật và một hình vuông được vẽ trên lưới ô vuông như hình bên.
Diện tích hai hình này có bằng nhau không? Giải thích bằng nhiều cách khác nhau.



1. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

1 Hoàn thành bảng sau vào vở.

a	-3	3	11	-11	100	-100	0
$\sqrt{a^2}$	3	?	?	?	?	?	?

Từ đó, nhận xét gì về căn bậc hai số học của bình phương của một số?

Tổng quát kết quả của 1, ta có tính chất:

Với mọi số thực a, ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

Tổng quát hơn, ta có tính chất sau đây:

Với biểu thức A bất kì, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là

$\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$ (tức là khi A nhận giá trị không âm);

$\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$ (tức là khi A nhận giá trị âm).

Ví dụ 1. Tính:

a) $\sqrt{16^2}$; b) $\left(-\sqrt{9}\right)^2 + \sqrt{(-9)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{16^2} = |16| = 16$; b) $\left(-\sqrt{9}\right)^2 + \sqrt{(-9)^2} = 9 + |-9| = 9 + 9 = 18$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; b) $\sqrt{(a-\sqrt{5})^2}$ với $a > 3$; c) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Giải

a) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ (vì $1-\sqrt{2} < 0$);

b) $\sqrt{(a-\sqrt{5})^2} = |a-\sqrt{5}| = a-\sqrt{5}$ (vì $a-\sqrt{5} > 0$ với $a > 3$);

c) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$ (vì $a^3 < 0$ với $a < 0$).

Thực hành 1. Tính:

a) $\sqrt{(-0,4)^2}$; b) $-\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}$; c) $-2\sqrt{3^2}+\left(-\sqrt{6}\right)^2$.

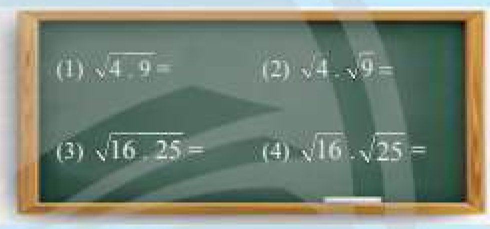
Thực hành 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$; b) $\sqrt{a^2}+\sqrt{(-3a)^2}$ với $a > 0$.

2. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

a) Thực hiện các phép tính cho trên bảng trong Hình 1.

b) Từ đó, có nhận xét gì về căn bậc hai của tích hai số không âm?



Hình 1

Tổng quát kết quả của 2, ta có tính chất:

Với hai số thực a và b không âm, ta có

$$\sqrt{a \,.\, b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}.$$

Tổng quát hơn, ta có tính chất sau đây:

Với hai biểu thức A và B nhận giá trị không âm, ta có

$$\sqrt{A \,.\, B} = \sqrt{A} \,.\, \sqrt{B}.$$

Ví dụ 3. Tính:

a) $\sqrt{25 \,.\, 1,21}$; b) $\sqrt{360 \,.\, 90}$.

Giải

a) $\sqrt{25 \,.\, 1,21} = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{1,21} = 5 \,.\, 1,1 = 5,5$;

b) $\sqrt{360 \,.\, 90} = \sqrt{36 \,.\, 9 \,.\, 100} = \sqrt{36} \,.\, \sqrt{9} \,.\, \sqrt{100} = 6 \,.\, 3 \,.\, 10 = 180$.

Ví dụ 4. Tính:

a) $\sqrt{20}\,.\,\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2,8}\,.\,\sqrt{7}\,.\,\sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{20}\,.\,\sqrt{5}=\sqrt{20\,.\,5}=\sqrt{100}=10$;

b) $\sqrt{2,8}\,.\,\sqrt{7}\,.\,\sqrt{10}=\sqrt{2,8\,.\,7\,.\,10}=\sqrt{28\,.\,7}=\sqrt{4\,.\,7\,.\,7}=\sqrt{2^2\,.\,7^2}=\sqrt{14^2}=14$.

Nhận xét: Như hai ví dụ trên, tuỳ từng trường hợp mà ta biến đổi $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$ hoặc $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ($a\ge 0$ và $b\ge 0$) để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{3a}\,.\,\sqrt{27a}$ với $a\ge 0$; b) $\sqrt{8a\,.\,5ab\,.\,10b^3}$.

Giải

a) $\sqrt{3a}\,.\,\sqrt{27a}=\sqrt{3a\,.\,27a}=\sqrt{81a^2}=\sqrt{81}\,.\,\sqrt{a^2}=9|a|=9a$ (vì $a\ge 0$).

b) $\sqrt{8a\,.\,5ab\,.\,10b^3}=\sqrt{8\,.\,5\,.\,10\,.\,a^2b^4}=\sqrt{400}\,.\,\sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{\left(b^2\right)^2}=20|a|b^2$.

3 Thay mỗi $\boxed{?}$ bằng số thích hợp:

a) $\sqrt{50}=\sqrt{\boxed{?}}\,.\,\sqrt{2}=\boxed{?}\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3\,.\,(-4)^2}=\sqrt{\boxed{?}}\,.\,\sqrt{3}=\boxed{?}\sqrt{3}$;

c) $3\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{?}}\,.\,\sqrt{2}=\sqrt{\boxed{?}}$; d) $-2\sqrt{5}=-\sqrt{\boxed{?}}\,.\,\sqrt{5}=-\sqrt{\boxed{?}}$.

Từ 3, tổng quát ta có:

Với số thực a bất kì và b không âm, ta có

$$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}.$$

Biến đổi này được gọi là *đưa thừa số ra ngoài dấu căn*.

Ngược lại, ta có biến đổi *đưa thừa số vào trong dấu căn*:

- Nếu $a\ge 0$ thì $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$;
- Nếu $a<0$ thì $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$.

Nhận xét: Tổng quát hơn, với hai biểu thức A, B mà $B\ge 0$, ta có $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$.

Ví dụ 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{75}$; b) $-\sqrt{18}\,.\,\sqrt{24}$; c) $\sqrt{15a}\,.\,\sqrt{3a}$ với $a>0$.

Giải

a) $\sqrt{75}=\sqrt{25\,.\,3}=\sqrt{5^2\,.\,3}=5\sqrt{3}$;

b) $-\sqrt{18}\,.\,\sqrt{24}=-\sqrt{3^2\,.\,2}\,.\,\sqrt{2^2\,.\,6}=-3\sqrt{2}\,.\,2\sqrt{6}=-6\sqrt{2}\,.\,\sqrt{6}$

$=-6\sqrt{12}=-6\sqrt{2^2\,.\,3}=-6\,.\,2\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{15a}\,.\,\sqrt{3a}=\sqrt{15a\,.\,3a}=\sqrt{3^2\,.\,a^2\,.\,5}=3a\sqrt{5}$ (vì $a>0$).

Ví dụ 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai.

a) $4\sqrt{3}$; b) $-3\sqrt{6}$; c) $a\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ với $a>0$.

Giải

a) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \, . \, 3} = \sqrt{48}$;

b) $-3\sqrt{6} = -\sqrt{3^2 \, . \, 6} = -\sqrt{54}$;

c) $a\sqrt{\dfrac{2}{a}} = \sqrt{a^2 \, . \, \dfrac{2}{a}} = \sqrt{2a}$ (vì $a > 0$).

Thực hành 3. Tính:

a) $\sqrt{0,16 \, . \, 64}$; b) $\sqrt{8,1 \, . \, 10^3}$; c) $\sqrt{12 \, . \, 250 \, . \, 1,2}$;

d) $\sqrt{28} \, . \, \sqrt{7}$; e) $\sqrt{4,9} \, . \, \sqrt{30} \, . \, \sqrt{12}$.

Thực hành 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{500}$; b) $\sqrt{5a} \, . \, \sqrt{20a}$ với $a \geq 0$; c) $\sqrt{18(2-a)^2}$ với $a > 2$.

Thực hành 5. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai.

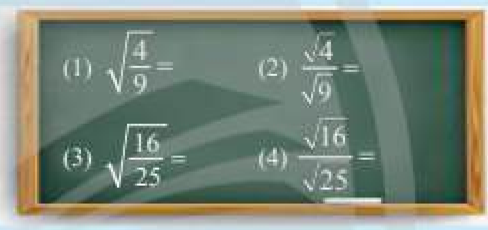
a) $5\sqrt{2}$; b) $-10\sqrt{7}$; c) $2a\sqrt{\dfrac{3}{10a}}$ với $a > 0$.

Vận dụng 1. Tính diện tích của hình chữ nhật và hình vuông cho trong (trang 46). Biết mỗi ô vuông nhỏ có độ dài cạnh là 1. Diện tích của hai hình đó có bằng nhau không?

3. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

4 a) Thực hiện các phép tính có trên bảng trong Hình 2.

b) Từ đó, có nhận xét gì về căn bậc hai của thương hai số dương?



Hình 2

Tổng quát kết quả của 4, ta có tính chất:

Với số thực a không âm và số thực b dương, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tổng quát hơn, ta có:

Với biểu thức A nhận giá trị không âm và biểu thức B nhận giá trị dương, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Ví dụ 8. Tính:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$; b) $\sqrt{\dfrac{27}{75}}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \dfrac{7}{8}$; b) $\sqrt{\dfrac{27}{75}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$.

Ví dụ 9. Tính:

a) $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$;   b) $\sqrt{24}:\sqrt{3}$;   c) $\sqrt{\dfrac{1}{15}}:\sqrt{1\dfrac{2}{3}}$.

Giải

a) $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$;

b) $\sqrt{24}:\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{24}{3}}=\sqrt{8}=\sqrt{2^2\,.\,2}=2\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{\dfrac{1}{15}}:\sqrt{1\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{15}}:\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{15}:\dfrac{5}{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\dfrac{1}{5}$.

Nhận xét: Như hai ví dụ trên, tuỳ từng trường hợp mà ta biến đổi $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ hoặc $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ($a\geq 0$ và $b>0$) để việc tính toán trở nên dễ dàng hơn.

Ví dụ 10. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$;   b) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$;   c) $\dfrac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}$ với $a>0$.

Giải

a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2^2\,.\,5}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{20}{10}}=\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}=\dfrac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}}=\dfrac{\sqrt{4}\,.\,\sqrt{a^2}}{5}=\dfrac{2|a|}{5}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}=\sqrt{\dfrac{3ab^4}{27a}}=\sqrt{\dfrac{b^4}{9}}=\dfrac{\sqrt{(b^2)^2}}{\sqrt{9}}=\dfrac{b^2}{3}$.

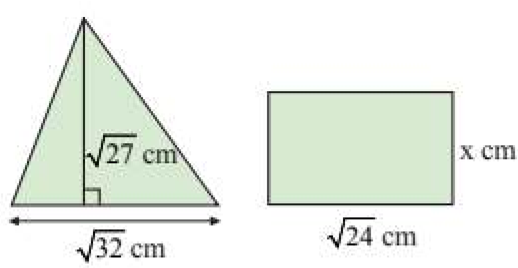
Thực hành 6. Tính:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$;   b) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$;   c) $\sqrt{150}:\sqrt{6}$;   d) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}:\sqrt{\dfrac{5}{12}}$.

Thực hành 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sqrt{555}}{\sqrt{111}}$;   b) $\sqrt{\dfrac{a^2}{4b^4}}$ với $a\geq 0$, $b\neq 0$;   c) $\dfrac{\sqrt{2a^2(1-a)^2}}{\sqrt{50}}$ với $a>1$.

Vận dụng 2. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở Hình 3 có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.



Hình 3

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\sqrt{(-10)^2}$; b) $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}$; c) $(-\sqrt{2})^2 - \sqrt{25}$; d) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 . \sqrt{0,09}$.

2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$; b) $2\sqrt{a^2} + 4a$ với $a < 0$; c) $\sqrt{a^2} + \sqrt{(3-a)^2}$ với $0 < a < 3$.

3. Tính:

a) $\sqrt{16 . 0,25}$; b) $\sqrt{2^4 . (-7)^2}$; c) $\sqrt{0,9} . \sqrt{1000}$; d) $\sqrt{2} . \sqrt{5} . \sqrt{40}$.

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{8^2 . 5}$; b) $\sqrt{81a^2}$ với $a < 0$; c) $\sqrt{5a} . \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$.

5. Tính:

a) $\sqrt{\frac{0,49}{81}}$; b) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{36}}$; d) $(-\sqrt{52}) : \sqrt{13}$.

6. Rút gọn các biểu thức sau:

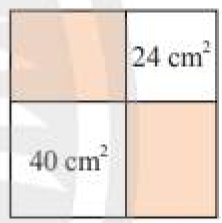
a) $\frac{\sqrt{5} . \sqrt{6}}{\sqrt{10}}$; b) $\frac{\sqrt{24a^3}}{\sqrt{6a}}$ với $a > 0$; c) $\sqrt{\frac{3a^2b}{27}}$ với $a \leq 0, b \geq 0$.

7. Cho hình chữ nhật có chiều rộng a (cm), chiều dài b (cm) và diện tích S (cm^2).

a) Tìm S, biết $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{32}$.

b) Tìm b, biết $S = 3\sqrt{2}$, $a = 2\sqrt{3}$.

8. Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình vuông có diện tích lần lượt là 24 cm^2 và 40 cm^2 như Hình 4. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép.

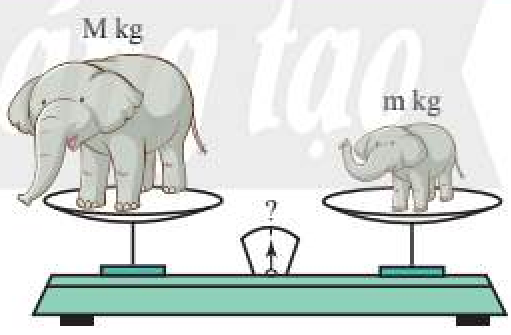


Hình 4

Đố vui

Tìm chỗ sai trong phép chứng minh "voi con nặng bằng voi mẹ" sau đây:

$$M^2 - 2Mm + m^2 = m^2 - 2mM + M^2$$
$$(M - m)^2 = (m - M)^2$$
$$\sqrt{(M-m)^2} = \sqrt{(m-M)^2}$$
$$M - m = m - M$$
$$2M = 2m$$
$$M = m\ (!)$$



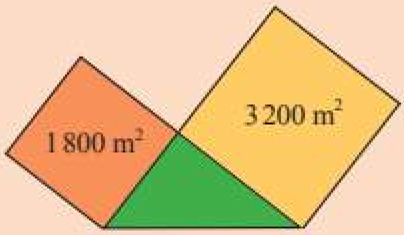
Hình 5

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

Sử dụng các tính chất của phép khai phương (khai phương của một bình phương, một tích hay một thương) để thực hiện biến đổi, tính giá trị, rút gọn biểu thức.

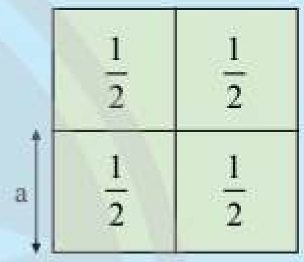
Bài 4 BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Một khu đất hình tam giác vuông tiếp giáp với hai thửa ruộng hình vuông có diện tích như hình bên.
Khu đất hình tam giác vuông có chu vi bằng chu vi thửa ruộng bé không? Kiểm tra bằng cách nào?



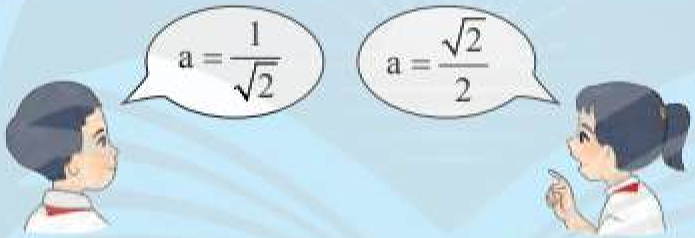
1. TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

1 Bốn ô cửa hình vuông diện tích $\frac{1}{2}$ m^2 ghép thành cửa sổ như Hình 1.



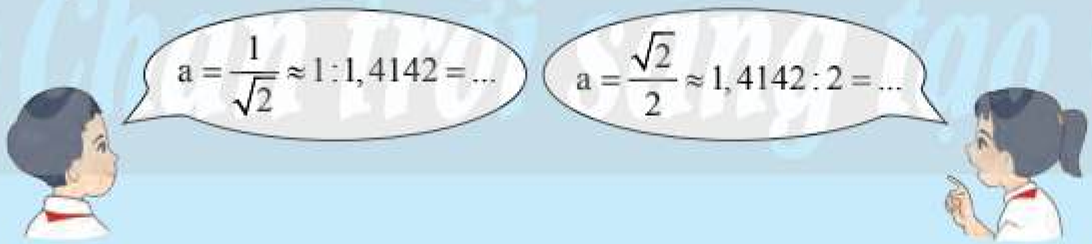
Hình 1

a) Hai bạn An và Mai tính độ dài cạnh a (m) của mỗi ô cửa.



Kết quả của mỗi bạn có đúng không? Giải thích.

b) Biết rằng $\sqrt{2} \approx 1,4142$. Không dùng máy tính cầm tay, hai bạn tìm giá trị gần đúng của độ dài mỗi ô cửa.



Theo em, bạn nào sẽ tìm ra đáp số nhanh hơn?

Đối với những biểu thức chứa căn thức ở mẫu, ta thường biến đổi để khử căn thức ở mẫu đó. Phép biến đổi như vậy gọi là *trục căn thức ở mẫu*.

Chẳng hạn, với biểu thức $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0, b > 0)$, ta biến đổi:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Ví dụ 1. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$; c) $-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Giải

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$;

b) $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\,.\,\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\,.\,\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\,.\,6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$;

c) $-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6}$.

Chú ý: Với số thực a không âm và số thực b dương, ta thường biến đổi

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \text{ hoặc } \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

để khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn.

Tổng quát hơn, với hai biểu thức A và B thoả mãn $AB \geq 0$, $B \neq 0$, ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; b) $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$ với $ab > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3\,.\,5}{5\,.\,5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$; b) $\sqrt{\frac{2a}{3b}} = \sqrt{\frac{2a\,.\,3b}{3b\,.\,3b}} = \frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{(3b)^2}} = \frac{\sqrt{6ab}}{3|b|}$.

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$; b) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1} = \frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = 2\sqrt{3}+2$;

b) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Chú ý: Trong câu a của ví dụ trên, để trục căn thức ở mẫu, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức $\sqrt{3}+1$. Ta gọi biểu thức $\sqrt{3}-1$ và biểu thức $\sqrt{3}+1$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*. Tương tự, ở câu b, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ là $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Một cách tổng quát:

a) Với hai biểu thức A, B mà B > 0, ta có $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$.

b) Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2};\ \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}.$$

c) Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B};\ \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}.$$

Ví dụ 4. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$; b) $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ với $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 4x$.

Giải

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-9}$;

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{2x-\sqrt{xy}}{4x-y}$.

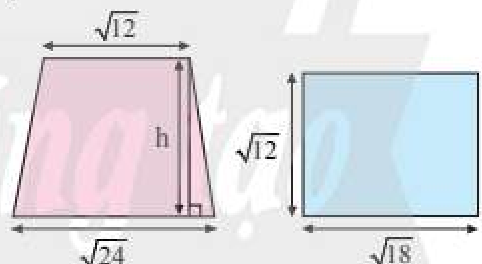
Thực hành 1. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; b) $-\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{40}}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Thực hành 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\dfrac{11}{6}}$; b) $a\sqrt{\dfrac{2}{5a}}$ với $a > 0$; c) $4x\sqrt{\dfrac{3}{4xy}}$ với $x > 0$, $y > 0$.

Vận dụng 1. Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở Hình 2 có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao h của hình thang.



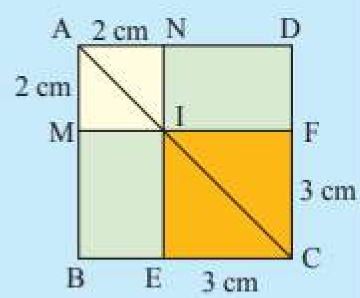
Hình 2

2. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

2 Hình vuông ABCD được chia thành hai hình vuông và hai hình chữ nhật như Hình 3.

a) Tính độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF.

b) Tính độ dài đường chéo của hình vuông ABCD theo hai cách khác nhau.



Hình 3

Ta rút gọn biểu thức $P = \sqrt{8} + \sqrt{18}$ như sau:

$P = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ ← *đưa thừa số ra ngoài dấu căn*

$= (2+3)\sqrt{2}$ ← *tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng*

$= 5\sqrt{2}.$

Để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai, ta thường cần vận dụng thích hợp các tính chất (giao hoán, kết hợp, phân phối) của các phép tính, quy tắc về thứ tự thực hiện phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{24} - 4\sqrt{6}$; b) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$; c) $\left(\sqrt{8} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6}$.

Giải

a) $\sqrt{24} - 4\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \,.\, 6} - 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = (2-4)\sqrt{6} = -2\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = \sqrt{2^2 \,.\, 3} + \sqrt{3^2 \,.\, 3} - \sqrt{4^2 \,.\, 3}$

$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (2+3-4)\sqrt{3} = \sqrt{3}$;

c) $\left(\sqrt{8} + \sqrt{3}\right)\sqrt{6} = \sqrt{8}.\sqrt{6} + \sqrt{3}.\sqrt{6} = \sqrt{8 \,.\, 6} + \sqrt{3 \,.\, 6}$

$= \sqrt{4^2 \,.\, 3} + \sqrt{3^2 \,.\, 2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$

Ví dụ 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9a} + \sqrt{\dfrac{a}{4}} - a\sqrt{\dfrac{4}{a}} + \dfrac{1}{2a}\sqrt{a^3}$ với $a > 0$; b) $\dfrac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}$ với $a \geq 0$.

