CHƯƠNG IX

# PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

# BÀI 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

## I. LÝ THUYẾT.

### 1. ELIP

- Cho hai điểm cố định và phân biệt $F_1$, $F_2$. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực $a$ lớn hơn $c$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là đường elip . Hai điểm $F_1$, $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của elip đó.

- Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho $O$ là trung điểm của đọan thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$. $(2)$

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng $(2)$ đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.

- Phương trình $(2)$ được gọi là phương trình chính tắc của elip tương ứng.

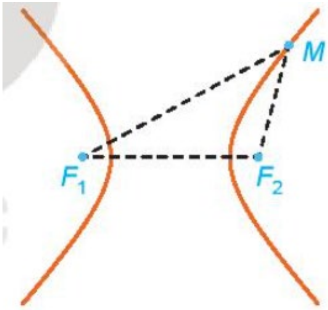
***Tính chất và hình dạng của Elip:** Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

- Trục đối xứng $Ox$, $Oy$
- Tâm đối xứng $O$.
- Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
- Độ dài trục lớn $2a$. Độ dài trục bé $2b$.
- Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở có kích thước là $2a$ và $2b$.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$.
- Hai đường chuẩn $x = \frac{a}{e}$ và $x = -\frac{a}{e}$.
- $M(x; y) \in (E)$. Khi đó $MF_1 = a + ex$ : bán kính qua tiêu điểm trái.

$MF_2 = a - ex$ : bán kính qua tiêu điểm phải.

## 2. HYPEBOL

Trên mặt phẳng, nếu hai thiết bị đặt tại các vị trí $F_1, F_2$ nhận được một tín hiệu âm thanh cùng lúc thì vị trí phát ra tín hiệu cách đều hai điểm $F_1, F_2$, và do đó, nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $F_1F_2$.




Hình 7.23

Cho hai điểm phân biệt cố định $F_1$, $F_2$. Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương $a$ nhỏ hơn $c$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là đường hypebol . Hai điểm $F_1$, $F_2$ được gọi là hai *tiêu điểm* và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol đó.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng $(4)$ đều là phương trình của hypebol có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, tiêu cự $2x = 2\sqrt{a^2+b^2}$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2a$.

Phương trình  được gọi là phương trình chính tắc của hypebol tương ứng.

## 3. PARABOL

Cho một điểm $F$ cố định và một đường thẳng $\Delta$ cố định không đi qua $F$. Tập hợp các điểm $M$ cách đều $F$ và $\Delta$ được gọi là đường parabol . Điểm $F$ được gọi là tiêu điểm, $\Delta$ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ $F$ đến $\Delta$ được gọi là tham số tiêu của parabol đó.

Xét $(P)$ là một parabol với tiêu điểm $F$, đường chuẩn $\Delta$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $F$ trên $\Delta$. Khi đó, trong hệ trục tọa độ $Oxy$ với gốc $O$ là trung điểm của $HF$, tia $Ox$ trùng với tia $OF$, parabol $(P)$ có phương trình

$$y^2 = 2px \qquad (5)$$

Phương trình $(5)$ được gọi là phương trình chính tắc của parabol $(P)$.

Ngược lại, mỗi phương trình dạng $(5)$, với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

## BÀI TẬP.

**Câu 1.** Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip

**Câu 2.** Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

**Câu 3.** Cho parabol có phương trình: $y^2=8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

**Câu 4.** Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm A và có một tiêu điểm là $F_2$.

**Câu 5.** Lập phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm *M*

**Câu 6.** Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300 km. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292 000 km/s để một tàu thuỷ thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ *A* đến sớm hơn tín hiệu từ B là 0,0005 s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thuỷ thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

**Câu 7.** Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B, khoảng cách $AB=400m$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng $AB$ một khoảng 20 m và cách đều *A, B* .

a).Lập phương trình chính tắc của , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 m trên thực tế.

b). Lập phương trình chính tắc của , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 km trên thực tế.

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### *DẠNG 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA ELÍP*

*{ Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm. của elip}*

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

**Cho Elip có phương trình chính tắc:** $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$.

- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- Độ dài trục lớn $2a$.
- Độ dài trục bé $2b$.
- Tiêu cự $2c$

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 2:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): 4x^2+25y^2=100$.

**Câu 3:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E): 4x^2+9y^2=1$.

**Câu 4:** Tìm tâm sai của Elíp biết:

a) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$.

b) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $60^0$.

c) Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng hai lần tiêu cự:

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$?

**A.** $F_{1,2}=(0;\pm 1)$. **B.** $F_{1,2}=(\pm 1;0)$. **C.** $F_{1,2}=(\pm 3;0)$. **D.** $F_{1,2}=(1;\pm 2)$.

**Câu 2:** Cho Elip $(E): 4x^2+9y^2=36$. Mệnh đề nào ***sai*** trong các mệnh đề sau:

**A.** $(E)$ có tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $(E)$ có trục lớn bằng $6$.

**C.** $(E)$ có trục nhỏ bằng $4$. **D.** $(E)$ có tiêu cự $\sqrt{5}$.

**Câu 3:** Cho elip $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$. Phát biểu nào sau đây đúng?

**A.** Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{3}$. **B.** Tiêu cự bằng $4$.

**C.** Tâm sai $e=\frac{2}{3}$. **D.** Hai tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

**Câu 4:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

**A.** $4x^2+8y^2=32$. **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$. **C.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=-1$. **D.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 5:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Chọn khẳng định **sai**

**A.** Điểm $A(3;0)\in(E)$. **B.** $(E)$ có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.

**C.** Trục lớn của $(E)$ có độ dài bằng $6$. **D.** $(E)$ có tâm sai bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 6:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

**A.** $x^2-y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=2$. **C.** $x^2+2y^2=2$. **D.** $x^2=2y^2$.

**Câu 7:** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm tiêu cự của $(E)$.

**A.** $F_1F_2=12$ **B.** $F_1F_2=8$ **C.** $F_1F_2=2\sqrt{5}$ **D.** $F_1F_2=4\sqrt{5}$

**Câu 8:** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm tiêu cự của elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**A.** 3 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

**Câu 9:** Tìm các tiêu điểm của Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$

**A.** $F_1(3;0);\ F_2(0;-3)$.
**B.** $F_1\left(\sqrt{8};0\right);\ F_2\left(0;-\sqrt{8}\right)$.
**C.** $F_1(-3;0);\ F_2(0;-3)$.
**D.** $F_1\left(-\sqrt{8};0\right);\ F_2\left(\sqrt{8};0\right)$.

**Câu 10:** Elíp $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có độ dài trục lớn bằng:

**A.** $25$. **B.** $50$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Câu 11:** Cho $9x^2+25y^2=225$. Hỏi diện tích hình chữ nhật cơ sở ngoại tiếp $(E)$ là

**A.** $15$. **B.** $30$. **C.** $40$. **D.** $60$.

**Câu 12:** Cho $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $26$, tâm sai $e=\frac{12}{13}$. Độ dài trục nhỏ của $(E)$ bằng

**A.** $5$. **B.** $10$. **C.** $12$ **D.** $24$.

**Câu 13:** Cho $(E): 16x^2+25y^2=100$ và điểm $M$ thuộc $(E)$ có hoành độ bằng $2$. Tổng khoảng cách từ $M$ đến $2$ tiêu điểm của $(E)$ bằng

**A.** $5$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 14:** Cho elip$(E): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng

**A.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 15:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn gấp $2$ lần độ dài trục nhỏ và đi qua điểm $A(2;-2)$ là

**A.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

**Câu 16:** Phương trình chính tắc của $(E)$ nhận điểm $M(4;3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là

**A.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

**Câu 17:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng $\frac{50}{3}$ và tiêu cự bằng $6$ là

**A.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

**Câu 18:** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. $M$ là điểm thuộc $(E)$. Tính $MF_1+MF_2$.

**A.** 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 2

**Câu 19:** Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E): x^2+3y^2=6$. Giá trị nào sau đây là tiêu cự của elip?

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

**Câu 20:** Trong hệ trục tọa độ $(Oxy)$, cho elip $(E): \frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1$. Độ dài tiêu cự của $(E)$ bằng

**A.** $4$. **B.** $8$. **C.** $16$. **D.** $2$.

**Câu 21:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.** $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

**B.** $(E)$ có tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

**C.** $(E)$ có đỉnh $A_1(-5;0)$.

**D.** $(E)$ có độ dài trục nhỏ bằng $3$.

**Câu 22:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $(E)$ có phương trình: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $(E)$ có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**B.** $F_1\left(0;-\sqrt{5}\right), F_2\left(0;\sqrt{5}\right)$ là các tiêu điểm của $(E)$.

**C.** Độ dài trục lớn là $9$.

**D.** Các đỉnh nằm trên trục lớn là $A_1(0;3)$ và $A_2(0;-3)$.

**Câu 23:** Cho Elip có phương trình $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Một tiêu điểm của Elip có tọa độ là:

**A.** $A\left(\sqrt{3};0\right)$. **B.** $B\left(0;\sqrt{3}\right)$. **C.** $C\left(\sqrt{5};0\right)$. **D.** $D\left(0;\sqrt{5}\right)$.

**Câu 24:** Cho Elip có phương trình $x^2+4y^2=1$. Tiêu cự của Elip là:

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Câu 25:** Diện tích của tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$ là

**A.** $8$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $6$.

**Câu 26:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $\Delta: x=-4$ cắt elip $(E)$ tại hai điểm $M$, $N$. Tính độ dài đoạn thẳng $MN$?

**A.** $MN=\frac{18}{25}$. **B.** $MN=\frac{9}{25}$. **C.** $MN=\frac{18}{5}$. **D.** $MN=\frac{9}{5}$.

**Câu 27:** Trong hệ tọa độ $(Oxy)$, cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Bán kính qua tiêu của $(E)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** 0 **B.** 1 **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** 2

**Câu 28:** Một elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$. Biết $(E)$ đi qua điểm $A\left(2;\sqrt{2}\right)$ và $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ thì $(E)$ có độ dài trục bé là

**A.** 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 6.

**Câu 29:** Cho $(E)$ có hai tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và điểm $M$ thuộc $(E)$. Biết chu vi tam giác $MF_1F_2$ bằng $18$. Khi đó tâm sai của $(E)$ bằng

**A.** $\frac{4}{18}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $-\frac{4}{5}$. **D.** $-\frac{4}{9}$.

**Câu 30:** Cho $(E)$ có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ và điểm $M\left(-\sqrt{7};\frac{9}{4}\right)$ thuộc $(E)$. Gọi $N$ là điểm đối xứng với $M$ qua gốc tọa độ $O$. Khi đó

**A.** $NF_1+MF_2=\frac{9}{2}$. **B.** $NF_2+MF_1=\frac{9}{2}$. **C.** $NF_2-NF_1=\frac{7}{2}$ **D.** $NF_1+MF_2=8$.

### *DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP*

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

*{ Phương trình chính tắc của Elip có dạng:* $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$*; ...}*

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

**Câu 2:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

**Câu 3:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\frac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kính qua tiêu điểm của điểm $M$ thuộc Elip là 9 và 15.

**Câu 4:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.

b) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=21$ và điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc $60^0$.

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d: x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

**Câu 5:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2+y^2=4$ và $AC=2BD$, $A$ thuộc $Ox$.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2+y^2=8$ tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e=\frac{1}{3}$ và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2+y^2=9$ tại bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ sao cho $AB$ song song với $Ox$ và $AB=3BC$.

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

**Câu 6:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

c) Elip đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$ và $M$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$.

