

HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$,

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+ Khi $a = 0$, $b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

+ Khi $a = b = 0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là một parabol có:

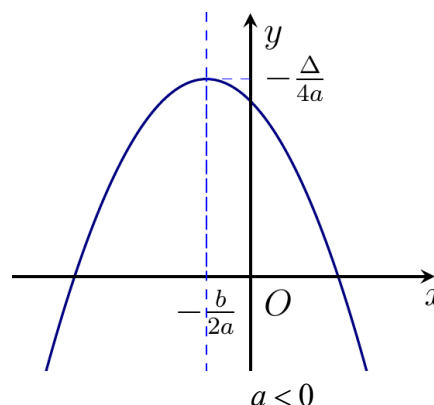
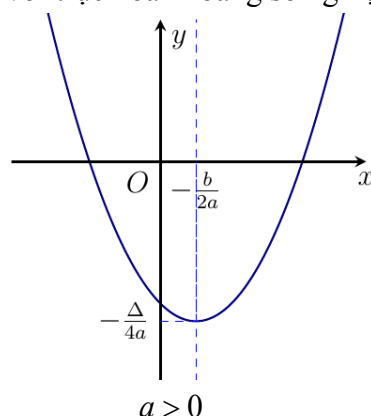
+ Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

+ Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

+ Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.

+ Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.



- Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
2. Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
3. Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
4. Vẽ parabol.

3. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

+ Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

+ Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

VÍ DỤ 1. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau.

An nói: Tôi đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (H.6.14) có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5m là 2,93 m. Từ đó tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12m.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

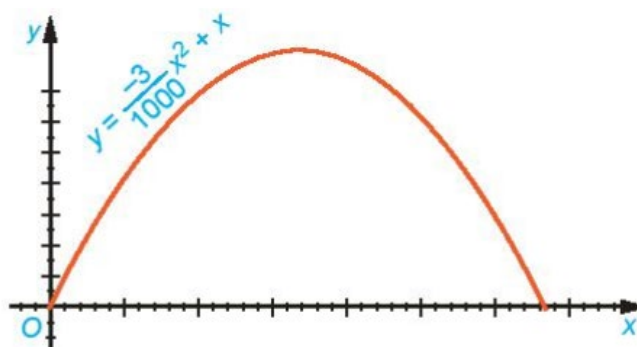
Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!



Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

VÍ DỤ 2. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O , y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

- Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.
- Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.



Hình 6.15

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VẤN ĐỀ 1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ $y = ax^2 + bx + c$ ĐỒNG BIẾN TRÊN KHOẢNG $(a; b)$

1 PHƯƠNG PHÁP.

- + Trường hợp $a = 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- + Trường hợp $a > 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (A; B) \subset \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right) \end{cases}$.

$$+ \text{Trường hợp } a < 0 : \text{Yêu cầu của bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (A; B) \subset \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \end{cases}.$$

Lưu ý:

- Việc tìm điều kiện để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $(A; B)$ được làm tương tự.
- Có thể dựa vào định nghĩa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để thực hiện các bài toán trên.



BÀI TẬP.

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; 3)$.
- Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -4x^2 + 4mx - m^2 + 2$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2 + 1)x^2 - 4mx + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m^2 + 1)x + 3$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- Câu 5.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 + 2(m - 1)x + 2m + 1$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + m + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 3$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- Câu 8.** Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, $(a > 0)$. Biết rằng $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{6a^2}{5a^2 + 2ab + b^2}$.

VẤN ĐỀ 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI



PHƯƠNG PHÁP.

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{cases}$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.



BÀI TẬP.

Câu 1. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(1;5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{4}$.

Câu 2. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P) .

Câu 3. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$.

Câu 4. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại đỉnh của nó.

Câu 6. Tìm parabol $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết rằng hoành độ đỉnh của (P) bằng -3 và (P) đi qua điểm $M(-2;1)$.

Câu 7. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3$.

VẤN ĐỀ 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$.

+ Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của (P) .

+ Tương giao của (P) với trục Ox .

+ Tìm điều kiện để các giao điểm của (P) và trục Ox thỏa mãn điều kiện nào đó.



PHƯƠNG PHÁP.

Thường dùng đến các kết quả sau:

+ Đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ là trục đối xứng của (P) , điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ là đỉnh của (P) .

+ Nghiệm (nếu có) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox .

+ Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm của (P) và trục Ox . Khi đó:

- A, B cùng ở bên trái đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B < 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$

- A, B cùng ở bên phải đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B > 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.
- A, B cùng ở một bên đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.
- A, B không ở cùng một bên đối với trục $Oy \Leftrightarrow x_A \cdot x_B < 0$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho parabol $(P): y = x^2 + 5x - 6$. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của parabol (P) , tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$. Xét dấu của Δ, b, c biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Dạng 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $d: y = mx + n$

- + Biện luận số điểm chung của (P) và trục hoành.
- + Tìm điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

1 PHƯƠNG PHÁP.

- + Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*).
- (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt.
- (P) và trục hoành có một điểm chung (còn gọi là tiếp xúc với nhau) $\Leftrightarrow (*)$ có một nghiệm.
- (P) và trục hoành không có điểm chung $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm.
- + d và (P) tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + n$ có nghiệm kép.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục Ox không có điểm chung.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để d tiếp xúc với (P) .

VẤN ĐỀ 4. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

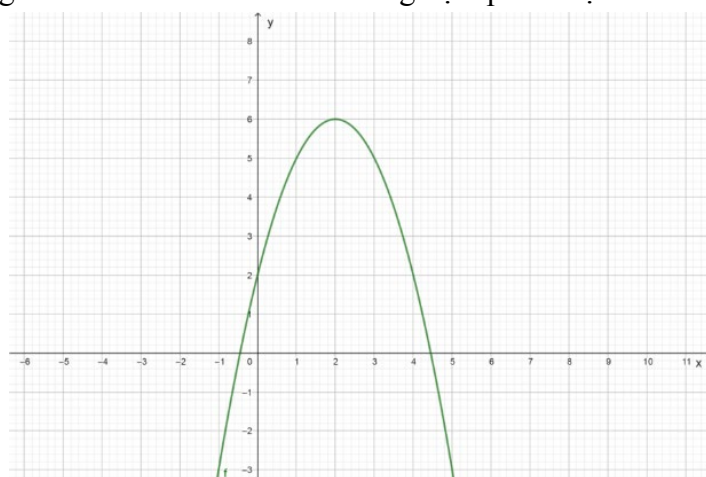
Dạng 1. Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ để biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.

1 PHƯƠNG PHÁP.

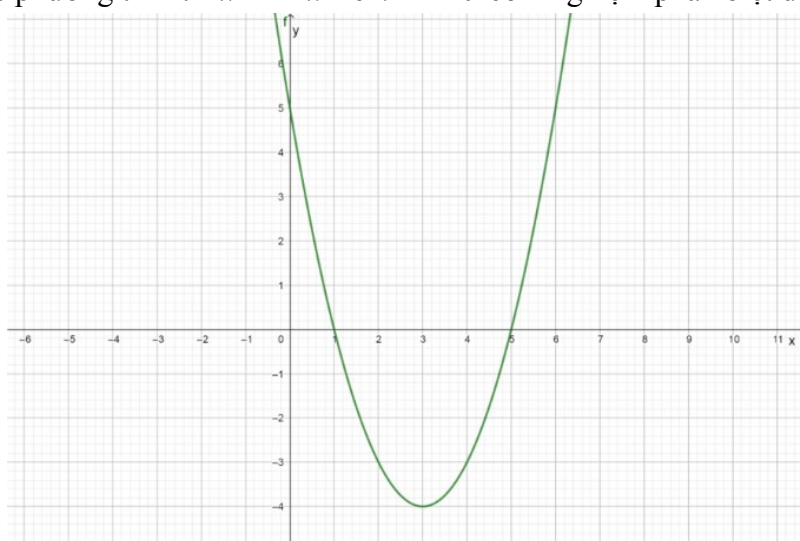
- Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$.
 - Tùy vào giá trị của $g(m)$ để chỉ ra số giao điểm của đường thẳng $d: y = g(m)$ và (C) .
 - Số giao điểm của d và (C) cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.
- *Lưu ý:** Đường thẳng $d: y = g(m)$ là đường thẳng có phương ngang và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$.

2 BÀI TẬP.

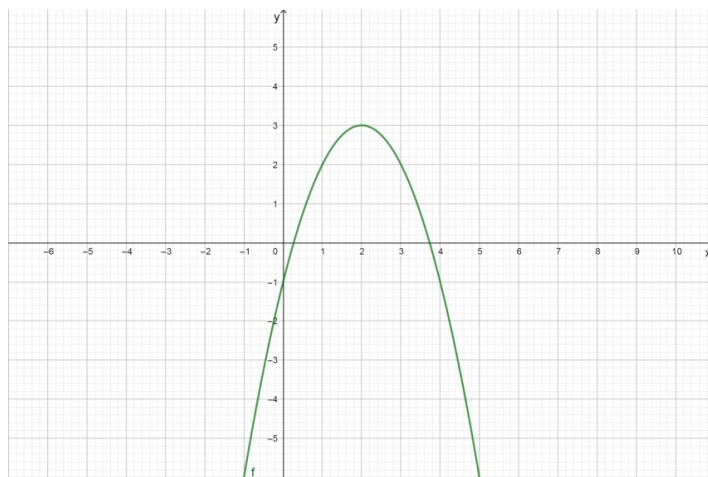
Câu 1. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-x^2 + 4x + 2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.



Câu 2. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị (P) như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.



Câu 3. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



Câu 4. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3; 1)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2019]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Dạng 2. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm toạ độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $d: y = -x + 3$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) .
Tìm toạ độ tiếp điểm khi đó.

Câu 3. Cho Parabol (P) $y = x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$.

Câu 4. Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Dạng 3. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.

iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^2 - 4$ tại hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tính $y_A + y_B$.

Câu 2. Biết rằng parabol $y = x^2 - x + 1$ cắt parabol $y = -x^2 + 2x + 4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 . Tính giá trị biểu thức $P = x_1^3 + x_2^3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2 + 2x + 3m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx + 4$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hai parabol $y = x^2 + mx + (m+1)^2$ và $y = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $P = |x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

VẤN ĐỀ 5. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = (1 + m)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3$ (P_m). Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1$ (P_m). Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số trên.

Câu 3. Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số $(P_m): y = m^2x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 + (2m - 3)x + 5 - 4m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị (P_m) của hàm số đã cho và đường thẳng $(d_m): y = 2mx - 4m + 3$ luôn có một điểm chung cố định.

Câu 5. Cho các hàm số $(P_m): y = x^2 - (m + 3)x + 4m - 7$, $(C_m): y = mx^2 - 3(m + 1)x - 4m + 9$, $(d_m): (m - 1)x + my + 4 - m = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , các đồ thị của các hàm số đã cho luôn cùng đi qua một điểm cố định.

VẤN ĐỀ 6: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập cho trước

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai, ta lập bảng biến thiên cho hàm số đó trên tập hợp đã cho. Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số trên tập hợp đã cho.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3; 5]$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[2; 7]$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ trên $[-1; 2]$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} + 4\sqrt[3]{x^2 + 1} + 3$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ trên $[-2; 4]$.

Câu 6. Cho các số x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a > 0$ thì $\min y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $a < 0$ thì $\max y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

Trường hợp tập xác định khác $\mathbb{R}$, ta kẻ bảng biến thiên của hàm số trên tập đó để có được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính abc .