Giải

a) $\sqrt{9a} + \sqrt{\dfrac{a}{4}} - a\sqrt{\dfrac{4}{a}} + \dfrac{1}{2a}\sqrt{a^3} = 3\sqrt{a} + \dfrac{\sqrt{a}}{2} - a\sqrt{\dfrac{4a}{a^2}} + \dfrac{1}{2a}\sqrt{a^2.a}$

$= 3\sqrt{a} + \dfrac{\sqrt{a}}{2} - 2\sqrt{a} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$;

b) $\dfrac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} = \dfrac{1 + \left(\sqrt{a}\right)^3}{1 + \sqrt{a}} = \dfrac{\left(1 + \sqrt{a}\right)\left(1 - \sqrt{a} + a\right)}{1 + \sqrt{a}} = 1 - \sqrt{a} + a.$

Thực hành 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{5}$; b) $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$; c) $\left(2 - \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$.

Thực hành 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{9x^3}+4x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$ với $x>0$; b) $\frac{a^2-5}{a+\sqrt{5}}$ với $a\neq-\sqrt{5}$.

Vận dụng 2. Trả lời câu hỏi trong (trang 52).

BÀI TẬP

1. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; c) $-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{12a}}$ với $a>0$.

2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{4}{7}}$; b) $\sqrt{\frac{5}{24}}$;

c) $\sqrt{\frac{2}{3a^3}}$ với $a>0$; d) $2ab\sqrt{\frac{a^2}{2b}}$ với $a<0$, $b>0$.

3. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\frac{4}{\sqrt{13}-3}$; b) $\frac{10}{5+2\sqrt{5}}$; c) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}$; b) $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$; c) $\sqrt{64a}-\sqrt{18}-a\sqrt{\frac{9}{a}}+\sqrt{50}$ với $a>0$.

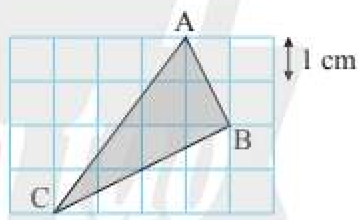
5. Tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{3}\right)\sqrt{6}$; b) $\sqrt{18}:\sqrt{6}+\sqrt{8}.\sqrt{\frac{27}{2}}$; c) $\left(1-2\sqrt{5}\right)^2$.

6. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=a-b$ với $a>0$, $b>0$;

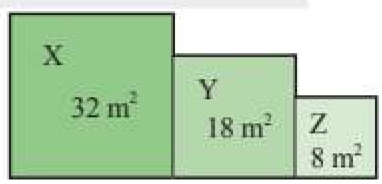
b) $\left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a$ với $a\geq0$ và $a\neq1$.



Hình 4

7. Tam giác ABC được vẽ trên lưới ô vuông như Hình 4. Tính diện tích và chu vi của tam giác ABC.

8. Một vườn hoa gồm ba thửa hình vuông X, Y, Z lần lượt có diện tích như Hình 5. Tính chu vi của vườn hoa đó.



Hình 5

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

Thực hiện các biến đổi trục căn thức ở mẫu, khử mẫu của biểu thức lấy căn, rút gọn biểu thức chứa dấu căn.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Biểu thức nào sau đây có giá trị khác với các biểu thức còn lại?

A. $\left(-\sqrt{5}\right)^2$. B. $\sqrt{5^2}$. C. $\sqrt{(-5)^2}$. D. $-\left(\sqrt{5}\right)^2$.

2. Có bao nhiêu số tự nhiên x để $\sqrt{16-x}$ là số nguyên?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

3. Giá trị của biểu thức $\sqrt{16}+\sqrt[3]{-64}$ bằng

A. 0. B. –2. C. 8. D. –4.

4. Đẳng thức nào sau đây **không** đúng?

A. $\sqrt{16}+\sqrt{144}=16$. B. $\sqrt{0,64}\,.\,\sqrt{9}=2,4$.

C. $\sqrt{(-18)^2}:\sqrt{6^2}=3$. D. $\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{7^2}=-10$.

5. Biết rằng $(2,6)^2 = 6,76$, giá trị của biểu thức $\sqrt{0,0676}$ bằng

A. 0,0026. B. 0,026. C. 0,26. D. 2,6.

6. Rút gọn biểu thức $\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{64a}$ với $a \geq 0$, ta có kết quả

A. $15\sqrt{a}$. B. 15a. C. $7\sqrt{a}$. D. 7a.

7. Cho $a=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$. Rút gọn biểu thức $\sqrt{3}a-\sqrt{2}b$, ta có kết quả

A. $3\sqrt{6}$. B. $-\sqrt{6}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $12-\sqrt{6}$.

8. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$, ta có kết quả

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}}$. B. $\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\sqrt{a}}{3a}$. C. $\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{a}}{a}$. D. $\sqrt{2a}-\sqrt{a}$.

9. Kết quả của phép tính $\sqrt{27}:\sqrt{6}\,.\,2\sqrt{18}$ là

A. 12. B. 18. C. 72. D. 144.

10. Rút gọn biểu thức $\dfrac{1}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ với $a \geq 0$, $a \neq \dfrac{1}{2}$, ta có kết quả

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-2a}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2a-1}$. C. $\dfrac{\sqrt{a}}{2a-1}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-a}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

11. Tìm x, biết:

a) $x^2 = 10$; b) $\sqrt{x} = 8$; c) $x^3 = -0{,}027$; d) $\sqrt[3]{x} = -\dfrac{2}{3}$.

12. Biết rằng $1 < a < 5$, rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-5)^2}$.

13. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

a) $\dfrac{4-2\sqrt{6}}{\sqrt{48}}$; b) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{a}{a-\sqrt{a}}$ với $a > 0$, $a \neq 1$.

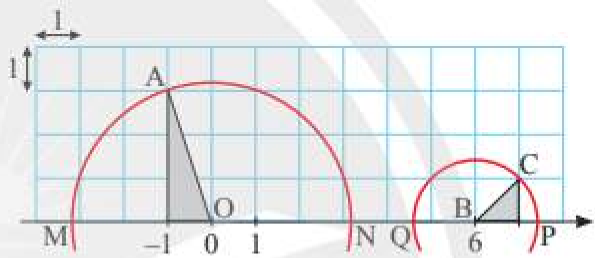
14. Biết rằng $a > 0$, $b > 0$ và $ab = 16$. Tính giá trị của biểu thức $A = a\sqrt{\dfrac{12b}{a}} + b\sqrt{\dfrac{3a}{b}}$.

15. Tính $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

16. Một trục số được vẽ trên lưới ô vuông như Hình 1.

a) Đường tròn tâm O bán kính OA cắt trục số tại hai điểm M và N. Hai điểm M và N biểu diễn hai số thực nào?

b) Đường tròn tâm B bán kính BC cắt trục số tại hai điểm P và Q. Hai điểm P và Q biểu diễn hai số thực nào?

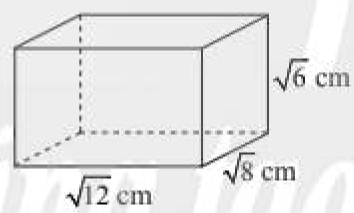


Hình 1

17. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm như Hình 2.

a) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

b) Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.



Hình 2

18. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{a}} + 3\sqrt{\dfrac{a}{3}} + \sqrt{12a^3}\right) : \sqrt{3a}$ với $a > 0$; b) $\dfrac{1-a}{1+\sqrt{a}} + \dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0$, $a \neq 1$.

19. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{a+\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{a+2\sqrt{a}+1}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P. b) Tính giá trị của P khi $a = 0{,}25$.

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG
HÌNH HỌC PHẲNG

Chương 4

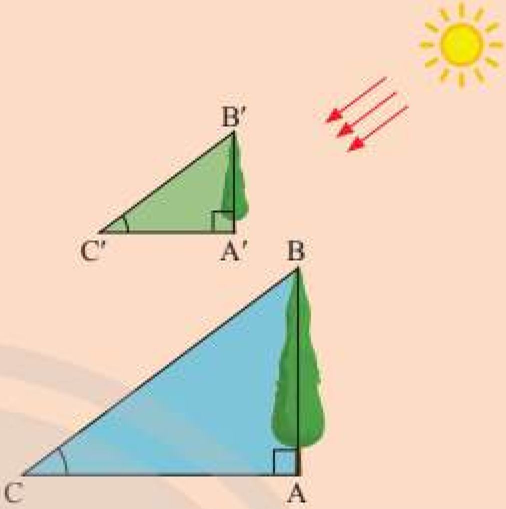
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong chương này, các em sẽ tìm hiểu về các tỉ số lượng giác của góc nhọn là sin (*sine*), côsin (*cosine*), tang (*tangent*), côtang (*cotangent*). Các em sẽ học cách sử dụng tỉ số lượng giác để thiết lập một số hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, đồng thời vận dụng các hệ thức trên vào giải tam giác vuông cũng như giải quyết một số bài toán thực tế.

Tỉ số lượng giác của góc nhọn giúp ta có thể tính được khoảng cách giữa hai điểm cách xa nhau.

Bài 1 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Tại một thời điểm, khi những tia nắng chiếu, cây và bóng tạo thành các tam giác vuông như hình bên. Với $\widehat{C} = \widehat{C'}$, so sánh các tỉ số $\frac{AB}{AC}$ và $\frac{A'B'}{A'C'}$.



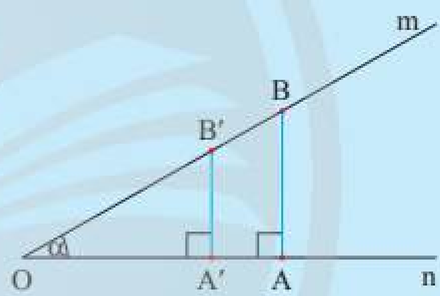
1. ĐỊNH NGHĨA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1 Cho góc nhọn $\widehat{mOn} = \alpha$. Lấy hai điểm A và A′ trên On, kẻ hai đường thẳng qua A và A′ vuông góc với On và cắt Om lần lượt tại B và B′.

a) Có nhận xét gì về hai tam giác OAB và OA′B′?

b) So sánh các cặp tỉ số:

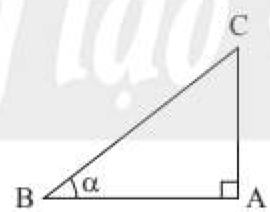
$\frac{AB}{OA}$ và $\frac{A'B'}{OA'}$; $\frac{AB}{OB}$ và $\frac{A'B'}{OB'}$; $\frac{OA}{OB}$ và $\frac{OA'}{OB'}$.



Hình 1

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn B bằng α. Ta gọi AC là *cạnh đối* của góc α, AB là *cạnh kề* của góc α.

Từ 1 ta thấy trong các tam giác vuông cùng một góc nhọn α thì các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền; cạnh kề và cạnh huyền; cạnh đối và cạnh kề; cạnh kề và cạnh đối của góc nhọn α đó là không đổi. Các tỉ số trên gọi là *tỉ số lượng giác* của góc nhọn α đó.



Hình 2

Cho góc nhọn α. Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$, ta có:

– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là *sin* của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$.

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là *côsin* của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$.

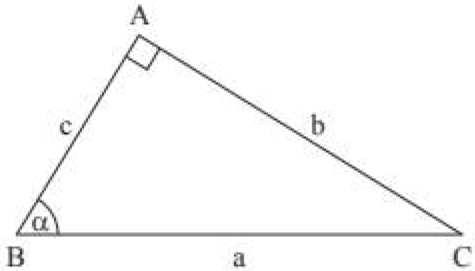
– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là *tang* của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$.

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là *côtang* của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$.

Cụ thể đối với tam giác vuông ABC trong Hình 3, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}; \quad \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a};$$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$



Hình 3

Chú ý: Với góc nhọn α, ta có:

- $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$.
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Ví dụ 1. Tính các tỉ số lượng giác của góc α trong tam giác ABC (Hình 4).

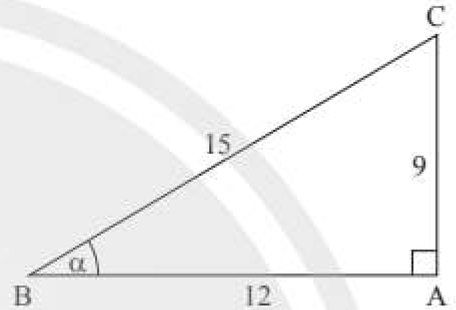
Giải

Xét tam giác ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \alpha$.

Ta có:

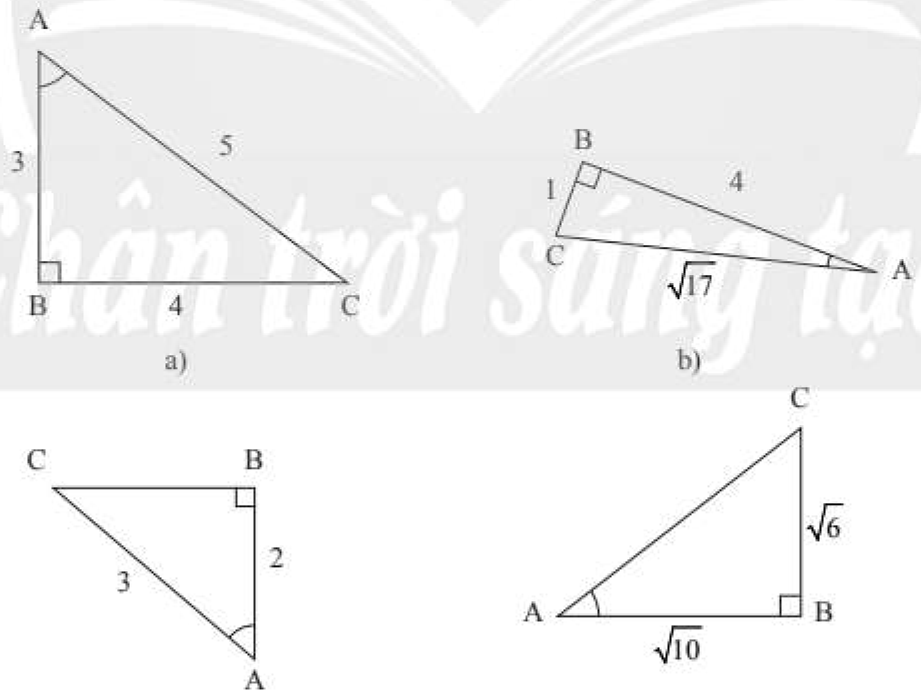
$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = 0,6; \quad \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = 0,8;$$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = 0,75; \quad \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$



Hình 4

Thực hành 1. Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn A trong mỗi tam giác vuông ABC có $\widehat{B} = 90^\circ$ ở Hình 5 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



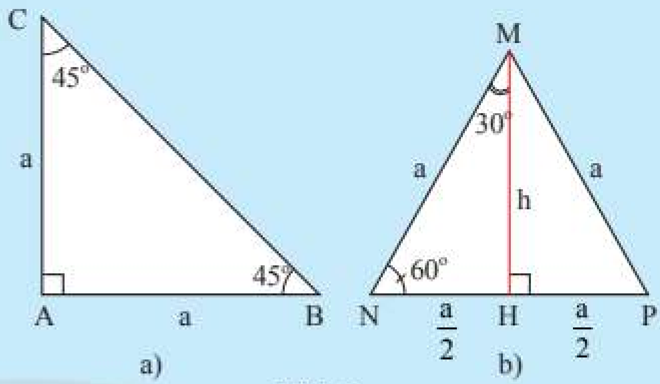
Hình 5

Vận dụng 1. Sử dụng tỉ số lượng giác để giải thích tình huống trong (trang 60).

Tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt (góc 30°, 45°, 60°)

a) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh góc vuông bằng a (Hình 6a). Tính độ dài cạnh huyền BC theo a, rồi tính các tỉ số lượng giác của góc 45°.

b) Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng a (Hình 6b). Tính độ dài đường cao MH theo a, rồi tính các tỉ số lượng giác của góc 30° và góc 60°.



Hình 6

Từ kết quả của 2, ta có bảng tỉ số lượng giác của các góc 30°, 45°, 60° như sau:

Bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt

Góc α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{\sin 30^\circ . \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$.

Giải

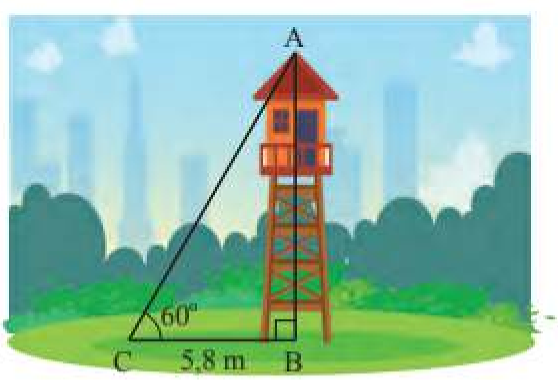
Ta có $P = \dfrac{\sin 30^\circ . \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{4}$.

Thực hành 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{2\cos 45^\circ}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\tan 30^\circ$;

b) $B = \dfrac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} - \cot 45^\circ$.

Vận dụng 2. Tìm chiều cao của tháp canh trong Hình 7 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

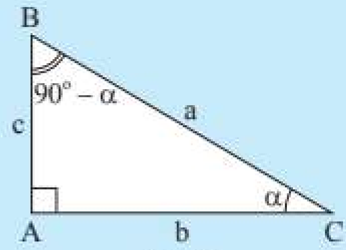


Hình 7

2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

3 a) Tính các tỉ số lượng giác của góc α và của góc $90^o - \alpha$ trong Hình 8 theo a, b, c.

b) So sánh $\sin\widehat{B}$ và $\cos\widehat{C}$, $\cos\widehat{B}$ và $\sin\widehat{C}$, $\tan\widehat{B}$ và $\cot\widehat{C}$, $\tan\widehat{C}$ và $\cot\widehat{B}$.



Hình 8

Hai góc được gọi là phụ nhau nếu chúng có tổng bằng 90^o. Như vậy, góc phụ của góc nhọn α là góc $(90^o - \alpha)$.

Từ 3, ta có các đẳng thức giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau như sau:

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

$\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$;

$\tan(90^o - \alpha) = \cot\alpha$; $\cot(90^o - \alpha) = \tan\alpha$.

Chú ý: Từ nay khi viết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta có thể viết $\sin A$ thay cho $\sin\widehat{A}$.

Ví dụ 3. So sánh:

a) $\sin 25^o$ và $\cos 65^o$;

b) $\cos 25^o$ và $\sin 65^o$;

c) $\tan 25^o$ và $\cot 65^o$;

d) $\cot 25^o$ và $\tan 65^o$.

Giải

Ta có:

a) $\sin 25^o = \cos(90^o - 25^o) = \cos 65^o$;

b) $\cos 25^o = \sin(90^o - 25^o) = \sin 65^o$;

c) $\tan 25^o = \cot(90^o - 25^o) = \cot 65^o$;

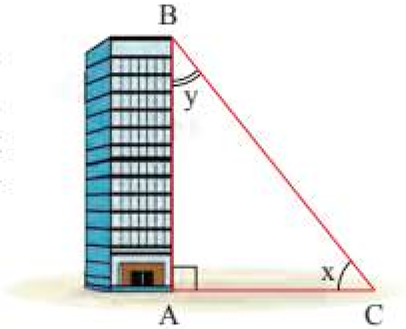
d) $\cot 25^o = \tan(90^o - 25^o) = \tan 65^o$.

Thực hành 3.

a) So sánh: $\sin 72^o$ và $\cos 18^o$; $\cos 72^o$ và $\sin 18^o$; $\tan 72^o$ và $\cot 18^o$.

b) Cho biết $\sin 18^o \approx 0,31$; $\tan 18^o \approx 0,32$. Tính $\cos 72^o$ và $\cot 72^o$.

Vận dụng 3. Tia nắng chiếu qua điểm B của nóc toà nhà tạo với mặt đất một góc x và tạo với cạnh AB của toà nhà một góc y (Hình 9). Cho biết $\cos x \approx 0,78$ và $\cot x \approx 1,25$. Tính $\sin y$ và $\tan y$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 9

3. TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Người ta thường dùng các đơn vị số đo góc là độ (kí hiệu: °), phút (kí hiệu: '), giây (kí hiệu: "). Ta có 1° = 60', 1' = 60".

Ta có thể sử dụng nhiều loại máy tính cầm tay để tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn và tính số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó.

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các nút: SHIFT MODE SETUP 3. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ D.

Tính các tỉ số lượng giác của các góc nhọn

Để tính tỉ số lượng giác của một góc α, ta dùng các nút: sin cos tan.

Ví dụ 4. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn):

a) sin 15°; b) cos 64°24'.

Giải

a) Để tính sin 15°, ta ấn liên tiếp các nút sau đây:

sin 1 5) =

và được kết quả $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ với hiển thị trên màn hình như hình bên.

Ấn thêm các nút SHIFT = và làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn, ta sẽ được $\sin 15° \approx 0{,}259$.

b) Để tính cos 64°24', ta ấn liên tiếp các nút sau đây:

cos 6 4 °''' 2 4 °''' =

và ta được kết quả như hình bên.

Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn, ta được $\cos 64°24' \approx 0{,}432$.

Lưu ý:

– Để tính tan α ta cũng làm như trên, chỉ thay nút sin, cos bằng nút tan.

– Để tính cot α, ta tính $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ hoặc tan (90° – α).