**Câu 7:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M$, biết tam giác $F_1MF_2$ có diện tích bằng 1 và vuông tại $M$.

b) Elip đi qua ba đỉnh của tam giác đều $ABC$. Biết tam giác $ABC$ có trục đối xứng là $Oy$, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$.

c) Khi $M$ thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của $OM$ bằng 4 và độ dài lớn nhất của $MF_1$ bằng 8 với $F_1$ là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Phương trình chính tắc của Elip là

**A.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. **B.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**C.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b>0\right)$. **D.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

**Câu 2:** Phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng $6$ và trục lớn bằng $10$.

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 3:** Phương trình của Elip $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $8$, độ dài trục nhỏ bằng $6$ là:

**A.** $9x^2+16y^2=144$. **B.** $9x^2+16y^2=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

**Câu 4:** Cho $(E)$ có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng $8$, chu vi bằng $6$ thì phương trình chính tắc là:

**A.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. **B.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. **C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 5:** Cho $(E)$ có tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, tâm sai $e=\frac{4}{5}$ thì phương trình là:

**A.** $4x^2+5y^2=20$. **B.** $16x^2+25y^2=400$.

**C.** $9x^2+25y^2=225$. **D.** $9x^2+16y^2=144$.

**Câu 6:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho elip $(E)$ có độ dài trục lớn bằng 12 và độ dài trục bé bằng 6. Phương trình nào sau đây là phương trình của elip $(E)$

**A.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=0$.

**Câu 7:** Tìm phương trình chính tắc của Elip có tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ và trục lớn bằng $6$.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

**Câu 8:** Phương trình Elip có trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và một tiêu điểm $F_1(-1;0)$ là:

**A.** $4x^2+5y^2=20$. **B.** $4x^2+5y^2=12$. **C.** $5x^2+4y^2=20$ **D.** $5x^2+4y^2=12$.

**Câu 9:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $8$, trục nhỏ bằng $6$ là

**A.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $9x^2+16y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 10:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có tâm sai $e=\frac{4}{5}$, độ dài trục nhỏ bằng $12$ là

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

**Câu 11:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $6$, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ là

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

**Câu 12:** Elip có hai đỉnh $(-3;0)$; $(3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$ có phương trình chính tắc là

**A.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$.

**Câu 13:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn gấp $2$ lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ là

**A.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 14:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có đường chuẩn $x+4=0$ và tiêu điểm $F(-1;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

**Câu 15:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có tiêu cự bằng $6$ và đi qua điểm $A(5;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **B.** $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 16:** Elip có hai tiêu điểm $F_1(-1;0); F_2(1;0)$ và tâm sai $e=\frac{1}{5}$ có phương trình là

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$. **B.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=-1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=-1$.

**Câu 17:** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, một elip có độ dài trục lớn là $8$, độ dài trục bé là $6$ thì có phương trình chính tắc là.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

**Câu 18:** Các đỉnh của Elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ (a>b>0)$ tạo thành hình thoi có một góc ở đỉnh là $60°$, tiêu cự của $(E)$ là $8$, thế thì $a^2+b^2=?$

**A.** $16$. **B.** $32$. **C.** $64$. **D.** $128$.

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E)$ đi qua điểm $M(0;3)$. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên $(E)$ bằng $8$. Phương trình chính tắc của Elip là

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$ **D.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$

**Câu 20:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$ cho đường elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $M(-5;-1),N(-1;1)$. Điểm $K$ thay đổi trên elip $(E)$. Diện tích tam giác $MNK$ lớn nhất bằng

**A.** $9\sqrt{5}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $9$. **D.** $18$.

**Câu 21:** Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Xét các điểm $M,N$ lần lượt thuộc các tia $Ox$, $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(E)$. Hỏi độ dài ngắn nhất của $MN$ là bao nhiêu?

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $9$.

### DẠNG 3: TÌM ĐIỂM THUỘC ELIP THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

**Cho Elip có phương trình chính tắc:** $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$.

- $M(x;y)\in(E)$. Khi đó $MF_1=a+ex$ : bán kính qua tiêu điểm trái.

  $MF_2=a-ex$ : bán kính qua tiêu điểm phải.

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; $A$, $B$ là hai điểm thuộc $(E)$ sao cho $AF_1+BF_2=8$. Tính $AF_2+BF_1$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho $MF_1-MF_2=2$.

**Câu 2:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của $(E)$ dưới một góc vuông.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$ với hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=60^0$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ với hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=120^0$.

d) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ với hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$ trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{MF_1F_2}=120^0$.

**Câu 3:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm $A$, $B$ thuộc $(E)$, biết rằng $A$, $B$ đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác $ABC$ là tam giác đều.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm $A$ và $B$ thuộc $(E)$ có hoành độ dương sao cho tam giác $OAB$ cân tại $O$ và có diện tích lớn nhất.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, biết $B$ có tung độ dương.

**Câu 4:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác đinh tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho diện tích tam giác $MAB$ lớn nhất.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên $(E)$ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng 4,5.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm trên $(E)$ những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ là lớn nhất.

**Câu 5:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$ bằng $\frac{4}{3}$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\frac{48}{25};0\right)$.

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Với $M$ là điểm bất kì nằm trên $(E)$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $4 \le OM \le 5$. **B.** $OM \ge 5$. **C.** $OM \le 3$. **D.** $3 \le OM \le 4$.

**Câu 2:** Elip đi qua điểm $M\left(1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ thì có phương trình chính tắc là:

**A.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

**Câu 3:** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ và điểm $M$ nằm trên $(E)$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng $-13$ thì các khoảng cách từ $M$ tới $2$ tiêu điểm của $(E)$ bằng:

**A.** $8;\ 18$. **B.** $13 \pm \sqrt{5}$. **C.** $10;16$. **D.** $13 \pm \sqrt{10}$.

**Câu 4:** Cho Elíp có phương trình $16x^2 + 25y^2 = 100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm thuộc elíp có hoành độ $x=2$ đến hai tiêu điểm.

**A.** $10$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $5$. **D.** $4\sqrt{3}$.

**Câu 5:** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $(d): x=-4$ cắt $(E)$ tại hai điểm $M, N$. Khi đó:

**A.** $MN=\frac{9}{25}$. **B.** $MN=\frac{18}{25}$. **C.** $MN=\frac{18}{5}$. **D.** $MN=\frac{9}{5}$.

**Câu 6:** Cho Elip có phương trình: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. $M$ là điểm thuộc $(E)$ sao cho $MF_1 = MF_2$. Khi đó tọa độ điểm $M$ là:

**A.** $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$. **B.** $M_1(0;2)$, $M_2(0;-2)$.

**C.** $M_1(-4;0)$, $M_2(4;0)$. **D.** $M_1(0;4)$, $M_2(0;-4)$.

**Câu 7:** Dây cung của Elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$. vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là

**A.** $\frac{2c^2}{a}$. **B.** $\frac{2b^2}{a}$. **C.** $\frac{2a^2}{c}$. **D.** $\frac{a^2}{c}$.

**Câu 8:** Cho $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M$ thuộc $(E)$. Khi đó độ dài $OM$ thỏa mãn

**A.** $OM \le 3$ **B.** $3 \le OM \le 4$. **C.** $4 \le OM \le 5$. **D.** $OM \ge 5$.

**Câu 9:** Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $d: x=-4$ cắt $(E)$ tại hai điểm $M$, $N$. Khi đó, độ dài đoạn $MN$ bằng

**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{9}{25}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{18}{25}$.

**Câu 10:** Đường thẳng $y=kx$ cắt $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tại hai điểm $M$, $N$ phân biệt. Khi đó $M$, $N$

**A.** Đối xứng nhau qua $O(0;0)$. **B.** Đối xứng nhau qua $Oy$.

**C.** Đối xứng nhau qua $Ox$. **D.** Đối xứng nhau qua $I(0;1)$.

**Câu 11:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ và điểm $M$ thuộc $(E)$ có hoành độ $x_M=-13$. Khoảng cách từ $M$ đến hai tiêu điểm của $(E)$ lần lượt là

**A.** 10 và 6. **B.** 8 và 18. **C.** 13 và $\pm\sqrt{5}$. **D.** 13 và $\pm\sqrt{10}$

**Câu 12:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, với tiêu điểm $F_1, F_2$. Lấy hai điểm $A, B \in (E)$ sao cho $AF_1+BF_1=8$. Khi đó, $AF_2+BF_2=?$

**A.** 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

**Câu 13:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho $M$ nhìn $F_1, F_2$ dưới một góc vuông:

**A.** $(-5;0)$. **B.** $\left(4;-\frac{9}{5}\right)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right)$.

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Điểm $M$ bất kì thuộc $(E)$, diện tích lớn nhất của tam giác $MAB$ là:

**A.** 18. **B.** 9. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

**Câu 15:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E): x^2+4y^2-4=0$. Tìm tất cả những điểm $N$ trên elip $(E)$ sao cho: $\widehat{F_1NF_2}=60^0$ ($F1$, $F2$ là hai tiêu điểm của elip $(E)$)

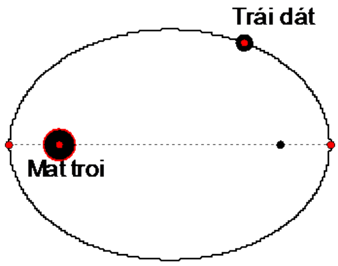
**A.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**B.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**C.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

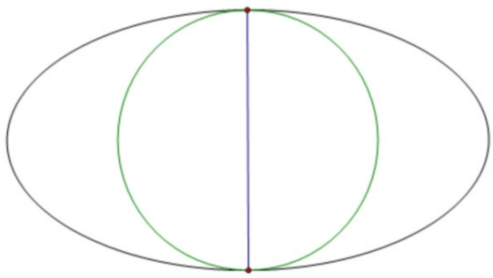
**D.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 16:** Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là *điểm cận nhật*, điểm xa mặt trời nhất gọi là *điểm viễn nhật*. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng $93.000.000$ dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\frac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật. Lấy giá trị gần đúng.




**A.** Xấp xỉ $91.455.000$ dặm.
**B.** Xấp xỉ $91.000.000$ dặm.
**C.** Xấp xỉ $91.450.000$ dặm.
**D.** Xấp xỉ $91.550.000$ dặm.

**Câu 17:** Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S=\pi ab$ trong đó $a,b$ lần lượt là đọ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.



**A.** $T=\frac{2}{3}$.
**B.** $T=1$.
**C.** $T=\frac{1}{2}$.
**D.** $T=\frac{3}{2}$.

CHƯƠNG IX

# PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

# BÀI 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

## I. LÝ THUYẾT.

### 1. ELIP

- Cho hai điểm cố định và phân biệt $F_1$, $F_2$. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực $a$ lớn hơn $c$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là đường elip . Hai điểm $F_1$, $F_2$ được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của elip đó.

- Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho $O$ là trung điểm của đọan thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$. $(2)$

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng $(2)$ đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$ , tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.

- Phương trình $(2)$ được gọi là phương trình chính tắc của elip tương ứng.

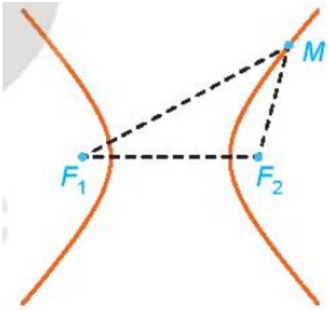
***Tính chất và hình dạng của Elip:** Cho elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

- Trục đối xứng $Ox$, $Oy$
- Tâm đối xứng $O$.
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- Độ dài trục lớn $2a$. Độ dài trục bé $2b$.
- Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở có kích thước là $2a$ và $2b$.
- Tâm sai $e=\dfrac{c}{a}<1$.
- Hai đường chuẩn $x=\dfrac{a}{e}$ và $x=-\dfrac{a}{e}$.
- $M(x;y)\in(E)$. Khi đó $MF_1 = a+ex$ : bán kính qua tiêu điểm trái.

$MF_2 = a - ex$ : bán kính qua tiêu điểm phải.

## 2. HYPEBOL

Trên mặt phẳng, nếu hai thiết bị đặt tại các vị trí $F_1, F_2$ nhận được một tín hiệu âm thanh cùng lúc thì vị trí phát ra tín hiệu cách đều hai điểm $F_1, F_2$, và do đó, nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $F_1F_2$.