Câu 3. Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hàm số $y = -(m-1)^2 x^2 + 2(m-1)^2 x + 1 + 2m$. Với $m \neq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{\min_{x \in [0; 2]} y}{\max_{x \in [0; 2]} y}.$$

VẤN ĐỀ 7: BÀI TOÁN THỰC TẾ

1 PHƯƠNG PHÁP.

DẠNG 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

DẠNG 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

2 BÀI TẬP.

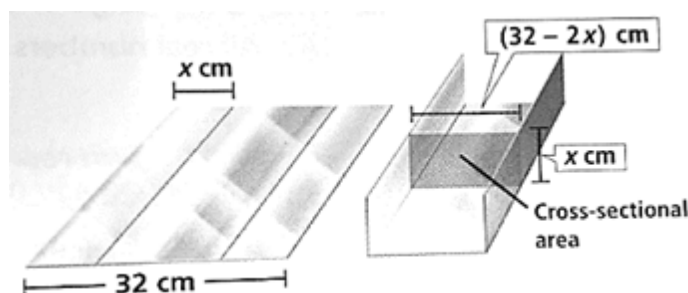
Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

- Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.
- Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất ?

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất ?



Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

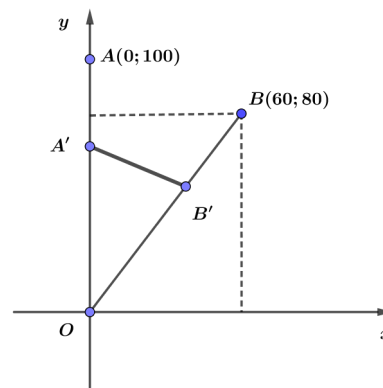
Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm

$A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ

$B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu ?



Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$, có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

Câu 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x+4 & \text{ khi } x < 1 \\ x^2-4x+3 & \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Câu 3. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x = -3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Câu 5. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1;-2)$.

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2;0)$.

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Câu 9. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Câu 10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng hàm số

a) Có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Câu 12. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3m$. Tìm các giá trị m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B . Tìm tọa độ trung điểm của AB .

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) d không cắt (P) .

d) d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Câu 13. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B có hoành độ x_1 , x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Câu 14. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Câu 15. Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$.

b) $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1$ ($m \neq 0$).

Câu 16. Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2 \quad (m \neq 0).$ b) $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2 \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right).$

CHƯƠNG

III

HÀM SỐ BẬC HAI
VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$,

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+ Khi $a = 0$, $b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

+ Khi $a = b = 0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là một parabol có:

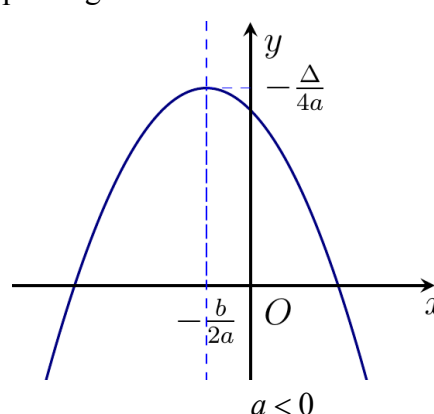
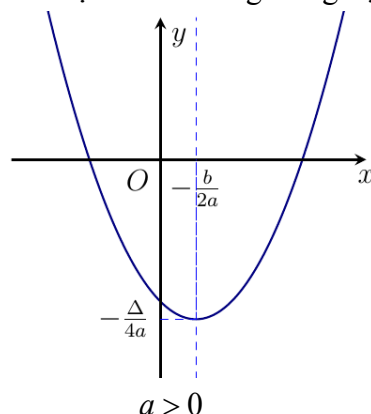
+ Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

+ Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

+ Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.

+ Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.



- Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
2. Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
3. Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
4. Vẽ parabol.

3. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

+ Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

+ Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

VÍ DỤ 1. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau.

An nói: Tôi đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (H.6.14) có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5m là 2,93 m. Từ đó tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12m.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

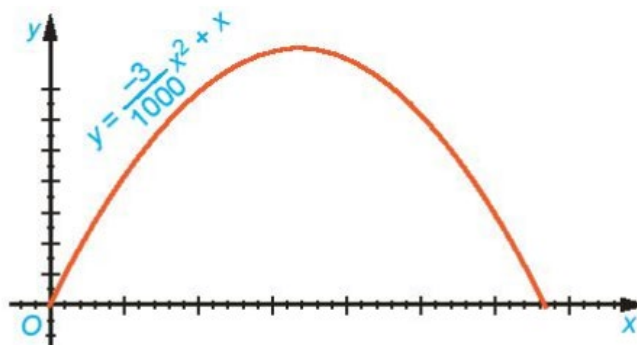
Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!



Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

VÍ DỤ 2. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O , y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

- Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.
- Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.



Hình 6.15

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VẤN ĐỀ 1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ $y = ax^2 + bx + c$ ĐỒNG BIẾN TRÊN KHOẢNG $(a; b)$

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Trường hợp $a = 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

$$+ \text{Trường hợp } a > 0: \text{Yêu cầu của bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (A; B) \subset \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$+ \text{Trường hợp } a < 0: \text{Yêu cầu của bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (A; B) \subset \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \end{cases}.$$

Lưu ý:

- Việc tìm điều kiện để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $(A; B)$ được làm tương tự.

- Có thể dựa vào định nghĩa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để thực hiện các bài toán trên.



BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0$, $-\frac{b}{2a} = m$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; m)$.

Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Kết luận: $m \geq 3$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -4x^2 + 4mx - m^2 + 2$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $a = -4 < 0$; $-\frac{b}{2a} = \frac{m}{2}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{m}{2}; +\infty\right)$.

Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -4$.

Kết luận: $m \leq -4$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2 + 1)x^2 - 4mx + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Ta có $a = m^2 + 1 > 0$, $-\frac{b}{2a} = \frac{2m}{m^2 + 1}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2m}{m^2 + 1}\right)$.

Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{2m}{m^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow (m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Kết luận: $m = 1$.

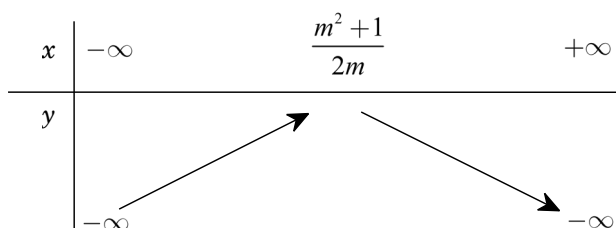
Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m^2 + 1)x + 3$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $a = m$, $-\frac{b}{2a} = \frac{m^2 + 1}{2m}$ với $m \neq 0$.

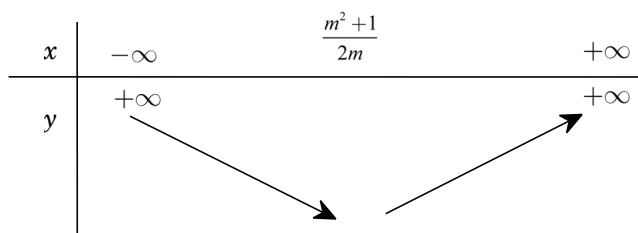
+ Trường hợp $m = 0$: Hàm số đã cho trở thành $y = -x + 3$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên không thể đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tức $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Trường hợp $m < 0$: Ta có $a = m < 0$ nên hàm số có BBT như sau:



Dựa vào BBT thấy hàm số không thể đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tức $m < 0$ bị loại.

+ Trường hợp $m > 0$: Ta có $a = m > 0$ nên hàm số có BBT như sau:



$$\text{Dựa vào BBT thấy yêu cầu của bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{1+m^2}{2m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1+m^2 \leq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Tóm lại: $m = 1$.

Câu 5. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 + 2(m-1)x + 2m+1$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.

Lời giải

Ta có $a = m$, $-\frac{b}{2a} = \frac{1-m}{m}$ với $m \neq 0$.

+ Trường hợp $m = 0$: Hàm số đã cho trở thành $y = -2x + 1$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng nghịch biến trên $(-1; 2)$. Tức $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Trường hợp $m < 0$: Ta có $a = m < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1-m}{m}; +\infty\right)$

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{1-m}{m} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq 0$, đúng với $m < 0$.

+ Trường hợp $m > 0$: Ta có $a = m > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1-m}{m}\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\frac{1-m}{m} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-3m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

Tóm lại: $m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + m + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

+ Trường hợp $m = 2 \Rightarrow y = -4x + 2019$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên nghịch biến trên $(-\infty; 3)$. Tức $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp $m \neq 2$: Dựa vào sự biến thiên hàm bậc hai ta thấy

$$f(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ \frac{m}{m-2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Từ các trường hợp trên, suy ra: $2 \leq m \leq 3$

Vậy $2 \leq m \leq 3$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = mx^2 - (2m+1)x + 3$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Lời giải

+ Trường hợp $m = 0 \Rightarrow f(x) = -x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tức $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp $m > 0$: $f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{2m+1}{2m}; +\infty\right)$.

Do đó: $f(x)$ đồng biến trên $(2; 3) \Leftrightarrow \frac{2m+1}{2m} \leq 2 \Leftrightarrow 2m+1 \leq 4m \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

+ Trường hợp $m < 0$: $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{2m+1}{2m}\right)$.

Do đó: $f(x)$ đồng biến trên $(2;3) \Leftrightarrow \frac{2m+1}{2m} \geq 3 \Leftrightarrow 2m+1 \leq 6m \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$ (Không thỏa mãn $m < 0$).

Từ các trường hợp trên, suy ra $m \geq \frac{1}{2}$.

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, ($a > 0$). Biết rằng $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{6a^2}{5a^2 + 2ab + b^2}$.

Lời giải

Do $a > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Từ đây ta có: $f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty) \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 4$.

Ta có $P = \frac{6a^2}{5a^2 + 2ab + b^2} = \frac{6}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 5} = \frac{6}{t^2 + 2t + 5}$, với $t = \frac{b}{a} \geq 4$.

Có $t^2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 4 \geq 29, \forall t \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 4$.

Do đó $\text{Max}P = \frac{6}{29}$, đạt được khi $\frac{b}{a} = 4$.

VẤN ĐỀ 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{pmatrix}$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(1; 5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy (P) có phương trình là $y = 2x^2 + x + 2$.

Câu 2. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P) .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} -\frac{2}{2a} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4+8c}{-8} = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Vậy (P) có phương trình là $y = -2x^2 - 2x + 5$.

Câu 3. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a.1^2 + b.1 + c = -1 \\ a.2^2 + b.2 + c = 3 \\ a.(-1)^2 + b.(-1) + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow (P): y = x^2 + x - 3.$$

Vậy (P) có phương trình là $y = x^2 + x - 3$.

Câu 4. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1; -1)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$, do hàm số $\mathcal{A}(1; -1)$ đạt giá trị lớn nhất nên $a < 0$.

$$\text{Do đó theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 5 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại đỉnh của nó.

Lời giải

Đỉnh của (P) là $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết, I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên $-4m - 2 = 3.1 - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$.

Câu 6. Tìm parabol $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết rằng hoành độ đỉnh của (P) bằng -3 và (P) đi qua điểm $M(-2; 1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} -\frac{4}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases}.$$

Vậy parabol (P) có phương trình là $y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$.

Câu 7. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số  có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2; 4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \text{ (nhận)} \\ c = 6 \end{cases}.$$

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là: $x^2 - 4x + m = 0$. (*)

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của (*). Ta có $OA = 3OB \Rightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$.

$$\bullet \text{ TH1: } x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = 3 < 4.$$

$$\bullet \text{ TH2: } x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 \\ x_B = -2 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = -12 < 4.$$

Vậy $m \in \{-12; 3\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3$.

Lời giải

Ta có $a = 4 > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm hướng lên và có hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_I = \frac{m}{2}$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$ (Vì $m > 0$).

Từ các trường hợp trên, ta được $m \in \left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}$.

VẤN ĐỀ 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$.

+ Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của (P) .

+ Tương giao của (P) với trục Ox .

+ Tìm điều kiện để các giao điểm của (P) và trục Ox thỏa mãn điều kiện nào đó.