Bảng tóm tắt cách tính tỉ số lượng giác của góc nhọn

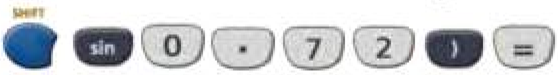
Để tính	Thứ tự các nút
sin α	$\boxed{\sin}$ $\boxed{\alpha}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
cos α	$\boxed{\cos}$ $\boxed{\alpha}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
tan α	$\boxed{\tan}$ $\boxed{\alpha}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
cot α	$\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{\alpha}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Xác định số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của góc đó

Ví dụ 5. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α biết $\sin \alpha = 0{,}72$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm hoặc đến phút).

Giải

Để tìm α khi biết $\sin \alpha = 0{,}72$, ta ấn liên tiếp các nút sau đây:



và được kết quả như hình bên.

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được $\alpha \approx 46{,}05^\circ$.

Khi ta ấn thêm nút °'" thì được kết quả như hình bên.

Làm tròn kết quả đến phút, ta được $\alpha \approx 46^\circ 3'$.

Vậy $\alpha \approx 46{,}05^\circ$ hoặc $\alpha \approx 46^\circ 3'$.

Lưu ý:

– Để tìm α khi biết $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay nút sin bằng các nút cos hay tan.

– Để tìm α khi biết $\cot \alpha$, ta tính $\tan \alpha = \dfrac{1}{\cot \alpha}$ và dùng $\tan \alpha$ để tìm α.

Thực hành 4.

a) Sử dụng máy tính cầm tay, tính tỉ số lượng giác của các góc sau (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn):

22°; 52°; $15^\circ 20'$; $52^\circ 18'$.

b) Tìm các góc nhọn x, y, z, t trong mỗi trường hợp sau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm hoặc đến phút):

$\sin x = 0{,}723$; $\cos y = 0{,}828$; $\tan z = 3{,}77$; $\cot t = 1{,}54$.

Vận dụng 4.

a) Vẽ một tam giác vuông có một góc bằng 40°. Đo độ dài các cạnh rồi dùng các số đo để tính các tỉ số lượng giác của góc 40°. Kiểm tra lại các kết quả vừa tính bằng máy tính cầm tay.

b) Vẽ một tam giác vuông có ba cạnh bằng 3 cm, 4 cm, 5 cm. Tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn. Dùng thước đo góc để đo các góc nhọn. Kiểm tra lại các kết quả bằng máy tính cầm tay.

BÀI TẬP

Trong các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì làm tròn kết quả đến hàng phần trăm hoặc đến phút.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính các tỉ số lượng giác của góc B trong mỗi trường hợp sau:

a) BC = 5 cm; AB = 3 cm;

b) BC = 13 cm; AC = 12 cm;

c) BC = $5\sqrt{2}$ cm; AB = 5 cm;

d) AB = $a\sqrt{3}$; AC = a.

2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\sin 30^\circ . \cos 30^\circ}{\cot 45^\circ}$;

b) $B = \dfrac{\tan 30^\circ}{\cos 45^\circ . \cos 60^\circ}$.

3. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°:

a) $\sin 60^\circ$;

b) $\cos 75^\circ$;

c) $\tan 80^\circ$.

4. Sử dụng máy tính cầm tay, tính tỉ số lượng giác của các góc sau:

a) 26°;

b) 72°;

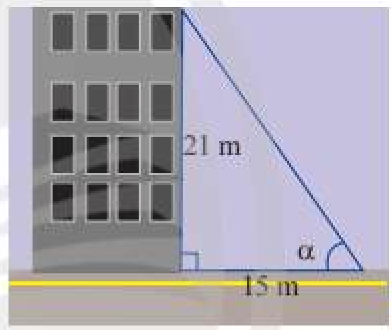
c) $81^\circ 27'$.

5. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm góc nhọn α trong mỗi trường hợp sau đây:

a) $\cos\alpha = 0,6$;

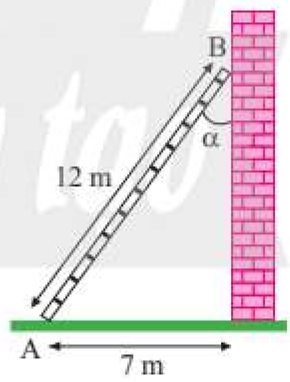
b) $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

6. Tia nắng chiếu qua nóc của một toà nhà hợp với mặt đất một góc α. Cho biết toà nhà cao 21 m và bóng của nó trên mặt đất dài 15 m (Hình 10). Tính góc α (kết quả làm tròn đến độ).



Hình 10

7. Một cái thang dài 12 m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 7 m (Hình 11). Tính góc α tạo bởi thang và tường.



Hình 11

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

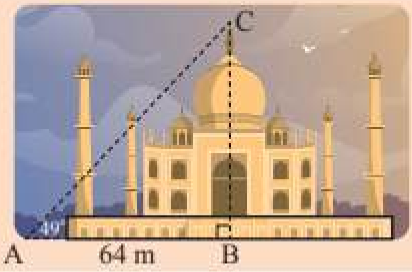
– Nhận biết được các giá trị sin, côsin, tang, côtang của góc nhọn.

– Giải thích được tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt và của hai góc phụ nhau.

– Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) tỉ số lượng giác của góc nhọn bằng máy tính cầm tay.

Bài 2 HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Làm thế nào để tính chiều cao BC khi biết khoảng cách AB và góc A trong hình bên?

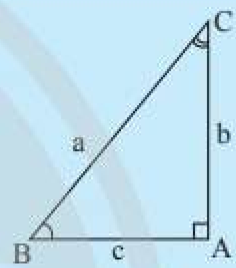


1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC VUÔNG

1 Cho tam giác ABC vuông tại A (Hình 1).

a) Hãy tính sin B theo b và a, cos B theo c và a. Sử dụng các kết quả tính được để giải thích tại sao ta lại có các đẳng thức: $b = a \,.\, \sin B$; $c = a \,.\, \cos B$.

b) Hãy tính tan B theo b và c, cot B theo c và b. Sử dụng các kết quả tính được ở trên để giải thích tại sao ta lại có các đẳng thức: $b = c \,.\, \tan B$; $c = b \,.\, \cot B$.



Hình 1

Từ 1, một cách tổng quát ta có định lí sau:

Định lí

Trong một tam giác vuông:
– Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.
– Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

Cụ thể đối với tam giác vuông ABC trong Hình 1, ta có:

$$b = a \,.\, \sin B = a \,.\, \cos C; \qquad c = a \,.\, \sin C = a \,.\, \cos B;$$
$$b = c \,.\, \tan B = c \,.\, \cot C; \qquad c = b \,.\, \tan C = b \,.\, \cot B.$$

Ví dụ 1. Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 30 cm và một góc nhọn bằng 22° (Hình 2). Tính x, y (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

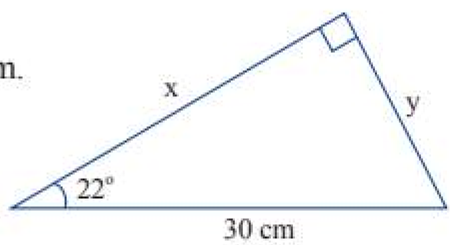
Giải

Tam giác vuông đã cho có cạnh huyền bằng 30 cm.
Cạnh góc vuông x có góc kề bằng 22° nên ta có:

$$x = 30 \,.\, \cos 22^\circ \approx 27{,}82 \text{ (cm)}.$$

Cạnh góc vuông y có góc đối bằng 22° nên ta có:

$$y = 30 \,.\, \sin 22^\circ \approx 11{,}24 \text{ (cm)}.$$



Hình 2

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông AC = 10 cm. Tính AB trong mỗi trường hợp sau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm):

a) $\widehat{C} = 34^o$;   b) $\widehat{B} = 25^o$.

Giải

a) Xét tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 34^o$, ta có:

$$AB = AC \,.\, \tan C = 10 \,.\, \tan 34^o \approx 6{,}75 \text{ (cm)}.$$

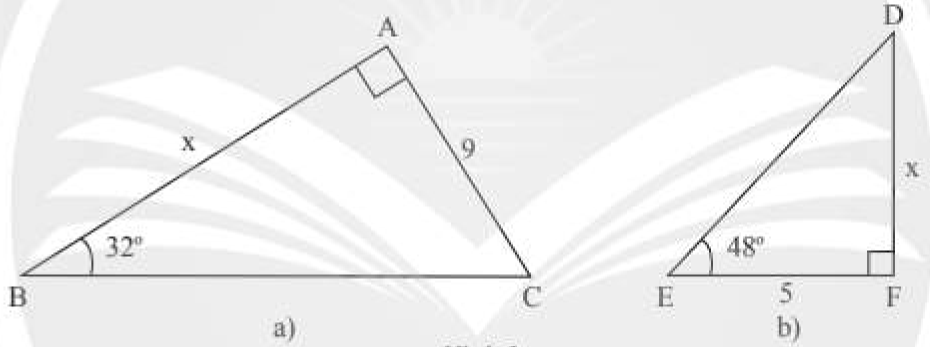
b) Xét tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 25^o$, ta có:

$$AB = AC \,.\, \cot B = 10 \,.\, \cot 25^o \approx 21{,}45 \text{ (cm)}.$$

Thực hành 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài cạnh huyền bằng 20 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông trong mỗi trường hợp sau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm):

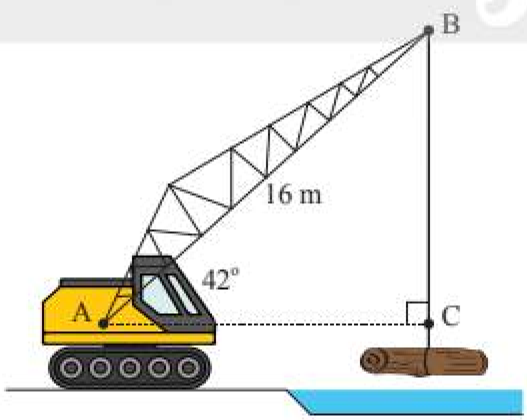
a) $\widehat{B} = 36^o$;   b) $\widehat{C} = 41^o$.

Thực hành 2. Tính độ dài cạnh góc vuông x của mỗi tam giác vuông trong Hình 3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 3

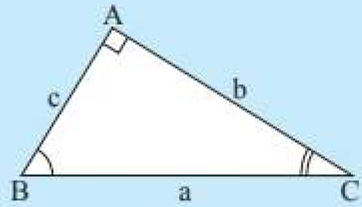
Vận dụng 1. Một cần cẩu đang nâng một khối gỗ trên sông. Biết tay cẩu AB có chiều dài là 16 m và nghiêng một góc 42° so với phương nằm ngang (Hình 4). Tính chiều dài BC của đoạn dây cáp (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 4

2. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC (Hình 5). Em hãy cho biết trong các trường hợp nào sau đây, ta có thể tính được tất cả các cạnh và các góc của tam giác. Giải thích cách tính.



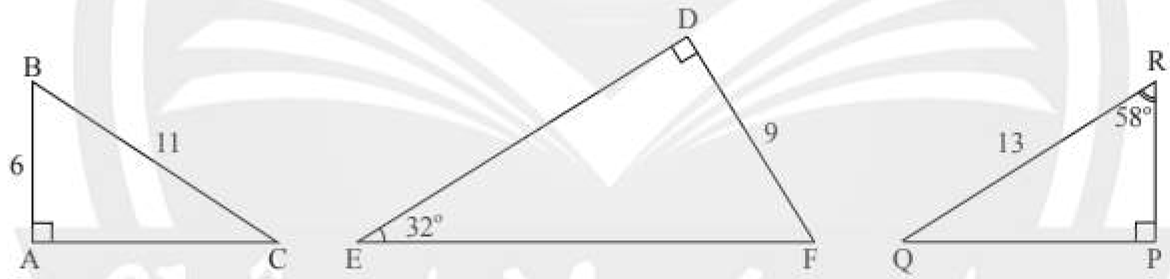
Hình 5

Trường hợp	a	b	c	$\hat{B}$	$\hat{C}$
1	10	4	?	?	?
2	?	?	?	20^o	70^o
3	16	?	?	35^o	?

Giải một tam giác vuông là tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác đó.

Từ , ta thấy có thể giải được một tam giác vuông nếu biết hai cạnh, hoặc một cạnh và một góc nhọn của nó.

Ví dụ 3. Giải các tam giác vuông ở Hình 6. Làm tròn kết quả độ dài đến hàng đơn vị và số đo góc đến độ.



a) b) c)

Hình 6

Giải

a) Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{11} \text{ suy ra } \hat{C} \approx 33^o, \ \hat{B} \approx 90^o - 33^o = 57^o.$$

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{11^2 - 6^2} = \sqrt{121 - 36} \approx 9.$$

b) Xét tam giác DEF vuông tại D, ta có:

$$\hat{F} = 90^o - 32^o = 58^o;$$

$$DE = DF \,.\, \cot E = 9 \,.\, \cot 32^o \approx 14;$$

$$\sin E = \frac{DF}{EF} \text{ nên } EF = \frac{DF}{\sin E} = \frac{9}{\sin 32^o} \approx 17.$$

c) Xét tam giác PQR vuông tại P, ta có:

$$\widehat{Q} = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ;$$

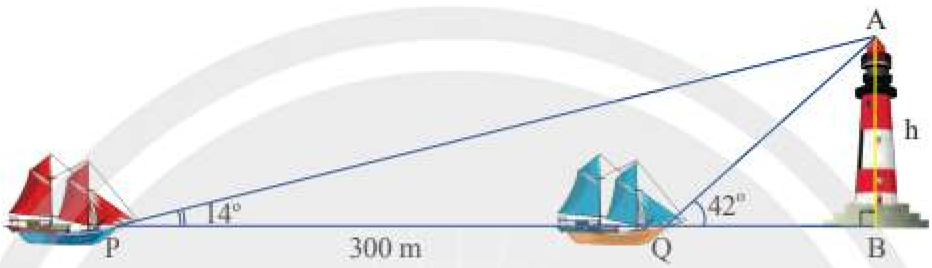
$$PQ = QR\,.\,\sin R = 13.\,\sin 58^\circ \approx 11;$$

$$PR = QR\,.\,\cos R = 13.\,\cos 58^\circ \approx 7.$$

Ví dụ 4. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển (Hình 7). Từ P và Q, người ta nhìn thấy tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPA} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt h = AB là chiều cao của tháp hải đăng.

a) Tính BQ và BP theo h.

b) Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 7

Giải

a) Xét tam giác BQA vuông tại B, ta có $\tan Q = \dfrac{AB}{QB}$ nên $BQ = \dfrac{AB}{\tan 42^\circ} = \dfrac{h}{\tan 42^\circ}$.

Xét tam giác BPA vuông tại B, ta có $\tan P = \dfrac{AB}{PB}$ nên $BP = \dfrac{AB}{\tan 14^\circ} = \dfrac{h}{\tan 14^\circ}$.

b) Ta có BP – BQ = 300. Suy ra:

$$\frac{h}{\tan 14^\circ} - \frac{h}{\tan 42^\circ} = 300$$

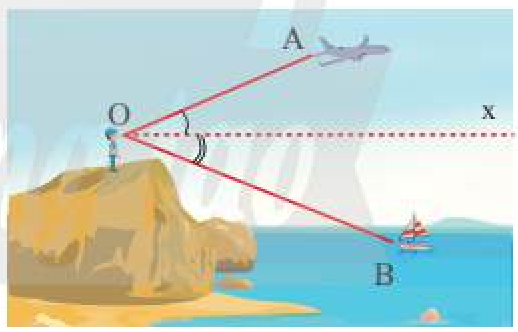
$$h = \frac{300}{\dfrac{1}{\tan 14^\circ} - \dfrac{1}{\tan 42^\circ}} \approx 103,4\,(m).$$

Vậy chiều cao của tháp hải đăng là khoảng 103,4 m.

Chú ý: Trong đo đạc, khi người quan sát có hướng nhìn ngang theo tia Ox (Hình 8) thì:

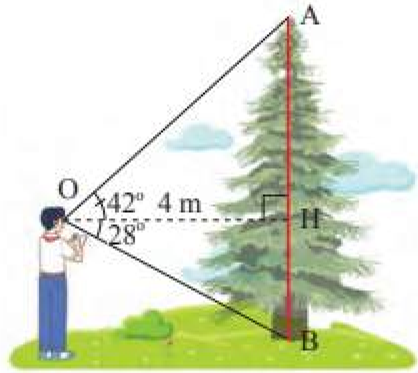
– Góc $\widehat{xOA}$ gọi là góc nghiêng lên hay góc nâng;

– Góc $\widehat{xOB}$ gọi là góc nghiêng xuống hay góc hạ.



Hình 8

Vận dụng 2. Trong Hình 9, cho OH = 4 m, $\widehat{AOH} = 42^\circ$, $\widehat{HOB} = 28^\circ$. Tính chiều cao AB của cây.

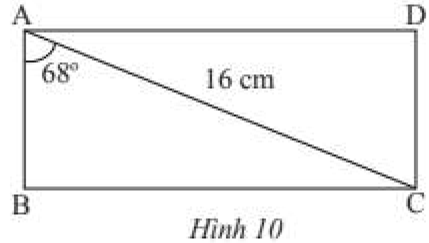


Hình 9

BÀI TẬP

Trong các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì làm tròn kết quả đến hàng phần mười hoặc đến phút.

1. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD. Biết AC = 16 cm và $\widehat{BAC} = 68^\circ$ (Hình 10).



Hình 10

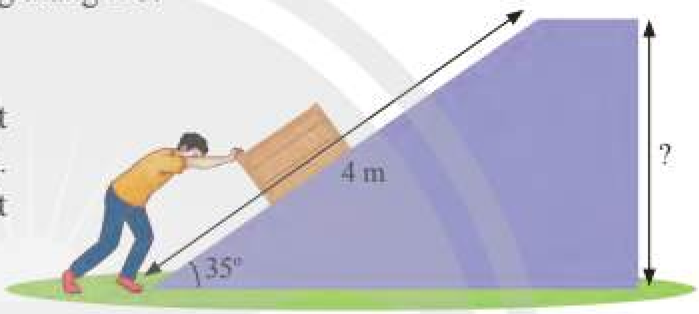
2. Cho tam giác ABC có BC = 20 cm, $\widehat{ABC} = 22^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.

b) Tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác ABC.

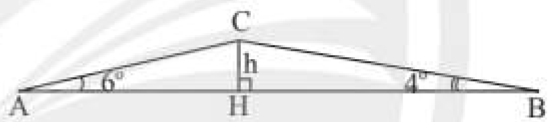
c) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

3. Một người đẩy một vật lên hết một con dốc nghiêng một góc 35° (Hình 11). Tính độ cao của vật so với mặt đất biết độ dài con dốc là 4 m.



Hình 11

4. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B, An phải đi đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB (Hình 12). Biết AB = 762 m, $\widehat{A} = 6^\circ$, $\widehat{B} = 4^\circ$.



Hình 12

a) Tính chiều cao h của con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ khi lên dốc là 4 km/h và tốc độ khi xuống dốc là 19 km/h.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Giải thích được một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông (cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề; cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề).

– Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với tỉ số lượng giác của góc nhọn (tính độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc; áp dụng giải tam giác vuông).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10 cm; $\hat{C} = 60^\circ$. Độ dài hai cạnh còn lại là

A. $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. B. $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm.

C. $AB = 10\sqrt{3}$ cm; BC = 20 cm. D. $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

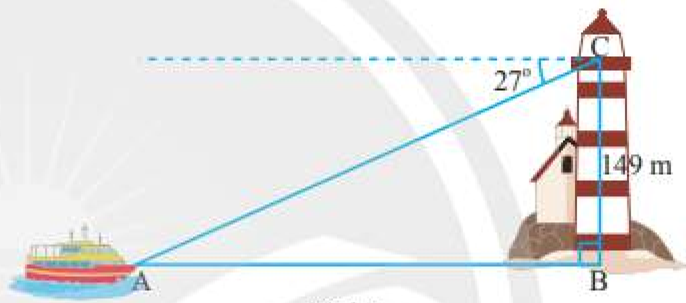
2. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 8 cm, AC = 6 cm. Tỉ số lượng giác tan C (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. 0,87. B. 0,86. C. 0,88. D. 0,89.

3. Giá trị của biểu thức $B = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ$ là

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

4. Một người quan sát tại ngọn hải đăng ở vị trí cao 149 m so với mặt nước biển thì thấy một du thuyền ở xa với góc nghiêng xuống là 27° (Hình 1). Hỏi thuyền cách xa chân hải đăng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



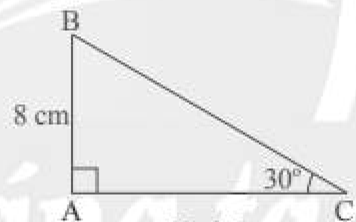
Hình 1

A. 292 m. B. 288 m. C. 312 m. D. 151 m.

5. Cho Hình 2. Độ dài cạnh BC là

A. 4 cm. B. $8\sqrt{3}$ cm.

C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. D. 16 cm.



Hình 2

6. Cho tam giác MNP có $\hat{N} = 70^\circ$, $\hat{P} = 38^\circ$, đường cao MI = 11,5 cm. Độ dài của cạnh NP của tam giác MNP (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) bằng

A. 20,9 cm. B. 18,9 cm. C. 40,6 cm. D. 16,9 cm.

7. Một cái thang dài 3 m đặt sát bờ tường, biết góc tạo bởi thang và bờ tường là 40°. Hỏi chân thang đặt ở vị trí cách tường bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

A. 1,9 m. B. 2,3 m. C. 1,8 m. D. 2,5 m.

8. Một chiếc máy bay bay lên với tốc độ 450 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30°. Hỏi sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

A. 10,5 km. B. 12,75 km. C. 12 km. D. 11,25 km.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Trong các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì làm tròn kết quả đến hàng phần mười hoặc đến phút.

