CHỦ ĐỀ 8. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Hãy tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Đưa phương trình $y = f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0.$$

- **Bước 2:** Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Kết luận
  - ✓ Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
  - ✓ Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

II. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

❖ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1:** Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- **Bước 2:** Lí luận để giải bài toán.

III. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

❖ **Phương pháp giải:**

- ✓ Gọi $M\left(a, Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right), N\left(b, Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
- ✓ Ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 0 \end{cases}$.
- ✓ Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = A_1x + B_1$.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d.

✓ Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).

✓ Giải hệ phương trình tìm được *M*, *N*.

IV. Bài toán tìm điểm đặc biệt khác:

1. Lí thuyết:

Loại 1. Cho hai điểm $P(x_1; y_1); Q(x_2; y_2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h(M;d) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Loại 2. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận đứng $x = a$ là $h = |x_0 - a|$.

Loại 3. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận ngang $y = b$ là $h = |y_0 - b|$.

Chú ý: Những điểm cần tìm thường là hai điểm cực đại, cực tiểu hoặc là giao của một đường thẳng với một đường cong (C) nào đó. Vì vậy trước khi áp dụng công thức, ta cần phải tìm tìm điều kiện tồn tại rồi tìm tọa độ của chúng.

2. Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: *Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ (C) có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.

✓ Nếu A thuộc nhánh trái thì $x_A < -\dfrac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\dfrac{d}{c} - \alpha < -\dfrac{d}{c}$; $y_A = f(x_A)$.

✓ Nếu B thuộc nhánh phải thì $x_B > -\dfrac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\dfrac{d}{c} + \beta > -\dfrac{d}{c}$; $y_B = f(x_B)$.

✓ Sau đó tính $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left[(a + \beta) - (a - \alpha)\right]^2 + (y_B - y_A)^2$.

✓ Áp dụng bất đẳng thức Côsi (Cauchy), ta sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$.

✓ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.

✓ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.

✓ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y=f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Theo đầu bài ta có $|y|=k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=kx \\ y=-kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=kx \\ f(x)=-kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

❖ **Phương pháp giải:**

✓ Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

✓ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.

✓ Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$IM^2=\left(x_M+\frac{d}{c}\right)^2+\left(y_M-\frac{a}{c}\right)^2=g(x_M)$$

✓ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y=f(x)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

❖ **Phương pháp giải**

✓ Gọi I thuộc $(C)\Rightarrow I(x_0;y_0)$; $y_0=f(x_0)$.

✓ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0)=h(I;d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

✓ Khảo sát hàm số $y=g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đồ thị của hàm số $y=(m-1)x+3-m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;3)$. **B.** $M(1;2)$. **C.** $M(-1;-2)$. **D.** $M(0;1)$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=x^2+2mx-m+1$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(0;1)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4}\right)$. **D.** $M(-1;0)$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+mx+m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là

A. $M(-1;2)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $M(1;-4)$.

Câu 4. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^4-2mx^2+3$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi, khi đó tọa độ của điểm M là

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(1;4)$. **C.** $M(0;-2)$. **D.** $M(0;3)$.

Câu 5. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+m}{x+m}$ $(m\neq 0)$ luôn đi qua một điểm M cố định khi m thay đổi. Tọa độ điểm M khi đó là

A. $M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(-1;1)$. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 6. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3mx^2-x+3m$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 1 là

A. $M(0;1), M(2;3)$. **B.** $M(2;1)$.

C. $M\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M\left(3;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 8. Hỏi khi m thay đổi đồ thị (C_m) của hàm số $y=(1-2m)x^4+3mx^2-m-1$ đi qua bao nhiêu điểm cố định ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ mà có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) bằng 4 là

A. $(4;3),(-2;1)$. **B.** $(2;5),(0;-1)$.

C. $(2;5),(0;-1),(4;3),(-2;1)$. **D.** $(2;5),(4;3)$.

Câu 10. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{-x+m}$ $(m\neq -2)$ luôn luôn đi qua một điểm $M(x_M;y_M)$ cố định khi m thay đổi, khi đó x_M+y_M bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-x-4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A. $m=-3$. **B.** $m=-6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{7}{2}$.

Câu 12. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{2}{x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-5x^2+6x+3$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{3}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên dương ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{4}{3x-2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm uốn của đồ thị hàm số $y=\frac{x^4}{4}-x^2-1$, thì x_1x_2 có giá trị bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{-2}{3}$.