Hình 7.23

Cho hai điểm phân biệt cố định $F_1$, $F_2$. Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương $a$ nhỏ hơn $c$. Tập hợp các điểm $M$ sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là đường hypebol . Hai điểm $F_1$, $F_2$ được gọi là hai *tiêu điểm* và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol đó.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng $(4)$ đều là phương trình của hypebol có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, tiêu cự $2x = 2\sqrt{a^2+b^2}$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2a$.

Phương trình  được gọi là phương trình chính tắc của hypebol tương ứng.

## 3. PARABOL

Cho một điểm $F$ cố định và một đường thẳng $\Delta$ cố định không đi qua $F$. Tập hợp các điểm $M$ cách đều $F$ và $\Delta$ được gọi là đường parabol . Điểm $F$ được gọi là tiêu điểm, $\Delta$ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ $F$ đến $\Delta$ được gọi là tham số tiêu của parabol đó.

Xét $(P)$ là một parabol với tiêu điểm $F$, đường chuẩn $\Delta$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $F$ trên $\Delta$. Khi đó, trong hệ trục tọa độ $Oxy$ với gốc $O$ là trung điểm của $HF$, tia $Ox$ trùng với tia $OF$, parabol $(P)$ có phương trình

$$y^2 = 2px \qquad (5)$$

Phương trình $(5)$ được gọi là phương trình chính tắc của parabol $(P)$.

Ngược lại, mỗi phương trình dạng $(5)$, với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

## BÀI TẬP.

**Câu 1.** Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip

**Lời giải**

Ta có: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=36 \\ b^2=9 \end{cases}$

Mặt khác $c^2=a^2-b^2=36-9=27 \Rightarrow c=\pm\sqrt{27}$.

Vậy ta có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{27};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{27};0\right)$,có tiêu cự bằng $2c=2\sqrt{27}$.

**Câu 2.** Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

**Lời giải**

Ta có: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=7 \\ b^2=9 \end{cases}$

Mặt khác $c^2=a^2+b^2=49+81=130 \Rightarrow c=\pm\sqrt{130}$.

Vậy ta có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{130};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{130};0\right)$; có tiêu cự bằng $2c=2\sqrt{130}$.

**Câu 3.** Cho parabol có phương trình: $y^2=8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

**Lời giải**

Ta có :

$2p=8 \Leftrightarrow p=4$ nên tiêu điểm của parabol $F\left(\frac{p}{2};0\right)=F$ và đường chuẩn :$\Delta: x=-\frac{p}{2}=-\frac{4}{2}=-2$.

**Câu 4.** Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm A và có một tiêu điểm là $F_2$.

**Lời giải**

Ta có:Phương trình elip có dạng:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Do đi qua $A(5;0)$nên: $\frac{25}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \Rightarrow a^2=25$

Mặc khác: tiêu điểm $F_2(3;0)$nên $\Rightarrow c=3 => c^2=9=a^2+b^2$

Từ và => $b^2=16$nên :$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

**Câu 5.** Lập phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm $M$

**Lời giải**

Giả sử : $y^2=2px$

Vì đi qua $M$ nên:$16=2p.2 => p=4$.Vậy $y^2=8x$

**Câu 6.** Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300 km. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292 000 km/s để một tàu thuỷ thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ *A* đến sớm hơn tín hiệu từ B là 0,0005 s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thuỷ thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

**Lời giải**

**Ta có:**

Do tín hiệu A đến sớm hơn tín hiệu từ B nên tàu thuỷ thuộc đường hepebol nhánh A.

Gọi vị trí tàu thuỷ là điểm M.

Phương trình hyperbol có dạng: : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$|MA - MB| = 2a = 292000x0,0005 = 146km \Rightarrow a = 73$$

$$AB = 300km = 2c \Rightarrow c = 150$$

Từ đó, $b^2 = c^2 - a^2 = 17171$

Vậy phương trình hyperbol : $\frac{x^2}{73^2} - \frac{y^2}{17171^2} = 1$

**Câu 7.** Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400m$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng $AB$ một khoảng 20 m và cách đều $A, B$ .

a).Lập phương trình chính tắc của , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 m trên thực tế.

b). Lập phương trình chính tắc của , với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 km trên thực tế.

**Lời giải**

a) Phương trình chính tắc : $y^2 = 2px$

Theo đề ta có $A, B, O$

Do đi qua $A$ nên suy ra $20^2 = 2p = -400 \Rightarrow p = -1$

Vậy : $y^2 = -2x$

b) Phương trình chính tắc : $y^2 = 2px$

Theo đề ta có $A, B, O$

Do đi qua $A$ nên suy ra $0,02^2 = 2p = -0,4 \Rightarrow p = -0,001$

Vậy : $y^2 = -0,002x$

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### *DẠNG 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA ELÍP*

*{ Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm. của elip}*

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

**Cho Elip có phương trình chính tắc:** $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

● Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

● Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

● Độ dài trục lớn $2a$.

● Độ dài trục bé $2b$.

● Tiêu cự $2c$

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Lời giải**

Từ phương trình của $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ $(E)$, ta có $a=2,\ b=1$. Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$; $A_2(2;0)$; $B_1(0;-1)$; $B_2(0;1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=4$, độ dài trục bé $B_1B_2=2$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3};0)$; $F_2(\sqrt{3};0)$.

Tâm sai của $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 2:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E):4x^2+25y^2=100$.

**Lời giải**

Ta có $4x^2+25y^2=100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ suy ra $a=5;\ b=2$ nên $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{21}$.

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5;0)$; $A_2(5;0)$; $B_1(0;-2)$; $B_2(0;2)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=10$, độ dài trục bé $B_1B_2=4$.

Tiêu cự $F_1F_2=2c=2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{21};0)$; $F_2(\sqrt{21};0)$.

Tâm sai của $(E)$ là $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

**Câu 3:** Tìm tọa độ các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip: $(E):4x^2+9y^2=1$.

**Lời giải**

Ta có $4x^2+9y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$ suy ra $a=\frac{1}{2};\ b=\frac{1}{3}$ nên $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-\frac{1}{2};0\right)$; $A_2\left(\frac{1}{2};0\right)$; $B_1\left(0;-\frac{1}{3}\right)$; $B_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2=1$, độ dài trục bé $B_1B_2=\frac{2}{3}$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = \dfrac{2\sqrt{5}}{6}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6};0\right)$; $F_2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6};0\right)$.

Tâm sai của $(E)$ là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

**Câu 4:** Tìm tâm sai của Elíp biết:

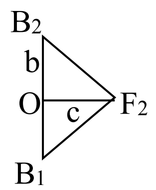
a) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$.

b) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $60^0$.

c) Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng hai lần tiêu cự:

**Lời giải**

a) Từ giả thiết, ta có: $\tan 30° = \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow b = c.\tan 30°$




Suy ra: $e = \dfrac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2}{c^2.\tan^2 30° + c^2} = \frac{1}{\tan^2 30° + 1} = \cos^2 30°$$

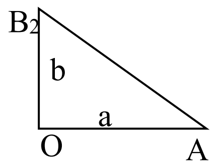
$$\Leftrightarrow e = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Từ giả thiết, ta có $\cot 30° = \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow b = c.\cot 30°$

Suy ra: $e = \dfrac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2}{c^2.\cot^2 30° + c^2} = \frac{1}{\cot^2 30° + 1} = \sin^2 30°$$

$$\Leftrightarrow e = \sin 30° = \frac{1}{2}$$




c) Từ giả thiết, ta có: $A_2B_2 = 4c$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 4c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 + b^2 = 16c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{15c^2}{2}.$$

Suy ra: $e = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2} = \dfrac{c^2}{\dfrac{15c^2}{2} + c^2} = \dfrac{2}{17}$

$$\Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$?

**A.** $F_{1,2}=(0;\pm 1)$. **B.** $F_{1,2}=(\pm 1;0)$. **C.** $F_{1,2}=(\pm 3;0)$. **D.** $F_{1,2}=(1;\pm 2)$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $a^2=5;b^2=4\Rightarrow c^2=a^2-b^2=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow F_{1,2}=(\pm 1;0)$.

**Câu 2:** Cho Elip $(E):4x^2+9y^2=36$. Mệnh đề nào ***sai*** trong các mệnh đề sau:

**A.** $(E)$ có tỉ số $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $(E)$ có trục lớn bằng $6$.

**C.** $(E)$ có trục nhỏ bằng $4$. **D.** $(E)$ có tiêu cự $\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$(E):4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Suy ra: $a=3,b=2,c=\sqrt{5}$

Tiêu cự của $(E)$ là $2c=2\sqrt{5}$.

**Câu 3:** Cho elip $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Phát biểu nào sau đây đúng?

**A.** Tỉ số giữa trục lớn và trục nhỏ bằng $\sqrt{3}$. **B.** Tiêu cự bằng $4$.

**C.** Tâm sai $e=\dfrac{2}{3}$. **D.** Hai tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $(E):\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{1}=1\Rightarrow \begin{cases} a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3} \\ b^2=1\Rightarrow b=1 \\ c^2=a^2-b^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2} \end{cases}$.

**Câu 4:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

**A.** $4x^2+8y^2=32$. **B.** $\dfrac{x^2}{\frac{1}{5}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$.

**C.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=-1$. **D.** $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Vì $4x^2+8y^2=32 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 5:** Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Chọn khẳng định **sai**

**A.** Điểm $A(3;0)\in(E)$. **B.** $(E)$ có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.

**C.** Trục lớn của $(E)$ có độ dài bằng $6$. **D.** $(E)$ có tâm sai bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Có $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=9\Rightarrow a=3 \\ b^2=4\Rightarrow b=2 \\ c^2=a^2-b^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5} \end{cases}$.

Khi đó $(E)$ có tâm sai bằng $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**Câu 6:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip

**A.** $x^2-y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=2$.

**C.** $x^2+2y^2=2$. **D.** $x^2=2y^2$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Vì $x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 7:** Trong mặt phẳng $(Oxy)$, cho elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm tiêu cự của $(E)$.

**A.** $F_1F_2=12$ **B.** $F_1F_2=8$ **C.** $F_1F_2=2\sqrt{5}$ **D.** $F_1F_2=4\sqrt{5}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow c^2=a^2-b^2=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5} \Rightarrow F_1F_2=4\sqrt{5}$.

**Câu 8:** Trong mặt phẳng $Oxy$, tìm tiêu cự của elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**A.** 3 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\begin{cases} a^2=25 \\ b^2=16 \end{cases} \Rightarrow c^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$.

Vậy tiêu cự $2c=6$.

**Câu 9:** Tìm các tiêu điểm của Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$

**A.** $F_1(3;0);\ F_2(0;-3)$. **B.** $F_1\left(\sqrt{8};0\right);\ F_2\left(0;-\sqrt{8}\right)$.

**C.** $F_1(-3;0);\ F_2(0;-3)$. **D.** $F_1\left(-\sqrt{8};0\right);\ F_2\left(\sqrt{8};0\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$(E)$: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ có $a=3$; $b=1$ $\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8}$.

Vậy $(E)$ có các tiêu điểm là: $F_1\left(-\sqrt{8};0\right);\ F_2\left(\sqrt{8};0\right)$.

**Câu 10:** Elíp $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có độ dài trục lớn bằng:

**A.** $25$. **B.** $50$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ $\Rightarrow a=5$.

Do đó $(E)$ có độ dài trục lớn là $2a=10$.

**Câu 11:** Cho $9x^2+25y^2=225$. Hỏi diện tích hình chữ nhật cơ sở ngoại tiếp $(E)$ là

**A.** $15$. **B.** $30$. **C.** $40$. **D.** $60$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình chính tắc của $(E)$: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Ta có $\begin{cases}a^2=25\\b^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở ngoại tiếp $(E)$ là $S=4ab=60$.

**Câu 12:** Cho $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $26$, tâm sai $e=\frac{12}{13}$. Độ dài trục nhỏ của $(E)$ bằng

**A.** $5$. **B.** $10$. **C.** $12$ **D.** $24$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $2a=26\Rightarrow a=13$.