9. Tìm số đo góc α biết rằng:

a) $\sin\alpha = 0{,}25$; b) $\cos\alpha = 0{,}75$; c) $\tan\alpha = 1$; d) $\cot\alpha = 2$.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 18 cm, AC = 24 cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

12. Cho góc nhọn α biết $\sin\alpha = 0{,}8$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

13. Tính giá trị của biểu thức:

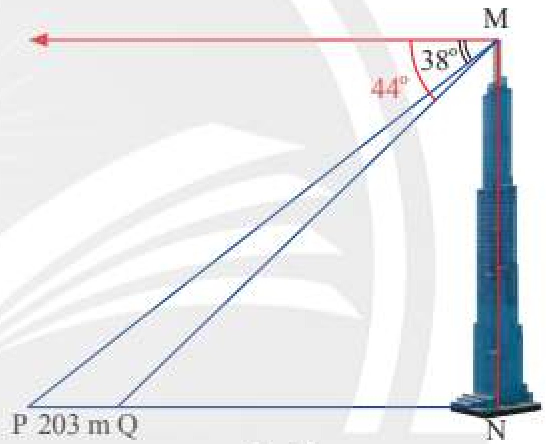
a) $A = 4 - \sin^2 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\cot^3 45^\circ$;

b) $B = \tan 45^\circ . \cos 30^\circ . \cot 30^\circ$;

c) $C = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$.

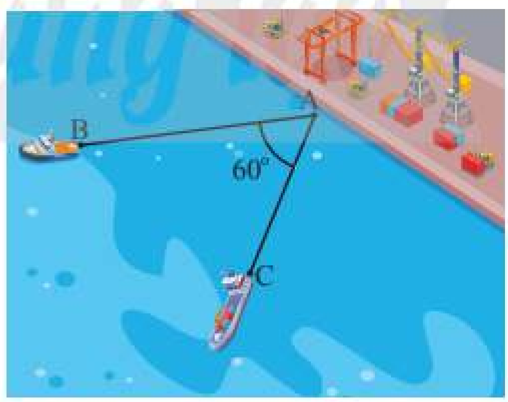
14. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 39^\circ$ và PQ = 10 cm. Hãy giải tam giác vuông OPQ.

15. Hai điểm P và Q cách nhau 203 m và thẳng hàng với chân của một toà tháp (Hình 3). Từ đỉnh của toà tháp đó, một người nhìn thấy hai điểm P, Q với hai góc nghiêng xuống lần lượt là 38° và 44°. Tính chiều cao của toà tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Hình 3

16. Hai chiếc tàu thuỷ B và C cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo thành một góc 60° (Hình 4). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Hình 4

Chương

5

ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn rất quen thuộc trong đời sống và có ứng dụng thực tế phong phú. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về đường tròn và các khái niệm liên quan như: cung tròn, dây cung, tiếp tuyến, góc ở tâm, góc nội tiếp, hình quạt tròn, hình vành khuyên cũng như một số bài toán ứng dụng của đường tròn trong thực tiễn.

Trống đồng – biểu tượng văn hoá của dân tộc Việt Nam được trang trí với nhiều đường tròn.

Bài 1 ĐƯỜNG TRÒN

Hãy chỉ ra các bộ phận có dạng đường tròn của chiếc xe đạp trong hình dưới đây. Em hãy tìm thêm một số hình ảnh về đường tròn trong thực tế.

1. KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN

1 Mở một chiếc compa sao cho hai đầu compa cách nhau một khoảng R cho trước. Tì đầu nhọn của compa lên một điểm O cố định trên tờ giấy, xoay compa để đầu bút M của compa vạch trên giấy một đường cong. Nêu nhận xét về các khoảng cách từ một điểm M tuỳ ý trên đường cong vừa vẽ đến điểm O.

Hình 1

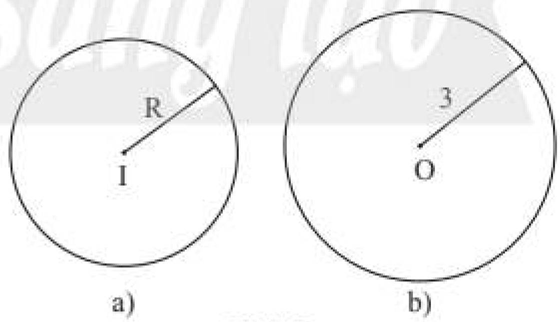
Đường tròn tâm O bán kính R (R > 0) là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R, kí hiệu (O; R).

Chú ý: Khi không cần chú ý đến bán kính, đường tròn (O; R) còn được kí hiệu là (O).

Ví dụ 1. Hãy gọi tên, xác định tâm và bán kính của các đường tròn có trong Hình 2.

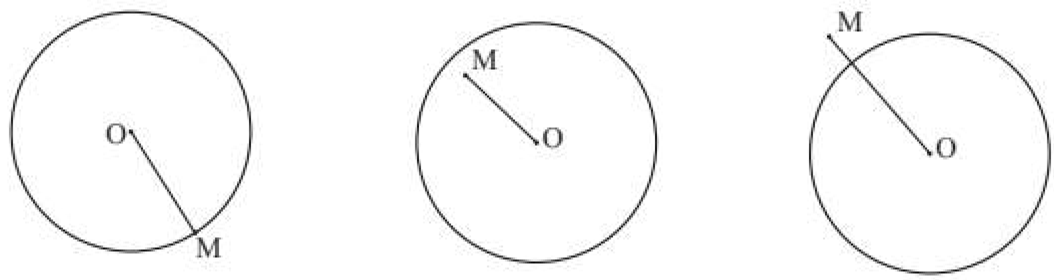
Giải

Hình 2a là đường tròn (I; R) có tâm I và bán kính R.
Hình 2b là đường tròn (O; 3) có tâm O và bán kính bằng 3.



Hình 2

Chú ý: Cho đường tròn (O; R) và điểm M. Khi đó:
– Nếu OM = R thì điểm M nằm trên đường tròn hay M thuộc đường tròn (Hình 3a);
– Nếu OM < R thì điểm M nằm trong đường tròn (Hình 3b);
– Nếu OM > R thì điểm M nằm ngoài đường tròn (Hình 3c).



a) b) c)

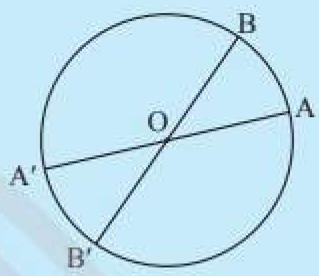
Hình 3

2. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

2 a) Cho đường tròn (O; R).

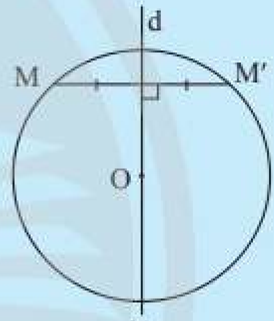
i) Lấy điểm A nằm trên đường tròn. Vẽ đường thẳng AO cắt đường tròn tại điểm A′ khác A. Giải thích tại sao O là trung điểm của đoạn thẳng AA′.

ii) Lấy điểm B khác A thuộc đường tròn (O; R). Tìm điểm B′ sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng BB′. Điểm B′ có thuộc đường tròn (O; R) không? Giải thích.



a)

b) Cho đường tròn (O; R), d là đường thẳng đi qua tâm O. Lấy điểm M nằm trên đường tròn. Vẽ điểm M′ sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM′ (khi M thuộc d thì lấy M′ trùng với M). Điểm M′ có thuộc đường tròn (O; R) không? Giải thích.

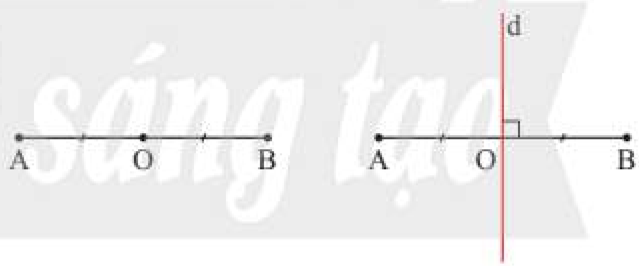


b)

Hình 4

Nếu điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB thì ta nói hai điểm A và B đối xứng nhau qua O (Hình 5a).

Nếu đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB thì ta nói hai điểm A và B đối xứng nhau qua d (Hình 5b).



a) b)

Hình 5

Cho điểm A thuộc đường tròn (O). Từ 2 ta thấy điểm đối xứng với A qua O cũng thuộc (O); điểm đối xứng với A qua đường thẳng d đi qua O cũng thuộc (O). Khi đó ta nói O là tâm đối xứng của (O), d là trục đối xứng của (O).

Ta có:

Đường tròn là hình có tâm đối xứng; tâm đối xứng là tâm của đường tròn.
Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của nó.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (I).

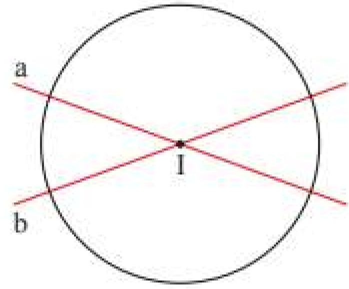
a) Tìm tâm đối xứng của (I).

b) Vẽ hai trục đối xứng của (I).

Giải

a) Tâm I là tâm đối xứng của (I).

b) Vẽ hai đường thẳng a và b đi qua tâm I. Ta có a và b đều là trục đối xứng của (I).



Hình 6

Thực hành 1. Xác định tâm đối xứng và trục đối xứng của bánh xe trong Hình 7. Giải thích cách làm.

Vận dụng 1. Nêu cách chia một cái bánh có dạng hình tròn tâm O (Hình 8) thành hai phần bằng nhau.

Hình 7

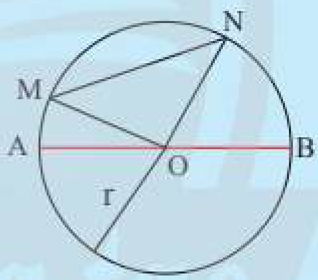
Hình 8

3. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

3 Trên đường tròn (O; R), lấy bốn điểm A, B, M, N sao cho AB đi qua O và MN không đi qua O (Hình 9).

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.

b) So sánh độ dài của MN và OM + ON. Từ đó, so sánh độ dài của MN và AB.



Hình 9

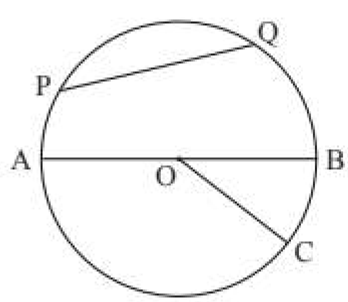
Cho hai điểm M, N cùng thuộc một đường tròn. Đoạn thẳng MN gọi là *dây cung* hoặc *dây*. *Đường kính* là một dây đi qua tâm.

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

Ví dụ 3. Trong Hình 10, so sánh độ dài của các đoạn thẳng OC, PQ với AB.

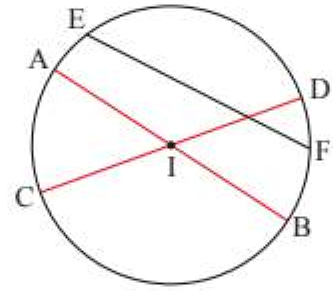
Giải

Trong đường tròn (O), AB là đường kính, OC là bán kính, PQ là dây cung không đi qua O. Suy ra $OC = \dfrac{AB}{2}$ và PQ < AB.



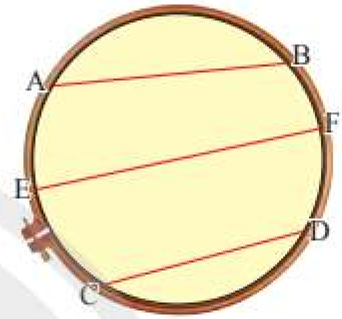
Hình 10

Thực hành 2. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB, CD, EF. Cho biết AB và CD đi qua tâm I, EF không đi qua I (Hình 11). Hãy so sánh độ dài AB, CD, EF.



Hình 11

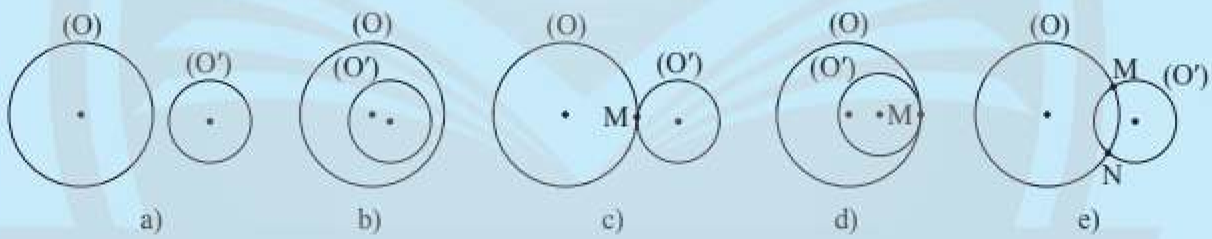
Vận dụng 2. Bạn Mai căng ba đoạn chỉ AB, CD, EF có độ dài lần lượt là 16 cm, 14 cm và 20 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 10 cm (Hình 12). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Hình 12

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

4 Tìm số điểm chung của hai đường tròn (O) và (O′) trong mỗi trường hợp sau:



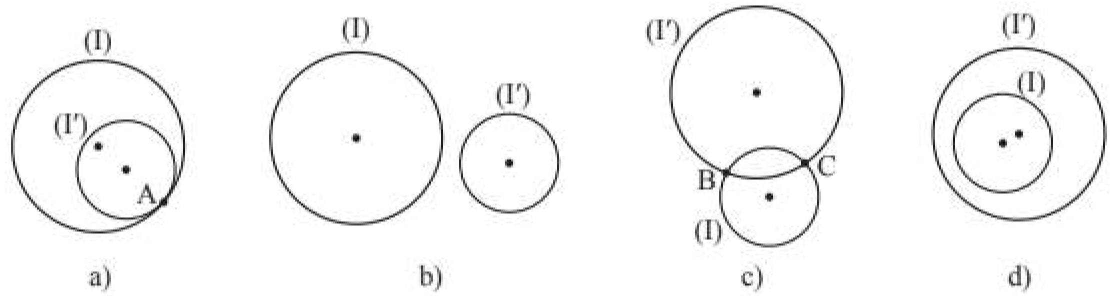
Hình 13

Từ 4, ta thấy hai đường tròn phân biệt (O) và (O′) có thể không có điểm chung, 1 điểm chung hoặc 2 điểm chung.

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

- Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn *không giao nhau*. Hai đường tròn không giao nhau có thể *ở ngoài nhau* hoặc *đường tròn này đựng đường tròn kia.*
- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*. Hai đường tròn tiếp xúc có thể *tiếp xúc ngoài* hoặc *tiếp xúc trong*.
- Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn *cắt nhau*. Hai điểm chung gọi là hai *giao điểm*. Đoạn thẳng nối hai điểm chung được gọi là *dây chung*.

Ví dụ 4. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (I) và (I′) trong mỗi trường hợp sau:

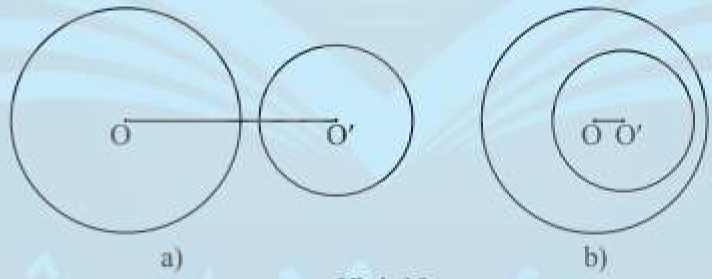


Hình 14

Giải

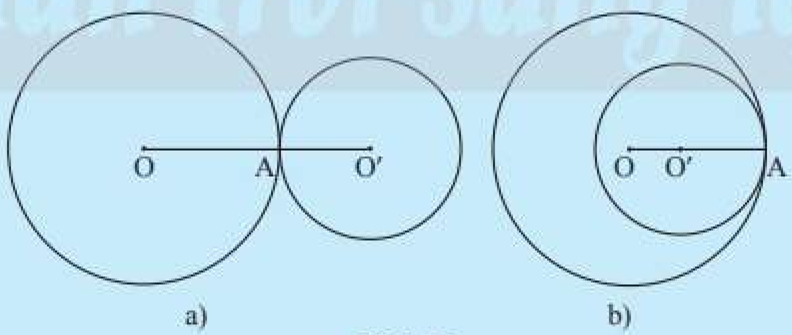
a) (I) và (I′) có đúng một điểm chung, suy ra (I) và (I′) tiếp xúc với nhau.
b) (I) và (I′) không có điểm chung, suy ra (I) và (I′) không giao nhau. Đồng thời, ta thấy (I) và (I′) ở ngoài nhau.
c) (I) và (I′) có đúng hai điểm chung, suy ra (I) và (I′) cắt nhau.
d) (I) và (I′) không có điểm chung, suy ra (I) và (I′) không giao nhau. Đồng thời, ta thấy (I′) đựng (I).

5 Cho hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O′; R′) với R ≥ R′.
Hãy so sánh OO′ với R + R′ và R – R′ trong mỗi trường hợp sau:
Trường hợp 1: (O; R) và (O′; R′) không có điểm chung (Hình 15).



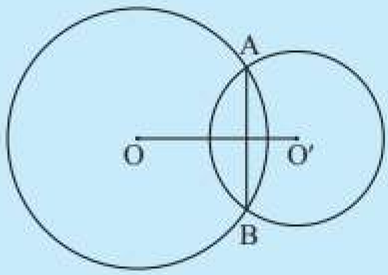
Hình 15

Trường hợp 2: (O; R) và (O′; R′) chỉ có một điểm chung (Hình 16).



Hình 16

Trường hợp 3: (O; R) và (O′; R′) có đúng hai điểm chung (Hình 17).



Hình 17

Cho hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O′; R′) với $R \geq R'$. Từ, ta có các kết quả sau:

– Nếu $OO' > R + R'$ thì hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) ở ngoài nhau (Hình 15a).

– Nếu $OO' < R - R'$ thì đường tròn (O; R) đựng đường tròn (O′; R′) (Hình 15b).

– Nếu $OO' = R + R'$ thì hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc ngoài (Hình 16a).

– Nếu $OO' = R - R'$ thì hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc trong (Hình 16b).

– Nếu $R - R' < OO' < R + R'$ thì hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau (Hình 17).

Ví dụ 5. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 12$; $R = 5$; $R' = 3$;   b) $OO' = 8$; $R = 5$; $R' = 3$;

c) $OO' = 7$; $R = 5$; $R' = 3$;   d) $OO' = 0$; $R = 5$; $R' = 4$.

Giải

a) Ta có $12 > 5 + 3$ nên $OO' > R + R'$, suy ra hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) ở ngoài nhau.

b) Ta có $8 = 5 + 3$ nên $OO' = R + R'$, suy ra hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc ngoài.

c) Ta có $5 - 3 < 7 < 5 + 3$ nên $R - R' < OO' < R + R'$, suy ra hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau.

d) Ta có $0 < 5 - 4$ nên $OO' < R - R'$, suy ra đường tròn (O; R) đựng đường tròn (O′; R′).

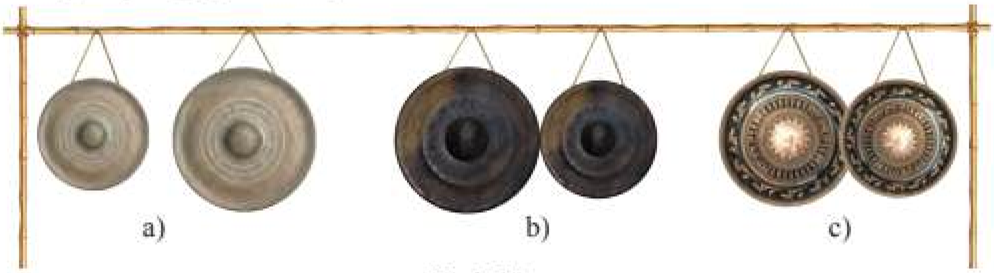
Chú ý: Nếu $OO' = 0$ thì O trùng với O′. Hai đường tròn có tâm trùng nhau gọi là *hai đường tròn đồng tâm*.

Thực hành 3. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn (I; R) và (J; R′) trong mỗi trường hợp sau:

a) $IJ = 5$; $R = 3$; $R' = 2$;   b) $IJ = 4$; $R = 11$; $R' = 7$;

c) $IJ = 6$; $R = 9$; $R' = 4$;   d) $IJ = 10$; $R = 4$; $R' = 1$.