Câu 17. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{6}{4x-1}$ số điểm có tọa độ nguyên là

A. 4. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+10}{x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 19. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 20. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{5x-2}{3x+1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 21. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{8x+11}{4x+2}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22. Tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận của đồ thị hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(4;3)$. **B.** $M(3;5)$. **C.** $M(1;-3)$. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 23. Số cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x^2-2$ đối xứng với nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Trong tất cả các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3x+5}{x-1}$, số điểm có hoành độ lớn hơn tung độ là

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Biết tọa độ điểm $M(x_M;y_M)$ có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) sao cho MI ngắn nhất. Khi đó giá trị x_M-y_M bằng

A. 0. **B.** $2\sqrt{3}$.
C. 2. **D.** -2.

Câu 26. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x-2$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$ là

A. $(1;2)$ và $(3;34)$. **B.** $(3;2)$ và $(1;34)$.
C. $(0;-2)$ và $(4;74)$. **D.** $(1;2)$ và $(-1;-6)$.

Câu 27. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-4x^2+9x+4$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O là

A. $(3;22)$ và $(-3;-22)$. **B.** $(2;14)$ và $(-2;-14)$.
C. $(1;10)$ và $(-1;-10)$. **D.** $(0;4)$ và $(4;40)$.

Câu 28. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{2}x$ là

A. $(1;2)$ và $(-2;-10)$. **B.** $(2;-1)$ và $(-2;1)$.
C. $(1;-2)$ và $(-1;2)$. **D.** $(1;2)$ và $(-1;-2)$.

Câu 29. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ mà có khoảng cách đến tiệm cận ngang của (C) bằng 1 là

A. $M(3;2)$. **B.** $M(5;2)$.

C. $M(5;2), M(-1;0)$. **D.** $M\left(4;\dfrac{5}{2}\right), M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 30. Các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $-1<m<0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m>0$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ một điểm M trên (C) đến giao điểm của hai tiệm cận. Giá trị nhỏ nhất có thể có của d là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Diện tích của tam giác ABI bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 33. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-7}{x+1}$, biết M có hoàng độ a và khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy. Giá trị có thể có của a là

A. $a=1$ hoặc $a=\dfrac{7}{3}$. **B.** $a=-1$ hoặc $x=\dfrac{7}{3}$.

C. $a=-1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$. **D.** $a=1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc đồ thị (C) và d là tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C). Giá trị nhỏ nhất của d có thể đạt được là

A. 6. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 5

Câu 35. Cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ mà chúng đối xứng nhau qua trục tung là

A. $\left(3;-\dfrac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$. **B.** $\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$ và $\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

C. $\left(2;\dfrac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;\dfrac{11}{3}\right)$. **D.** $\left(2;-\dfrac{11}{3}\right)$ và $\left(-2;-\dfrac{11}{3}\right)$.

Câu 36. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+5x+15}{x+3}$ cách đều hai trục tọa độ ?

A. 2. **B.** Có vô số điểm M thỏa yêu cầu.

C. 1. **D.** Không có điểm M thỏa yêu cầu.

Câu 37. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ có tọa độ nguyên ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-3(m-1)x^2-3mx+2$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định $P\left(x_P;y_P\right)$ và $Q\left(x_Q;y_Q\right)$ khi m thay đổi, khi đó giá trị của y_P+y_Q bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 39. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.là

A. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

B. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

C. $M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

D. $M_1\left(-1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$

Câu 40. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{x^2-4mx+5m}{x-2}$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\setminus\left\{-\dfrac{4}{13}\right\}$.

C. $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 42. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ sao cho M cách đều hai điểm $A(2,0)$ và $B(0,2)$ là

A. $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** Không tồn tại điểm M.

Câu 43. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ đến $I(1,4)$ là

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 4.

Câu 45. Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$, độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 46. Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 + mx^2 - m + 2016$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;2016)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(0;2017)$.

Câu 47. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 49. Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 6 = 0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ có đồ thị (C_m). Tọa độ các điểm cố định của (C_m) là

A. $(-1;0),(1;0)$. **B.** $(1;0),(0;1)$. **C.** $(-2;1),(-2;3)$. **D.** $(2;1),(0;1)$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-5x+2}{2x+2}$ có đồ thị (C). Hỏi trên (C) có bao nhiêu điểm có hoành độ và tung độ là các số tự nhiên.

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 52. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ có đồ thị (C_m). Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương của (C_m). Khi tiếp tuyến tại A của (C_m) song song với đường thẳng $d: y = 16x$ thì giá trị của m là

A. $m = 5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \dfrac{63}{64}$.

Câu 53. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ đến đường thẳng $d: y + 3x + 6 = 0$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 54. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 55. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ cách đều hai đường tiệm cận của (C) là

A. $M(2;1)$. **B.** $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M\left(5;\dfrac{7}{3}\right), M\left(-3;\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $M(-2;2)$.

Câu 56. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ cách đều hai trục tọa độ là

A. $M(-1;-1), M(3;3)$. **B.** $M(-1;3)$.
C. $M(-1;-1)$. **D.** $M(3;3)$.

Câu 57. Tọa độ điểm M có hoành độ nguyên thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;4)$.
C. $M(2;4); M(-2;0)$. **D.** $M(2;-2)$.

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+2)x^3-3(m-2)x+m+7$ có đồ thị (C_m). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. (C_m) không đi qua điểm cố định nào.
B. (C_m) có đúng hai điểm cố định.
C. (C_m) có đúng ba điểm cố định.
D. (C_m) có đúng một điểm cố định.

Câu 59. Điều kiện của tham số m để trên đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1$ có ít nhất hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua trục Oy là

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\le -2$.

Câu 60. Đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có hai điểm cực trị cách đều trục tung khi và chỉ khi:

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1; m=-2$. **D.** $m=-2$.