PHƯƠNG PHÁP.

Thường dùng đến các kết quả sau:

+ Đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ là trục đối xứng của (P) , điểm $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ là đỉnh của (P) .

+ Nghiệm (nếu có) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox .

+ Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm của (P) và trục Ox . Khi đó:

$$- A, B \text{ cùng ở bên trái đối với trục } Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B < 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$$

$$- A, B \text{ cùng ở bên phải đối với trục } Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B > 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$$

$$- A, B \text{ cùng ở một bên đối với trục } Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$$

$$- A, B \text{ không ở cùng một bên đối với trục } Oy \Leftrightarrow x_A \cdot x_B < 0.$$

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho parabol $(P): y = x^2 + 5x - 6$. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của parabol (P) , tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Lời giải

+ Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}, -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{4}$, do vậy:

(P) có trục đối xứng là $x = -\frac{5}{2}$;

(P) có đỉnh là $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{49}{4}\right)$.

+ Hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với trục hoành là $(1; 0), (-6; 0)$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$. Xét dấu của Δ, b, c biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Lời giải

(P) đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Dạng 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $d: y = mx + n$

- + Biện luận số điểm chung của (P) và trục hoành.
- + Tìm điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

1 PHƯƠNG PHÁP.

- + Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*).
- (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt.
- (P) và trục hoành có một điểm chung (còn gọi là tiếp xúc với nhau) $\Leftrightarrow (*)$ có một nghiệm.
- (P) và trục hoành không có điểm chung $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm.
- + d và (P) tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + n$ có nghiệm kép.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2 + 3x + m = 0$ (*).

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$.

Vậy $m < \frac{9}{4}$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục Ox không có điểm chung.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*).

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$. Vậy $m > 2$.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để d tiếp xúc với (P) .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 + x + 2 = ax + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + (1-a)x + 1 = 0 \quad (1).$$

d tiếp xúc với $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (1-a)^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Vậy $a \in \{-1; 3\}$.

VẤN ĐỀ 4. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Dạng 1. Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ để biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.

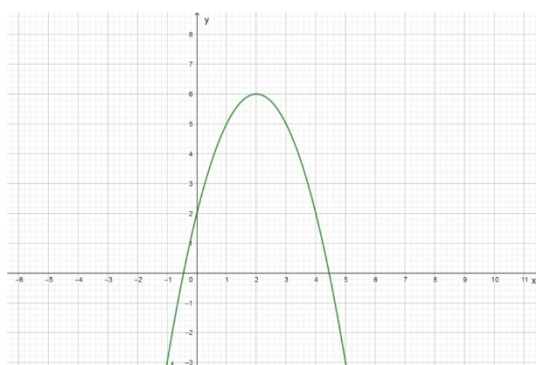
1 PHƯƠNG PHÁP.

- Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$.
- Tùy vào giá trị của $g(m)$ để chỉ ra số giao điểm của đường thẳng $d: y = g(m)$ và (C) .
- Số giao điểm của d và (C) cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.

***Lưu ý:** Đường thẳng $d: y = g(m)$ là đường thẳng có phương ngang và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-x^2 + 4x + 2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.



Lời giải

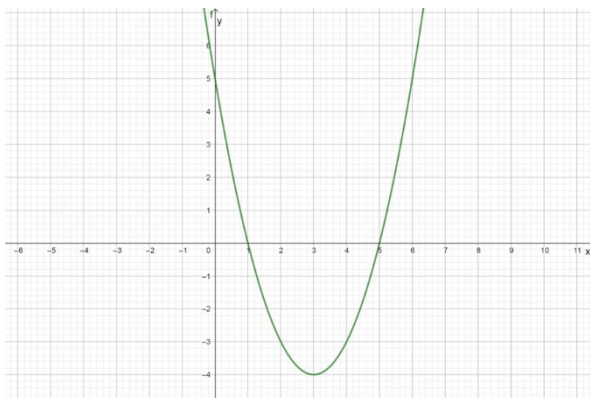
Phương trình $-x^2 + 4x + 2 = m$ (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ và đường thẳng $d: y = m$.

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 6$.

Vậy $m < 6$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị (P) như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.



Lời giải

Phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = -3m + \frac{11}{2}$ (1).

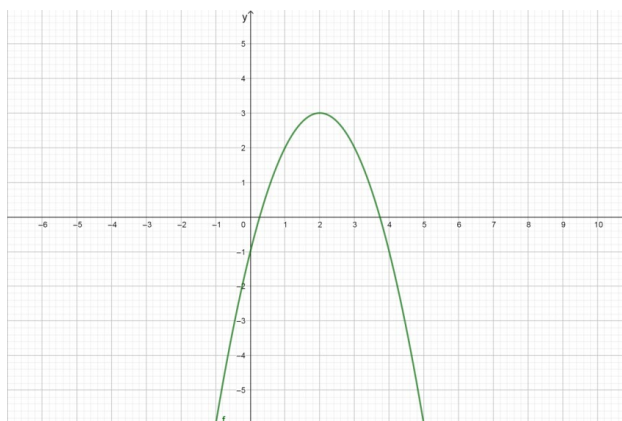
Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) $y = x^2 - 6x + 5$ và đường thẳng (d) $y = -3m + \frac{11}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4 < -3m + \frac{11}{2} < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.

Vậy $\frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.

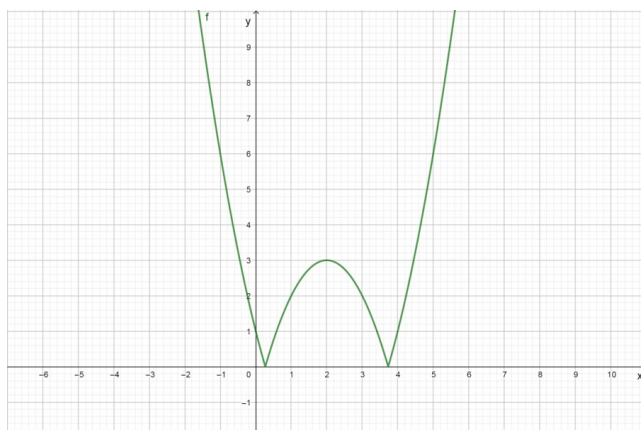
Câu 3. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



Lời giải

Đồ thị (C) của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ bao gồm:

- Phần 1: Là phần tính từ Ox trở lên của (P) .
- Phần 2: Là phần đối xứng của phần phía dưới Ox của (P) qua trục Ox .



Phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của $(C) y = |ax^2 + bx + c|$ và đường thẳng $d: y = m$.

Số nghiệm của phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ bằng số giao điểm của (C) và (d) .

Dựa vào đồ thị (C) ta thấy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ suy ra $0 < m < 3$.

Vậy $0 < m < 3$.

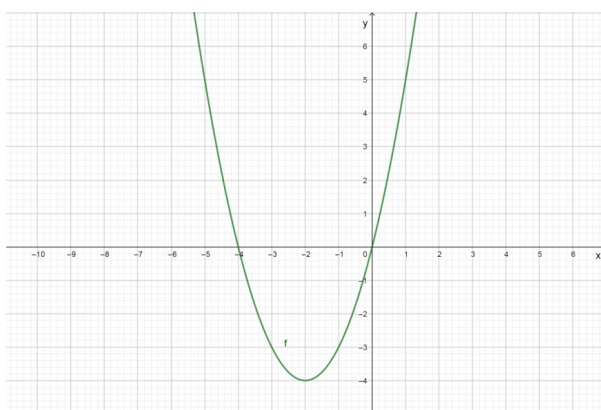
Câu 4. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3; 1)$.

Lời giải

Phương trình $x^2 + 4x - m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = m$ (1).

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + 4x$ và đường thẳng $d: y = m$ (cùng phương với trục Ox , cắt trục tung tại điểm có tung độ m).

Vẽ đồ thị (P)



Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3; 1)$ khi và chỉ khi $-3 < m < 5$. Vậy $-3 < m < 5$.

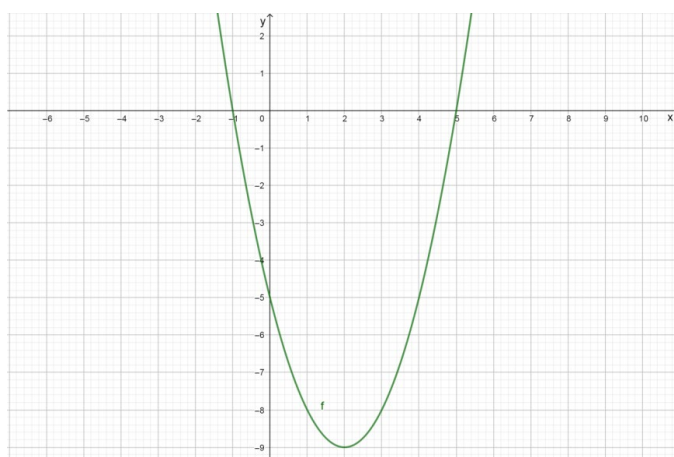
Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2019]$ để phương trình $|x^2 - 4|x - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

PT: $|x^2 - 4|x - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x - 5|| = m(1).$

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị (P) của hàm số $y = |x^2 - 4|x - 5||$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ ta thấy nó có đồ thị (P_1) như hình sau đây:



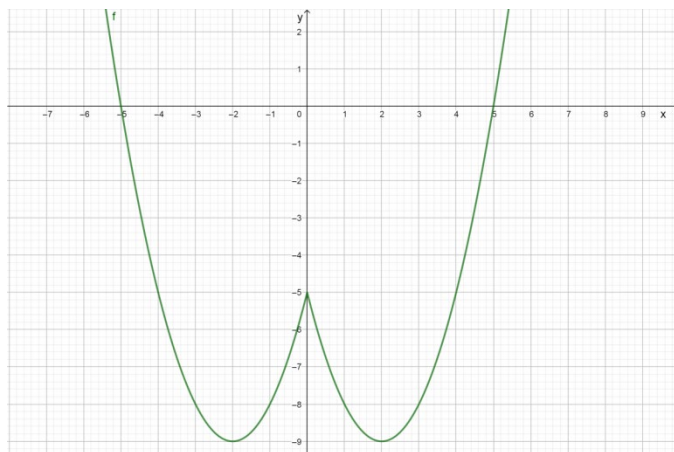
Xét hàm số $y = x^2 - 4|x - 5|$ ta thấy đây là hàm số chẵn nên đồ thị (P_2) của nó nhận Oy làm trục đối xứng.

Mà $y = x^2 - 4|x - 5| = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$ nên (P_2) gồm hai phần:

-Phần 1: Là phần bên phải Oy của (P_1) kể cả giao điểm của (P_1) và Oy .

-Phần 2: Là phần đối xứng của phần 1 qua trục Oy .

Tức (P_2) như hình sau đây:



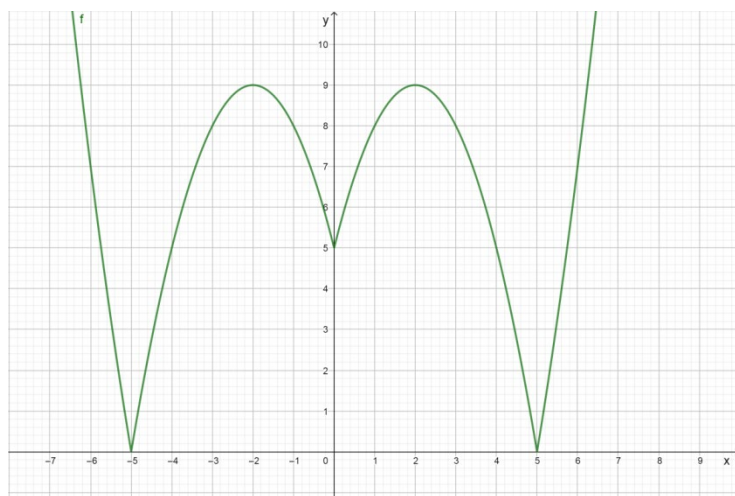
Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|$, ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Tức (P) gồm hai phần:

-Phần 3: Là phần phía trên Ox của (P_2) kể cả các giao điểm của (P_2) và Ox .