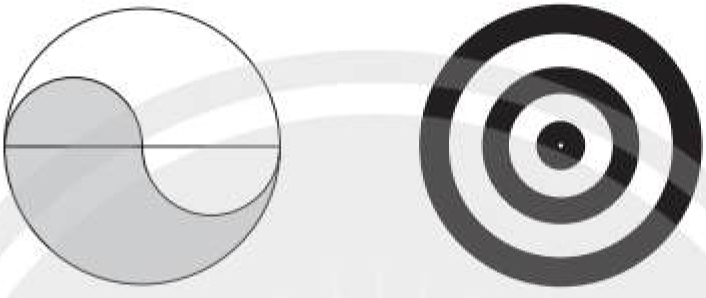
Vận dụng 3. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên trong Hình 18.



a) b) c)

Hình 18

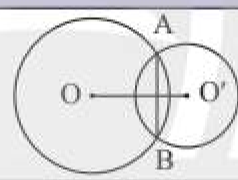
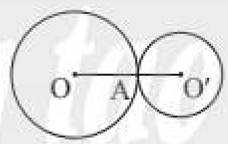
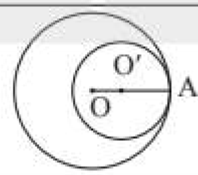
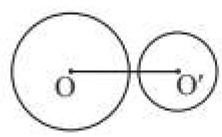
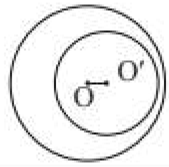
Vận dụng 4. Dùng compa đo bán kính và vẽ lại các hình trong Hình 19.



a) b)

Hình 19

Nhận xét: Bảng tóm tắt vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt (O; R) và (O′; R′) với $R \geq R'$:

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ	Hình ảnh
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - R' < OO' < R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	1	$OO' = R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc trong	1	$OO' = R - R'$	
Hai đường tròn ở ngoài nhau	0	$OO' > R + R'$	
Đường tròn (O; R) đựng đường tròn (O′; R′)	0	$OO' < R - R'$	

BÀI TẬP

1. Cho đường tròn (O), bán kính 5 cm và bốn điểm A, B, C, D thoả mãn OA = 3 cm, OB = 4 cm, OC = 7 cm, OD = 5 cm. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài đường tròn (O).

2. Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 18 cm và CD = 12 cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

3. Cho tam giác ABC có hai đường cao BB′ và CC′. Gọi O là trung điểm của BC.

a) Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB′ đi qua B, C, C′;

b) So sánh độ dài hai đoạn thẳng BC và B′C′.

4. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

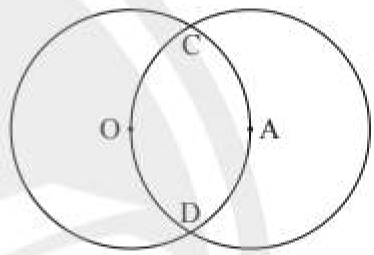
a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) So sánh độ dài của AC và BD.

5. Cho hai đường tròn (O; 2 cm) và (A; 2 cm) cắt nhau tại C, D, điểm A nằm trên đường tròn tâm O (Hình 20).

a) Vẽ đường tròn (C; 2 cm).

b) Đường tròn (C; 2 cm) có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?



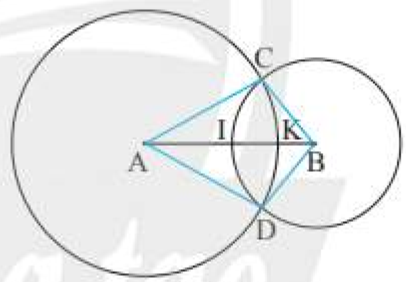
Hình 20

6. Cho hai đường tròn (A; 6 cm) và (B; 4 cm) cắt nhau tại C và D, AB = 8 cm. Gọi K, I lần lượt là giao điểm của hai đường tròn đã cho với đoạn thẳng AB (Hình 21).

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng CA, CB, DA và DB.

b) Điểm I có phải là trung điểm của đoạn thẳng AB không?

c) Tính độ dài của đoạn thẳng IK.



Hình 21

7. Xác định vị trí tương đối của (O; R) và (O′; R′) trong mỗi trường hợp sau:

a) OO′ = 18; R = 10; R′ = 6;
b) OO′ = 2; R = 9; R′ = 3;
c) OO′ = 13; R = 8; R′ = 5;
d) OO′ = 17; R = 15; R′ = 4.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được tâm, bán kính, đường kính, dây của đường tròn.
– Nhận biết được tâm đối xứng, trục đối xứng của đường tròn.
– So sánh được độ dài của đường kính và dây.
– Mô tả được ba vị trí tương đối của hai đường tròn (hai đường tròn không giao nhau, hai đường tròn cắt nhau, hai đường tròn tiếp xúc nhau).

Bài 2 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

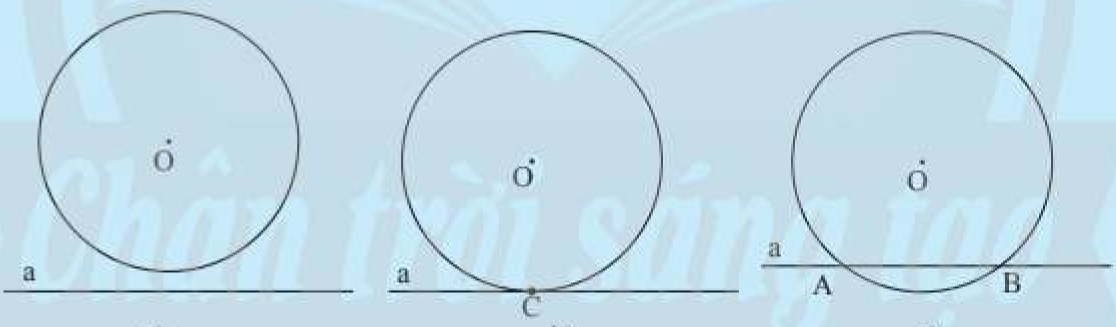
Hãy mô tả các vị trí của Mặt Trời so với đường chân trời ở các thời điểm Mặt Trời lặn khác nhau trong hình dưới đây.

a) b) c)

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa

1 Nêu nhận xét về số điểm chung của đường thẳng a và đường tròn (O) trong mỗi hình sau:



a) b) c)

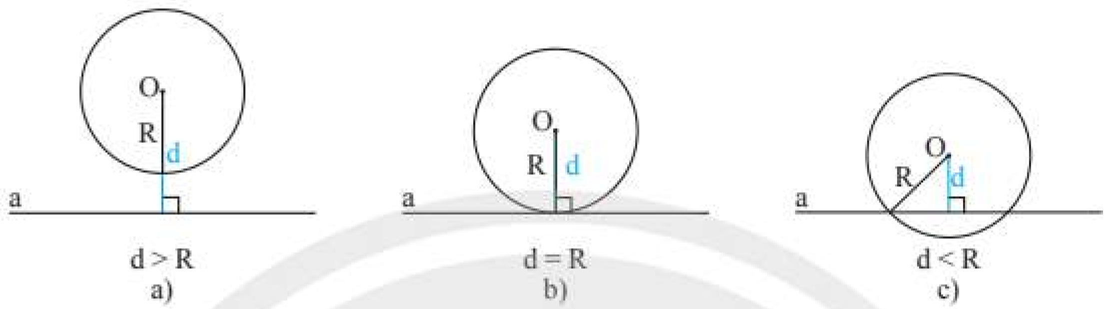
Hình 1

Từ 1, ta có định nghĩa:

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O):
– Không có điểm chung thì ta nói a và (O) *không giao nhau*.
– Có duy nhất một điểm chung C thì ta nói a *tiếp xúc* với (O) tại C, khi đó a là *tiếp tuyến* của đường tròn (O) tại C và C là *tiếp điểm*.
– Có hai điểm chung A, B thì ta nói a *cắt* (O), a là *cát tuyến* của đường tròn (O) và A, B là hai *giao điểm*.

Nhận xét: Cho đường tròn (O; R). Gọi d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a (Hình 2). Ta có kết quả sau:

- Đường thẳng a và đường tròn (O; R) không giao nhau khi d > R.
- Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O; R) khi d = R.
- Đường thẳng a cắt đường tròn (O; R) khi d < R.



Hình 2

Ví dụ 1. Cho đường thẳng b và một điểm I cách b một khoảng d = 6 cm. Xác định vị trí tương đối của b với các đường tròn sau:

a) Đường tròn (I; 3 cm); b) Đường tròn (I; 6 cm); c) Đường tròn (I; 8 cm).

Giải

a) Ta có d = 6 cm, R = 3 cm. Vì d > R nên b và đường tròn (I; 3 cm) không giao nhau.

b) Ta có d = 6 cm, R = 6 cm. Vì d = R nên b tiếp xúc với đường tròn (I; 6 cm).

c) Ta có d = 6 cm, R = 8 cm. Vì d < R nên b cắt đường tròn (I; 8 cm) tại hai điểm.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 8 cm. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính 10 cm.

a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.

b) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn (O; 10 cm). Tính độ dài của dây MN.

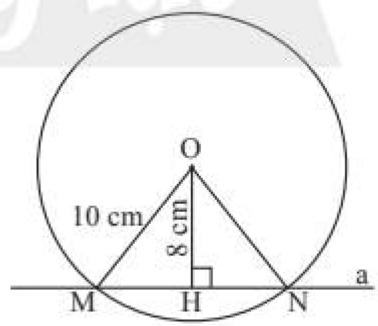
Giải

a) Vẽ OH vuông góc với a tại H.

Ta có OH = 8 cm, R = 10 cm, suy ra OH < R, suy ra a cắt (O; 10 cm) tại hai điểm.

b) Do M, N thuộc (O) nên ta có OM = ON = R, suy ra tam giác OMN cân tại O, có OH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến.

Do đó, H là trung điểm của dây MN.



Hình 3

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác OMH vuông tại H,

ta có $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (cm),

suy ra MN = 2MH = 2 . 6 = 12 (cm).

Thực hành 1. Cho đường tròn (J; 5 cm) và đường thẳng c. Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ J xuống c, d là độ dài của đoạn thẳng JK. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng c và đường tròn (J; 5 cm) trong mỗi trường hợp sau:

a) d = 4 cm; b) d = 5 cm; c) d = 6 cm.

Vận dụng 1. Một diễn viên xiếc đi xe đạp một bánh trên sợi dây cáp căng được cố định ở hai đầu dây. Biết đường kính bánh xe là 72 cm, tính khoảng cách từ trục bánh xe đến dây cáp.

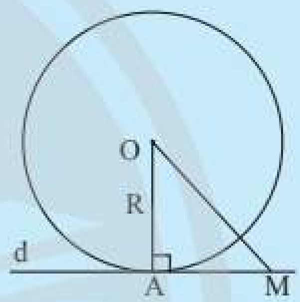
Hình 4

2. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Cho điểm A nằm trên đường tròn (O; R), đường thẳng d đi qua A và vuông góc với OA. Gọi M là một điểm trên d (M khác A).

a) Giải thích tại sao ta có OA = R và OM > R.

b) Giải thích tại sao d và (O) không thể có điểm chung nào khác ngoài A.



Hình 5

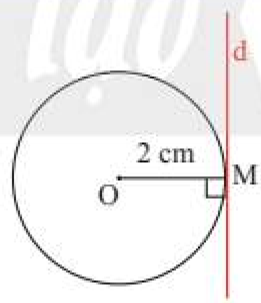
Từ 2, ta có dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:

Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O; 2 cm) và điểm M nằm trên (O). Nêu cách dựng tiếp tuyến d với (O) tại M.

Giải

Ta vẽ đường thẳng d vuông góc với bán kính OM tại điểm M (Hình 6), khi đó d là tiếp tuyến với (O) tại M.



Hình 6

Chú ý: Ta có các tính chất của tiếp tuyến như sau:

– Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

– Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến tiếp tuyến luôn bằng bán kính của đường tròn đó.

Ví dụ 4. Một thuỷ thủ đang ở trên cột buồm của một con tàu, cách mặt nước biển 10 m. Biết bán kính Trái Đất là khoảng 6 400 km. Tính tầm nhìn xa tối đa của thuỷ thủ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Giải

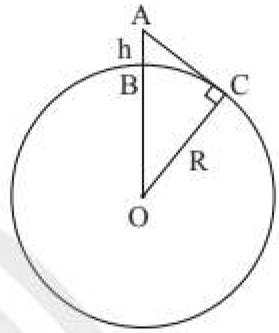
Trên Hình 7, ta có điểm B biểu diễn vị trí con tàu, điểm A biểu diễn vị trí của thuỷ thủ, điểm C biểu diễn điểm xa nhất mà thuỷ thủ nhìn thấy. Khi đó độ dài đoạn thẳng AC gọi là tầm nhìn xa tối đa từ A.

Đặt h = AB, R = OB = OC. Ta tính AC theo R và h.

Do AC là tiếp tuyến với (O; R) tại C nên suy ra $AC \perp OC$.

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác ACO vuông tại C, ta có:

$AC^2 = AO^2 - OC^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2.$



Hình 7

Suy ra $AC = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{2.6400.0,01 + 0,01^2} \approx 11,314$ (km).

Vậy tầm nhìn xa tối đa của thuỷ thủ đó là khoảng 11,314 km.

Chú ý: Nếu h rất nhỏ so với R thì $2Rh + h^2 \approx 2Rh$.

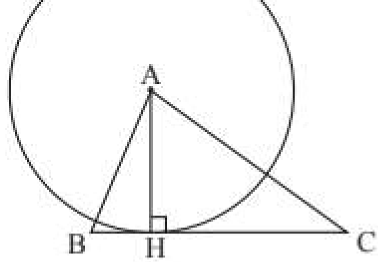
Khi đó $AC \approx \sqrt{2Rh} \approx \sqrt{6400\ .\ 2h} = 80\sqrt{2h}$.

Đây là công thức tính nhanh tầm nhìn xa tối đa ứng với độ cao h. Chẳng hạn, với tình huống trong Ví dụ 4 ta có tầm nhìn xa tối đa của thuỷ thủ là:

$$80\sqrt{2h} = 80\sqrt{2\ .\ 0,01} \approx 11,314\ \text{(km)}.$$

Thực hành 2. Cho tam giác ABC có đường cao AH (Hình 8). Tìm tiếp tuyến của đường tròn (A; AH) tại H.

Vận dụng 2. Một diễn viên xiếc đi xe đạp trên một sợi dây cáp căng (Hình 9). Ta coi sợi dây là tiếp tuyến của mỗi bánh xe, xác định các tiếp điểm.



Hình 8

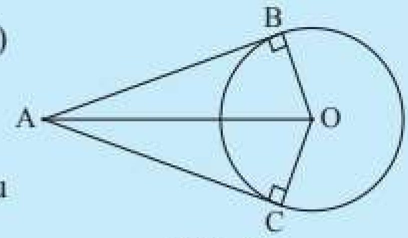
Hình 9

3. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

3 Cho đường tròn (O) và hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại điểm A (Hình 10).

a) Chứng minh hai tam giác ABO và ACO bằng nhau.

b) Tìm các đoạn thẳng bằng nhau và các góc bằng nhau trong Hình 10.



Hình 10

Định lí

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

– Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

– Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

– Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Ví dụ 5. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm B và C.

a) Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Chứng minh AB = AC.

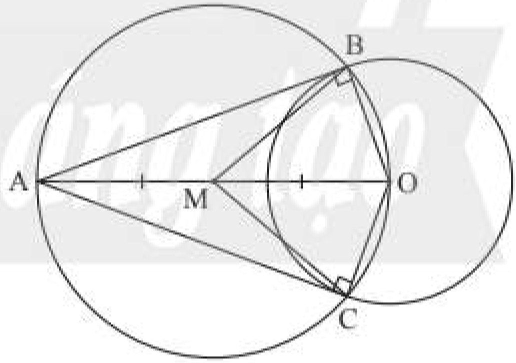
c) Xác định tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$.

Giải

a) Gọi M là trung điểm của AO. Ta có M là tâm của đường tròn đường kính AO, suy ra $MB = MC = \frac{AO}{2}$. Do đó, tam giác ABO vuông tại B và tam giác ACO vuông tại C.

Vì AB vuông góc với bán kính OB tại B và AC vuông góc với bán kính OC tại C nên AB và AC là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C.

b) Giao điểm A của hai tiếp tuyến AB, AC cách đều hai tiếp điểm B và C nên AB = AC.



Hình 11

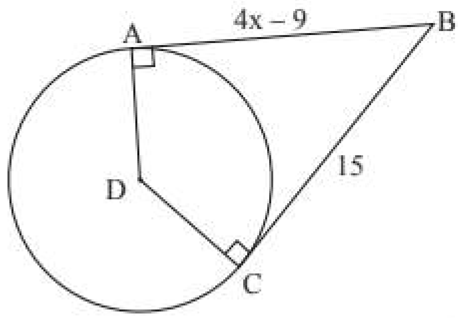
c) Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A, suy ra tia AO là phân giác của $\widehat{BAC}$ và tia OA là phân giác của $\widehat{BOC}$.

Thực hành 3. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (I; 6 cm) và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F. Cho biết $\widehat{EMF} = 60^{\circ}$.

a) Tính số đo $\widehat{EMI}$ và $\widehat{EIF}$.

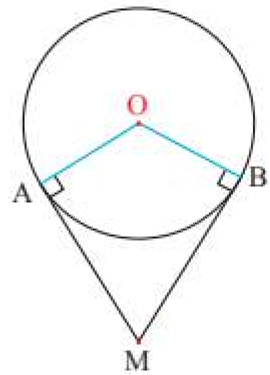
b) Tính độ dài MI.

Thực hành 4. Tìm giá trị của x trong Hình 12.



Hình 12

a)



b)

Hình 13

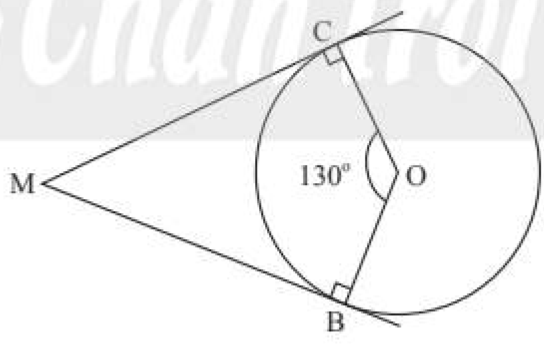
Vận dụng 3. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O, bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M (Hình 13). Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.

a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

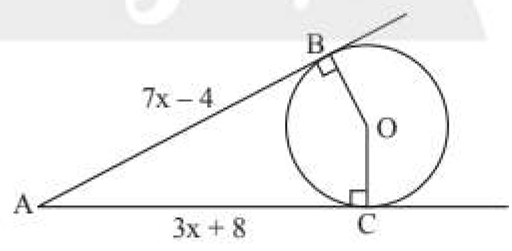
b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

BÀI TẬP

1. Trong Hình 14, MB, MC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C; $\widehat{COB} = 130^\circ$. Tính số đo $\widehat{CMB}$.



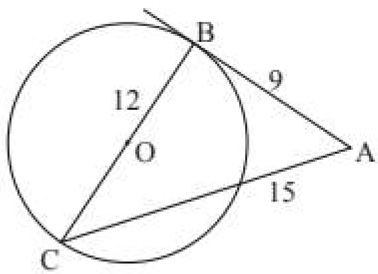
Hình 14



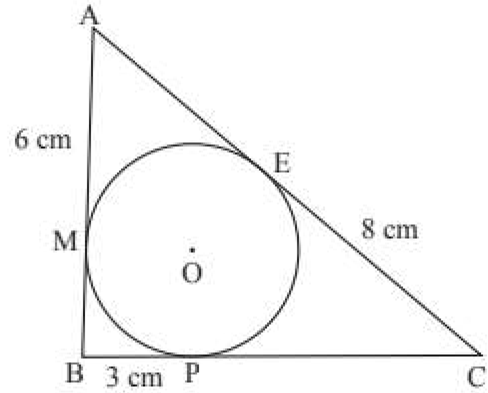
Hình 15

2. Quan sát Hình 15. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C. Tính giá trị của x.

3. Trong Hình 16, AB = 9, BC = 12, AC = 15 và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 16



Hình 17

4. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết AM = 6 cm, BP = 3 cm, CE = 8 cm (Hình 17). Tính chu vi tam giác ABC.

5. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho AC = R. Gọi I là trung điểm của dây AC. Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ACB}$ có số đo bằng 90°, từ đó suy ra độ dài của BC theo R;

b) OM là tia phân giác của $\widehat{COA}$;

c) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

6. Cho đường tròn (O; 5 cm), điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M.

a) Tính độ dài của MA và MB.

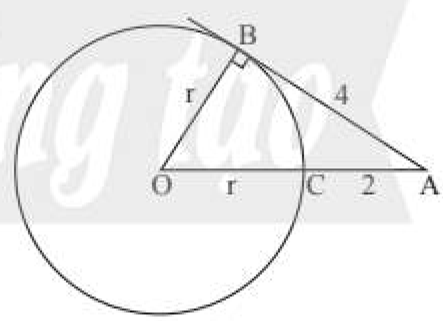
b) Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O), vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB lần lượt tại C, D. Tính độ dài của CD.

7. Cho đường tròn (O), điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thoả mãn $\widehat{AMB} = 60^{\circ}$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB.

8. Trong Hình 18, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

a) Tính bán kính r của đường tròn (O).

b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.



Hình 18

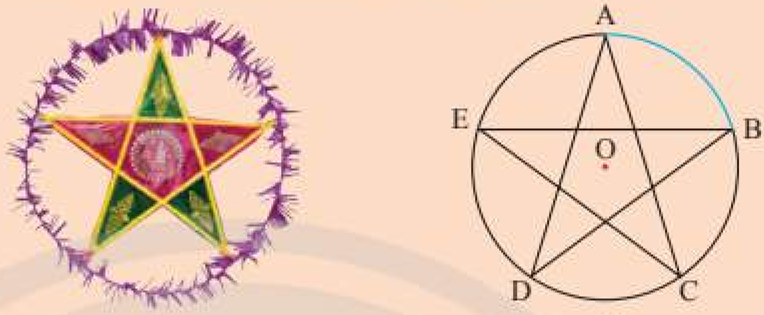
Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Mô tả được ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn (đường thẳng và đường tròn cắt nhau, đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau, đường thẳng và đường tròn không giao nhau).