$e=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}\Rightarrow c=12$.

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{169-144}=5$.

Độ dài trục nhỏ là $2b=10$.

**Câu 13:** Cho $(E):16x^2+25y^2=100$ và điểm $M$ thuộc $(E)$ có hoành độ bằng $2$. Tổng khoảng cách từ $M$ đến $2$ tiêu điểm của $(E)$ bằng

**A.** $5$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $(E):\dfrac{x^2}{\frac{100}{16}}+\dfrac{y^2}{\frac{100}{25}}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{100}{16}\\ b^2=\dfrac{100}{25}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\ b=2\end{cases}$

Theo định nghĩa Elip thì với mọi điểm $M\in(E)$ ta có: $MF_1+MF_2=2a=5$.

**Câu 14:** Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $a^2=5\Rightarrow a=\sqrt{5}$; $b^2=4\Rightarrow b=2\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=1$.

Vậy tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 15:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn gấp $2$ lần độ dài trục nhỏ và đi qua điểm $A(2;-2)$ là

**A.** $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **B.** $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$. **C.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. **D.** $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi phương trình elip là $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}a^2=4b^2\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=4b^2\\ \dfrac{4}{4b^2}+\dfrac{4}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\\ b^2=5\end{cases}$.

Vậy phương trình elip là $(E):\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

**Câu 16:** Phương trình chính tắc của $(E)$ nhận điểm $M(4;3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là

**A.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

**Lời giải**

**Chọn** **A.**

Gọi phương trình elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Vì $M(4;3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở nên $a=4$, $b=3$.

Vậy phương trình elip là $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 17:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng $\frac{50}{3}$ và tiêu cự bằng $6$ là

**A.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

**Lời giải**

**Chọn** **C.**

Gọi phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases}\frac{a^2}{c}=\frac{25}{3}\\ 2c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=25\\ c=3\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=16$.

Vậy phương trình elip là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 18:** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho đường elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. $M$ là điểm thuộc $(E)$. Tính $MF_1+MF_2$.

**A.** 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình của $(E)$ có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a^2=b^2+c^2)$. Suy ra $a^2=9\Rightarrow a=3$.

Do $M$ thuộc $(E)$ nên $MF_1+MF_2=2a=6$.

**Câu 19:** Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E):x^2+3y^2=6$. Giá trị nào sau đây là tiêu cự của elip?

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $(E): \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,$ dó đó $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2},\ c=2$. Độ dài tiêu cự là $2c=4.$

**Câu 20:** Trong hệ trục tọa độ $(Oxy)$, cho elip $(E): \frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1$. Độ dài tiêu cự của $(E)$ bằng

**A.** $4$. **B.** $8$. **C.** $16$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $(E): \frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$.

Do đó $\begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=2$. Vậy độ dài tiêu cự là $F_1F_2=2c=4$.

**Câu 21:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.** $(E)$ có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

**B.** $(E)$ có tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

**C.** $(E)$ có đỉnh $A_1(-5;0)$.

**D.** $(E)$ có độ dài trục nhỏ bằng $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ nên ta có: $a=5; b=3 \Rightarrow c=4$.

Nên các đáp án **A;B;C** đúng.

Đáp án **D** sai vì độ dài trục nhỏ bằng $2b=6$.

**Câu 22:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho $(E)$ có phương trình: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $(E)$ có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**B.** $F_1\left(0;-\sqrt{5}\right), F_2\left(0;\sqrt{5}\right)$ là các tiêu điểm của $(E)$.

**C.** Độ dài trục lớn là $9$.

**D.** Các đỉnh nằm trên trục lớn là $A_1(0;3)$ và $A_2(0;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Mà $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

**A.** $(E)$ có tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **Đúng**

**B.** Tiêu điểm của $(E)$ là: $F_1\left(-\sqrt{5};0\right), F_2\left(\sqrt{5};0\right)$. **Sai**

**C.** Độ dài trục lớn là : $A_1A_2 = 2a = 6$. **Sai**

**D.** Các đỉnh trên trục lớn là : $A_1(-3;0), A_2(3;0)$. **Sai**

**Câu 23:** Cho Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Một tiêu điểm của Elip có tọa độ là:

**A.** $A\left(\sqrt{3};0\right)$. **B.** $B\left(0;\sqrt{3}\right)$. **C.** $C\left(\sqrt{5};0\right)$. **D.** $D\left(0;\sqrt{5}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$.

Nên tiêu điểm của Elip có tọa độ là: $F_1\left(-\sqrt{3};0\right), F_2\left(\sqrt{3};0\right)$.

**Câu 24:** Cho Elip có phương trình $x^2 + 4y^2 = 1$. Tiêu cự của Elip là:

**A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Ta có : $c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tiêu cự là $2c = \sqrt{3}$.

**Câu 25:** Diện tích của tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là

**A.** $8$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

* Tọa độ các đỉnh của elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$; $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.

* Vì tứ giác $A_1B_1A_2B_2$ là hình thoi có hai đường chéo $A_1A_2 = 4$ và $B_1B_2 = 2$.

* Vậy diện tích tứ giác cần tìm là $S=\frac{1}{2}\cdot A_1A_2.B_1B_2=4$.

**Câu 26:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho elip có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $\Delta: x=-4$ cắt elip $(E)$ tại hai điểm $M$, $N$. Tính độ dài đoạn thẳng $MN$?

**A.** $MN=\frac{18}{25}$. **B.** $MN=\frac{9}{25}$. **C.** $MN=\frac{18}{5}$. **D.** $MN=\frac{9}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thế $x=-4$ vào phương trình elip $(E)$ ta được: $\frac{16}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm\frac{9}{5}$.

$\Rightarrow M\left(-4;-\frac{9}{5}\right), N\left(-4;\frac{9}{5}\right)$

Do đó: $MN=\frac{18}{5}$.

**Câu 27:** Trong hệ tọa độ $(Oxy)$, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Bán kính qua tiêu của $(E)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** 0 **B.** 1 **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ phương trình elip ta có $\begin{cases}a=5\\b=4\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=3$. Bán kính qua tiêu là $MF_1=a+\frac{c}{a}x$ với $-a\le x\le a$. Suy ra $a-c\le MF_1=a+c$ hay $(MF_1)_{\min}=a-c=5-3=2$.

**Câu 28:** Một elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $a>b>0$. Biết $(E)$ đi qua điểm $A\left(2;\sqrt{2}\right)$ và $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ thì $(E)$ có độ dài trục bé là

**A.** 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$(E)$ đi qua $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ nên ta có $\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$ suy ra $a=2\sqrt{2}$.

$(E)$ đi qua $A\left(2;\sqrt{2}\right)$ nên ta có $\frac{(2)^2}{8}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1$ suy ra $b=2$.

Do đó độ dài trục bé $2b=4$.

**Câu 29:** Cho $(E)$ có hai tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và điểm $M$ thuộc $(E)$. Biết chu vi tam giác $MF_1F_2$ bằng $18$. Khi đó tâm sai của $(E)$ bằng

**A.** $\frac{4}{18}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $-\frac{4}{5}$. **D.** $-\frac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $F_1F_2 = 8$ và $c = 4$.

$C_{\Delta MF_1F_2} = MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 18 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10 = 2a \Rightarrow a = 5$.

Tâm sai của elip: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

**Câu 30:** Cho $(E)$ có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ và điểm $M\left(-\sqrt{7};\frac{9}{4}\right)$ thuộc $(E)$. Gọi $N$ là điểm đối xứng với $M$ qua gốc tọa độ $O$. Khi đó

**A.** $NF_1 + MF_2 = \frac{9}{2}$. **B.** $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$. **C.** $NF_2 - NF_1 = \frac{7}{2}$ **D.** $NF_1 + MF_2 = 8$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$N$ đối xứng với $M$ qua gốc tọa độ $O$ nên $N\left(\sqrt{7};-\frac{9}{4}\right)$.

Ta có: $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{23}{4}; NF_1 = \frac{23}{4}; NF_2 = \frac{9}{4}$.

Do đó $NF_2 + MF_1 = \frac{9}{2}$.

### *DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP*

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

*{ Phương trình chính tắc của Elip có dạng:* $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$; *...}*

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$.

**Lời giải**

a) Do $(E)$ có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$. Suy ra $a^2=b^2+c^2=b^2+4$.

Mặt khác, $(E)$ đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ nên $\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b^2+4}+\frac{25}{9b^2}=1$

$\Leftrightarrow 9b^4-25b^2-100=0\Leftrightarrow b^2=5$ hoặc $b^2=-\frac{20}{9}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

b) Do $(E)$ có một tiêu điểm $F_2(5;0)$ nên $c=5$.

Theo giả thiết độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$ nên $2b=4\sqrt{6}\Leftrightarrow b=2\sqrt{6}$.

Suy ra $a^2=b^2+c^2=5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2=49$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

c) Độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ nên $2a=2\sqrt{5}\Leftrightarrow a=\sqrt{5}$. Tiêu cự bằng 2 nên $2c=2\Leftrightarrow c=1$.

Từ hệ thức $a^2=b^2+c^2$, suy ra $b^2=a^2-c^2=5-1=4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

d) Do $(E)$ đi qua $M\left(2;-\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-\sqrt{6};1\right)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1\\ \dfrac{6}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=8\\ b^2=4\end{cases}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

**Câu 2:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

**Lời giải**

a) Tổng độ dài hai trục bằng 8 nên $2a+2b=8$. $(1)$

Tâm sai $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=\sqrt{2}c$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có $\begin{cases}2a+2b=8\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=4\\ a=\sqrt{2}c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2}c+b=4\\ a=\sqrt{2}c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-\sqrt{2}c\\ a=\sqrt{2}c\end{cases}$.

Thay vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được

$2c^2=\left(4-\sqrt{2}c\right)^2+c^2 \Leftrightarrow c^2-8\sqrt{2}c+16=0 \Leftrightarrow c=4\sqrt{2}\pm 4$.

● Với $c=4\sqrt{2}+4$, suy ra $\begin{cases}a=8+4\sqrt{2}\\ b=-4-4\sqrt{2}\end{cases}$: không thỏa mãn.

● Với $c=4\sqrt{2}-4$, suy ra $\begin{cases}a=8-4\sqrt{2}\\ b=-4+4\sqrt{2}\end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{\left(8-4\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(4\sqrt{2}-4\right)^2}=1$.

b) Elip có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{\sqrt{5}}c$. $(1)$

Mặt khác, Elip có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 nên $2(2a+2b)=20 \Leftrightarrow a+b=5 \Leftrightarrow b=5-a$. $(2)$

Thay $(1)$ và $(2)$ vào hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=(5-a)^2+c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2=\left(5-\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2+c^2 \Leftrightarrow c^2-\frac{30}{\sqrt{5}}c+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5\sqrt{5} \\ c=\sqrt{5} \end{array}\right..$$

● Với $c=5\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a=15 \\ b=-10 \end{cases}$: không thỏa mãn.

● Với $c=\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

c) Elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở $S=2a.2b=12\sqrt{5} \Leftrightarrow ab=3\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2b^2=45$. $(1)$

Mặt khác, ta có $a^2=b^2+c^2=b^2+4$. $(2)$

Kết hợp $(1)$ và $(2)$, ta được

$a^2b^2=45 \Leftrightarrow (b^2+4)b^2=45 \Leftrightarrow b^4+4b^2-45=0 \Leftrightarrow b^2=5$ hoặc $b^2=-9$.

Với $b^2=5$, suy ra $a^2=9$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

**Câu 3:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e=\frac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\frac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x=\frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kính qua tiêu điểm của điểm $M$ thuộc Elip là 9 và 15.