-Phần 4: Là phần đối xứng của phần phía dưới Ox của (P_2) qua trục Ox .

Tức (P) như hình sau đây



Quan sát (P) ta thấy: yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2019] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2010 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán

Dạng 2. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai



PHƯƠNG PHÁP.

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.



BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm toạ độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $d: y = -x + 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2 - 4x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 4$; $x = -2 \Rightarrow y = 5$.

Toạ độ giao điểm của (P) và d là $A(-1; 4), B(-2; 5)$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) .
Tìm toạ độ tiếp điểm khi đó.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là

$$x^2 - 3x + 2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - (3 + m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 3 \end{cases}.$$

Để d tiếp xúc với (P) thì $m = -3$.

Toạ độ tiếp điểm khi đó là $M(0; 2)$.

Nhận xét: Từ phương trình (1) ta tính $\Delta' = (m+3)^2$. Để d tiếp xúc với (P) thì (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 3. Cho Parabol (P) $y = x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1).

+ Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 = 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 3m^2 + 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - m^2 - 4 = 3m^2 + 16 \Leftrightarrow m = 2.$$

So sánh với điều kiện suy ra $m = 2$.

Câu 4. Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$$\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Để d cắt (P) tại 2 điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

Vậy với $0 \leq m \leq 2$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó: } y_1 = (m+1)x_1 - m^2 - \frac{1}{2}; y_2 = (m+1)x_2 - m^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2) = (m+1)(x_1 + x_2) - 2m^2 - 1 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow T = 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 - 2(m+1) = -2m^2 + 2m - 2.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị của tham số m để hàm số: $T = -2m^2 + 2m - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có bảng biến thiên:

m	0	$\frac{1}{2}$	2
$-2m^2 + 2m - 2$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T = -6$ đạt được khi $m = 2$.

Dạng 3. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.

iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^2 - 4$ tại hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tính $y_A + y_B$.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = x^2 - 5x$ và $y = -x^2 - 3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ y = -x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = -x^2 - 3 \\ y = -x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = -x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ y = -x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \\ x = 2 \\ y = -8 \end{cases}.$$

Không mất tổng quát ta giả sử $A(1; -5)$ và $B(2; -8)$, suy ra $y_A + y_B = -13$.

Câu 2. Biết rằng parabol $y = x^2 - x + 1$ cắt parabol $y = -x^2 + 2x + 4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 . Tính giá trị biểu thức $P = x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$$x^2 - x + 1 = -x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0. \quad (*)$$

- Theo giả thiết ta có x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (*) nên
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- Ta có $P = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 3 \left(-\frac{3}{2} \right) \right] = \frac{81}{8}.$$

Vậy $P = \frac{81}{8}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2 + 2x + 3m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx + 4$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đề bài cho là

$$(m+1)x^2 + 2x + 3m - 2 = x^2 + 2mx + 4 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0. \quad (1)$$

- Phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}. \quad (2)$$

- Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) và giả thiết cho, ta có

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = \frac{2-m}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = \frac{2-m}{m} \\ \frac{(3m-4)(2-m)}{m^2} = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \quad (3)$$

- Giải phương trình (3) ta được $m = 2$ và $m = \frac{2}{3}$ đều thỏa mãn (2), nên đó là hai giá trị cần tìm của tham số m .

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hai parabol $y = x^2 + mx + (m+1)^2$ và

$y = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $P = |x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$$x^2 + mx + (m+1)^2 = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1) \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ -m-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1. \quad (2)$$

Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} P = |x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2)| &\Rightarrow P = \left| \frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 3(m+1) \right| = \frac{1}{2} |(m+1)(m+9)| = \frac{1}{2} |m+1| |m+9| \\ &= \frac{1}{2} (-m-1)(m+9) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(-m-1) + (m+9)}{2} \right]^2 = 8. \quad (3) \end{aligned}$$

Dấu “=” ở bất đẳng thức (3) xảy ra khi và chỉ khi $-m-1 = m+9$ hay $m = -5$ thỏa mãn (2).

Vậy $\max P = 8$ đạt được khi $m = -5$ và do đó $m = -5$ chính là giá trị của tham số m cần tìm.

VẤN ĐỀ 5. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.



PHƯƠNG PHÁP.

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.



BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = (1 + m)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3$ (P_m). Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = (1 + m)x_0^2 - 2(m - 1)x_0 + m - 3, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 2x_0 + 1)m + x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1; 0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1$ (P_m). Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số trên.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = (m - 1)x_0^2 + 2mx_0 - 3m + 1, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x_0^2 + 2x_0 - 3)m - x_0^2 + 1 - y_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \\ y_0 = 1 - x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -8 \end{cases}.$$

Vậy họ (P_m) luôn đi qua 2 điểm cố định $M_1(1; 0)$ và $M_2(-3; -8)$.

Câu 3. Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số $(P_m): y = m^2x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = m^2x_0^2 + 2(m-1)x_0 + m^2 - 1, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x_0^2 + 1)m^2 + 2x_0m - 2x_0 - 1 - y_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 1 = 0 \\ 2x_0 = 0 \\ -2x_0 - 1 - y_0 = 0 \end{cases} \quad (I). \text{ Do phương trình } x_0^2 + 1 = 0 \text{ vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.}$$

Vậy không có điểm nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 + (2m-3)x + 5 - 4m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị (P_m) của hàm số đã cho và đường thẳng $(d_m): y = 2mx - 4m + 3$ luôn có một điểm chung cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = 2mx_0 - 4m + 3, \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (2x_0 - 4)m + 3 - y_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(2; 3).$$

Thay tọa độ điểm M và phương trình của (P_m) ta được $3 = 2^2 + (2m-3).2 + 5 - 4m$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (đúng với mọi } m \text{)}.$$

Vậy $M(2; 3)$ là điểm chung cố định của (P_m) và (d_m) .

Câu 5. Cho các hàm số $(P_m): y = x^2 - (m+3)x + 4m - 7, (C_m): y = mx^2 - 3(m+1)x - 4m + 9,$
 $(d_m): (m-1)x + my + 4 - m = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , các đồ thị của các hàm số đã cho luôn cùng đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua.

Khi đó $(m-1)x_0 + my_0 + 4 - m = 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 - 1)m + 4 - x_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ 4 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3).$$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (P_m) ta được $-3 = 4^2 - (m+3).4 + 4m - 7$

$$\Leftrightarrow -3 = -3 \text{ (đúng với mọi } m \text{)}.$$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (C_m) ta được $-3 = m.4^2 - 3(m+1).4 - 4m + 9$

$$\Leftrightarrow -3 = -3 \text{ (đúng với mọi } m \text{)}.$$

Vậy các đồ thị $(P_m); (C_m); (d_m)$ luôn cùng đi qua một điểm cố định $M(4; -3)$.

VẤN ĐỀ 6: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập cho trước

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai, ta lập bảng biến thiên cho hàm số đó trên tập hợp đã cho. Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số trên tập hợp đã cho.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3; 5]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có hệ số: $a = 1, b = -4, c = -3$.

$$\text{Ta có: } \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2.1} = 2; \frac{-\Delta}{4a} = \frac{(-4)^2 - 4.(-3)}{4.1} = \frac{-28}{4} = -7.$$

Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[-3; 5]$ là:

x	-3	2	5
y	18	-7	2

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min_{x \in [-3; 5]} y = y(2) = -7$ và $\max_{x \in [-3; 5]} y = y(-3) = 18$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[2; 7]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có $a = -2, b = 4, c = 3$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$; $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}{4 \cdot (-2)} = 5$

Vì $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$, nghịch biến trên $(1; +\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[2; 7]$ là:

x	2	7
y	3	-67

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min_{x \in [2; 7]} y = y(7) = -67$ và $\max_{x \in [2; 7]} y = y(2) = 3$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ trên $[-1; 2]$.

Lời giải

Đặt $t = x^2$. Với $x \in [-1; 2]$ ta có $t \in [0; 4]$. Hàm số trở thành $f(t) = t^2 - 4t - 3$ với $t \in [0; 4]$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	4
y	-3	-7	-3

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\max_{x \in [-1; 2]} y = \max_{t \in [0; 4]} f(t) = -3 \text{ khi } \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\min_{x \in [-1; 2]} y = \min_{t \in [0; 4]} f(t) = -7 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } x = \sqrt{2}.$$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} + 4\sqrt[3]{x^2 + 1} + 3$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ ($t \geq 1$) $\Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1}$. Hàm số trở thành $f(t) = -2t^2 + 4t + 3$.

Bảng biến thiên:

t	1	$+\infty$
$f(t)$	5	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\max_{t \in [1; +\infty]} y = \max_{t \in [1; +\infty]} f(t) = 5 \text{ khi } t = 1 \text{ hay } x = 0$$

Giá trị nhỏ nhất của y không tồn tại.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ trên $[-2; 4]$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow y = (x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) + 2$

Đặt $t = x^2 + 2x$. Xét hàm số $t(x) = x^2 + 2x$ với $x \in [-2; 4]$.

Bảng biến thiên:

x	-2	-1	4
$t(x)$	0	-1	24

Từ bảng biến thiên ta có: $t \in [-1; 24]$ với $x \in [-2; 4]$.

Do đó, hàm số y ban đầu có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) trên $[-2; 4]$ bằng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = t^2 - t + 2$ với $t \in [-1; 24]$

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	24
$f(t)$	4	$\frac{7}{4}$	554

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max_{t \in [-1; 24]} f(t) = 554 \text{ khi } t = 24 \text{ hay } x = 4.$$

$$\min_{x \in [-2; 4]} y = \min_{t \in [-1; 24]} f(t) = \frac{7}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x^2 + 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}.$$

Câu 6. Cho các số x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Lời giải

Ta có: $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy$, khi đó $P = -2t^2 + 2t + 1$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + y^2 \geq -2xy \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} 1 + xy \geq 2xy \\ 1 + xy \geq -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1.$$

$$\text{Do đó: } -\frac{1}{3} \leq t \leq 1$$

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(t)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\min P = \min_{t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{1}{9} \text{ khi } t = -\frac{1}{3} \text{ hay } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}}, y = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, y = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\max P = \max_{t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{3}{2} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{4} \\ x = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a > 0$ thì $\min y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $a < 0$ thì $\max y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

Trường hợp tập xác định khác $\mathbb{R}$, ta kẻ bảng biến thiên của hàm số trên tập đó để có được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_l = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y_l = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. (Thỏa mãn)

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính abc .

Lời giải

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $abc = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}$, suy ra $y_I = m \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right) - m - 1 = \frac{-m^2 - m - 1}{m}$

TH1: Khi $m < 0$ thì $\max y = y_I = \frac{-m^2 - m - 1}{m}$ tại điểm $x_I = \frac{1}{m}$.

$$y_I = f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{-m^2 - m - 1}{m} - 1 + 1 = \frac{-m^2 - 2m - 1}{m} + 1 = \frac{-(m+1)^2}{m} + 1 \geq 0 + 1 = 1.$$

Vậy $\min y_I = 1$ tại điểm $m = -1$.

TH2: Khi $m > 0$ thì hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất, chỉ có giá trị nhỏ nhất.

TH3: Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -2x - 1$ đã cho là hàm số bậc nhất, không có giá trị lớn nhất.