Câu 61. Hỏi trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm cách đều hai trục tọa độ?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 62. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$ cách đều hai tiệm cận của (C).

A. $M(-1;1); N(-4;-6)$. **B.** $M(1;1); N(3;4)$.
C. $M(-1;3); N(-3;3)$. **D.** $M(-1;3); N(-3;3)$.

Câu 63. Tọa độ hai điểm trên đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x+2$ sao cho hai điểm đó đối xứng nhau qua điểm $M(-1;\ 3)$ là

A. $(-1;0);(1;6)$. **B.** $(1;0);(1;6)$. **C.** $(0;2);\ (-2;4)$. **D.** $(1;0);(-1;6)$.

Câu 64. Trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 65. Tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất là

A. $(1;1)$. **B.** $(1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$.
C. $(1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$. **D.** $(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ và $(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$.

Câu 66. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-3x+1}{x+1}$ nhận điểm nào trong các điểm sau làm tâm đối xứng ?

A. $K(-1;-3)$.   **B.** $N(3;-1)$.   **C.** $M(-1;\ 3)$.   **D.** $I(-3;-1)$.

Câu 67. Tọa độ các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ cách đều tiệm cận đứng và trục hoành là

A. $M(2;1), M(4;3)$.   **B.** $M(0;-1), M(4;3)$.

C. $M(0;-1), M(3;2)$.   **D.** $M(2;1), M(3;2)$.

Câu 68. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

A. 2.   **B.** 1.   **C.** 3.   **D.** 4.

C. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D	D	D	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	D	A	D	C	B	C	C	B	C	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	C	C	B	A	D	B	D	B	A	B	A	D	C	B	A	C	C	B	B

61	62	63	64	65	66	67	68												
C	B	C	D	D	D	B	A												

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=(m-1)x_0+3-m,\forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)m-x_0-y_0+3=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=0 \\ -x_0-y_0+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 2. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^2+2mx_0-m+1$

$$\Leftrightarrow (2x_0-1)m+x_0^2+1-y_0=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases}2x_0-1=0\\ x_0^2+1-y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\ y_0=\dfrac{5}{4}\end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 3. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3x_0^2+mx_0+m,\forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)m+x_0^3-3x_0^2-y_0=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases}x_0+1=0\\ x_0^3-3x_0^2-y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-1\\ y_0=-4\end{cases} \Rightarrow M(-1;-4)$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 4. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có

$$y_0=x_0^4-2mx_0^2+3,\forall m \Leftrightarrow 2x_0^2m+y_0-3-x_0^4=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases}2x_0^2=0\\ y_0-3-x_0^4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=0\\ y_0=3\end{cases} \Rightarrow M(0;3).$$ **P**

hương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định.

Câu 5. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=\dfrac{(m+1)x_0+m}{x_0+m},\forall m\neq 0 \Leftrightarrow x_0y_0+my_0=mx_0+x_0+m,\forall m\neq 0$

$$\Leftrightarrow m(y_0-x_0-1)+x_0y_0-x_0=0,\forall m\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}y_0-x_0-1=0\\ x_0y_0-x_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=0\\ y_0=1\end{cases} \Rightarrow M(0;1).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chúng ta có thể thế từng đáp án để kiểm tra, tức là thế tọa độ điểm M vào phương trình hàm số luôn đúng với mọi m thì điểm đó là điểm cố định

Câu 6. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0=x_0^3-3mx_0^2-x_0+3m,\forall m$

$$\Leftrightarrow 3(1-x_0^2)m+x_0^3-x_0-y_0=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases}1-x_0^2=0\\ x_0^3-x_0-y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=1\\ y_0=0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x_0=-1\\ y_0=0\end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm cố định.

Câu 7. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Tiệm cận đứng của (C) là $x=1$.

Ta có $|a-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$. Vậy $M(0;1), M(2;3)$.

Câu 8. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=(1-2m)x_0^4+3mx_0^2-m-1, \forall m$

$\Leftrightarrow (2x_0^4-3x_0^2+1)m+y_0-x_0^4+1=0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^4-3x_0^2+1=0 \\ y_0-x_0^4+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho đi qua bốn điểm cố định.

Câu 9. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Tiệm cận đừng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt có phương trình $x=1,\ y=2$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $h_1=|a-1|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $h_2=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}-2\right|=\dfrac{3}{|a-1|}$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng 4 nên ta có:

$$h_1+h_2=4 \Leftrightarrow |a-1|+\frac{3}{|a-1|}=4 \Leftrightarrow |a-1|^2-4|a-1|+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a-1|=3 \\ |a-1|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \\ a=2 \\ a=0 \end{array}\right..$$

Vậy các điểm cần tìm là: $(2;5), (0;-1), (4;3), (-2;1)$.

Câu 10. Chọn C.

Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_M=\dfrac{2x_M^2+(1-m)x_M+1+m}{-x_M+m}, \forall m\neq -2$

$\Leftrightarrow -x_My_M+my_M=2x_M^2+x_M-mx_M+1+m, \forall m\neq -2$

$\Leftrightarrow (x_M+y_M-1)m-x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0, \forall m\neq -2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M+y_M-1=0 \\ -x_My_M-2x_M^2-x_M-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=1-x_M \\ -x_M(1-x_M)-2x_M^2-x_M-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-1 \\ y_M=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2)$

Vậy $x_M+y_M=1$.