**Lời giải**

a) Elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5};2\right)$ nên $\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$. $(1)$

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của Elip bằng 10 nên $2.\frac{a}{e}=10 \Leftrightarrow \frac{a}{e}=5 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=5 \Leftrightarrow a^2=5c$. $(2)$

Từ $(2)$, kết hợp với hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được $b^2=a^2-c^2=5c-c^2$. $(3)$

Thay $(2)$, $(3)$ vào $(1)$, ta được

$\frac{5}{5c}+\frac{4}{5c-c^2}=1\Leftrightarrow c^2-6c+9=0\Leftrightarrow c=3$.

Với $c=3$, suy ra $\begin{cases}a^2=15\\b^2=6\end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$.

b) Ta có $e=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow c=\frac{3}{5}a$.

Elip có khoảng cách từ tâm đối xứng $O$ đến một đường chuẩn một khoảng bằng $\frac{25}{3}$ nên

$\frac{a}{e}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{a^2}{\frac{3}{5}a}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow a=5$.

Với $a=5$, suy ra $c=3$ và $b^2=a^2-c^2=16$.

Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 nên $2a=10\Leftrightarrow a=5$.

Mặt khác, Elip có phương trình một đường chuẩn

$x=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{e}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{5^2}{c}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow c=4$.

Suy ra $b^2=a^2-c^2=25-16=9$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

d) Elip có khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 36 nên $2.\frac{a}{e}=36\Leftrightarrow 2.\frac{a^2}{c}=36\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=18$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases}MF_1=a+ex=9\\MF_2=a-ex=15\end{cases}$ suy ra $2a=24\Leftrightarrow a=12$.

Với $a=12$, suy ra $c=8$ và $b^2=a^2-c^2=144-64=80$. Do đó Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$.

**Câu 4:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

a) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.

b) Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C):x^2+y^2=21$ và điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc $60^0$.

c) Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d:x-\sqrt{5}=0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.

d) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

a) Elip đi qua $A(0;5) \in Oy$, suy ra $b=5$.

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x=\pm a;\ y=\pm 5$.

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;5)$. Theo giả thiết $(a;5)$ thuộc đường tròn $(C)$

$\Leftrightarrow a^2+25=41 \Leftrightarrow a^2=16$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

b) Theo giả thiết bài toán, ta có $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ suy ra

$$F_1F_2^{\ 2}=MF_1^{\ 2}+MF_2^{\ 2}-2MF_1.MF_2.\cos 60^0$$

$$\Leftrightarrow 4c^2=(1+c)^2+4+(1-c)^2+4-2\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4c^2=2c^2+10-\sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1+c)^2+4}.\sqrt{(1-c)^2+4}=10-2c^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-2c^2 \ge 0 \\ \left[(1+c)^2+4\right].\left[(1-c)^2+4\right]=\left(10-2c^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c\le\sqrt{5} \\ 3c^4-46c^2+75=0 \end{cases} \Leftrightarrow c^2=\frac{23\pm 4\sqrt{19}}{3}.$$

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x=\pm a;\ y=\pm b$.

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;b)$. Theo giả thiết $(a;b)$ thuộc đường tròn $(C)$ nên $a^2+b^2=21$.

Lại có $a^2=b^2+c^2$, suy ra $a^2-b^2=c^2$.

● Với $c^2=\frac{23+4\sqrt{19}}{3}$, ta có $\begin{cases} a^2+b^2=21 \\ a^2-b^2=\frac{23+4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{43+2\sqrt{19}}{3} \\ b^2=\frac{20-2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$.

Suy ra $(E): \frac{x^2}{\frac{43+2\sqrt{19}}{3}}+\frac{y^2}{\frac{20-2\sqrt{19}}{3}}=1$.

● Với $c^2=\frac{23-4\sqrt{19}}{3}$, ta có $\begin{cases} a^2+b^2=21 \\ a^2-b^2=\frac{23-4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{43-2\sqrt{19}}{3} \\ b^2=\frac{20+2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$.

Suy ra $(E):\dfrac{x^2}{\dfrac{43-2\sqrt{19}}{3}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{20+2\sqrt{19}}{3}}=1$.

Vậy có hai Elip cần tìm thỏa yêu cầu bài toán:

$(E):\dfrac{x^2}{\dfrac{43+2\sqrt{19}}{3}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{20-2\sqrt{19}}{3}}=1$ hoặc $(E):\dfrac{x^2}{\dfrac{43-2\sqrt{19}}{3}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{20+2\sqrt{19}}{3}}=1$.

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x=\pm a;\ y=\pm b$.

Theo giả thiết, một cạnh hình chữ nhật cơ sở là $d:x-\sqrt{5}=0$, suy ra $a=\sqrt{5}$.

Độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên

$\sqrt{4a^2+4b^2}=6\Leftrightarrow 4a^2+4b^2=36\Leftrightarrow 20+4b^2=36\Leftrightarrow b^2=4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

d) Elip có tâm sai $e=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=2c$.

Elip có các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ lên $A_2B_2$.

Theo giả thiết suy ra bán kính của đường tròn đã cho bằng $OH$. Ta có

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4c^2}+\dfrac{1}{a^2-c^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4c^2}+\dfrac{1}{3c^2}\Leftrightarrow c^2=\dfrac{7}{6}$.

Suy ra $a^2=4c^2=\dfrac{14}{3}$ và $b^2=a^2-c^2=\dfrac{7}{2}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{\dfrac{14}{3}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{7}{2}}=1$.

**Câu 5:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C):x^2+y^2=4$ và $AC=2BD$, $A$ thuộc $Ox$.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C):x^2+y^2=8$ tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

c) Elip có tâm sai $e=\dfrac{1}{3}$ và giao điểm của Elip với đường tròn $(C):x^2+y^2=9$ tại bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ sao cho $AB$ song song với $Ox$ và $AB=3BC$.

d) Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**

a) Giả sử một đỉnh của hình thoi là $A(a;0)$. Suy ra $AC = 2a$ và $BD = 2b$.

Theo giả thiết

$AC = 2BD \Leftrightarrow 2a = 2.2b \Leftrightarrow a = 2b$.

Đường tròn $(C)$ có $R = 2$. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ lên $AB$ với $B(0;b)$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{R^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 5.$$

Suy ra $a^2 = 20$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

b) Elip có độ dài trục lớn bằng 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Do $(E)$ và $(C)$ đều có tâm đối xứng là $O$ và hai trục đối xứng là $Ox$ và $Oy$ nên hình vuông tạo bởi giữa chúng cũng có tính chất tương tự. Do đó ta giả sử gọi một đỉnh của hình vuông là $M(x;x)$ với $x > 0$. Vì $M \in (C)$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$ suy ra $x = 2 \Rightarrow M(2;2)$.

Ta có $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{16}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$.

c) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3c$.

Đặt $BC = x$ với $x > 0$, suy ra $AB = 3x$. Giả sử một đỉnh $A\left(\frac{3}{2}x;\frac{1}{2}x\right)$. Ta có

$$A \in (C) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{5} \text{ suy ra } x = \frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow A\left(\frac{9\sqrt{10}}{10};\frac{3\sqrt{10}}{10}\right).$$

Mặt khác,

$$A \in (E) \Leftrightarrow \frac{81}{10a^2}+\frac{9}{10b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{81}{10(3c)^2}+\frac{9}{10\left(a^2-c^2\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{9}{10c^2}+\frac{9}{80c^2}=1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{81}{80}.$$

Suy ra $a^2 = 9c^2 = \frac{729}{80}$ và $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{81}{10}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \dfrac{x^2}{\frac{729}{80}} + \dfrac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1$.

d) Độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ nên $2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.

Các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc đường tròn nên $b = c$.

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

**Câu 6:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32.

b) Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

c) Elip đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};2\right)$ và $M$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

d) Elip đi qua điểm $M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc $60^0$.

**Lời giải**

a) Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b = c$.

Mặt khác, diện tích hình vuông bằng 32 nên $2c.2b = 32 \Leftrightarrow b^2 = 8$.

Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = 16$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

b) Chu vi hình chữ nhật cơ sở

$C = 12\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow 2(2a+2b) = 12\left(2+\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow a + b = 3\left(2+\sqrt{3}\right)$. $(1)$

Giả sử tam giác $F_1F_2B_2$ đều cạnh $F_1F_2 = 2c$ mà $B_2O \perp F_1F_2$ suy ra $OB_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_1F_2 \Leftrightarrow b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2c = \sqrt{3}c$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, suy ra $a = 3\left(2+\sqrt{3}\right) - b = 3\left(2+\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}c$.

Thay vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được

$\left[\left(6+3\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}c\right]^2 = 3c^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 + 6\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)c - \left(6+3\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow c = 3$

hoặc $c = -12\sqrt{3} - 21$.

Với $c=3$, suy ra $a=6$ và $b=3\sqrt{3}$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

c) Từ giả thiết, ta suy ra $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ hay $MF_1\perp MF_2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0\Leftrightarrow\left(-c-2\sqrt{3}\right)\left(c-2\sqrt{3}\right)+4=0\Leftrightarrow c^2=16$.

Hơn nữa $(E)$ qua $M$ nên

$\frac{12}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{12}{b^2+16}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow 12b^2+4b^2+64=b^4+16b^2\Leftrightarrow b^4=64\Leftrightarrow b^2=8$.

Suy ra $a^2=b^2+c^2=24$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$.

d) Từ giả thiết, ta suy ra $\widehat{B_1F_1B_2}=60^0$ mà $F_1B_1=F_1B_2$. Suy ra tam giác $F_1B_1B_2$ đều cạnh $B_1B_2=2b$ nên

$F_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}B_1B_2\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}2b\Leftrightarrow c=\sqrt{3}b$. $(1)$

Hơn nưa $(E)$ qua $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{4b^2}+\frac{3}{4b^2}=1\Leftrightarrow b^2=1$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, kết hợp với hệ thức $a^2=b^2+c^2$, ta được $a^2=4$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 7:** Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M$, biết tam giác $F_1MF_2$ có diện tích bằng 1 và vuông tại $M$.

b) Elip đi qua ba đỉnh của tam giác đều $ABC$. Biết tam giác $ABC$ có trục đối xứng là $Oy$, $A(0;2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$.

c) Khi $M$ thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của $OM$ bằng 4 và độ dài lớn nhất của $MF_1$ bằng 8 với $F_1$ là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

**Lời giải**

a) Elip có tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, suy ra $c=\sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Theo giả thiết, ta có

$S_{\Delta F_1MF_2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}MF_1.MF_2=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+ex)(a-ex)=1 \Leftrightarrow a^2-e^2x^2=2 \Leftrightarrow a^2-\frac{c^2}{a^2}.x^2=2$

$\Leftrightarrow a^2-\frac{3}{a^2}.x^2=2 \Leftrightarrow x^2=\frac{(a^2-2)a^2}{3}$. $(1)$

Cũng từ $MF_1 \perp MF_2$, ta có $\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}=0 \Leftrightarrow (-c-x)(c-x)+(-y)(-y)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=c^2=3$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có $y^2=3-x^2=3-\frac{(a^2-2)a^2}{3}=\frac{9-a^4+2a^2}{3}$.

Do đó

$M(x;y)\in(E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{a^2-2}{3}+\frac{9-a^4+2a^2}{3(a^2-3)}=1$

$\Leftrightarrow (a^2-2)(a^2-3)+9-a^4+2a^2=3a^2-9 \Leftrightarrow a^2=4$.

Suy ra $b^2=1$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

b) Tam giác $ABC$ đều, có điểm $A(0;2)\in Oy$ và trục đối xứng là $Oy$ nên hai điểm $B$, $C$ đối xứng nhau qua $Oy$.

Giả sử $B(x;y)$ với $x>0, y<2$, suy ra $C(-x;y)$. Độ dài cạnh của tam giác là $2x$.

Theo giả thiết, ta có

$S_{\Delta ABC}=\frac{49\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{12}$, suy ra $x=\frac{7}{2\sqrt{3}}$.

Đường cao của tam giác đều

$h=\frac{2x\sqrt{3}}{2}=x\sqrt{3}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2-y=\frac{7}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$.

Suy ra $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)$.