Kết luận: $m = -1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = -(m-1)^2 x^2 + 2(m-1)^2 x + 1 + 2m$. Với $m \neq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{\min_{x \in [0;2]} y}{\max_{x \in [0;2]} y}.$$

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{-2(m-1)^2}{-2(m-1)^2} = 1$, suy ra $y_I = -(m-1)^2 + 2(m-1)^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$

Do $a = -(m-1)^2 < 0$, $\forall m \neq 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	2
y	$2m+1$	m^2+2	$2m+1$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{x \in [0;2]} y = m^2 + 2$ tại $x = 1$, $\min_{x \in [0;2]} y = 2m + 1$ tại $x = 0$ hoặc $x = 2$.

$$B = \frac{\min_{x \in [0;2]} y}{\max_{x \in [0;2]} y} = \frac{2m+1}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}(m^2 + 4m + 4) - \frac{1}{2}(m^2 + 2)}{m^2+2} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } (m+2)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow B \geq -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy $\min B = -\frac{1}{2}$ tại $m = -2$.

VẤN ĐỀ 7: BÀI TOÁN THỰC TẾ

1 PHƯƠNG PHÁP.

DẠNG 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

DẠNG 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

- Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.
- Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Lời giải

a. Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t-1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t = 1$ giây.

b. Ta có: $-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

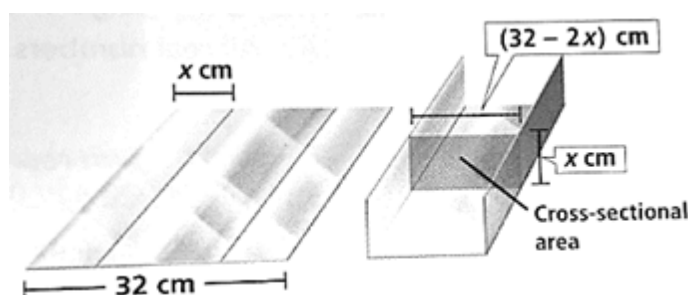
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$ (tính bằng mét), t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t \Rightarrow h(3) = 48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất ?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

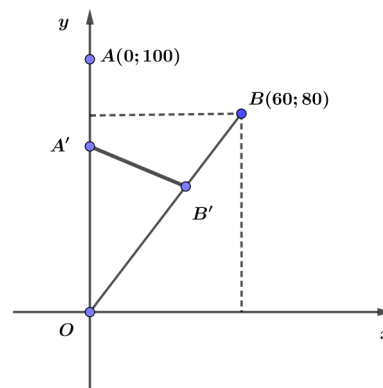
Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$\text{Ta có: } S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16).$$

$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128.$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.
 Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.
 Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.
 Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu ?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60-6t; 80-8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60-6t; -20-3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0;10]$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0;10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

$$\text{Ta có: } f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000.$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$, có đồ thị là (P) .

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .
- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

Lời giải

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 8$.

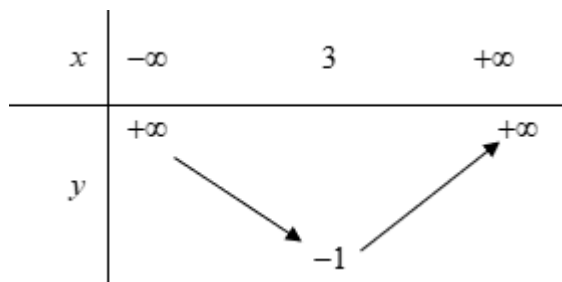
Tọa độ đỉnh $I(3; -1)$.

Trục đối xứng $x = 3$.

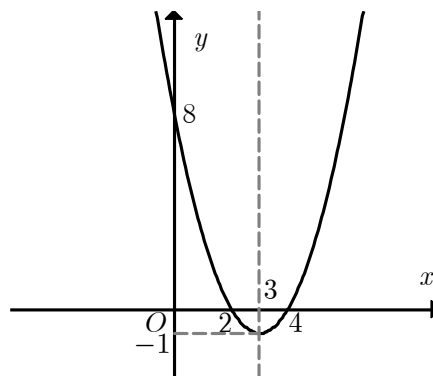
Hệ số d : bề lõm quay lên trên.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Bảng biến thiên



Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 8)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(4; 0)$ và $C(2; 0)$.



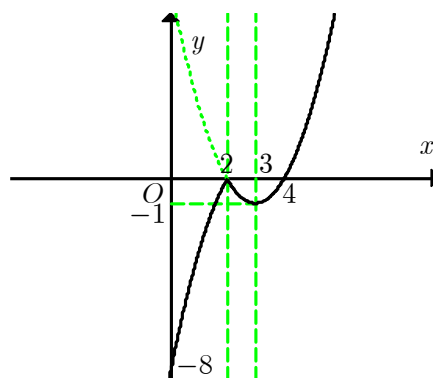
b)

Ta có

$$y = (x-4)|x-2| = \begin{cases} (x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 \geq 0 \\ -(x-4)(x-2) & \text{khi } x-2 < 0 \end{cases} \text{ hay } y = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{khi } x \geq 2 \\ -(x^2 - 6x + 8) & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ suy ra đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ như sau:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải đường $x = 2$ ta giữ nguyên.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên trái đường $x = 2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành.



Phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0 \Leftrightarrow (x-4)|x-2| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-4)|x-2|$ và đường thẳng $y = -m$ (song song với Ox). Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị và đường thẳng.

Dựa vào đồ thị, ta có

- $\begin{cases} -m > 0 \\ -m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$: phương trình có 1 nghiệm duy nhất.
- $\begin{cases} -m = 0 \\ -m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$: phương trình có 2 nghiệm.
- $-1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: phương trình có 3 nghiệm.

Câu 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Khi $x < 1$ thì $y = -x + 4$.

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 3$, ta được điểm $A(1; 3)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$, ta được điểm $B(0; 4)$.

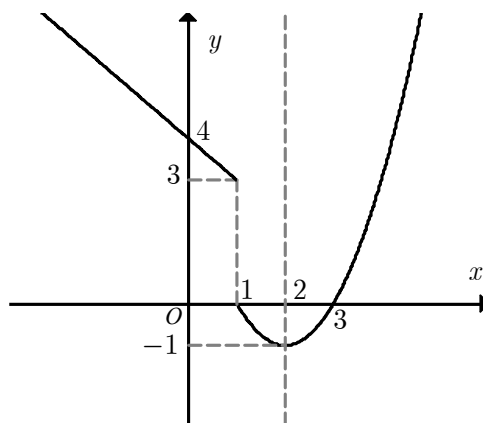
Khi $x \geq 1$ thì $y = x^2 + 2x - 3$.

Tọa độ đỉnh $I(2; -1)$.

Hệ số $a = -1 < 0$: bề lõm quay lên trên.

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 0$, ta được điểm $M(1; 0)$.

Cho $x = 3 \Rightarrow y = 0$, ta được điểm $N(3; 0)$.



Câu 3. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

- a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- b) Có trục đối xứng $x = -3$.
- c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.
- d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

- a) Vì parabol (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên điểm $A(2; 0)$ thuộc (P) .

Thay $x = 2, y = 0$ vào (P) , ta được $0 = 4a + 6 - 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 3x - 2$.

- b) Vì (P) có trục đối xứng $x = -3$ nên $-\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

c) Vì (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \Delta = 11a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 9 + 8a = 11a \end{cases} \Leftrightarrow a = 3.$$

Vậy $(P): y = 3x^2 + 3x - 2$.

d) Vì (P) đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên suy ra $\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{3}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases} : \text{vô nghiệm.}$

Vậy không có (P) nào thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = 2x^2 + x + 2$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 2$.

c) Vì (P) đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} 9a + 3b + 2 = -4 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -2 \\ b = \frac{3}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy (P): $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$.

d) Vì (P) đi qua điểm $B(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases} a-b+2=6 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ b^2-4ac=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-8(4+b)=4+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4+b \\ b^2-9b-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}.$$

• Với $\begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases}$ ta có (P): $y = 16x^2 + 12x + 2$.

• Với $a=1, b=-3$ ta có (P): $y = x^2 - 3x + 2$.

Vậy (P): $y = 16x^2 + 12x + 2$ hoặc (P): $y = x^2 - 3x + 2$.

Câu 5. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1;-2)$.

Lời giải

a) Vì (P) có trục đối xứng $x=1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a \Leftrightarrow b = -4$.

Hơn nữa (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;4)$ nên $2.0 + b.0 + c = 4 \Leftrightarrow c = 4$.

Vậy (P): $y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(-1;-2)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ 16 - 8c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy (P): $y = 2x^2 + 4x$.

c) Vì (P) đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$ nên suy ra $\begin{cases} 2.0 + b.0 + c = -1 \\ 32 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -\frac{31}{4} \end{cases}.$

Vậy (P): $y = 2x^2 - \frac{31}{4}x - 1$.

d) Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -2 nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a \Leftrightarrow b = 8$.

Hơn nữa (P) đi qua điểm $N(1; -2)$ nên $2 + b + c = -2 \Leftrightarrow 2 + 8 + c = -2 \Leftrightarrow c = -12$.

Vậy (P): $y = 2x^2 + 8x - 12$.

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2;0)$.

Lời giải

a) Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$ nên suy ra $\begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = -x^2 + 2$.

b) Vì (P) có đỉnh $I(0;3)$ và giao với Ox tại $A(-2;0)$ nên suy ra $\begin{cases} c = 3 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy (P): $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

Lời giải

a) Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua $M(-2;1)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Vậy (P): $y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$.

b) Vì (P) có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$ nên suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 9a - 12 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 9a + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Lời giải

a) Vì (P) đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$ nên suy ra $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}.$

Vậy $(P): y = -x^2 + 2x$.

b) Gọi A và B là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là -1 và 2 . Suy ra $A(-1;0)$, $B(2;0)$.

Gọi C là giao điểm của (P) với trục Oy có tung độ bằng -2 . Suy ra $C(0;-2)$.

Theo giả thiết, (P) đi qua ba điểm A , B , C nên ta có $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}.$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 2$.

c) Gọi E và F là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là 1 và 3 . Suy ra $E(1;0)$, $F(3;0)$.

Theo giả thiết, (P) đi qua ba điểm M , E , F nên ta có

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = -6 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ 15a + 3b = -6 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = -6 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -2x^2 + 8x - 6$.

Câu 9. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

- a) Có đỉnh $I(2; -1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .
- b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.
- c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0; 1)$, $N(2; 1)$.
- d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5; 6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Lời giải

$$\text{a) Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(2; -1) \text{ nên ta có } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \quad (1)$$

Gọi A là giao điểm của (P) với trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 . Suy ra $A(0; -3)$.

Theo giả thiết, $A(0; -3)$ thuộc (P) nên $a.0 + b.0 + c = -3 \Leftrightarrow c = -3$.

(2)

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ } \begin{cases} b = 4a \\ 16a^2 + 8a = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -\frac{1}{2}$; $b = -2$; $c = -3$.

$$\text{Vậy } (P): y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3.$$

b) Vì (P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ nên

$$\begin{cases} 0 = a.1 + b.1 + c \\ 0 = a.9 + b.3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hơn nữa, (P) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = -1$ nên

$$-\frac{\Delta}{4a} = -1 \Leftrightarrow \Delta = 4a \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 4a. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn Ox .

$$\text{Vậy } (P): y = x^2 - 4x + 3.$$

c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4a = 0$.

(1)

Hơn nữa, (P) đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$ nên ta có $\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$.

(2)

Từ (1) và (2), ta có hệ $\begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$.

Vậy $(P): y = x^2 - 2x + 1$.

d) Vì (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$ nên $-\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow b = -6a$.

(1)

Hơn nữa, (P) qua $M(-5;6)$ nên ta có $6 = 25a - 5b + c$.

(2)

Lại có, (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-2 = a.0 + b.0 + c \Leftrightarrow c = -2$.