Câu 11. Chọn A.

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0<0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=-x_0^3+mx_0^2-x_0-4m, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0^2-4)m-x_0^3-x_0-y_0=0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-4=0 \\ -x_0^3-x_0-y_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=10 \end{cases} \Rightarrow A(-2;10)$.

Lại có $y' = -3x^2 + 2mx - 1 \Rightarrow y'(-2) = -4m - 13$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $A(-2;10)$ có dạng $y = (-4m-13)(x+2)+10$ hay $y = (-4m-13)x - 8m - 16\ (\Delta)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d: y = x$.

Vì Δ vuông góc với d nên ta có $-4m-13 = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 12. Chọn A.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}, y_0 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \\ \dfrac{2}{x_0+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 2 \in \{-2;-1;1;2\} \Rightarrow x_0 \in \{-4;-3;-1;0\}$$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ nguyên.

Câu 13. Chọn A.

Gọi $A\left(a;a^3-5a^2+6a+3\right), B\left(b;b^3-5b^2+6b+3\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ, ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ a^3+b^3-5\left(a^2+b^2\right)+6\left(a+b\right)+6=0 \end{cases} \Rightarrow -10a^2+6=0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu 14. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{N}^*, y_0 \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{3}{2x_0-1} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow 2x_0 - 1 \in \{1;3\} \Rightarrow x_0 \in \{1;2\}$$

$\Rightarrow M_1(-1;-1),\ M_2(0;-3),\ M_3(1;3)$ và $M_4(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên dương.

Câu 15. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{4}{3x_0-2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0 - 2 \in \{-4;-2;-1;1;2;4\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\dfrac{2}{3};0;\dfrac{1}{3};1;\dfrac{4}{3};2\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0;-2),\ M_2(1;4)$ và $M_3(2;1)$.

Vậy trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 16. Chọn D.

Ta có $y' = x^3 - 2x, y'' = 3x^2 - 2 \Rightarrow x_1.x_2 = \dfrac{-2}{3}$. Vậy $x_1.x_2 = \dfrac{-2}{3}$.

Câu 17. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{6}{4x_0-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0 - 1 \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\dfrac{5}{4};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4};0;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4};1;\dfrac{7}{4}\right\}.$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_1(0;-6)$ và $M_2(1;2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 18. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 1 + \dfrac{9}{x_0+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 1 \in \{-9;-3;-1;1;3;9\} \Rightarrow x_0 \in \{-10;-4;-2;0;2;8\}$$

$\Rightarrow M_1(-10;0), M_2(-4;-2), M_3(-2;-8), M_4(0;10), M_5(2;4)$ và $M_6(8;2)$.

Vậy trên đồ thị (C) có sáu điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 19. Chọn A.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{5}{2x_0-1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 2x_0 - 1 \in \{-5;-1;1;5\} \Rightarrow x_0 \in \{-2;0;1;3\}$$

✍ $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(-2;0)$ ✍ $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow M(1;3)$

✍ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(0;-2)$ ✍ $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(3;1)$

Vậy trên đồ thị (C) có bốn điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 20. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = \dfrac{1}{3}\left(5 - \dfrac{11}{3x_0+1}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 3x_0 + 1 \in \{-11;-1;1;11\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-4;-\dfrac{2}{3};0;\dfrac{10}{3}\right\}$$

✍ $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(-4;2)$

✍ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(0;-2)$

Vậy trên đồ thị (C) có hai điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 21. Chọn D.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 2 + \dfrac{7}{4x_0+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 4x_0 + 2 \in \{-7;-1;1;7\} \Rightarrow x_0 \in \left\{-\dfrac{9}{4};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{Z}$ nên trên đồ thị (C) không có điểm nào có tọa độ nguyên.

Câu 22. Chọn A

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$; $a > 0$ và $a \neq 2$, ta có $d = |a-2| + \left|\dfrac{a+2}{a-2} - 1\right| = |a-2| + \dfrac{4}{|a-2|} \geq 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a-2|^2 = 4 \Leftrightarrow |a-2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$.

Kết luận $M(4;3)$.

Câu 23. Chọn B.

Gọi $M(x;y)$ là điểm trên đồ thị (C), gọi N là điểm đối xứng với M qua I, ta có $N(4-x;36-y)$. Vì N thuộc (C), ta có

$$\begin{cases} 36 - y = (4-x)^3 + 3(4-x)^2 - 2 \\ y = x^3 + 3x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = -(4-x)^3 - 3(4-x)^2 + 38 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy có tất cả một cặp điểm thuộc đồ thị (C) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 24. Chọn A.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 = 3 + \dfrac{8}{x_0 - 1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0 - 1 \in \{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\} \Rightarrow x_0 \in \{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$

$\Rightarrow M_1(-7;2), M_2(-3;1), M_3(-1;-1),\ M_4(0;-5), M_5(2;11),\ M_6(3;7), M_7(5;5)$ và $M_8(9;4)$. Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 25. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right) \in (C)$ với $a > 0,\ a \neq 1$; tọa độ giao điểm các tiệm cận là $I(1;1)$, ta có

$$MI^2 = (a-1)^2 + \left(\frac{a+2}{a-1} - 1\right)^2 = (a-1)^2 + \frac{9}{(a-1)^2} \geq 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-1)^4 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{3}+1 \\ a = -\sqrt{3}+1 \end{array}\right.$. Vì M có hoành độ dương nên chọn $a = \sqrt{3}+1$, suy ra $M\left(\sqrt{3}+1;\sqrt{3}+1\right)$ nên $x_M - y_M = 0$.