– Giải thích được dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn và tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

Bài 3 GÓC Ở TÂM, GÓC NỘI TIẾP

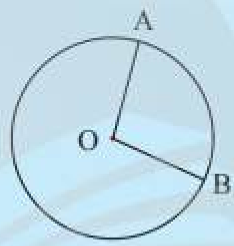
Hình ngôi sao năm cánh trong Hình a được vẽ lại như Hình b. Phần tô màu xanh trên đường tròn từ điểm A đến điểm B được gọi là gì? Làm thế nào để biểu diễn số đo của nó?



a) b)

1. GÓC Ở TÂM

Cho hai điểm A, B trên đường tròn (O; R).
Nêu nhận xét về đỉnh và cạnh của $\widehat{AOB}$.



Hình 1

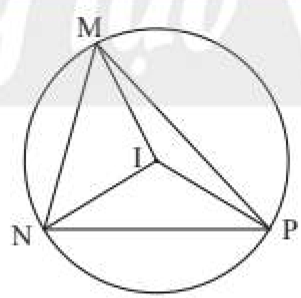
Trong 1, $\widehat{AOB}$ được gọi là góc ở tâm của đường tròn (O).
Một cách tổng quát, ta có:
Định nghĩa

Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Ví dụ 1. Cho tam giác MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I) (Hình 2). Xác định các góc ở tâm của đường tròn.

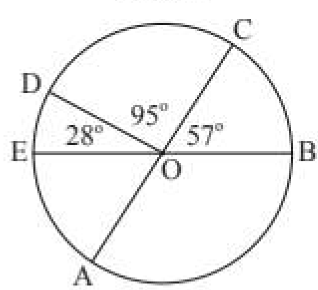
Giải

Trong Hình 2, đường tròn (I) có các góc ở tâm là $\widehat{MIN}$, $\widehat{NIP}$, $\widehat{PIM}$.



Hình 2

Thực hành 1. Tính số đo góc ở tâm $\widehat{EOA}$ và $\widehat{AOB}$ trong Hình 3. Biết AC và BE là hai đường kính của đường tròn (O).



Hình 3

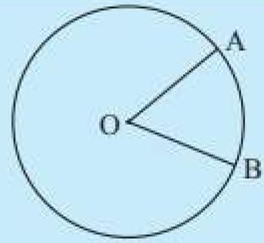
Vận dụng 1. Tính số đo góc ở tâm được tạo thành khi kim giờ quay:

a) Từ 7 giờ đến 9 giờ; b) Từ 9 giờ đến 12 giờ.

2. CUNG, SỐ ĐO CUNG

Cung

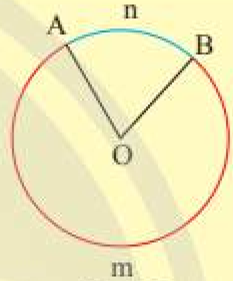
2 Vẽ vào vở đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm trên (O). Dùng bút chì khác màu tô hai phần của đường tròn được phân chia bởi hai điểm A và B.



Hình 4

Ta gọi hai phần vừa tô màu trong 2 là hai *cung*. Một cách tổng quát, ta có:

Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là một *cung* AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.



Hình 5

Chú ý:

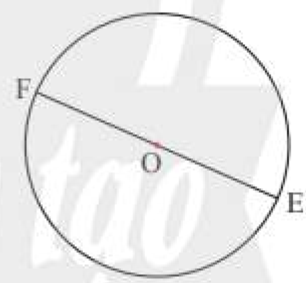
a) Trong Hình 5, ta nói góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AnB hay cung AnB bị chắn bởi góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

Khi $0^o < \widehat{AOB} < 180^o$, để phân biệt hai cung có chung các mút là A và B, ta gọi $\overset{\frown}{AnB}$ (cung nằm trong góc AOB) là *cung nhỏ* và $\overset{\frown}{AmB}$ là *cung lớn*.

Khi AB là đường kính thì gọi cung AB là cung nửa đường tròn.

b) Khi nói "góc ở tâm $\widehat{AOB}$ chắn cung AB" thì ta hiểu là góc ở tâm chắn cung nhỏ AB.

c) Nếu EF là đường kính thì mỗi cung EF là một nửa đường tròn (Hình 6). Góc bẹt $\widehat{EOF}$ chắn nửa đường tròn.



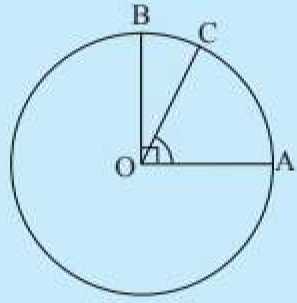
Hình 6

Số đo cung

3 Cho OA và OB là hai bán kính vuông góc với nhau của đường tròn (O), C là điểm trên cung nhỏ AB (Hình 7). Ta coi số đo của một cung nhỏ là số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

a) Xác định số đo của cung AB.

b) So sánh số đo của hai cung $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{AB}$.



Hình 7

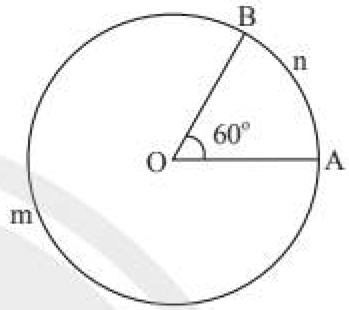
Một cách tổng quát, ta có định nghĩa:

Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó. Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai đầu mút với cung lớn.

Số đo của cung nửa đường tròn bằng 180°.

Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 2. Tính số đo các cung $\overset{\frown}{AnB}$ và $\overset{\frown}{AmB}$ trong Hình 8.



Hình 8

Giải

Trong Hình 8, ta có $\overset{\frown}{AnB}$ bị chắn bởi góc ở tâm $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 60°, suy ra sđ $\overset{\frown}{AnB} = 60^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{AmB} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

Chú ý:

a) Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180°, cung lớn có số đo lớn hơn 180°. Cung nửa đường tròn có số đo 180°.

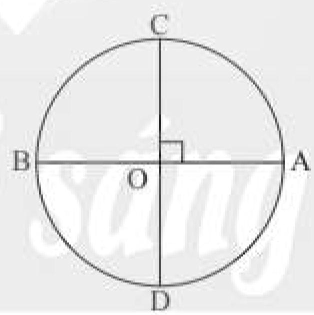
b) Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có *cung không* với số đo 0° và *cung cả đường tròn* có số đo 360°.

c) Một cung có số đo n° thường được gọi tắt là cung n°.

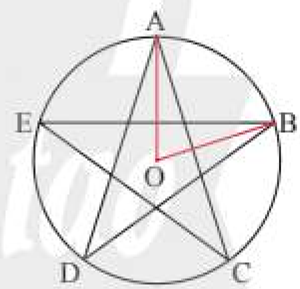
d) Trong một đường tròn, hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

Thực hành 2. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau (Hình 9). Xác định số đo của các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{AD}$.

Vận dụng 2. Xác định số đo cung AB trong hình ngôi sao năm cánh (Hình 10).

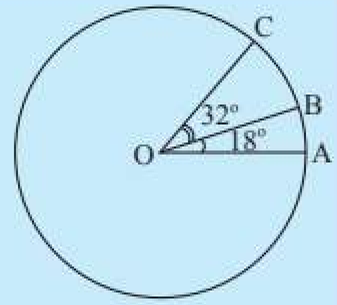


Hình 9



Hình 10

4 Trên đường tròn (O), vẽ hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ sao cho $\widehat{AOB} = 18^\circ$, $\widehat{BOC} = 32^\circ$ và tia OB ở giữa hai tia OA, OC (Hình 11). Tính số đo của các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$.



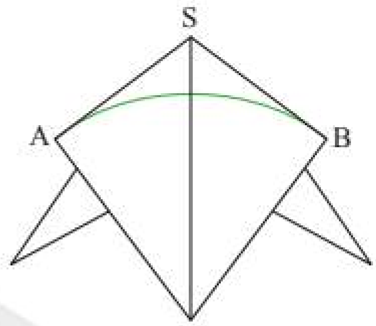
Hình 11

Trên đường tròn (O), cho B là một điểm nằm trên cung AC. Ta nói điểm B chia cung AC thành hai cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$. Từ 4, một cách tổng quát, ta có:

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}.$$

Thực hành 3. Trên cung AB có số đo 90° của đường tròn (O), lấy điểm M sao cho cung AM có số đo 15°. Tính số đo của cung MB.

Vận dụng 3. Bạn Hùng làm một cái diều với thân diều là hình tứ giác SAOB sao cho OS là đường phân giác của $\widehat{AOB}$ và $\widehat{ASB} = 106^\circ$. Thanh tre màu xanh lá được uốn cong thành cung AB của đường tròn tâm O và SA, SB là hai tiếp tuyến của (O) (Hình 12). Tính số đo của $\overset{\frown}{AB}$.

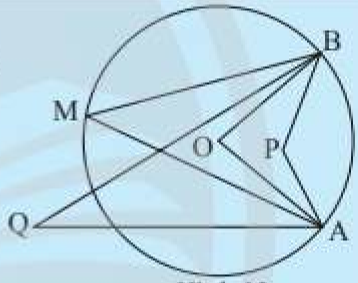


Hình 12

3. GÓC NỘI TIẾP

Nhận biết góc nội tiếp

5 Quan sát Hình 13. Hãy cho biết trong các góc $\widehat{APB}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{AQB}$, góc nào có đỉnh nằm trên đường tròn (O).



Hình 13

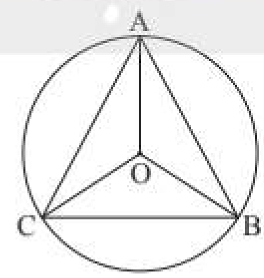
Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn*.

Ví dụ 3. Tìm góc nội tiếp chắn cung AB của đường tròn (O) trong Hình 14.

Giải

Trong Hình 14, $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O).



Hình 14

Thực hành 4. Cho tam giác đều MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I). Hãy chỉ ra các góc nội tiếp của đường tròn (I) và tính số đo của các góc nội tiếp đó.

Vận dụng 4. Cho hai điểm E và F nằm trên đường tròn (O). Có bao nhiêu góc nội tiếp chắn cung EF?

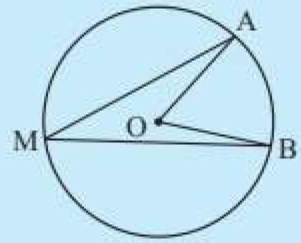
Số đo góc nội tiếp

6 Quan sát Hình 15. Ta có góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ chắn cung AB trên đường tròn (O). Cho biết $\widehat{AOB} = 60^o$.

a) Tính số đo $\overset{\frown}{AB}$.

b) Dùng thước đo góc để tìm số đo $\widehat{AMB}$.

c) Có nhận xét gì về hai số đo của $\widehat{AMB}$ và $\overset{\frown}{AB}$?



Hình 15

Từ 6, một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Gọi $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ trên đường tròn (O). Định lí trên có giả thiết và kết luận như sau:

GT	Góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ chắn $\overset{\frown}{AB}$ trên đường tròn (O)
KL	$\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$

Chứng minh: Ta xét ba trường hợp:

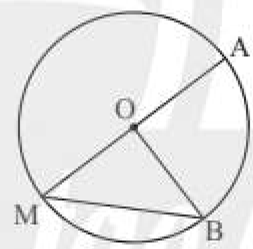
a) *Trường hợp 1:* Tâm O nằm trên một cạnh của $\widehat{AMB}$, chẳng hạn cạnh MA (Hình 16a).

Ta có tam giác OMB cân tại O, suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{OBM}$.

Ta có $\widehat{AOB} = 180^o - \widehat{MOB} = \widehat{AMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{AMB}$,

suy ra $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Vậy trong Trường hợp 1, ta có $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.



a)

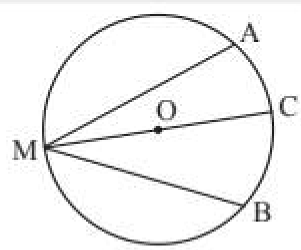
b) *Trường hợp 2:* Tâm O nằm bên trong góc $\widehat{AMB}$ (Hình 16b).

Vẽ đường kính MC. Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC}$.

Áp dụng kết quả của Trường hợp 1 cho hai góc nội tiếp $\widehat{AMC}$ và $\widehat{BMC}$, ta có $\widehat{AMC} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC}}{2}$; $\widehat{BMC} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BC}}{2}$,

suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Vậy trong Trường hợp 2, ta có $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.



b)

c) *Trường hợp 3:* Tâm O nằm ngoài góc $\widehat{AMB}$ (Hình 16c).

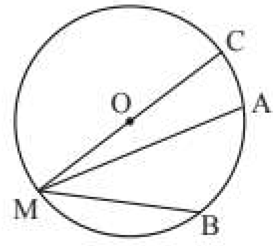
Vẽ đường kính MC. Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{CMB} - \widehat{CMA}$.

Áp dụng kết quả của Trường hợp 1 cho hai góc nội tiếp $\widehat{CMB}$ và $\widehat{CMA}$, ta có $\widehat{CMB} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CB}}{2}$; $\widehat{CMA} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CA}}{2}$,

suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{CMB} - \widehat{CMA} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CA}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Vậy trong Trường hợp 3, ta có $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

Kết luận: Ta luôn có $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.



c)

Hình 16

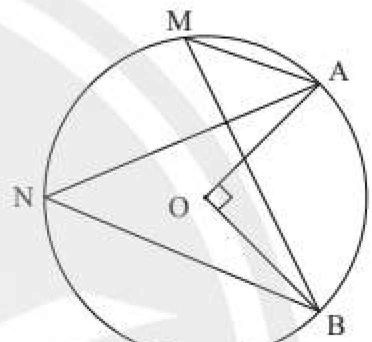
Ví dụ 4. Tính số đo của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ trong Hình 17.

Giải

Trong Hình 17, ta có $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và là góc ở tâm chắn $\overset{\frown}{AB}$ nên sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

$\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ là hai góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$, suy ra

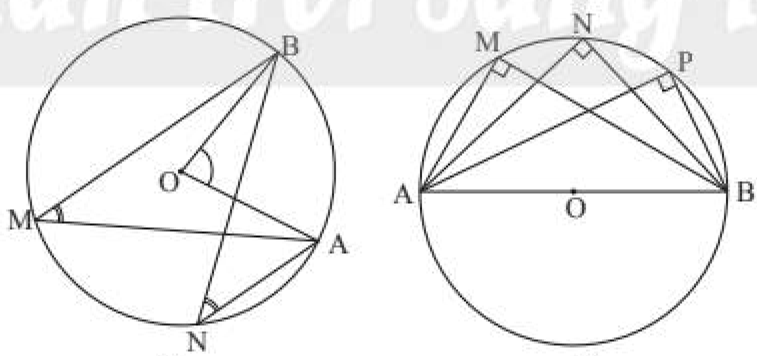
$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$



Hình 17

Chú ý: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



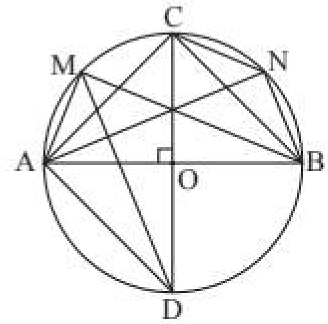
a) b)

Hình 18

Ví dụ 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau (Hình 19). Tìm số đo các góc sau:

a) $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADC}$;

b) $\widehat{ADM}$, $\widehat{NCB}$.



Hình 19

Giải

a) Ta có $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, suy ra $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{ADC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC,

suy ra $\widehat{ADC} = \dfrac{\widehat{AOC}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

b) Do hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau tại tâm O của (O) nên $\widehat{AOC} = \widehat{COB} = \widehat{BOD} = \widehat{DOA} = 90^\circ$, suy ra sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{CB}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ = sđ $\overset{\frown}{DA}$ = 90°.

Vì M, N lần lượt chia $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ thành hai cung có số đo bằng nhau nên

sđ $\overset{\frown}{AM}$ = sđ $\overset{\frown}{MC}$ = $\dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC}}{2} = 45^\circ$;   sđ $\overset{\frown}{CN}$ = sđ $\overset{\frown}{NB}$ = $\dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CB}}{2} = 45^\circ$.

Ta có $\widehat{ADM}$ là góc nội tiếp chắn cung AM, suy ra

$$\widehat{ADM} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AM}}{2} = \dfrac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ.$$

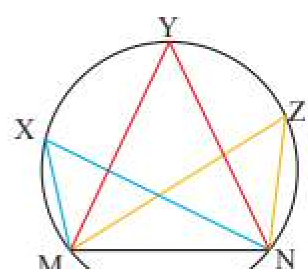
Ta có $\widehat{NCB}$ là góc nội tiếp chắn cung NB, suy ra

$$\widehat{NCB} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{NB}}{2} = \dfrac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ.$$

Thực hành 5. Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 50^\circ$, $\widehat{BOC} = 30^\circ$, điểm B thuộc cung nhỏ AC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau. Tìm số đo các góc sau:

a) $\widehat{BCA}$, $\widehat{BAC}$;   b) $\widehat{MBA}$, $\widehat{BAN}$.

Vận dụng 5. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn MN (Hình 20). Nếu bóng được đặt ở điểm X thì $\widehat{MXN}$ gọi là góc sút từ vị trí X. Hãy so sánh các góc sút $\widehat{MXN}$, $\widehat{MYN}$, $\widehat{MZN}$.



Hình 20

BÀI TẬP

1. Cho đường tròn (O; 5 cm) và điểm M sao cho OM = 10 cm. Qua M vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Tính số đo góc ở tâm được tạo bởi hai tia OA và OB.

2. Cho tam giác đều ABC. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Hãy so sánh các cung $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EC}$.

3. Dây cung AB chia đường tròn (O) thành hai cung. Cung lớn có số đo bằng ba lần cung nhỏ.

   a) Tính số đo mỗi cung.

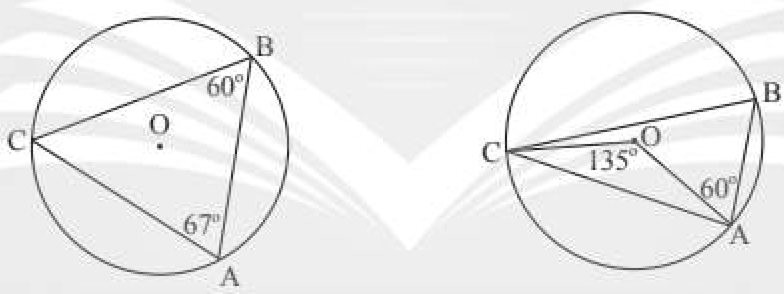
   b) Chứng minh khoảng cách OH từ tâm O đến dây cung AB có độ dài bằng $\frac{AB}{2}$.

4. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu vào những thời điểm sau?

   a) 2 giờ; b) 8 giờ; c) 21 giờ.

5. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Một tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại hai điểm A và B. Tính số đo cung AB.

6. Xác định số đo các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ trong mỗi hình vẽ sau.



a) b)

Hình 21

7. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$.

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

– Nhận biết được góc ở tâm, góc nội tiếp.

– Giải thích được mối liên hệ giữa số đo của cung với số đo góc ở tâm, số đo góc nội tiếp.

– Giải thích được mối liên hệ giữa số đo góc nội tiếp và số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

Bài 4 HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

Số lượng cây ăn trái của trang trại Đất Lành được cho trong bảng sau:

Số lượng cây ăn trái của trang trại Đất Lành	
Cam	16
Xoài	12
Mận	8

Số liệu trên được biểu diễn trong biểu đồ hình quạt tròn bên.

Hình các phần được chia từ hình tròn trong biểu đồ bên gọi là gì? Làm thế nào để vẽ được chúng?

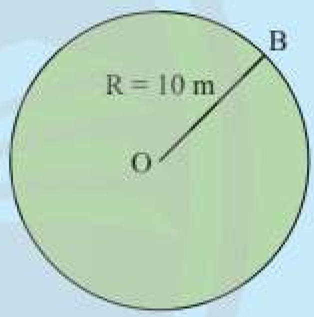
1. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

1 Một hàng rào bao quanh một sân có hình tròn có bán kính 10 m (Hình 1) được ghép bởi 360 phần bằng nhau. Hãy tính:

a) Độ dài của toàn bộ hàng rào.

b) Độ dài của mỗi phần hàng rào.

c) Độ dài của n phần hàng rào.



Hình 1

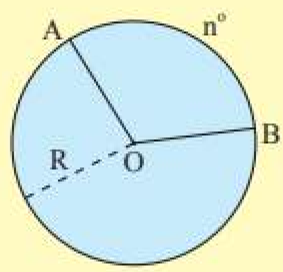
Người ta chứng minh được tỉ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn luôn bằng một số không đổi gọi là π (ta thường lấy $\pi \approx 3{,}14$ hoặc lấy π theo máy tính). Độ dài của cung tỉ lệ thuận với số đo của chúng.

Ta có công thức tính chu vi C của đường tròn là: $C = \pi d = 2\pi R$, trong đó d là đường kính và R là bán kính.