(3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ $\begin{cases} b = -6a \\ 25a + 30a - 2 = 6 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{8}{55}; b = -\frac{48}{55}; c = -2$.

Vậy $(P): y = \frac{8}{55}x^2 - \frac{48}{55}x - 2$.

Câu 10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng hàm số

a) Có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

Lời giải

a) Vì hàm số giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 8a = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 6$.

Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$.

b) Vì hàm số giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0; -1)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = -12a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 + 16a = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $a = -1$, $b = 4$, $c = -1$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 4x - 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Lời giải

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$ nên ta có $4m + 4m - 3m - 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$. Do đó tọa độ đỉnh $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết, đỉnh I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên ta có

$$-4m - 2 = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Theo câu b) ta có tung độ đỉnh $y = -\frac{\Delta}{4a} = -4m - 2$.

$$\text{Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng } -10 \text{ khi } \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3m$. Tìm các giá trị m để

- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ trung điểm của AB .
- d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.
- d không cắt (P) .
- d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$-x^2 + 4x - 2 = -2x + 3m \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3m + 2 = 0. \quad (*)$$

- Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m + 2) > 0 \Leftrightarrow 7 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{3}.$$

Tọa độ trung điểm AB có dạng $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ với x_A, x_B là hai nghiệm của $(*)$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A + x_B = 6$, suy ra $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$.

$$\text{Ta có } \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2x_A + 3m) + (-2x_B + 3m)}{2} = -(x_A + x_B) + 3m = -6 + 3m.$$

Vậy $I(3; -6 + 3m)$.

- Để d và (P) có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m + 2) = 0 \Leftrightarrow 7 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Với $m = \frac{7}{3}$, phương trình $(*)$ có nghiệm kép (nghiệm duy nhất) $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

Thay $x = 3$ vào hàm số $y = -x^2 + 4x - 2$, ta được $y = 1$.

Vậy tọa độ điểm chung là $(3; 1)$.

- c) Để d không cắt (P) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm
 $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - (3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 7 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}$.
- d) Gọi $M(x_M, y_M)$ là giao điểm của d và (P) . Giao điểm này nằm trên đường thẳng $y = -2$ suy ra $y_M = -2$.

Mặt khác M thuộc (P) nên thay $x = x_M$ và $y = y_M = -2$ vào (P) , ta được

$$-2 = -x_M^2 + 4x_M - 2 \Leftrightarrow x_M^2 - 4x_M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \Rightarrow M(0; -2) \\ x_M = 4 \Rightarrow M(4; -2) \end{cases}$$

- Với $M(0; -2)$. Vì M cũng thuộc d nên ta có $-2.0 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.
- Với $M(4; -2)$. Vì M cũng thuộc d nên ta có $-2.4 + 3m = -2 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

- a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.
- b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - (4 + m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 + m \end{cases}$$

- a) Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi $4 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Với $x = 0$ thì $y = 3$ suy ra $A(0; 3) \in Oy$. Với $x = 4 + m$ thì $y = m^2 + 4m + 3$ suy ra $B(4 + m; m^2 + 4m + 3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA . Suy ra $BH = |x_B| = |4 + m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{\Delta OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m + 4| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |m + 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

- b) Giả sử $x_1 = 0$ và $x_2 = 4 + m$. Theo giả thiết, ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow 0 + (4 + m)^3 = 8 \Leftrightarrow 4 + m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2. Áp dụng cho trường hợp không tìm cụ thể x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8. \\ (*)$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (4+m)x = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 + m \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}. \text{ Thay vào } (*), \text{ ta được } (4+m)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (4+m) = 8 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 14. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi m .

$$\Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1; -3)$ hoặc $A_2(-3; 13)$ với mọi giá trị của m .

Câu 15. Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

$$\text{a) } y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3. \quad \text{b) } y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1 \quad (m \neq 0).$$

Lời giải

a) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (8m-4+a)x + 8m^2 - 3 - b = 0.$$

(1)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (8m-4+a)^2 - 8(8m^2-3-b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(-4+a)m + (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4+a = 0 \\ (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$

b) Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.

Phương trình hoành độ giao điểm $mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = ax + b$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 + a)x + 4m - 1 - b = 0.$$

(2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m - 1 + a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 8m(-1 + a) + (-1 + a)^2 - 16m^2 + 4m(1 + b) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(2a + b - 1)m + (-1 + a)^2 = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 1 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy parabol $y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 16. Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ ($m \neq 0$). b) $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ ($m \neq \frac{1}{2}$).

Lời giải

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 2mx - m^2 + 4m + 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2m)x + c + m^2 - 4m - 2 = 0.$$

(1)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b - 2m)^2 - 4a(c + m^2 - 4m - 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - a)m^2 - 4(b - 4a)m + b^2 - 4ac + 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b - 4a = 0 \\ b^2 - 4ac + 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Gọi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ là parabol cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4m + 2)x + c + 4m^2 + 2 = 0.$$

(2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (b - 4m + 2)^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow [4m - (b + 2)]^2 - 4a(c + 4m^2 + 2) = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(1 - a)m^2 - 8(b + 2)m + (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0, \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow 16(1 - a)m^2 - 8(b + 2)m + (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b + 2 = 0 \\ (b + 2)^2 - 4ac - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x - 2$.



HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. SỰ BIẾN THIÊN

Câu 1: Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 2: Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Trên khoảng $(-\infty; 1)$ hàm số đồng biến.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
C. Trên khoảng $(3; +\infty)$ hàm số nghịch biến.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

Câu 4: Hàm số $y = x^2 - 4x + 11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(-2; +\infty)$ B. $(-\infty; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 2)$

Câu 5: Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 6: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là

- A. $(-\infty; -4)$. B. $(-\infty; -4)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 9: Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-1; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Câu 10: Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; 3)$ **B.** $(3; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 6)$ **D.** $(6; +\infty)$

Câu 12: Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A.** $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$?

- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- A.** $b \geq 0$. **B.** $b = -12$. **C.** $b \geq -12$. **D.** $b \geq -9$.

Câu 15: Hàm số $y = -x^2 + 2(m-1)x + 3$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

- A.** $m \leq 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \leq 2$. **D.** $0 < m \leq 2$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

- A.** $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $-3 \leq m \leq 1$. **D.** $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 17: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập nào?

- A.** $(-10; 5)$. **B.** $[5; 10)$. **C.** $(5; 10)$. **D.** $(-10; 5]$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1; 2)$.

- A.** $m \leq 1$. **B.** $-2 \leq m \leq 1$. **C.** $0 < m \leq 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2$ (P). Khi m thay đổi, đỉnh của Parabol (P) luôn nằm trên đường nào sau đây?

- A.** $y = 0$. **B.** $x = 0$. **C.** $y = x$. **D.** $y = x^2$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^2 - 4mx + 4m^2$ (P). Khi m thay đổi, đỉnh của Parabol (P) luôn nằm trên đường nào sau đây?

- A.** $x = 0$. **B.** $y = 0$. **C.** $y = 2x^2$. **D.** $y = x^2$.

Câu 21: Tìm giá trị của tham số m để đỉnh I của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + m$ thuộc đường thẳng $y = x + 2019$.

- A.** $m = 2020$. **B.** $m = 2000$. **C.** $m = 2036$. **D.** $m = 2013$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ ĐỈNH, TRỤC ĐỐI XỨNG, HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Câu 22: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

- A. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. C. $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$. D. $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 23: Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

- A. $I(0;1)$. B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 24: Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) là đường thẳng nào dưới đây?

- A. $x = -\frac{b}{2a}$. B. $x = -\frac{c}{2a}$. C. $x = -\frac{\Delta}{4a}$. D. $x = \frac{b}{2a}$.

Câu 25: Điểm $I(-2;1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

- A. $y = x^2 + 4x + 5$. B. $y = 2x^2 + 4x + 1$. C. $y = x^2 + 4x - 5$. D. $y = -x^2 - 4x + 3$.

Câu 26: Parabol $(P): y = -2x^2 - 6x + 3$ có hoành độ đỉnh là

- A. $x = -3$. B. $x = \frac{3}{2}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 27: Tọa độ đỉnh của parabol $y = -2x^2 - 4x + 6$ là

- A. $I(-1;8)$. B. $I(1;0)$. C. $I(2;-10)$. D. $I(-1;6)$.

Câu 28: Hoành độ đỉnh của parabol $(P): y = 2x^2 - 4x + 3$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. -1 . D. 1 .

Câu 29: Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có phương trình trục đối xứng là

- A. $x = -1$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -2$.

Câu 30: Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

- A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Câu 31: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

- A. 3 . B. $\frac{3}{2}$. C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 32: Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$.

Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^2 - 2c$.

- A. $T = 22$. B. $T = 9$. C. $T = 6$. D. $T = 1$.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị. Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$

- A. 3 . B. 4 . C. 29 . D. 1 .

Câu 34: Cho Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ (m, n tham số). Xác định m, n để (P) nhận đỉnh $I(2;-1)$.

- A. $m = 4, n = -3$. B. $m = 4, n = 3$. C. $m = -4, n = -3$. D. $m = -4, n = 3$.

- Câu 35:** Cho Parabol: $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(2;0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó Parabol có hàm số là
- A. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$. B. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$.
- C. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$. D. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$.
- Câu 36:** Gọi S là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol $(P): y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$. Tính tổng các giá trị của tập S
- A. -1. B. 1. C. 2. D. -2.
- Câu 37:** Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (1) biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- A. $y = -x^2 + 3x + 2$. B. $y = -x^2 - 3x - 2$. C. $y = x^2 - 3x + 2$. D. $y = -x^2 + 3x - 2$.
- Câu 38:** Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$?
- A. $y = -x^2 + 5x - 8$. B. $y = -2x^2 + 10x - 12$. C. $y = x^2 - 5x$. D. $y = -2x^2 + 5x + \frac{1}{2}$.
- Câu 39:** Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a + b + c$, biết (P) đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.
- A. $a + b + c = 6$ B. $a + b + c = 5$ C. $a + b + c = 4$ D. $a + b + c = 3$
- Câu 40:** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là
- A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. B. $y = x^2 + 2x + 6$. C. $y = x^2 + 6x + 6$. D. $y = x^2 + x + 4$.
- Câu 41:** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là
- A. $y = x^2 - x + 1$. B. $y = x^2 - x - 1$. C. $y = x^2 + x - 1$. D. $y = x^2 + x + 1$.
- Câu 42:** Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là
- A. $y = x^2 + x + 2$. B. $y = 2x^2 + x + 2$. C. $y = 2x^2 + 2x + 2$ D. $y = x^2 + 2x$
- Câu 43:** Cho $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó
- A. $b = -1$. B. $b = 1$. C. $b = 3$. D. $b = -2$.
- Câu 44:** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4)$, $B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tọa độ đỉnh của (P) là:
- A. $(-2;-11)$ B. $(2;5)$ C. $(1;4)$ D. $(3;6)$
- Câu 45:** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên dưới đây. Đáp án nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

- A. $y = x^2 + 2x - 2$. B. $y = x^2 - 2x - 2$. C. $y = x^2 + 3x - 2$. D. $y = -x^2 - 2x - 2$.

Câu 46: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. 2 .

Câu 47: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;-12)$. Khi đó tích $a.b.c$ bằng

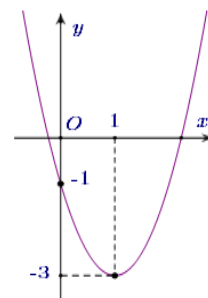
- A. -10368 . B. 10368 . C. 6912 . D. -6912 .

Câu 48: Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$.

Tổng giá trị $a + 2b$ là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 1 . C. $\frac{1}{2}$. D. -1 .