Câu 26. Chọn A.

Gọi $A(x_A;x_A^3+3x_A-2),\ B(x_B;x_B^3+3x_B-2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $I(2;18)$.

Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 4 & (1) \\ x_A^3 + 3x_A - 2 + x_B^3 + 3x_B - 2 = 36 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $x_A^3 + 3x_A - 2 + (4-x_A)^3 + 3(4-x_A) - 2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 1 \Rightarrow x_B = 3 \\ x_A = 3 \Rightarrow x_B = 1 \end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(3;34)$.

Câu 27. Chọn C.

Gọi $A(x_A;x_A^3-4x_A^2+9x_A+4),\ B(x_B;x_B^3-4x_B^2+9x_B+4)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_O \\ y_A + y_B = 2y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 0 & (1) \\ x_A^3 - 4x_A^2 + 9x_A + 4 + x_B^3 - 4x_B^2 + 9x_B + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$x_A^3 - 4x_A^2 + 9x_A + 4 + (-x_A)^3 - 4(-x_A)^2 + 9(-x_A) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \Rightarrow x_B = 1 \\ x_A = 1 \quad \Rightarrow x_A = -1 \end{array}\right..$$

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;10)$, $B(-1;-10)$.

Câu 28. Chọn D.

Gọi $A\left(a;a^3+a\right), B\left(b;b^3+b\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = -\dfrac{1}{2}x$ hay $d: x + 2y = 0$.

Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của AB và $\vec{u}_d(2;-1)$ là vecto chỉ phương của d)

Từ (1) ta có $\dfrac{a^3+a+b^3+b}{2} = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{a+b}{2}$

$$\Leftrightarrow (a+b)(2a^2 - 2ab + 2b^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow a = -b \ (3)$$

(vì $2a^2 - 2ab + 2b^2 + 3 = 2\left(a^2 - ab + b^2 + \dfrac{3}{2}\right) = 2\left(a - \dfrac{1}{2}b\right)^2 + \dfrac{3}{2}b^2 + 3 > 0, \forall a,b$)

Với $\overrightarrow{AB} = \left(b-a;(b-a)(a^2+ab+b^2+2)\right)$, từ (2) ta có

$$2(b-a) - (b-a)(a^2+ab+b^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(a^2+ab+b^2-1)=0$$
$$\Rightarrow a^2+ab+b^2-1=0\ (4) \quad (\text{Vì } a\neq b)$$

Thay (3) vào (4) ta được $a^2-a^2+a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow b=-1 \\ a=-1\Rightarrow b=1 \end{array}\right.$.

Vậy cặp điểm cần tìm là $A(1;2)$, $B(-1;-2)$.

Câu 29. Chọn C.

Đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận ngang là $y=1$

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$, $a\neq 2$. Ta có $\left|\dfrac{a+1}{a-2}-1\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{3}{a-2}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $M(5;2), M(-1;0)$.

Câu 30. Chọn D.

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $x_0^3-3x_0^2+m=-\left[(-x_0)^3-3(-x_0)^2+m\right]$ $\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 0$ sao cho $3x_0^2=m\Leftrightarrow m>0$.

Câu 31. Chọn D.

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-1;1)$, gọi $M\left(a;\dfrac{a-3}{a+1}\right)\in(C)$ với $a\neq -1$ ta có

$$MI^2=(a+1)^2+\left(\frac{a-3}{a+1}-1\right)^2=(a+1)^2+\frac{16}{(a+1)^2}\geq 8\Rightarrow MI\geq 2\sqrt{2}.$$

Câu 32. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Tiệm cận $x=1,\ y=1\Rightarrow I(1,1)$. Gọi $M\left(m,\dfrac{m+1}{m-1}\right)\in(C)$, ta tìm được tọa độ $A\left(1,\dfrac{m+3}{m-1}\right)$, $B(2m-1,1)$.

Diện tích $S=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m+3}{m-1}-1\right|.\left|2m-1-1\right|=4$.

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A,B. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận. Khi đó diện tích tam giác ABI luôn là hằng số. Cách tính nhanh:

1. Chọn $M(2,3)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại M là $d: y=-2x+7$. Khi đó $A(1,5), B(3,1)$ và $IA=4, IB=2$.
2. Tam giác ABI là tam giác vuông tại I. Diện tích $S_{ABI}=\dfrac{1}{2}IA.\text{IB}=4$.

Câu 33. Chọn D.