Từ 1 và công thức chu vi đường tròn, tổng quát ta có:

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung có số đo n° được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Hình 2

Ví dụ 1. Tính độ dài cung 30^{o} của một đường tròn có bán kính 10 cm. (Lấy π theo máy tính và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

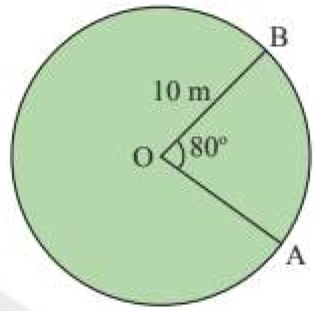
Giải

Cung 30^{o}, bán kính R = 10 cm có độ dài là: $l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi.10.30}{180} = \frac{5\pi}{3} \approx 5,24$ (cm).

Chú ý: Từ nay về sau, nếu không nói gì thêm thì ta lấy π theo máy tính và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Thực hành 1. Tính độ dài cung 72^{o} của một đường tròn có bán kính 25 cm.

Vận dụng 1. Tính độ dài của đoạn hàng rào từ A đến B của sân cỏ trong Hình 3, cho biết $\widehat{AOB} = 80^{o}$.



Hình 3

2. HÌNH QUẠT TRÒN

2 a) Ta có thể tính diện tích của miếng bánh pizza trong Hình 4a theo góc ở tâm và bán kính của ổ bánh hay không?

b) Chia một hình tròn bán kính R thành 360 phần bằng nhau.

i) Tính diện tích của mỗi phần đó.

ii) Tính diện tích phần hình tròn ghép bởi n phần bằng nhau nói trên (Hình 4b).

a) b)

Hình 4

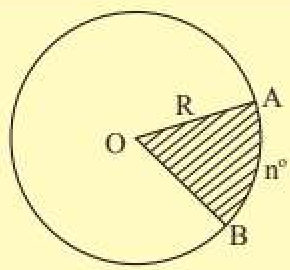
Ta có công thức tính diện tích S của hình tròn là: $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính.

Từ và công thức diện tích hình tròn, ta có định nghĩa và tính chất sau:

Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, ứng với cung n^{o} được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

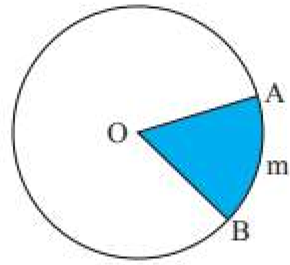


Hình 5

Chú ý:

a) Hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung tròn AmB (Hình 6) được gọi là hình quạt tròn OAmB hoặc hình quạt tròn OAB.

b) Người ta chứng minh được diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo của cung ứng với nó.



Hình 6

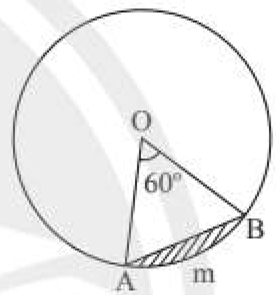
Ví dụ 2. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính R = 10 cm, ứng với cung 60^o (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).

Giải

Hình quạt tròn bán kính R = 10 cm, ứng với cung 60^o có diện tích là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi.10^2.60}{360} \approx 52,36\ (cm^2).$$

Ví dụ 3. Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là *hình viên phân*. Tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^o$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (Hình 7) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Hình 7

Giải

Ta có OAB là tam giác đều cạnh R, suy ra

$$S_{OAB} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5,1^2.\sqrt{3}}{4} \approx 11,26\ (cm^2).$$

Diện tích hình quạt tròn OAmB là:

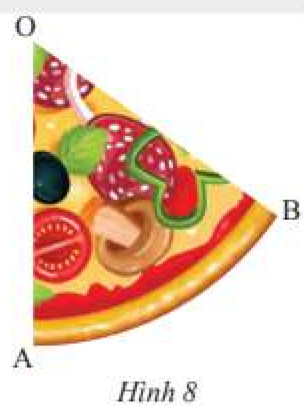
$$S_{OAmB} = \frac{\pi R^2.60}{360} = \frac{\pi.5,1^2.60}{360} \approx 13,62\ (cm^2).$$

Suy ra diện tích hình viên phân AmB là:

$$S_{AmB} = S_{OAmB} - S_{OAB} \approx 13,62 - 11,26 = 2,36\ (cm^2).$$

Thực hành 2. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính R = 20 cm, ứng với cung 72^o.

Vận dụng 2. Tính diện tích của miếng bánh pizza có dạng hình quạt tròn trong Hình 8. Biết OA = 15 cm và $\widehat{AOB} = 55^o$.



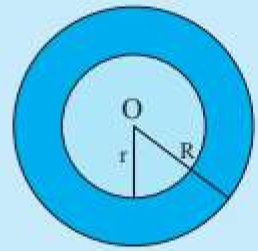
Hình 8

3. HÌNH VÀNH KHUYÊN

3 a) Vẽ đường tròn (C) tâm O bán kính r = 5 cm và đường tròn (C′) tâm O bán kính R = 8 cm.

b) Tính diện tích S của (C) và diện tích S′ của (C′).

c) Hãy cho biết hiệu số (S′ – S) biểu diễn diện tích của phần nào trên Hình 9.



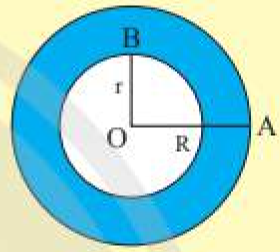
Hình 9

Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r) với R > r.

Hình vành khuyên là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (O; r) và (O; R).

Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; r) và (O; R) được tính bởi công thức:

$$S = \pi(R^2 - r^2).$$



Hình 10

Ví dụ 4. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; 5 cm) và (O; 8 cm) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Giải

Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; 5 cm) và (O; 8 cm) là

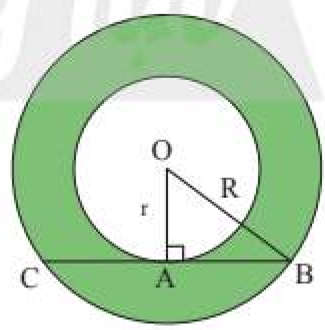
$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(8^2 - 5^2) = 39\pi \approx 122{,}52\ (cm^2).$$

Thực hành 3. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; 10 cm) và (O; 20 cm) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Vận dụng 3. Cho hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; r) và (O; R) với R > r. Trên đường tròn (O; R) lấy hai điểm B, C sao cho BC vừa là dây cung của (O; R), vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O; r) tại A (Hình 11).

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC theo r và R.

b) Cho BC = $a\sqrt{3}$. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; r) và (O; R) theo a.

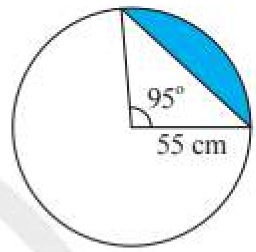


Hình 11

BÀI TẬP

Trong các bài tập dưới đây, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

1. Tính độ dài các cung 30°; 90°; 120° của đường tròn (O; 6 cm).
2. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có số đo lần lượt là 30°; 90°; 120° của hình tròn (O; 12 cm).
3. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có độ dài lần lượt là 8 cm, 15 cm của hình tròn (O; 5 cm).
4. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; 9 cm) và (O; 12 cm).
5. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung có độ dài là 55 cm và cung có số đo là 95° (Hình 12).



Hình 12

6. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124 cm và đường kính bánh xe trước là 80 cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?


Hình 13

7. Thành phố Đà Lạt nằm vào khoảng $11^{\circ}58'$ vĩ độ Bắc. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40 000 km. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến từ Đà Lạt đến xích đạo.

(*Nguồn:* https://vi.wikipedia.org/wiki/Đà–Lạt.)


Hình 14

Sau bài học này, em đã làm được những gì?

- Tính được độ dài cung tròn.
- Nhận biết được hình quạt tròn và hình vành khuyên.
- Tính được diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khuyên.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với đường tròn (ví dụ: một số bài toán liên quan đến chuyển động tròn trong Vật lí; tính được diện tích một số hình phẳng có thể đưa về những hình phẳng gắn với hình tròn, chẳng hạn hình viên phân, ...).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho hai đường tròn (O; 5 cm), (O′; 4 cm) với OO′ = 9 cm. Kết luận nào sau đây đúng về vị trí tương đối của hai đường tròn?

A. Hai đường tròn cắt nhau. B. Hai đường tròn ở ngoài nhau.

C. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài. D. Hai đường tròn tiếp xúc trong.

2. Cho đường tròn (O; 6 cm) và đường thẳng a với khoảng cách từ O đến a là 4 cm. Kết luận nào sau đây đúng về vị trí giữa đường tròn (O) và đường thẳng a?

A. (O) và a cắt nhau tại hai điểm. B. (O) và a tiếp xúc.

C. (O) và a không có điểm chung. D. (O) và a có duy nhất điểm chung.

3. Góc ở tâm là góc

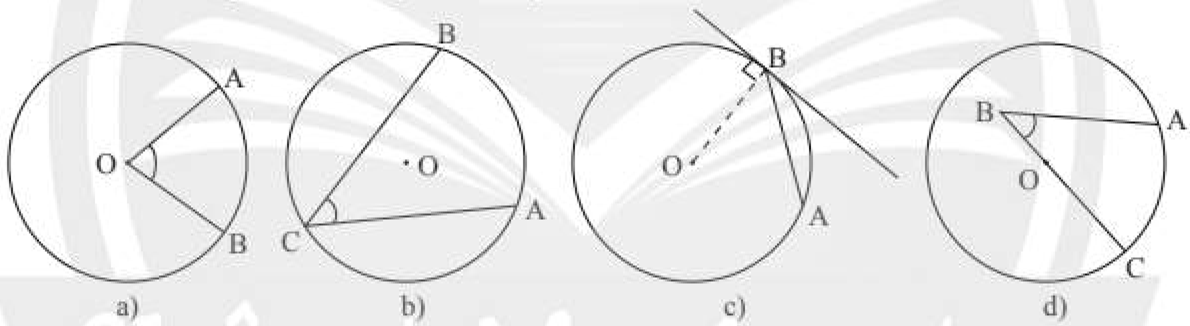
A. có đỉnh nằm trên đường tròn.

B. có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.

C. có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.

D. có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

4. Hình nào dưới đây biểu diễn góc nội tiếp?



Hình 1

A. Hình 1a. B. Hình 1b. C. Hình 1c. D. Hình 1d.

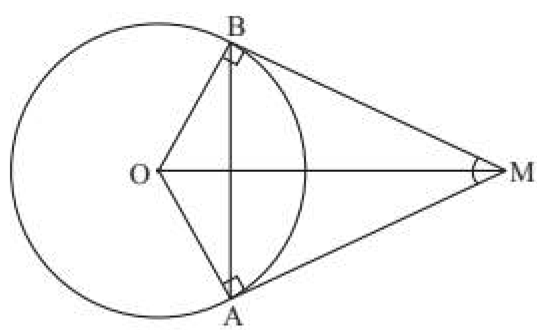
5. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo là

A. 180^o. B. 120^o. C. 90^o. D. 60^o.

6. Cho hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M (Hình 2). Biết $\widehat{AMB} = 50^o$. Số đo cung nhỏ AB là

A. 140^o. B. 230^o.

C. 130^o. D. 150^o.

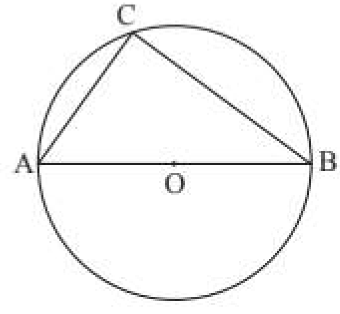


Hình 2

7. Trong Hình 3, $\widehat{ACB}$ là góc

A. vuông. B. tù.

C. nhọn. D. bẹt.



Hình 3

8. Trong một đường tròn, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. Hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

C. Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

D. Hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

9. Hình quạt tròn bán kính R, ứng với cung 90^o có diện tích bằng

A. πR^2. B. $\frac{\pi R^2}{2}$. C. $\frac{\pi R^2}{4}$. D. $\frac{\pi R^2}{8}$.

10. Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; 2 cm) và (O; 4 cm) có diện tích bằng

A. 12 cm^2. B. 24 cm^2. C. 4π cm^2. D. 12π cm^2.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

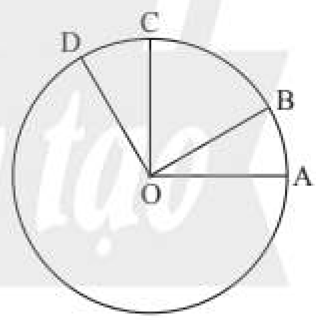
11. Quan sát Hình 4. Biết $\widehat{DOA} = 120^o$, $OA \perp OC$, $OB \perp OD$.

a) Đọc tên các góc ở tâm có trong hình.

b) Tính số đo của mỗi góc ở tâm tìm được ở câu a.

c) Tìm các cặp cung bằng nhau và có số đo nhỏ hơn 180^o.

d) So sánh hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{CD}$.



Hình 4

12. Cho tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) và AH là đường cao. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng:

a) AC vuông góc với DC;

b) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$;

c) AB . AC = AH . AD.

13. Hãy hoàn thành bảng số liệu sau vào vở (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bán kính R	20 cm	?	12 cm	32,6 cm	?
Số đo n° của cung tròn	160°	144°	?	42°	15°
Độ dài *l* của cung tròn	?	16,8 cm	60 cm	?	96 cm

14. Trên đường thẳng xy, lấy lần lượt ba điểm A, B, C sao cho AB > BC. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O′) đường kính BC.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại B.

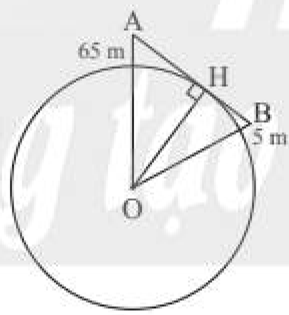
b) Gọi H là trung điểm của AC. Vẽ dây DE của (O) vuông góc với AC tại H. Chứng minh tứ giác ADCE là hình thoi.

c) DC cắt đường tròn (O′) tại F. Chứng minh rằng ba điểm F, B, E thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng HF là tiếp tuyến của đường tròn (O′).

15. Hải đăng Kê Gà toạ lạc tại xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, tỉnh Bình Thuận. Biết ngọn hải đăng cao 65 m so với mặt nước biển. Với khoảng cách bao nhiêu kilômét thì người quan sát trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn của hải đăng này? Cho biết mắt người quan sát ở độ cao 5 m so với mặt nước biển và bán kính Trái Đất gần bằng 6 400 km.

a)



b)

Hình 5

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Hoạt động 1. LÀM GIÁC KẾ ĐO GÓC NÂNG ĐƠN GIẢN

MỤC TIÊU

– Vận dụng tích hợp các kiến thức liên môn giữa Toán học, Công nghệ và Khoa học tự nhiên để làm giác kế đo góc nâng đơn giản.

– Vận dụng các kiến thức đã học về tỉ số lượng giác của góc nhọn và giải tam giác vuông để sử dụng giác kế vào việc tính các chiều cao trong thực tế.

CHUẨN BỊ

Mỗi nhóm học sinh chuẩn bị:

– Giấy bìa, ống hút loại lớn (có đường kính 12 mm), thước đo góc bằng nhựa, compa, cuộn chỉ, một vài đinh ốc, băng keo trong.

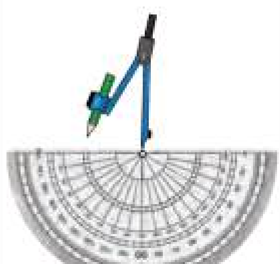
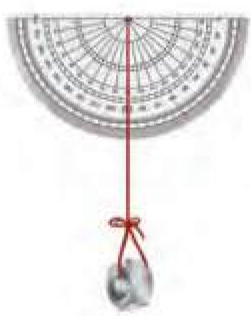
– Bút chì, bộ dụng cụ học tập hình học.

– Sách giáo khoa Toán 9, tập một – Chân trời sáng tạo.

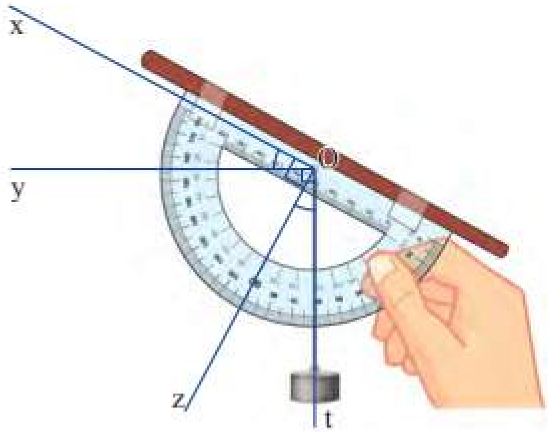
TIẾN HÀNH HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1: Làm giác kế đo góc nâng

Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 8 đến 10 học sinh. Nhóm trưởng phân công các bạn:

Bước 1	Bước 2	Bước 3	Bước 4
– Đục một lỗ tại tâm O của một cái thước đo góc (có thể hơ lửa nóng đầu nhọn của compa rồi dùi xuyên qua thước). 	– Xỏ một sợi chỉ qua lỗ vừa đục và buộc hai đầu sợi chỉ vào một vật nặng tạo thành một dây dọi. 	– Dùng băng keo dán một cái ống hút dọc theo cạnh thẳng của thước đo góc để làm ống ngắm. 	– Gắn bộ đo góc vào thước bằng keo dán. 

Lưu ý: Sợi chỉ và vật nặng này đóng vai trò kim đồng hồ, giúp ta tính được góc nâng, nên phải đảm bảo khi nghiêng thước để ngắm, dây dọi phải luôn chỉ phương thẳng đứng và không bị ma sát với mặt thước. Góc nâng tạo bởi phương ống ngắm và phương nằm ngang là góc giữa dây dọi và tia đi qua vạch 90^o của thước đo góc.



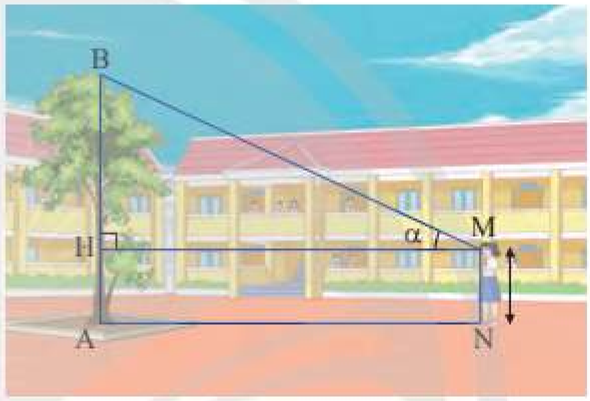
HOẠT ĐỘNG 2: Sử dụng giác kế vừa làm để tính chiều cao trong thực tế

Để tính chiều cao của một cái cây hoặc cột cờ trong sân trường, nhóm trưởng phân công các bạn thực hiện các việc:

– Đo khoảng cách AN từ gốc cây đến vị trí người quan sát.

– Đo độ cao MN từ mắt người quan sát đến mặt đất.

– Dùng dụng cụ vừa làm để đo góc nâng $\alpha = \widehat{HMB}$ từ M khi nhìn thấy ngọn cây như hình bên.



– Tính chiều cao AB của cây theo công thức:

$$AB = MN + AN \cdot \tan\alpha.$$

HOẠT ĐỘNG 3: Tổ chức báo cáo

Mỗi nhóm lần lượt báo cáo trước lớp về các nội dung:

a) Cách phân công cụ thể trong nhóm.

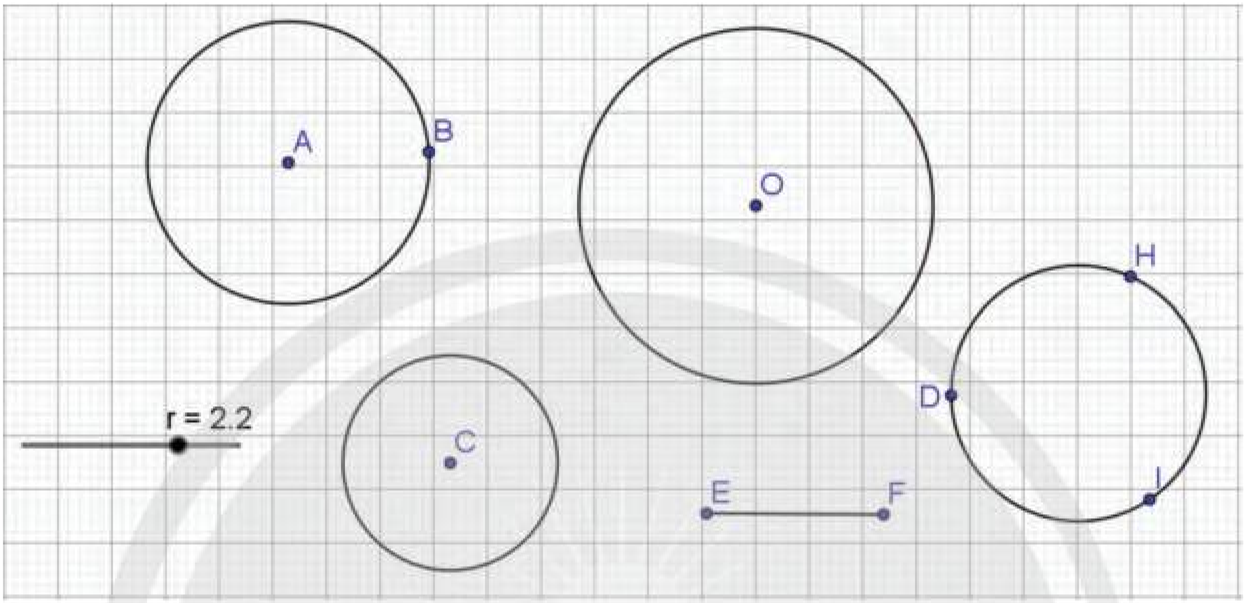
b) Đặc điểm sản phẩm của nhóm, những sáng tạo, thay đổi so với hướng dẫn.

c) Kết quả sử dụng sản phẩm để đo đạc và tính toán chiều cao thực tế.

d) Tự đánh giá về sản phẩm.

e) Đề xuất các cải tiến.