Câu 49: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



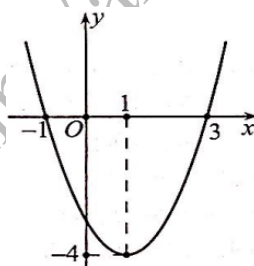
Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$.
C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 50: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

- A. 3 . B. $\frac{3}{2}$. C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 51: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là:

- A. -9 . B. 9 . C. -6 . D. 6 .

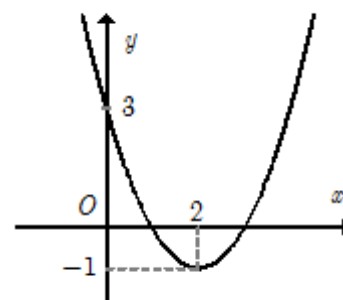
Câu 52: Cho hàm số $y = a.x^2 + b.x + c$ $(a \neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ làm trục

đối xứng, và đi qua các điểm $A(2;0), B(0;2)$. Tìm $T = a - b + c$

- A. $T = 1$. B. $T = 3$. C. $T = 0$. D. $T = 6$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. 0 . B. 26 .
C. 8 . D. 20 .



Câu 54: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{25}{8}$ tại $x = \frac{1}{4}$.

- A. $y = -2x^2 + x - 3$. B. $y = x^2 - \frac{1}{2}x + 3$. C. $y = 2x^2 - x - 3$. D. $y = 2x^2 + x - 3$.

Câu 55: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua $A(0; 6)$ có phương trình là:

- A. $y = x^2 + 6x + 6$. B. $y = x^2 + x + 4$. C. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. D. $y = x^2 + 2x + 6$.

Câu 56: Cho parabol $(P): y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Biết (P) đi qua $M(4; 3)$, (P) cắt tia Ox tại $N(3; 0)$ và Q sao cho ΔMNQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3 . Khi đó $a + b + c$ bằng

- A. $\frac{24}{5}$. B. $\frac{12}{5}$. C. 5 . D. 4 .

DẠNG 3. ĐỌC ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Câu 57: Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

- A.

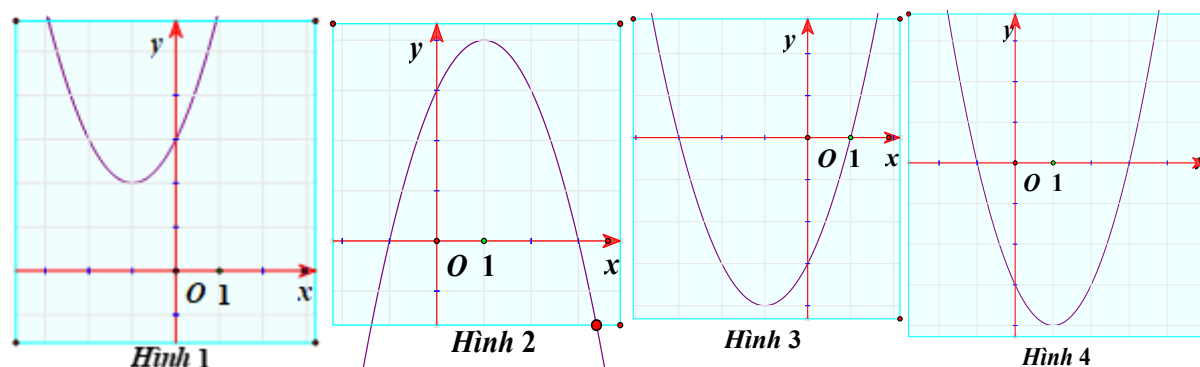
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$
- B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$
- C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$
- D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Câu 58: Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$



- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Câu 59: Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

Câu 60: Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là:

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Câu 61: Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 2$?

A.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

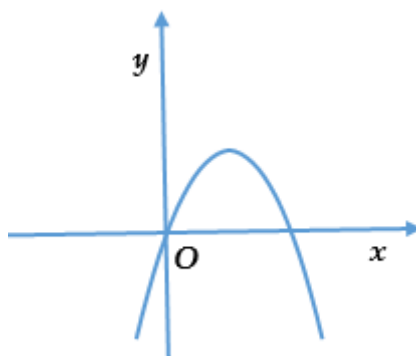
C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Câu 62: Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có hệ số a là



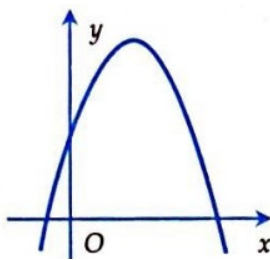
A. $a > 0$.

B. $a < 0$.

C. $a = 1$.

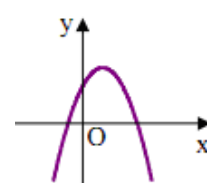
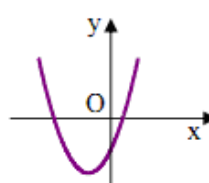
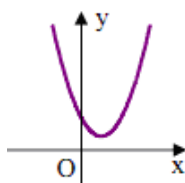
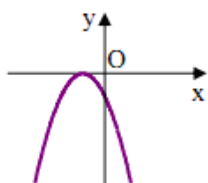
D. $a = 2$.

Câu 63: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?

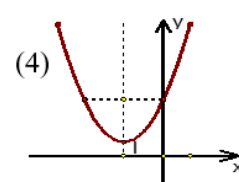
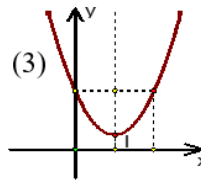
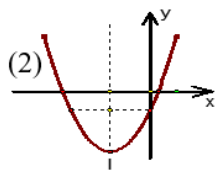
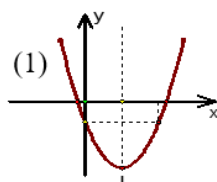


- A. $a < 0, b > 0, c < 0$ B. $a < 0, b < 0, c < 0$ C. $a < 0, b > 0, c > 0$ D. $a < 0, b < 0, c > 0$

Câu 64: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, b > 0$ và $c < 0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng

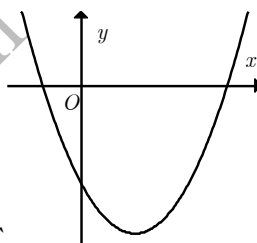


Câu 65: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a > 0, b < 0, c > 0)$ thì đồ thị của hàm số là hình nào trong các hình sau:



- A. Hình (1). B. Hình (2). C. Hình (3). D. Hình (4).

Câu 66: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$. C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

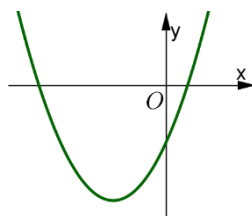
Câu 67: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Xác định dấu của a, b, c .

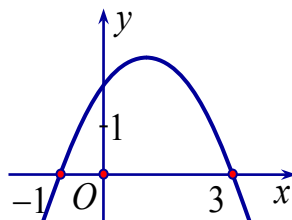
- A. $a < 0, b < 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c > 0$. C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 68: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$. **C.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

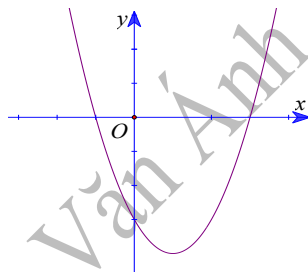
Câu 69: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

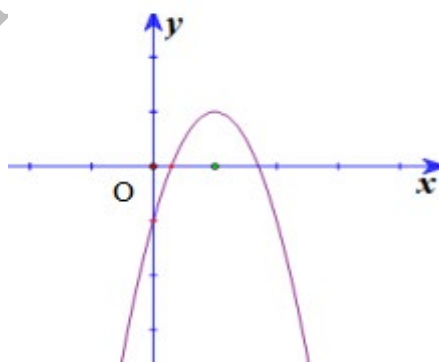
Câu 70: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

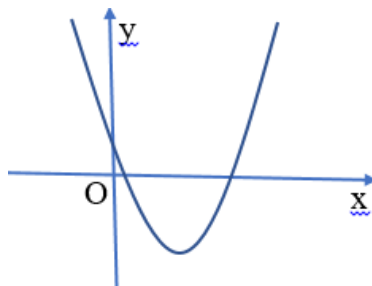
A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

Câu 71: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



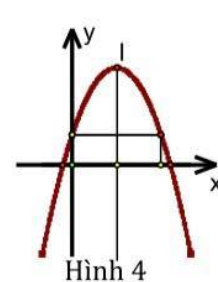
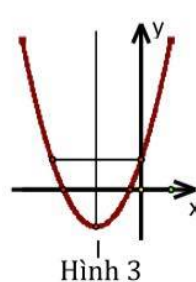
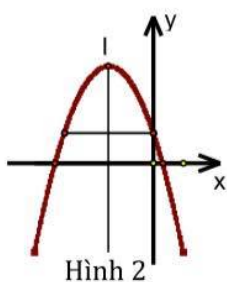
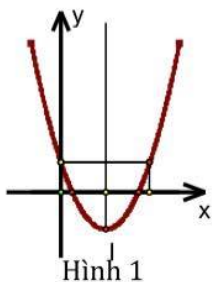
A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.

Câu 72: Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



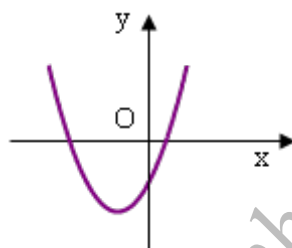
A. $a > 0, b = 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 73: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a < 0; b < 0; c > 0$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



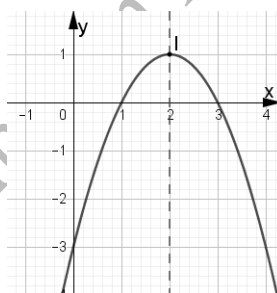
- A. hình (4). B. hình (3). C. hình (2). D. hình (1).

Câu 74: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 75: Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



- A. $y = -x^2 + 4x - 3$. B. $y = -x^2 - 4x - 3$. C. $y = -2x^2 - x - 3$. D. $y = x^2 - 4x - 3$.

Câu 76: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

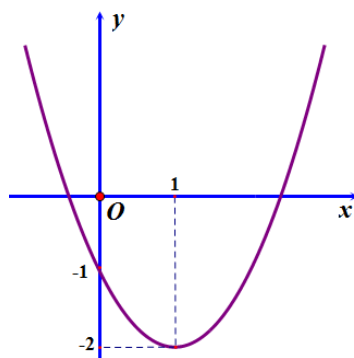
- A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = -3x^2 + 6x - 1$. C. $y = x^2 + 2x - 1$. D. $y = x^2 - 2x + 2$.

Câu 77: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

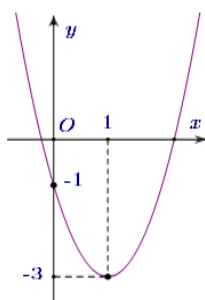
- A. $y = x^2 - 4x$. B. $y = x^2 + 4x$. C. $y = -x^2 + 4x$. D. $y = -x^2 - 4x$.

Câu 78: Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?



- A. $y = x^2 + 2x - 1$. B. $y = x^2 + 2x - 2$. C. $y = 2x^2 - 4x - 2$. D. $y = x^2 - 2x - 1$.