Theo giả thiết ta có :

$$|y|=3|x|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-7}{x+1}=3x \\ \dfrac{x-7}{x+1}=-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+7=0 \\ 3x^2+4x-7=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \text{vô n}^0 \\ x=1\vee x=-\dfrac{7}{3} \end{array}\right..$$

Nhắc lại: Điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho khoảng cách từ M tới Ox bằng k lần khoảng cách từ M tới Oy có hoành độ là nghiệm phương trình $|f(x)| = |kx| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{array}\right.$.

Cách khác:

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-7}{a+1}\right)$ với $a \neq -1$. Theo đề ta có: $\left|\dfrac{a-7}{a+1}\right| = 3|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{7}{3} \end{array}\right.$.

Câu 34. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right) \in (C)$ với $a \neq 2$, ta có

$$d = |a-2| + \left|\frac{2a-3}{a-2} - 2\right| = |a-2| + \frac{1}{|a-2|} \geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của d bằng 2.

Câu 35. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $A\left(x_A;-\dfrac{1}{3}x_A^3 + x_A^2 + 3x_A - \dfrac{11}{3}\right)$, $B\left(x_B;-\dfrac{1}{3}x_B^3 + x_B^2 + 3x_B - \dfrac{11}{3}\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua trục tung.

Ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 0 \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -x_A & (1) \\ -\dfrac{1}{3}x_A^3 + x_A^2 + 3x_A - \dfrac{11}{3} = -\dfrac{1}{3}x_B^3 + x_B^2 + 3x_B - \dfrac{11}{3} & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-\frac{1}{3}x_A^3 + x_A^2 + 3x_A - \frac{11}{3} = -\frac{1}{3}(-x_A)^3 + (-x_A)^2 + 3(-x_A) - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -3 \Rightarrow x_B = 3 \\ x_A = 3 \quad \Rightarrow x_A = -3 \end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $A\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Kiểm tra điều kiện đối xứng qua trục tung $\begin{cases} x_A + x_B = 0 \\ y_A = y_B \end{cases}$ và kiểm tra điểm có thuộc đồ thị không.

Câu 36. Chọn C.

Gọi $M(x_M, y_M), (x_M \neq -3)$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta có:

$$\begin{cases} y_M = x_M + 2 + \dfrac{9}{x_M + 3} \\ y_M = \pm x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{15}{2} \\ y_M = -\dfrac{15}{2} \end{cases}.$$

Câu 37. Chọn C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{x_0^2 + 2x_0 + 2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 2 \in \{-2;-1;1;2\}$

✍ $x_0^2 + 2x_0 + 2 = -2$ (vô nghiệm) ✍ $x_0^2 + 2x_0 + 2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(-1;2)$

✍ $x_0^2 + 2x_0 + 2 = -1$ (vô nghiệm) ✍ $x_0^2 + 2x_0 + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(0;1) \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(-2;1) \end{array}\right.$

Vậy có trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 38. Chọn B.

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3(m-1)x_0^2-3mx_0+2,\forall m$

$$\Leftrightarrow 3(x_0^2+x_0)m+y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+x_0=0 \\ y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=2 \end{cases}.$$

Suy ra $P(-1;4),Q(0;2)$ hoặc $P(0;2),Q(-1;4)$ nên $y_P+y_Q=6$.

Câu 39. Chọn C.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq -1$. Tiếp tuyến tại M có phương trình

$$y-\frac{2x_0-1}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$$

hay $3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến

$$d=\frac{\left|-3-2(x_0+1)^2+2x_0^2-2x_0-1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất là $\sqrt{6}$ khi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy : $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 40. Chọn D.

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $y(x_0)=-y(-x_0)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $\dfrac{x_0^2-4mx_0+5m}{x_0-2}=-\dfrac{(-x_0)^2-4m(-x_0)+5m}{(-x_0)-2}$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0\neq 2$ và $x_0\neq 0$ sao cho $(1-2m)x_0^2+5m=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m(1-2m)<0 \\ (1-2m).4+5m\neq 0 \\ (1-2m).0+5m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 41. Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right)\in(C)$ với $m\neq 2$. Ta có $y'(m)=-\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y=-\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2;2)$.

Ta có $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\ge 8$, suy ra $AB\ge 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2=1$, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 42. Chọn C.

Phương trình đường trung trực đoạn AB là $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa yêu cầu bài toán là $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 43. Chọn C.

Gọi $M(x;y)$ thuộc (C), ta có

$$\overrightarrow{IM}=(x-1;y-4)\Rightarrow IM^2=(x-1)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2=\underbrace{(x-1)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2}_{g(x)}.$$

Mà

$$g(x)=(x-1)^2+(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2=2(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2\ge 2+2\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \min IM=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. Đạt được khi $2(x-1)^2=\frac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow (x-1)^4=\frac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{array}\right.$.