Đến đây bài toán trở thành viết phương trình Elip đi qua hai điểm $A(0;2)$ và $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}};\frac{3}{2}\right)$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{\frac{28}{5}}+\frac{y^2}{4}=1$.

c) Độ dài nhỏ nhất của $OM$ bằng 4 nên $b=4$.

Mặt khác, ta lại có độ dài lớn nhất của $MF_1$ bằng $8$ nên $a+c=8$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+c=8 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ a^2=16+c^2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a=5 \\ c=3 \end{cases}$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Phương trình chính tắc của Elip là

**A.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$. **B.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

**C.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0)$. **D.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 2:** Phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng $6$ và trục lớn bằng $10$.

**A.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. **B.** $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{81}=1$. **C.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$. **D.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi phương trình elip là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì trục lớn bằng $10$ nên $2a=10 \Rightarrow a=5$.

Elip có tiêu cự bằng $6$ nên $2c=6 \Rightarrow c=3 \Rightarrow \sqrt{a^2-b^2}=3 \Rightarrow b=4$.

Vậy phương trình Elip là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

**Câu 3:** Phương trình của Elip $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $8$, độ dài trục nhỏ bằng $6$ là:

**A.** $9x^2+16y^2=144$. **B.** $9x^2+16y^2=1$. **C.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **D.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1; (a>b)$

Độ dài trục lớn là: $A_1A_2=2a=8 \Rightarrow a=4$

Độ dài trục nhỏ là: $B_1B_2=2b=6 \Rightarrow b=3$

Vậy phương trình Elip là: $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow 9x^2+16y^2=144$

**Câu 4:** Cho $(E)$ có hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng $8$, chu vi bằng $6$ thì phương trình chính tắc là:

**A.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$. **B.** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

**C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\begin{cases}2a\cdot 2b=8\\2a+2b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$. Vậy PTCT của $(E)$ là : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

**Câu 5:** Cho $(E)$ có tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, tâm sai $e=\frac{4}{5}$ thì phương trình là:

**A.** $4x^2+5y^2=20$. **B.** $16x^2+25y^2=400$.

**C.** $9x^2+25y^2=225$. **D.** $9x^2+16y^2=144$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\begin{cases}F_1(-4;0)\\e=\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=4\\a=5\end{cases}\Rightarrow b^2=25-16=9$ Vậy PTCT của $(E)$ là : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x^2+25y^2=225$.

**Câu 6:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho elip $(E)$ có độ dài trục lớn bằng 12 và độ dài trục bé bằng 6. Phương trình nào sau đây là phương trình của elip $(E)$

**A.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$.

Ta có $a=6$, $b=3$, vậy phương trình của Elip là: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 7:** Tìm phương trình chính tắc của Elip có tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ và trục lớn bằng $6$.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình chính tắc của Elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

Theo giả thiết: $e=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3c$ và $2a=6\Leftrightarrow a=3\Rightarrow c=1$

Khi đó: $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow 3^2=b^2+1\Leftrightarrow b^2=8\Leftrightarrow b=2\sqrt{2}$

Vậy phương trình chính tắc của Elip là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

**Câu 8:** Phương trình Elip có trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và một tiêu điểm $F_1(-1;0)$ là:

**A.** $4x^2+5y^2=20$. **B.** $4x^2+5y^2=12$. **C.** $5x^2+4y^2=20$ **D.** $5x^2+4y^2=12$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2a=2\sqrt{5}\Leftrightarrow a=\sqrt{5}$.

$b^2=a^2-c^2=\sqrt{5}^2-1^2=4$.

Vậy phương trình Elip có dạng: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow 4x^2+5y^2=20$.

**Câu 9:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $8$, trục nhỏ bằng $6$ là

**A.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $9x^2+16y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\begin{cases}2a=8\\2b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của $(E)$: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

**Câu 10:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có tâm sai $e=\frac{4}{5}$, độ dài trục nhỏ bằng $12$ là

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\begin{cases}e=\frac{4}{5}\\2b=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5c=4a\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25c^2=16a^2\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25\left(a^2-b^2\right)=16a^2\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10\\b=6\end{cases}$.

Vậy phương trình của $(E)$: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

**Câu 11:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn bằng $6$, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ là

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

* Do độ dài trục lớn bằng 6 nên $2a=6\Rightarrow a=3$.

* Do tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$ nên $\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3c\Rightarrow c=1$.

* Ta có: $b^2=a^2-c^2=9-1=8\Rightarrow (E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

**Câu 12:** Elip có hai đỉnh $(-3;0)$; $(3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$ có phương trình chính tắc là

**A.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a=3 \\ c=1 \end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=8$.

Vậy phương trình chính tắc của Elip đã cho là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

**Câu 13:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có độ dài trục lớn gấp $2$ lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ là

**A.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

* Do độ dài trục lớn gấp $2$ lần độ dài trục nhỏ nên $2a=2.2b\Rightarrow a=2b$.

* Do tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$ nên $2c=4\sqrt{3}\Rightarrow c=2\sqrt{3}$.

* Ta có: $b^2=a^2-c^2\Leftrightarrow b^2=4b^2-12\Rightarrow b=2\Rightarrow a=4\Rightarrow (E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

**Câu 14:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có đường chuẩn $x+4=0$ và tiêu điểm $F(-1;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

* Do đường chuẩn là $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ nên $\frac{a}{e}=4\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}=4\Rightarrow a^2=4c$.

* Do có tiêu điểm $F(-1;0)$ nên $c=1\Rightarrow a=2,\ b^2=a^2-c^2=3$.

* Phương trình chính tắc của $(E)$ là $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

**Câu 15:** Phương trình chính tắc của $(E)$ có tiêu cự bằng $6$ và đi qua điểm $A(5;0)$ là

**A.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **B.** $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

* Do $(E)$ có tiêu cự bằng $6$ nên $2c=6\Rightarrow c=3$.

* Do $(E)$ đi qua điểm $A(5;0)$ nên $a=5\Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$.

* Phương trình chính tắc của $(E)$ là $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

**Câu 16:** Elip có hai tiêu điểm $F_1(-1;0);F_2(1;0)$ và tâm sai $e=\frac{1}{5}$ có phương trình là

**A.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$. **B.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=-1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình chính tắc của $(E)$ là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$

Tiêu điểm $F_1(-1;0)\Rightarrow c=1$

Tâm sai $e=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow a=5c=5$

$\Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-1=24$.

Vậy $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$.

**Câu 17:** Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, một elip có độ dài trục lớn là $8$, độ dài trục bé là $6$ thì có phương trình chính tắc là.

**A.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Độ dài trục lớn là $8\Rightarrow 2a=8\Leftrightarrow a=4$

Độ dài trục nhỏ là $6\Rightarrow 2b=6\Leftrightarrow b=3$

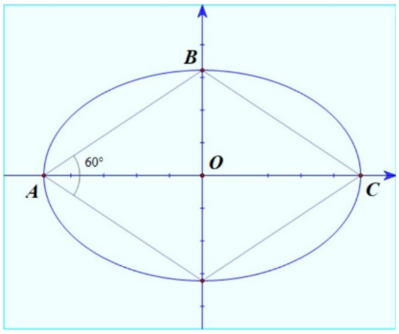
Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

**Câu 18:** Các đỉnh của Elip $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ (a>b>0)$ tạo thành hình thoi có một góc ở đỉnh là $60°$, tiêu cự của $(E)$ là $8$, thế thì $a^2+b^2=?$

**A.** $16$. **B.** $32$. **C.** $64$. **D.** $128$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi hình thoi là $ABCD$ và $\widehat{A}=60°$.

Tiêu cự là $8 \Rightarrow a^2-b^2=64\ (1)$.

Mặt khác xét tam giác $AOB$ vuông tại $O$ có góc $\widehat{BAO}=30°$ nên

$OB=OA\tan 30° \Leftrightarrow b=a.\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ thay vào phương trình $(1)$

ta được $\dfrac{2}{3}a^2=64 \Leftrightarrow a^2=96 \Rightarrow b^2=32$. Vậy $a^2+b^2=128$.

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E)$ đi qua điểm $M(0;3)$. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên $(E)$ bằng $8$. Phương trình chính tắc của Elip là

**A.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ **B.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **C.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{64}=1$ **D.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{9}=1$

**Lời giải**

**Chọn B**

$M(0;3)\in(E)\Rightarrow b=3$.

khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trên $(E)$ bằng $8 \Rightarrow a=4$.

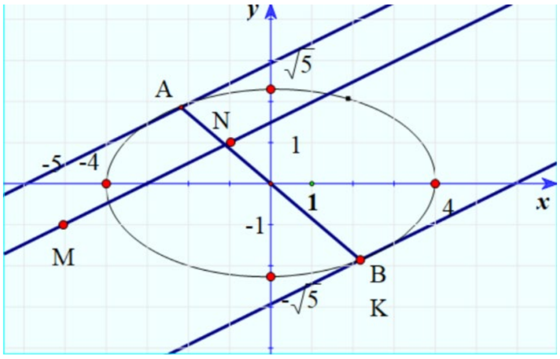
Phương trình chính tắc của $(E)$: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

**Câu 20:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$ cho đường elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $M(-5;-1), N(-1;1)$. Điểm $K$ thay đổi trên elip $(E)$. Diện tích tam giác $MNK$ lớn nhất bằng

**A.** $9\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $9$. **D.** $18$.

**Lời giải**

**Chọn C**




+ Ta có

. $\overrightarrow{MN}=(4;2)\Rightarrow MN=2\sqrt{5}$

. $MN: x-2y+3=0$ hay $MN: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

. $S_{\Delta KMN}=\frac{1}{2}.MN.d(K,MN)$

$=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{|x_o-2y_o+3|}{\sqrt{5}}=|x_o-2y_o+3|$ với $K(x_o;y_o)$

$\Rightarrow S_{\Delta KMN}$ lớn nhất khi $d(K,MN)$ lớn nhất.

+ Nhận thấy $(E)$ có hai tiếp tuyến song song với $MN$, gọi $A,B$ là hai tiếp điểm tương ứng. Khi đó $d(K,MN)$ lớn nhất khi $K\equiv B$.

+ Mà tiếp tuyến tại $K(x_o;y_o)$ có phương trình là: $\frac{x_o x}{16}+\frac{y_o y}{5}=1$ *hay* $y=-\frac{5x_o}{16y_o}x+\frac{5}{y_o}$.

+ Từ đó ta có:

$$\begin{cases}\frac{-5x_o}{16y_o}=\frac{1}{2}\\ \frac{x_o^2}{16}+\frac{y_o^2}{5}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_o=-\frac{5}{8}x_o\\ x_o=\pm\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow K\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow S_{\Delta KMN}=9$$

**Câu 21:** Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Xét các điểm $M,N$ lần lượt thuộc các tia $Ox$, $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(E)$. Hỏi độ dài ngắn nhất của $MN$ là bao nhiêu?

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $M(m;0)$, $N(0;n)$ với $m,n>0\Rightarrow MN^2=m^2+n^2$. Đường thẳng $MN:\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

**Cách 1: Dùng điều kiện tiếp tuyến của elip chính tắc**

*+) Elip chính tắc* $(E):\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ *và đường thẳng* $\Delta: Ax+By+C=0$ *tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi* $a^2A^2+b^2B^2=C^2$.

*+) Phương trình tiếp tuyến của elip chính tắc tại* $M(x_0;y_0)$ *là:* $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$.

$MN$ tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow \frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}=1$. Ta có $1=\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2} \geq \frac{(4+3)^2}{m^2+n^2}$

$\Rightarrow m^2+n^2 \geq 49 \Rightarrow MN_{\min}=7$.

**Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc**

Đường thẳng $MN: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Rightarrow y=-\frac{n}{m}x+n$ tiếp xúc với elip khi và chỉ khi phương trình

$\frac{x^2}{16}+\frac{\left(-\frac{n}{m}x+n\right)^2}{9}=1$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}+\frac{n^2}{9m^2}\right)x^2-\frac{2n^2}{9m}x+\frac{n^2}{9}-1=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=\frac{n^2}{9m^2}-\frac{n^2}{144}+\frac{1}{6}=0 \Leftrightarrow n^2=\frac{9m^2}{m^2-16}$.