Hoạt động 2. VẼ ĐƯỜNG TRÒN BẰNG PHẦN MỀM GeoGebra



MỤC TIÊU

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ các đường tròn.

– Xem xét sự thay đổi của diện tích hình tròn khi thay đổi bán kính.

– Ôn tập và minh hoạ các tính chất đã học về đường tròn.

– Thực hành sử dụng phần mềm để thiết kế đồ hoạ liên quan đến đường tròn.

CHUẨN BỊ

– Máy tính xách tay hoặc máy tính bảng có cài đặt GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

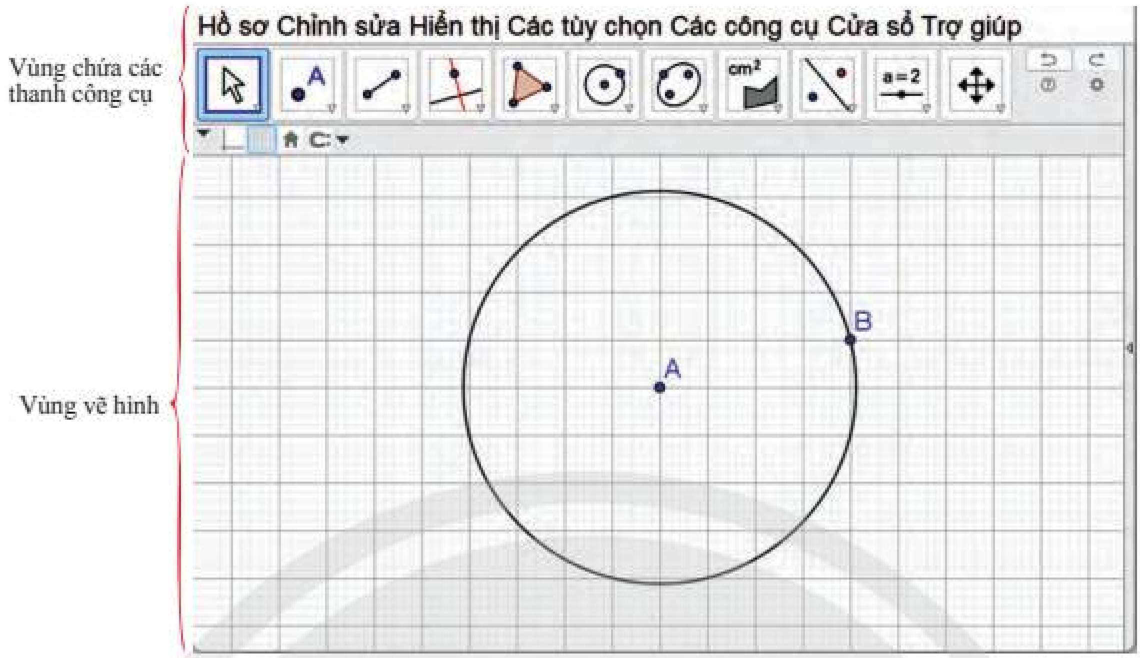
– Sách giáo khoa Toán 9, tập một – Chân trời sáng tạo.

HƯỚNG DẪN CHỨC NĂNG CỦA GEOGEBRA

Để vẽ đường tròn trên GeoGebra ta thực hiện các thao tác trên hai vùng sau:

1. Vùng chứa các thanh công cụ;

2. Vùng vẽ hình: chứa các đường tròn vẽ được.



TIẾN HÀNH HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1: Vẽ đường tròn theo các cách khác nhau

Để vẽ đường tròn trên GeoGebra, ta có các cách sau:

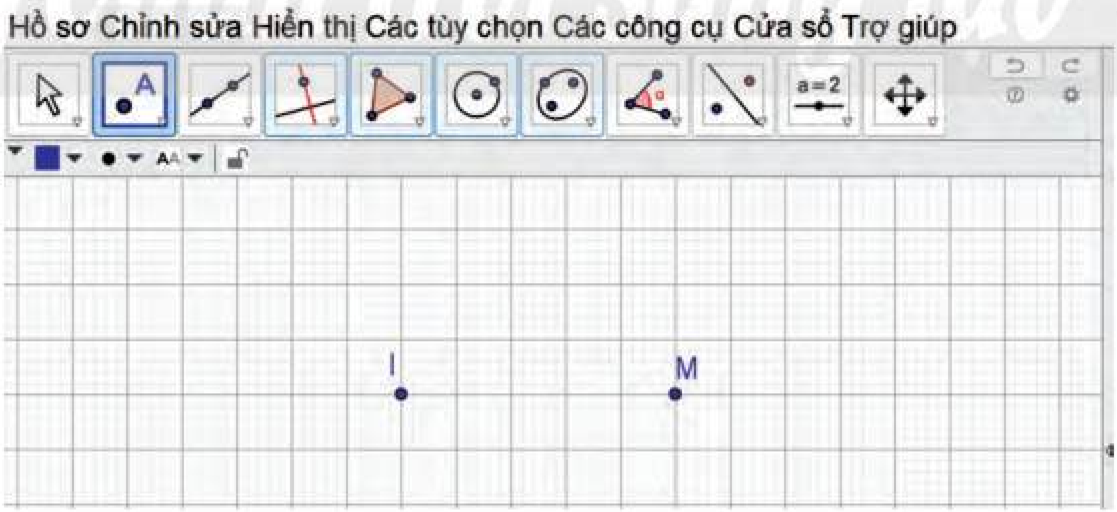
Cách 1: Vẽ đường tròn khi biết tâm và một điểm trên đường tròn.

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

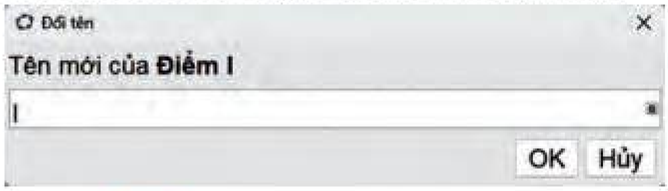
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Chọn thẻ vẽ điểm  trên thanh công cụ.

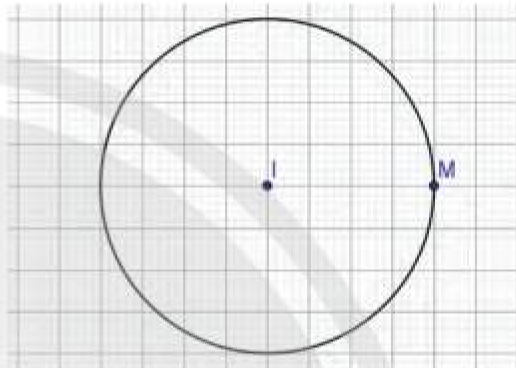
– Nhấp chuột vào hai điểm tuỳ ý trên vùng vẽ hình.



– Phần mềm sẽ tự động đặt tên điểm, tuy nhiên ta có thể đổi tên điểm bằng cách nhấp chuột phải vào điểm, chọn đổi tên và gõ tên mới vào hộp thoại.



– Chọn thẻ vẽ đường tròn  trên thanh công cụ. Tiếp tục chọn "Đường tròn khi biết tâm và 1 điểm trên đường tròn".



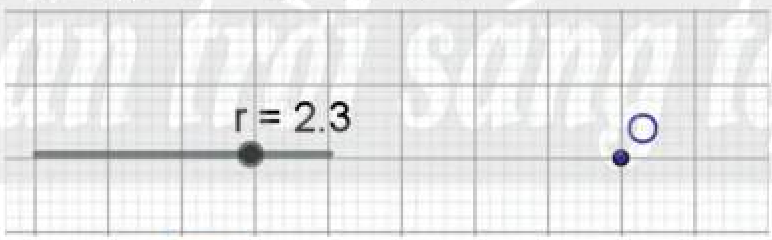
– Nhấp chuột vào điểm I và điểm M. Phần mềm sẽ tự động vẽ đường tròn tâm I bán kính IM.

Cách 2: Vẽ đường tròn khi biết tâm và số đo của bán kính.

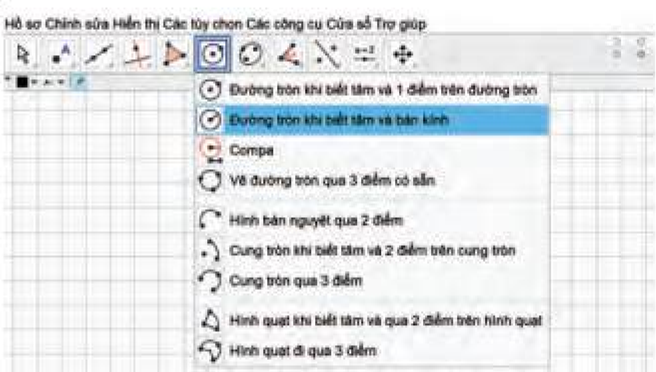
1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

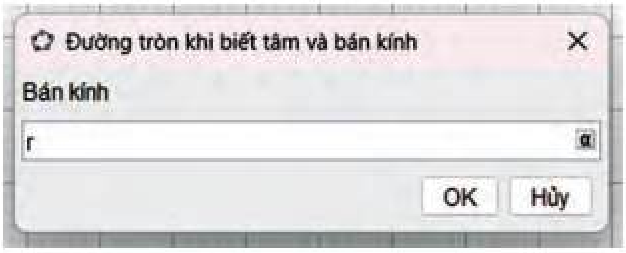
– Vẽ trước tâm O và tạo thanh trượt biểu thị tham số r.



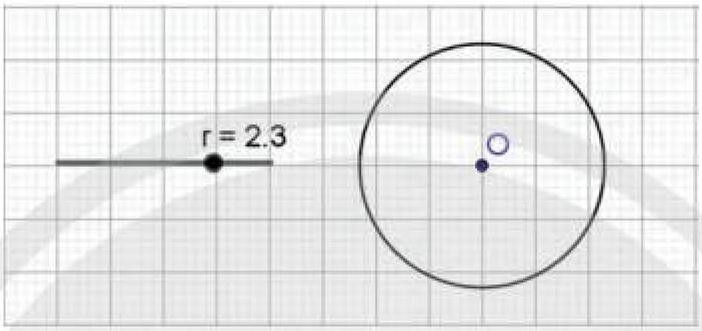
– Chọn thẻ vẽ đường tròn  trên thanh công cụ. Tiếp tục chọn "Đường tròn khi biết tâm và bán kính".



– Nhấp chuột vào điểm O và nhập bán kính bằng r vào hộp thoại hiện ra.



– Phần mềm tự động vẽ đường tròn (O; r).



– Dùng chuột thay đổi r để thay đổi bán kính.

Tương tự như cách 1 và 2, ta có thể vẽ đường tròn theo các cách sau:

Cách 3: Vẽ đường tròn khi biết tâm và một đoạn thẳng có độ dài bằng bán kính (chế độ Compa).

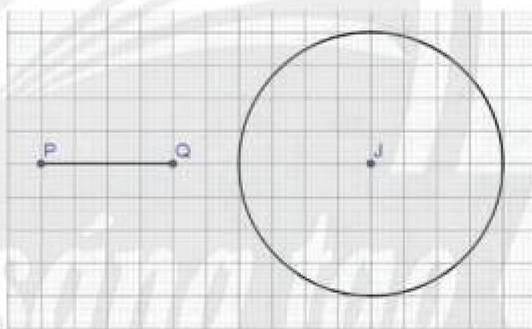
Thao tác trên phần mềm GeoGebra được thực hiện như sau:

– Vẽ trước tâm J và một đoạn thẳng PQ.

– Chọn thẻ vẽ đường tròn  trên thanh công cụ. Tiếp tục chọn "Compa".

– Nhấp chuột vào tâm J, sau đó nhấp chuột vào đoạn thẳng PQ.

– Ta có đường tròn tâm J bán kính r = PQ.



Cách 4: Vẽ đường tròn đi qua ba điểm.

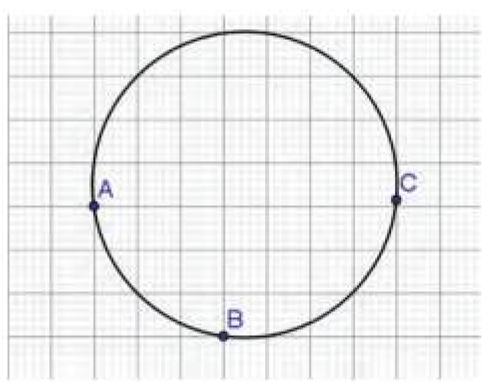
Thao tác trên phần mềm GeoGebra được thực hiện như sau:

– Vẽ trước ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

– Chọn thẻ vẽ đường tròn  trên thanh công cụ. Tiếp tục chọn "Vẽ đường tròn qua 3 điểm có sẵn".

– Nhấp chuột lần lượt vào ba điểm A, B, C.

– Ta có đường tròn đi qua ba điểm A, B, C như hình bên.



Thực hành 1.

a) Vẽ đường tròn tâm O bán kính r = 5 theo Cách 2.

b) Vẽ tam giác MNP rồi vẽ đường tròn ngoại tiếp theo Cách 4.

HOẠT ĐỘNG 2: Tính diện tích hình tròn

Tính diện tích của hình tròn tâm O bán kính r.

1. Khởi động phần mềm đã cài đặt trên máy tính hoặc truy cập vào trang web: https://www.geogebra.org/ để sử dụng phiên bản online.

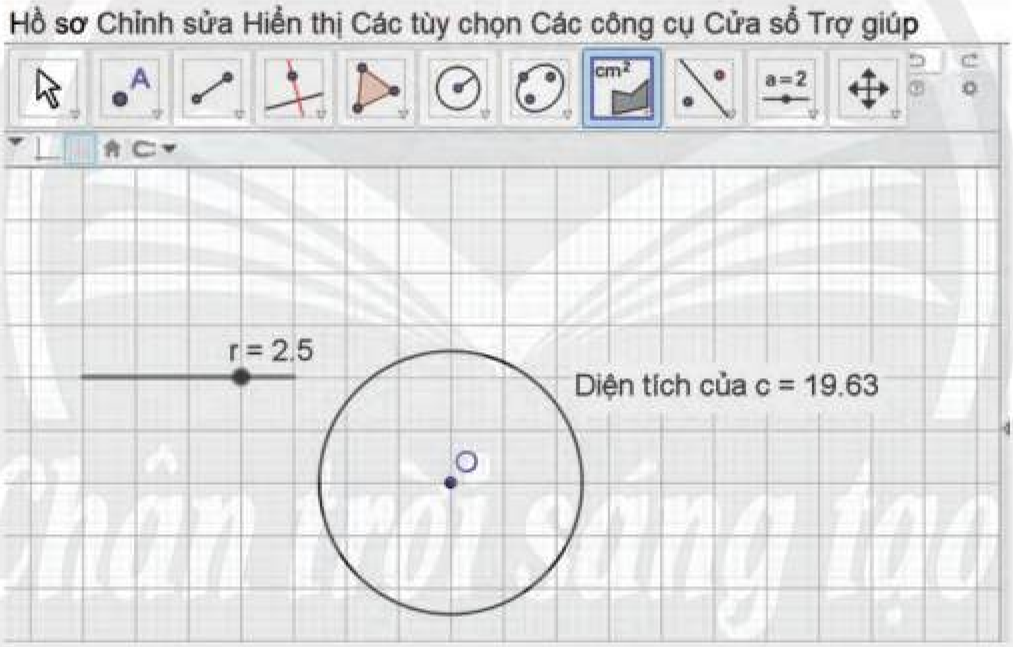
2. Các bước thao tác trên GeoGebra:

– Vẽ đường tròn tâm O bán kính r theo Cách 2.

– Chọn chức năng đo diện tích  trên thanh công cụ.

– Nhấp chuột vào đường tròn tâm O bán kính r.

– Ta có diện tích hình tròn vừa vẽ (theo cm^2) như hình dưới đây.



– Dùng chuột kéo con chạy để thay đổi bán kính r. Quan sát diện tích hình tròn thay đổi khi thay đổi bán kính r.

Thực hành 2.

a) Vẽ đường tròn tâm J bán kính r = 4 theo Cách 2 và tính diện tích hình tròn vừa vẽ được.

b) Vẽ điểm O, đoạn thẳng AB và đường tròn tâm O bán kính bằng AB theo Cách 3. Tính diện tích hình tròn vừa vẽ được.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Bất đẳng thức
Là hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$, $a \ge b$, $a \le b$).

Bất phương trình bậc nhất một ẩn
Là bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \ge 0$, $ax + b \le 0$), với a, b là hai số đã cho và $a \ne 0$.

Cát tuyến của đường tròn
Là đường thẳng có hai điểm chung với đường tròn, hai điểm chung gọi là giao điểm.

Căn bậc ba
Căn bậc ba của số thực a là số thực x thoả mãn $x^3 = a$, kí hiệu $\sqrt[3]{a}$.

Căn bậc hai
Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x thoả mãn $x^2 = a$.

Căn thức bậc ba
Là biểu thức dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.

Căn thức bậc hai
Là biểu thức dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. Biểu thức A được gọi là *biểu thức lấy căn* hoặc *biểu thức dưới dấu căn*.

Cung
Là phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm trên đường tròn.

Dây của đường tròn
Là đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên đường tròn.

Đường kính của đường tròn
Là dây đi qua tâm của đường tròn.

Đường tròn
Là hình gồm các điểm nằm trong mặt phẳng và cách đều một điểm cho trước.

Giải tam giác vuông
Là tính các cạnh và các góc của tam giác đó.

Góc nội tiếp
Là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Góc ở tâm
Là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Hai đường tròn cắt nhau
Là hai đường tròn có hai điểm chung.

Hai đường tròn không giao nhau
Là hai đường tròn không có điểm chung.

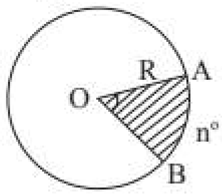
Hai đường tròn tiếp xúc nhau
Là hai đường tròn có đúng một điểm chung.

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn
Là hệ gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

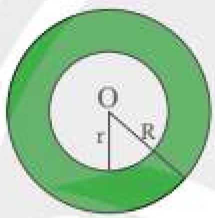
Hình quạt tròn

Là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.



Hình vành khuyên

Là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn có tâm trùng nhau và bán kính khác nhau.



Nghiệm của bất phương trình bậc nhất một ẩn

Là các giá trị của ẩn làm cho bất phương trình trở thành khẳng định đúng.

Nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Là các nghiệm chung của hai phương trình trong hệ phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

Phép khai phương

Là phép toán tìm các căn bậc hai số học của một số không âm, còn được gọi tắt là *khai phương*.

Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là phương trình có dạng

$$ax + by = c,$$

trong đó a, b, c là các số đã biết, a và b không đồng thời bằng 0.

Tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Là các tỉ số sin, côsin, tang, côtang của góc nhọn đó.

Tiếp tuyến của đường tròn

Là đường thẳng có duy nhất một điểm chung với đường tròn. Điểm chung đó gọi là tiếp điểm.

Trục căn thức ở mẫu

Là phép biến đổi biểu thức sao cho không còn căn thức ở mẫu (còn gọi là *khử căn thức ở mẫu*).

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – ĐẶNG THỊ THUÝ
Biên tập mĩ thuật: ĐẶNG NGỌC HÀ
Thiết kế sách: HOÀNG CAO HIỀN – BÙI XUÂN DƯƠNG
Trình bày bìa: ĐẶNG NGỌC HÀ – TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ: THANH THẢO – NGỌC KHANG – CAO HIỀN – XUÂN DƯƠNG
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – ĐẶNG THỊ THUÝ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

TOÁN 9 – TẬP MỘT (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)

Mã số: G2HH9T001M23
In .... bản, (QĐ in số ....) khổ 19 x 26,5 cm
Đơn vị in: ....
Địa chỉ: ....
Số ĐKXB: 4223-2023/CXBIPH/28-2169/GD
Số QĐXB: ..../QĐ- ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 20...
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-38983-1
Tập hai: 978-604-0-38984-8

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. NGỮ VĂN 9 – TẬP MỘT
2. NGỮ VĂN 9 – TẬP HAI
3. TOÁN 9 – TẬP MỘT
4. TOÁN 9 – TẬP HAI
5. TIẾNG ANH 9
   Friends Plus - Student Book
6. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 9
7. KHOA HỌC TỰ NHIÊN 9
8. LỊCH SỬ VÀ ĐỊA LÍ 9
9. TIN HỌC 9
10. CÔNG NGHỆ 9 – Định hướng nghề nghiệp
11. CÔNG NGHỆ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp
    Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà
12. CÔNG NGHỆ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp
    Mô đun Nông nghiệp 4.0
13. CÔNG NGHỆ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp
    Mô đun Cắt may
14. GIÁO DỤC THỂ CHẤT 9
15. ÂM NHẠC 9
16. MĨ THUẬT 9 (1)
17. MĨ THUẬT 9 (2)
18. HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 9 (1)
19. HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 9 (2)

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

ISBN 978-604-0-38983-1

9 786040 389831

Bản in thử
Sách không bán