Câu 44. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $M\left(x_M,2-\frac{1}{x_M+1}\right)$ thuộc (C). Và MH, MK là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó $MH=|x_M+1|$ và $MK=\left|\frac{1}{x_M+1}\right|$. Do đó

$$MH+MK=|x_M+1|+\frac{1}{|x_M+1|}\ge 2\ (Cauchy)$$

Suy ra $MH+MK$ bé nhất khi $(x_M+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M=-2\Rightarrow y_M=3 \\ x_M=0\Rightarrow y_M=1\end{array}\right.$

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $(C):y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số, khi đó tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận có độ dài nhỏ nhất là $2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Câu 45. Chọn A.

Gọi A là điểm thuộc thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, nghĩa là $x_A<3\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt $x_A=3-\alpha$, suy ra $y_A=1+\frac{6}{x_A-3}=1+\frac{6}{3-\alpha-3}=1-\frac{6}{\alpha}\quad(1)$.

Tương tự gọi B là điểm thuộc nhánh phải, nghĩa là $x_B > 3 \Rightarrow$ với số $\beta > 0$, đặt $x_B = 3 + \beta$, suy ra $y_B = 1 + \frac{6}{x_B - 3} = 1 + \frac{6}{3 + \beta - 3} = 1 + \frac{6}{\beta}$ (2).

Vậy $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = [(3+\beta) - (3-\alpha)]^2 + \left[\left(1 + \frac{6}{\beta}\right) - \left(1 - \frac{6}{\alpha}\right)\right]^2$

$$g(\alpha;\beta) = (\alpha+\beta)^2 + \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta}\right)^2 = (\alpha+\beta)^2 + (6)^2(\alpha+\beta)^2\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$= \left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\right)\left(1 + \frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

Dùng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$g(\alpha;\beta) \geq (2\alpha\beta + 2\alpha\beta)\left(1 + \frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right) = 4\alpha\beta + \frac{144}{\alpha\beta} \geq 2\sqrt{4.144} = 48.$$

Vậy $AB \geq \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 144\alpha\beta = \frac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ (\alpha\beta)^2 = \frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{6}$$

Vậy độ dài AB ngắn nhất là $4\sqrt{3}$.

Câu 46. Chọn D.

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m + 2016, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)m + x_0^4 - y_0 + 2016 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0 + 2016 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2017 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2017 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(1;2017) \\ N(-1;2017) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} M(-1;2017) \\ N(1;2017) \end{cases}.$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(0;2017)$.

Câu 47. Chọn B.

Điểm M nằm trên trục Ox : $M(-2;0) \Rightarrow d_M = |-2| + 0 = 2$

Điểm M nằm trên trục tung : $d_M = 0 + \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 2$

Xét những điểm M có hoành độ $|x| > \frac{2}{3} \Rightarrow d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$.

Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn $|x| < \frac{2}{3}; y < -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| > \frac{2}{3} (*)$

- Trường hợp : $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$. Do (*) cho nên : $d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$
- Trường hợp : $-\frac{2}{3} < x < 0; -\frac{2}{3} < y < 0 \Rightarrow d_M = -x - 1 - \frac{5}{x-3}; d'_M = -1 + \frac{5}{(x-3)^2}$

$d'_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên ,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Vậy $\min d_M = d_M(0) = \frac{2}{3}$.

Câu 48. Chọn D.

Điểm $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d=\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\dfrac{3}{2} \Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\dfrac{3}{2}$:

- Với $0<x<\dfrac{3}{2} \Rightarrow y>\dfrac{3}{2} \Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$
- Với $-\dfrac{3}{2}<x<0; y>0 \Rightarrow d=-x+x+1+\dfrac{1}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}; d'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d=y(0)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 49. Chọn B.

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y=\dfrac{1}{2}x-3$ suy ra $\Delta: y=-2x+m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \underbrace{2x^2-(m+3)x+2m+4}_{h(x)}=0 \end{cases}\cdot$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta>0 \\ h(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m-23>0 \\ -6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<5-4\sqrt{3} \\ m>5+4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=2x_I+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{m+3}{4} \\ y_I=\dfrac{m+3}{2}+m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4};\frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d \Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4}-2.\dfrac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 50. Chọn A.

Gọi (x,y) là điểm cố định của họ đồ thị $(C_m): y=x^4+mx^2-m-1$, ta có

$$y=x^4+mx^2-m-1, \forall m$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)m+x^4-1-y=0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^4-1-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy họ đồ thị có hai điểm cố định là $(-1;0),(1;0)$.

Câu 51. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{N}, y_0\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{N} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - 6 + \dfrac{8}{x_0+1}\right) \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x_0 + 1 \in \{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\} \Rightarrow x_0 \in \{-9;-5;-3;-2;0;1;3;7\}$$

Do $x_0 \in \mathbb{N}$ nên

✍ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(0;1)$ ✍ $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{2}$ (loại)

✍ $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -\dfrac{1}{2}$ (loại) ✍ $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(7;1)$.

Câu 52. Chọn A.

Gọi $A(x_0;y_0)$, $x_0 > 0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0 = -x_0^4 + 2mx_0^2 - 2m + 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow 2m(x_0^2 - 1) + 1 - x_0^4 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ 1 - x_0^4 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \ (x_0 > 0) \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

Lại có $y' = -4x^3 + 4mx \Rightarrow y'(1) = 4m - 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $A(1;0)$ có dạng $y = (4m-4)(x-1)$ hay $y = (4m-4)x + 4 - 4m$ (Δ).