Khi đó $MN=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{m^2+\frac{9m^2}{m^2-16}}=\sqrt{\frac{m^4-56m^2+784}{m^2-16}+49}=\sqrt{\frac{(m^2-28)^2}{m^2-16}+49} \geq 7$.

***Nhận xét:*** Cả 2 cách làm trên hiện tại không có trong chương trình phổ thông, người ra bài toán này không nắm được chương trình mới.

### *DẠNG 3: TÌM ĐIỂM THUỘC ELIP THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC*

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

**Cho Elip có phương trình chính tắc:** $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$.

- $M(x;y) \in (E)$. Khi đó $MF_1=a+ex$ : bán kính qua tiêu điểm trái.

  $MF_2=a-ex$ : bán kính qua tiêu điểm phải.

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; $A$, $B$ là hai điểm thuộc $(E)$ sao cho $AF_1+BF_2=8$. Tính $AF_2+BF_1$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm của Elip trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho $MF_1-MF_2=2$.

**Lời giải**

a) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$. Do $A,\ B\in(E)$ nên

$AF_1+AF_2=2a=10$ và $BF_1+BF_2=2a=10$.

Suy ra $AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=20\Leftrightarrow 8+AF_2+BF_1=20\Leftrightarrow AF_2+BF_1=12$.

b) Ta có $a^2=9\Rightarrow a=3$ và $b^2=5\Rightarrow b=\sqrt{5}$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=4\Rightarrow c=2$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $MF_1=2MF_2\Leftrightarrow a+ex=2(a-ex)\Leftrightarrow x=\frac{a}{3e}=\frac{a^2}{3c}=\frac{3}{2}$. Thay vào $(E)$, ta được $\frac{9}{4.9}+\frac{y^2}{5}=1\Leftrightarrow y^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

c) Ta có $a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2}$ và $b^2=4\Rightarrow b=2$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=4\Rightarrow c=2$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $MF_1-MF_2=2\Leftrightarrow a+ex-(a-ex)=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}=\frac{a}{c}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Thay vào $(E)$, ta được $\frac{2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow y^2=3\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$.

Vậy $M\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

**Câu 2:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của $(E)$ dưới một góc vuông.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1$ với hai tiêu điểm $F_1,\ F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=60^0$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ với hai tiêu điểm $F_1,\ F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}=120^0$.

d) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ với hai tiêu điểm $F_1,\ F_2$ trong đó $F_1$ có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho góc $\widehat{MF_1F_2}=120^0$.

**Lời giải**

a) Ta có $a^2=9\Rightarrow a=3$ và $b^2=1\Rightarrow b=1$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=2\Rightarrow c=2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $\widehat{F_1MF_2}=90^0$ nên $F_1F_2^{\ 2}=MF_1^2+MF_2^2$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 \Leftrightarrow 32 = 2a^2 + 2e^2x^2$

$\Leftrightarrow 32 = 18 + 2.\frac{8}{9}.x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{63}{8} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

Thay vào $(E)$, ta được $y^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

b) Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ và $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $F_1F_2^{\ 2} = MF_1^2 + MF_2^{\ 2} - 2MF_1.MF_2.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex).\frac{1}{2} \Leftrightarrow 12 = 2a^2 + 2e^2x^2 - a^2 + e^2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{12-a^2}{3e^2} = \frac{32}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}.$

Thay vào $(E)$, ta được $\frac{32}{9.4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$, $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

c) Ta có $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ và $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $F_1F_2^{\ 2} = MF_1^2 + MF_2^{\ 2} - 2MF_1.MF_2\cos 120^0$

$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex)\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 300 = 2a^2 + 2e^2x^2 + a^2 - e^2x^2$

$\Leftrightarrow 300 = 3a^2 + e^2x^2 \Leftrightarrow 300 = 300 + e^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Thay vào $(E)$, ta được $\frac{0}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$.

Vậy $M(0;5)$ hoặc $M(0;-5)$.

d) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ và $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi $M(x;y) \in (E)$. Ta có $MF_2^{\ 2} = MF_1^2 + F_1F_2^{\ 2} - 2MF_1.F_1F_2\cos 120^0$

$\Leftrightarrow (a-ex)^2 = (a+ex)^2 + 4c^2 - 2(a+ex)2c\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4aex + 4c^2 + 2ac + 2ecx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{65}{14}.$

Thay vào $(E)$, ta được $y^2 = \frac{243}{196} \Leftrightarrow y = \pm\frac{9\sqrt{3}}{14}$.

Vậy $M\left(-\frac{65}{14};\frac{9\sqrt{3}}{14}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{65}{14};-\frac{9\sqrt{3}}{14}\right)$.

**Câu 3:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm $A$, $B$ thuộc $(E)$, biết rằng $A$, $B$ đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác $ABC$ là tam giác đều.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm $A$ và $B$ thuộc $(E)$ có hoành độ dương sao cho tam giác $OAB$ cân tại $O$ và có diện tích lớn nhất.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, biết $B$ có tung độ dương.

**Lời giải**

a) a có $a^2=4\Rightarrow a=2$ và $b^2=1\Rightarrow b=1$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Giả sử $A(x;y)$ suy ra $B(x;-y)$. Theo giả thiết, tam giác $ABC$ đều

$AC^2=AB^2\Leftrightarrow(2-x)^2+y^2=4y^2\Leftrightarrow(2-x)^2=3y^2$. $(1)$

Hơn nữa $A\in(E)\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow x^2+4y^2=4$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có

$$\begin{cases}(2-x)^2=3y^2\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-\frac{x^2}{4}\\ 7x^2-16x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\frac{2}{7}\\ y=\frac{4\sqrt{3}}{7}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\frac{2}{7}\\ y=-\frac{4\sqrt{3}}{7}\end{cases}.$$

Vì $A$, $B$ khác $C$ nên $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

b) Do tam giác $OAB$ cân tại $O$ và $A$, $B$ đều có hoành độ dương nên $A$, $B$ đối xứng nhau qua $Ox$.

Giả sử $A(x;y)$ với $x>0$, suy ra $B(x;-y)$. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ lên $AB$. Khi đó ta có

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB.OH=\frac{1}{2}|2y|x=x|y|$.

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy$, ta có $1=\frac{x^2}{4}+y^2\ge 2.\frac{x}{2}.|y|=x|y|$.

Do đó $S_{\Delta OAB} \le 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{4} = y^2$.

Thay vào $(E)$, ta được $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) Gọi $B(x;y)$ với $x > 0$.

Do tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, suy ra $B$ và $C$ đối xứng nhau qua $Ox$ nên $C(x;-y)$.

Ta có $AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - y^2 = 0$. $(1)$

Hơn nữa, $B \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có

$$\begin{cases} (x-3)^2 - y^2 = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ (x-3)^2 - 1 + \frac{x^2}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ \frac{10}{9}x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \pm\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Vì $A$, $B$ khác $C$ nên $B\left(\frac{12}{5};\frac{3}{5}\right)$, $C\left(\frac{12}{5};-\frac{3}{5}\right)$.

**Câu 4:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Xác đinh tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho diện tích tam giác $MAB$ lớn nhất.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Tìm trên $(E)$ điểm $C$ sao cho tam giác $ABC$ có diện tích bằng 4,5.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm trên $(E)$ những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x - 3y + 1 = 0$ là lớn nhất.

**Lời giải**

a) Gọi $M(x;y) \in (E)$ nên $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$. Phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 3 = 0$.

Ta có

$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.d\left(M,AB\right)=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}\frac{\left|x-2y+3\right|}{\sqrt{5}}=\left|x-2y+3\right|$.

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta được

$\left(x-2y\right)^2=\left(4.\frac{1}{4}x-2\sqrt{5}.\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\le\left[\left(\frac{1}{4}x\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\right]\left[4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]=\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}\right).36=1.36=36$.

Suy ra $\left|x-2y\right|\le 6$ nên $\left|x-2y+3\right|\le 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{4}x}{4}=\dfrac{\frac{y}{\sqrt{5}}}{-2\sqrt{5}}\\ x-2y+3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\ y=-\frac{5}{3}\end{cases}$.

Vậy $M\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Gọi $C\left(x;y\right)\in\left(E\right)\Leftrightarrow\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. $(1)$

Phương trình đường thẳng $AB: x+2y-11=0$. Ta có

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d\left(C,AB\right)=4,5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{\left|x+2y-11\right|}{\sqrt{5}}=4,5\Leftrightarrow\left|x+2y-11\right|=9$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y-11=9\\ x+2y-11=-9\end{array}\right.$. $\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta có $\begin{cases}x+2y-11=9\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20-2y\\ \frac{\left(20-2y\right)^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20-2y\\ 2y^2-20y+100=0\end{cases}$: vô nghiệm.

Từ $(1)$ và $(3)$, ta có $\begin{cases}x+2y-11=-9\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-2y\\ \frac{\left(2-2y\right)^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\sqrt{3}\\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $C\left(1-\sqrt{3};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $C\left(1+\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(E\right)\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1\Leftrightarrow x^2+2y^2=2$. Ta có

$d\left(M,d\right)=\frac{\left|2x-3y+1\right|}{\sqrt{13}}$.

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopxki*, ta có

$$(2x-3y)^2=\left(2.x-\frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2\le\left[x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2\right]\left(4+\frac{9}{2}\right)=2.\frac{17}{2}=17.$$

Suy ra $|2x-3y|\le\sqrt{17}$ nên $|2x-3y+1|\le\sqrt{17}+1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}y}{\frac{-3}{\sqrt{2}}}\\ 2x-3y=\sqrt{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{17}}\\ y=-\dfrac{3}{\sqrt{17}}\end{cases}$.

Vậy $d(M,d)$ lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{13}}$ khi $M\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}};-\dfrac{3}{\sqrt{17}}\right)$.

**Câu 5:** a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B$, $C$ thuộc $(E)$ sao cho $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $MF_1F_2$ bằng $\dfrac{4}{3}$.

c) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\dfrac{48}{25};0\right)$.

**Lời giải**

a) Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=IA=2$ là:

$(C):(x+1)^2+y^2=4$.

Theo giả thiết, ta có $B,C\in(E)\cap(C)$ nên tọa độ điểm $B,C$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ (x+1)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 9(x+1)^2+9y^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 9(x+1)^2-4x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ 5x^2+18x+9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\ y=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\end{cases}.$$

Vậy $B\left(-\frac{3}{5};-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $C\left(-\frac{3}{5};\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{3}{5};\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5};-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

b) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$ và $b^2=9\Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16\Rightarrow c=4$.

Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Ta có $S_{\Delta MF_1F_2}=p.r$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}F_1F_2.d(M,F_1F_2)=\frac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}.r$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2c.|y|=(a+c).\frac{4}{3}\Leftrightarrow 4|y|=9.\frac{4}{3}\Leftrightarrow |y|=3\Leftrightarrow y=\pm 3.$

Thay vào phương trình $(E)$, ta được $\frac{x^2}{25}+\frac{9}{9}=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-3)$.

c) Ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$ và $b^2=9\Rightarrow b=3$. Suy ra $c^2=a^2-b^2=16\Rightarrow c=4$.

Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$. Theo giả thiết $MN$ là phân giác trong của $\widehat{F_1MF_2}$, suy ra

$\frac{F_1N}{F_2N}=\frac{F_1M}{F_2M}\Leftrightarrow \frac{52}{148}=\frac{a+ex}{a-ex}\Leftrightarrow 12a+25ex=0\Leftrightarrow 12.5+25.\frac{4}{5}x=0\Leftrightarrow x=-3$.

Thay vào phương trình $(E)$, ta được $\frac{9}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow y=\pm\frac{12}{5}$.

Vậy $M\left(-3;\frac{12}{5}\right)$ hoặc $M\left(-3;-\frac{12}{5}\right)$.