Vì Δ song song với d nên $\begin{cases} 4m - 4 = 16 \\ 4 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m = 5$.

Câu 53. Chọn D.

Gọi $M\left(x, x+2+\dfrac{1}{x+2}\right) \in (C)$.

Khoảng cách từ M đến d là $h(M;d)$ cho bởi

$$h(M;d) = \frac{|3x+y+6|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|3x+6+x+2+\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x+2)+\frac{1}{x+2}\right|.$$

- Khi $x+2>0$:

Ta có $4(x+2) + \dfrac{1}{x+2} \geq 4$ dấu bằng xảy ra khi $4(x+2) = \dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

- Khi $x+2<0$

  Ta có $-4(x+2) - \dfrac{1}{(x+2)} \geq 4$

  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow -4(x+2) = -\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$.

Vậy $h(M;d)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 54. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right) \in (C)$ với $a \neq 1$ ta có $d = |a-1| + \left|\dfrac{a+1}{a-1} - 1\right| = |a-1| + \dfrac{2}{|a-1|} \geq 2\sqrt{2}$.

Câu 55. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$ với $a \neq 2$ ta có $|a-2| = \left|\dfrac{a+2}{a-2} - 1\right| \Leftrightarrow |a-2| = \dfrac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$. Vậy $M(0;-1), M(4;3)$.

Câu 56. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+3}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$ ta có $|a|=\left|\dfrac{a+3}{a-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-3=0\\a^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$. Vậy $M(-1;-1),M(3;3)$.

Câu 57. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$ ta có

$$\frac{\left|a-\dfrac{a+2}{a-1}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|a^2-a-3|}{|a-1|}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-2=0\\a^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{3}\\a=1-\sqrt{3}\\a=2\\a=-2\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu là $M(2;4);M(-2;0)$.

Câu 58. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đồ thị (C_m), ta có

$$y_0=(m+2)x_0^3-3(m-2)x_0+m+7,\forall m$$
$$\Leftrightarrow(x_0^3-3x_0+1)m+2x_0^3+6x_0+7-y_0=0,\forall m$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\2x_0^3+6x_0+7-y_0=0\end{cases}$$

Vì hệ có 3 nghiệm phân biệt nên họ đồ thị có 3 điểm cố định.

Câu 59. Chọn B.

Gọi $M(x,y),N(-x,y)$ là hai điểm thuộc đồ thị (C_m) đối xứng nhau qua trục tung. Ta có

$$x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1=-x^3-(3m-1)x^2-2mx+m+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-2m\end{array}\right..$$

Vậy $m<0$.

Câu 60. Chọn B.

Ta có $y'=6x^2+2mx-12$. Điều kiện $\begin{cases}\Delta'>0\\S=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+72>0\\m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$. Vậy $m=0$.

Câu 61. Chọn C.

Gọi $M\left(a,\dfrac{a+1}{a+2}\right)\in(C)$ với $a\neq -2$, ta có $|a|=\left|\dfrac{a+1}{a+2}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2+a-1=0\\a^2+3a+1=0\end{array}\right.$

Phương trình có 4 nghiệm nên trên đồ thị có 4 điểm cách đều hai trục tọa độ.

Câu 62. Chọn B.

Gọi $M\left(a,\dfrac{3a-5}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{3a-5}{a-2}-3\right|\Leftrightarrow(a-2)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right..$

Vậy $M(1;1);N(3;4)$.

Câu 63. Chọn C.

Gọi $A(a,-a^3+3a+2),B(b,-b^3+3b+2)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $M(-1;\ 3)$,

ta có: $\begin{cases}a+b=-2\\-a^3+3a+2-b^3+3b+2=6\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\(a+b)^3-3ab(a+b)-3(a+b)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\vee\begin{cases}a=-2\\b=0\end{cases}$$

Câu 64. Chọn D.

Ta có $y=\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{-x+1+2}{x-1}=-1+\dfrac{2}{x-1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\\x-1=1\\x-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\\x=2\\x=0\end{array}\right.$.

Vậy có 4 điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65. Chọn D.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$. Ta có $d=|a-2|+\left|\dfrac{a+1}{a-2}-1\right|=|a-2|+\dfrac{3}{|a-2|}\geq 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-2)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2+\sqrt{3}\\a=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$. Vậy hai điểm đó là $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

Câu 66. Chọn D.

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận. Vậy điểm cần tìm là $M(-1;\ 3)$.

Câu 67. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Ta có $|a-1|=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a+1=2a+1\\a^2-2a+1=-2a-1\end{array}\right.\Leftrightarrow a^2-4a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$

Vậy điểm cần tìm là: $M(0;-1),M(4;3)$.

Câu 68. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$.

Ta có $5|a-2|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow 5|a-2|=\dfrac{4}{|a-2|}\Leftrightarrow 5\left(a^2-4a+4\right)=4$.

$\Leftrightarrow 5a^2-20a+16=0\Leftrightarrow a=\dfrac{10\pm 2\sqrt{5}}{5}$

Vậy có hai điểm cần tìm.