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho Elip $(E)$: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Với $M$ là điểm bất kì nằm trên $(E)$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** $4\le OM\le 5$. **B.** $OM\ge 5$. **C.** $OM\le 3$. **D.** $3\le OM\le 4$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ $(E)$: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, suy ra $a=4,b=3$.

Với một điểm bất kì trên $(E)$, ta luôn có $b\le OM\le a\Rightarrow 3\le OM\le 4$.

**Câu 2:** Elip đi qua điểm $M\left(1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ thì có phương trình chính tắc là:

**A.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Giả sử $(E)$ có PTCT là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$.

Ta có: $\begin{cases} M\left(1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E) \\ 2c=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \\ a^2-b^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=1 \end{cases}$ Vậy PTCT của $(E)$ là : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

**Câu 3:** Cho Elip $(E):\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ và điểm $M$ nằm trên $(E)$. Nếu điểm $M$ có hoành độ bằng $-13$ thì các khoảng cách từ $M$ tới 2 tiêu điểm của $(E)$ bằng:

**A.** 8; 18. **B.** $13\pm\sqrt{5}$. **C.** 10;16. **D.** $13\pm\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $a=13$, $b=12 \Rightarrow c=5$

Vậy $MF_1=a+\frac{c}{a}x_M=8$ $MF_2=a-\frac{c}{a}x_M=18$

**Câu 4:** Cho Elíp có phương trình $16x^2+25y^2=100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm thuộc elíp có hoành độ $x=2$ đến hai tiêu điểm.

**A.** 10. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$.

Ta có : $a=\frac{5}{2}$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$.

Sử dụng công thức bán kính qua tiêu

$MF_1=\frac{5}{2}-\frac{4\sqrt{6}}{5}$, $MF_2=\frac{5}{2}+\frac{4\sqrt{6}}{5}$

$MF_1+MF_2=5$.

**Cách 2:** dễ thấy $MF_1+MF_2=2a=5$.

**Câu 5:** Cho Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $(d): x=-4$ cắt $(E)$ tại hai điểm $M, N$. Khi đó:

**A.** $MN=\frac{9}{25}$. **B.** $MN=\frac{18}{25}$. **C.** $MN=\frac{18}{5}$. **D.** $MN=\frac{9}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thiết: $x=-4$ nên ta có phương trình:

$$\frac{(-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow y^2=\frac{81}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{9}{5} \Rightarrow M\left(-4;\frac{9}{5}\right) \\ y=-\frac{9}{5} \Rightarrow N\left(-4;-\frac{9}{5}\right) \end{array}\right.$$

Khi đó: $MN=\sqrt{(-4+4)^2+\left(\frac{9}{5}+\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{18}{5}$.

**Câu 6:** Cho Elip có phương trình: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. $M$ là điểm thuộc $(E)$ sao cho $MF_1=MF_2$. Khi đó tọa độ điểm $M$ là:

**A.** $M_1(0;1), M_2(0;-1)$. **B.** $M_1(0;2), M_2(0;-2)$.

**C.** $M_1(-4;0), M_2(4;0)$. **D.** $M_1(0;4), M_2(0;-4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$.

Nên $a=4;\ b=2$

Vì $MF_1=MF_2$ nên $M$ thuộc đường trung trực của $F_1F_2$ chính là trục $Oy$

$M$ là điểm thuộc $(E)$ nên $M$ là giao điểm của elip và trục $Oy$

Vậy $M_1(0;2), M_2(0;-2)$.

**Câu 7:** Dây cung của Elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$. vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là

**A.** $\frac{2c^2}{a}$. **B.** $\frac{2b^2}{a}$. **C.** $\frac{2a^2}{c}$. **D.** $\frac{a^2}{c}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi dây cung đó là $M_1M_2$ như hình vẽ.

Giả sử $M_1(c;y)(y>0)$, $M_1\in(E) \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y=\frac{b^2}{a}$

Khi đó, $M_1\left(c;\frac{b^2}{a}\right)$, $M_2\left(c;-\frac{b^2}{a}\right) \Rightarrow M_1M_2=\frac{2b^2}{a}$.

**Câu 8:** Cho $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M$ thuộc $(E)$. Khi đó độ dài $OM$ thỏa mãn

**A.** $OM \le 3$ **B.** $3 \le OM \le 4$. **C.** $4 \le OM \le 5$. **D.** $OM \ge 5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $M(x;y) \in (E)$ nên $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và $OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ta có $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16} \le \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \le \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9} \Leftrightarrow \frac{OM^2}{16} \le 1 \le \frac{OM^2}{9} \Leftrightarrow 9 \le OM^2 \le 16 \Leftrightarrow 3 \le OM \le 4$.

**Câu 9:** Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $d: x=-4$ cắt $(E)$ tại hai điểm $M$, $N$. Khi đó, độ dài đoạn $MN$ bằng

**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{9}{25}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{18}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thay $x=-4$ vào phương trình đường elip ta được: $\frac{16}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{9}{5}$.

Tọa độ hai giao điểm là $M\left(-4;\frac{9}{5}\right), N\left(-4;-\frac{9}{5}\right)$.

Do đó, $MN=\frac{18}{5}$.

**Câu 10:** Đường thẳng $y=kx$ cắt $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tại hai điểm $M$, $N$ phân biệt. Khi đó $M$, $N$

**A.** Đối xứng nhau qua $O(0;0)$. **B.** Đối xứng nhau qua $Oy$.

**C.** Đối xứng nhau qua $Ox$. **D.** Đối xứng nhau qua $I(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $y=kx$ đi qua $O(0;0)$ và $(E)$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Do đó khi đường thẳng $y=kx$ cắt $(E)$ tại $M$, $N$ phân biệt thì $M$, $N$ đối xứng nhau qua $O(0;0)$.

**Câu 11:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ và điểm $M$ thuộc $(E)$ có hoành độ $x_M=-13$. Khoảng cách từ $M$ đến hai tiêu điểm của $(E)$ lần lượt là

**A.** 10 và 6. **B.** 8 và 18. **C.** 13 và $\pm\sqrt{5}$. **D.** 13 và $\pm\sqrt{10}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\begin{cases} x_M = -13 \\ M \in (E) \end{cases} \Rightarrow y_M = 0 \Rightarrow M(-13;0)$.

Ta có $a^2 = 169$; $b^2 = 144 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Các tiêu điểm của $(E)$ là $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, suy ra $MF_1 = 8$, $MF_2 = 18$.

**Câu 12:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, với tiêu điểm $F_1, F_2$. Lấy hai điểm $A, B \in (E)$ sao cho $AF_1 + BF_1 = 8$. Khi đó, $AF_2 + BF_2 = ?$

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $12$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Do $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Do $A \in (E) \Leftrightarrow AF_1 + AF_2 = 2a = 10$.

Do $B \in (E) \Leftrightarrow BF_1 + BF_2 = 2a = 10$.

$\Rightarrow (AF_1 + BF_1) + (AF_2 + BF_2) = 20 \Leftrightarrow 8 + (AF_2 + BF_2) = 20 \Leftrightarrow AF_2 + BF_2 = 12$.

**Câu 13:** Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho $M$ nhìn $F_1, F_2$ dưới một góc vuông:

**A.** $(-5;0)$. **B.** $\left(4; -\frac{9}{5}\right)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$M(x_M; y_M)$ nhìn $F_1, F_2$ dưới một góc vuông khi và chỉ khi $OM = OF_1$.

Do $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 25; b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Để $OM = OF_1 \Leftrightarrow \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = 4 \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 16$.

Mặt khác $M \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x_M^2 + 25y_M^2 = 225$.

Ta có hệ: $\begin{cases} x_M^2 + y_M^2 = 16 \\ 9x_M^2 + 25y_M^2 = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M^2 = \frac{175}{16} \\ y_M^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y_M = \pm\frac{9}{4} \end{cases}$.

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ cho $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $A(-5;-1)$, $B(-1;1)$. Điểm $M$ bất kì thuộc $(E)$, diện tích lớn nhất của tam giác $MAB$ là:

**A.** $18$. **B.** $9$. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $AB=2\sqrt{5}$.

Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$, $B$: $x-2y+3=0$.

$M\left(4\cos\varphi;\sqrt{5}\sin\varphi\right)\in(E)(0\le\varphi\le 2\pi)$.

$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.d(M,\Delta)$. Diện tích lớn nhất khi và chỉ khi $d(M,\Delta)$ lớn nhất.

Ta có: $d_{(M,\Delta)}=\frac{\left|4\cos\varphi-2\sqrt{5}\sin\varphi+3\right|}{\sqrt{5}}\le\frac{\left|4\cos\varphi-2\sqrt{5}\sin\varphi\right|+3}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow d(M,\Delta)\le\frac{\sqrt{4^2+\left(-2\sqrt{5}\right)^2}+3}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$. Vậy $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.d(M,\Delta)=9$.

**Câu 15:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho elip $(E)$: $x^2+4y^2-4=0$. Tìm tất cả những điểm $N$ trên elip $(E)$ sao cho: $\widehat{F_1NF_2}=60^0$ ($F1$, $F2$ là hai tiêu điểm của elip $(E)$)

**A.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**B.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**C.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**D.** $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$(E):\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow a^2=4,b^2=1\Leftrightarrow c^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Gọi $N(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}x_0^2+4y_0^2=4\\ NF_1=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0;\ NF_2=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\\ F_1F_2=2\sqrt{3}\end{cases}$. Xét tam giác $F_1NF_2$ theo hệ thức lượng trong tam giác ta có: $(F_1F_2)^2=NF_1^2+NF_2^2-2NF_1NF_2\cos60^0\Leftrightarrow$

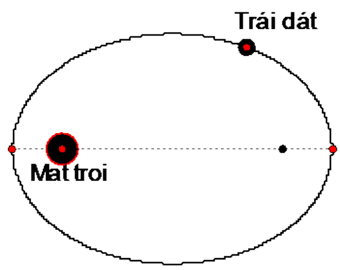
$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2-\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)$

$$\Leftrightarrow 12 = 8 + \frac{3}{2}x_0^2 - \left(4 - \frac{3}{4}x_0^2\right) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x_0^2 = 8 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{32}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow y_0^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy có tất cả 4 điểm thỏa

$N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 16:** Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là *điểm cận nhật*, điểm xa mặt trời nhất gọi là *điểm viễn nhật*. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng $93.000.000$ dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\frac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật. Lấy giá trị gần đúng.




**A.** Xấp xỉ $91.455.000$ dặm. **B.** Xấp xỉ $91.000.000$ dặm.
**C.** Xấp xỉ $91.450.000$ dặm. **D.** Xấp xỉ $91.550.000$ dặm.

**Lời giải**

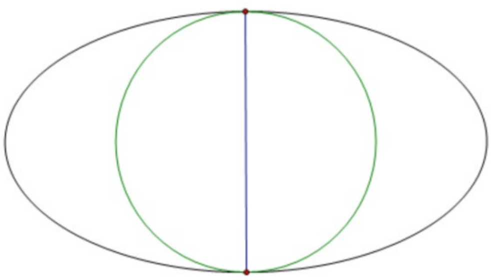
**Chọn C**

Ta có $a = 93.000.000$

Và $\frac{a-c}{a+c} = \frac{59}{61} \Leftrightarrow 61a - 61c = 59a + 59c \Leftrightarrow c = \frac{a}{60} = \frac{93.000.000}{60} = 1.550.000$

Suy ra khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật là: $91.450.000$

**Câu 17:** Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ trong đó $a, b$ lần lượt là độ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.



**A.** $T = \frac{2}{3}$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = \frac{1}{2}$. **D.** $T = \frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Diện tích hình tròn: $S_T = \pi.15^2$, diện tích elip là $S_E = \pi.15.30$.

Tỉ số diện tích $T = \dfrac{S_T}{S_E - S_T} = \dfrac{\pi.15^2}{\pi.15.30 - \pi.15^2} = \dfrac{15}{30-15} = 1$.