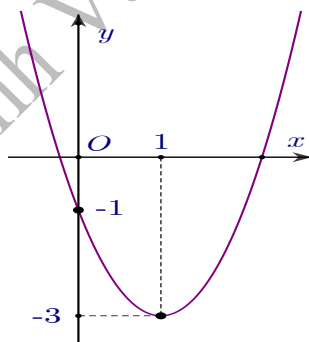
Câu 79: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

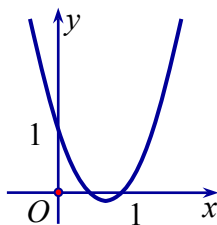
Câu 80: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau:



Phương trình của parabol này là

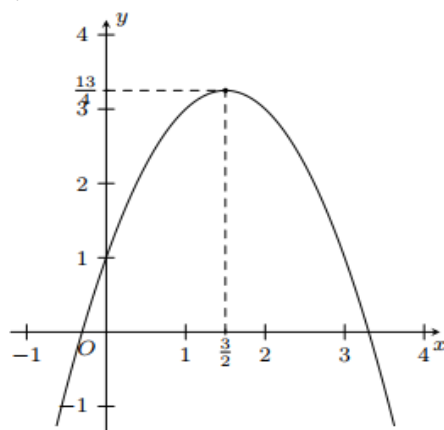
- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 81: Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?



- A. $y = x^2 - 3x + 1$. B. $y = 2x^2 - 3x + 1$. C. $y = -x^2 + 3x - 1$. D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

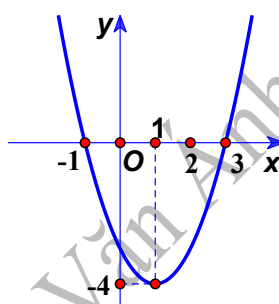
Câu 82: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

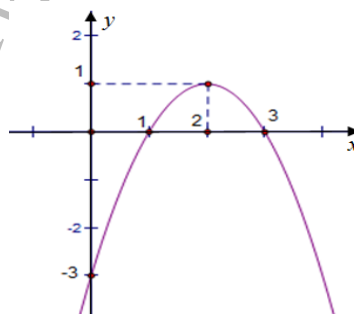
- A.** $y = x^2 + 3x - 1$. **B.** $y = x^2 - 3x - 1$. **C.** $y = -x^2 - 3x - 1$. **D.** $y = -x^2 + 3x + 1$.

Câu 83: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



- A.** -9 . **B.** 9 . **C.** -6 . **D.** 6 .

Câu 84: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



- A.** $y = -x^2 + 2x - 3$. **B.** $y = -x^2 + 4x - 3$. **C.** $y = x^2 - 4x + 3$. **D.** $y = x^2 - 2x - 3$.

Câu 85: Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-5		$+\infty$

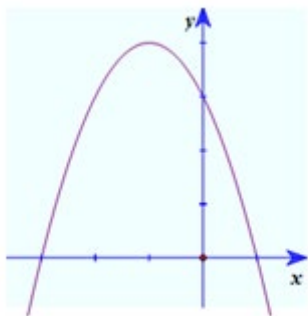
- A.** $y = -x^2 + 4x$. **B.** $y = -x^2 + 4x - 9$. **C.** $y = x^2 - 4x - 1$. **D.** $y = x^2 - 4x - 5$.

Câu 86: Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$

- A.** $y = x^2 + 4x$. **B.** $y = -x^2 - 4x - 8$. **C.** $y = -x^2 - 4x + 8$. **D.** $y = -x^2 - 4x$.

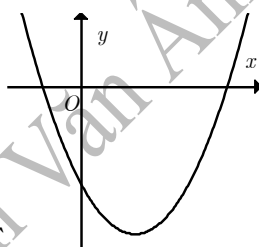
Câu 87: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó:

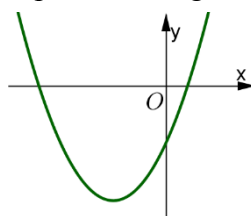
- A.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 88: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



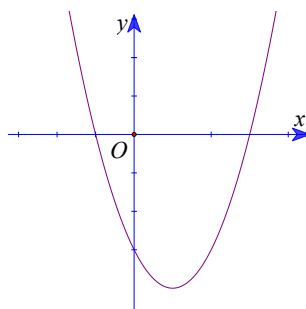
- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 89: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



- A.** $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$. **C.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

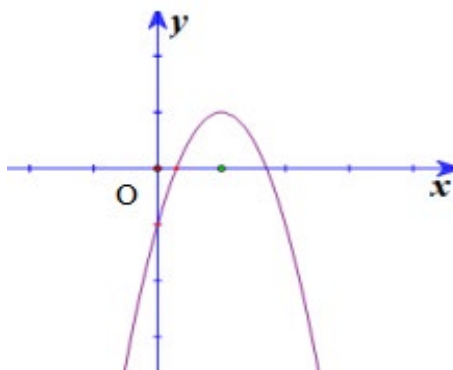
Câu 90: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

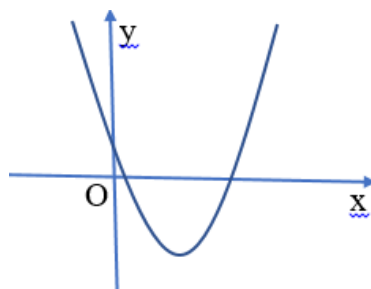
- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

Câu 91: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



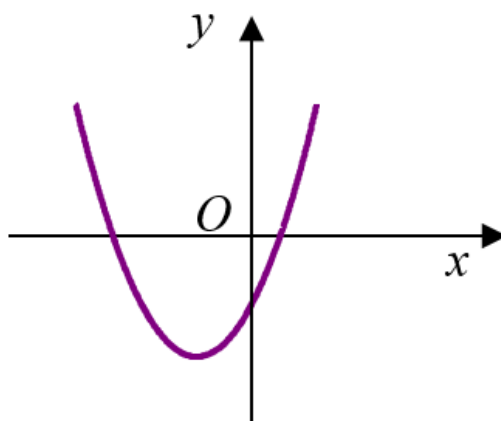
- A. $a < 0, b > 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0$. C. $a < 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Câu 92: Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



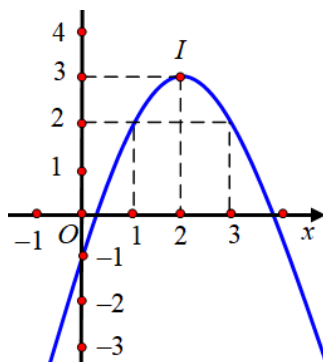
- A. $a > 0, b = 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$. C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 93: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là



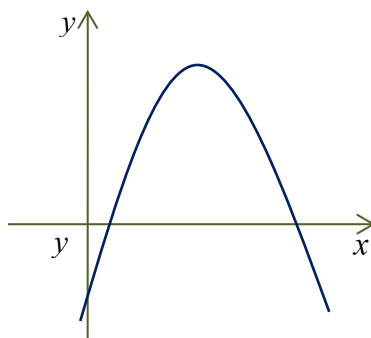
- A. $a > 0; b > 0; c > 0$. B. $a > 0; b < 0; c < 0$. C. $a > 0; b < 0; c > 0$. D. $a > 0; b > 0; c < 0$.

Câu 94: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $4a + 2b + c$ có giá trị là:



- A. 3. B. 2. C. -3. D. 0.

Câu 95: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



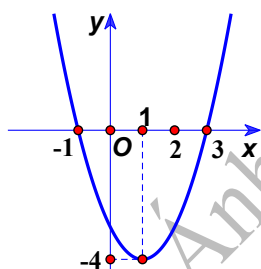
A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Câu 96: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



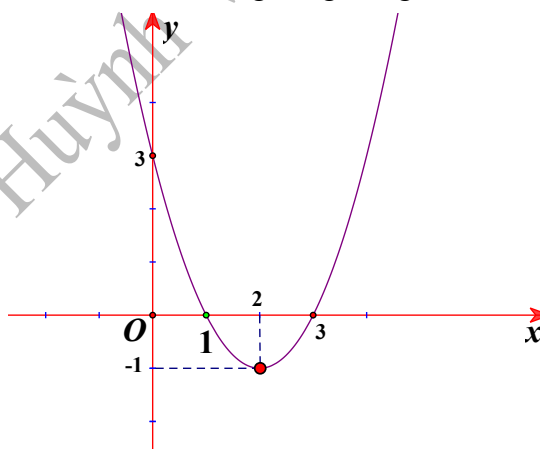
A. -9.

B. 9.

C. -6.

D. 6.

Câu 97: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây ?



Giá trị của tổng $T = 4a + 2b + c$ là :

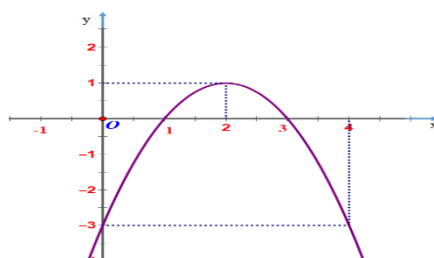
A. $T = 2$.

B. $T = -1$.

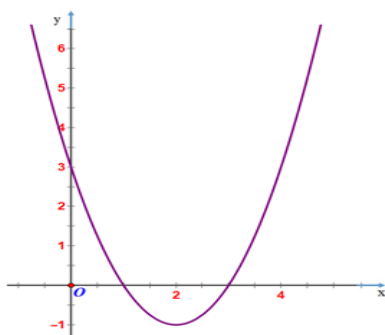
C. $T = 4$.

D. $T = 3$.

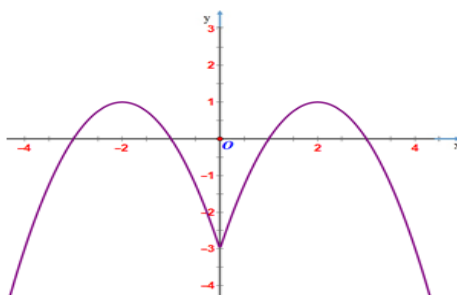
Câu 98: Cho đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ có đồ thị như hình vẽ sau



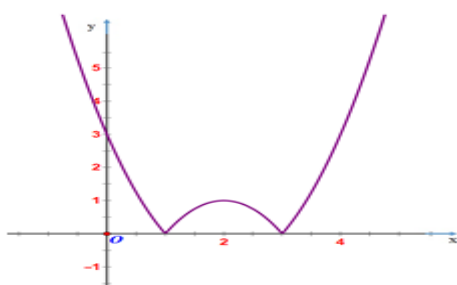
Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$



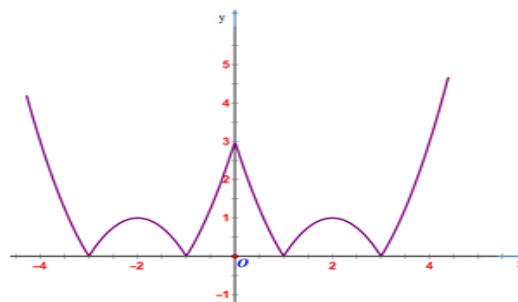
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

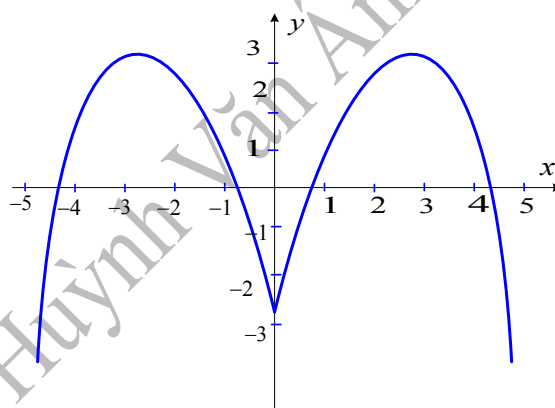
A. Hình 2

B. Hình 4

C. Hình 1

D. Hình 3

Câu 99: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y = x^2 - 3x - 3$.

B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$.

D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

DẠNG 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 100: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3.

B. 1.

C. 3.

D. 13.

Câu 101: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Câu 102: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

A. -3.

B. -2.

C. $-\frac{21}{8}$.

D. $-\frac{25}{8}$.

Câu 103: Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$
B. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$
C. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$
D. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Câu 104: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A.** $\frac{4}{5}$ **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** -20

Câu 105: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

- A.** $\frac{11}{8}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{4}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

Câu 106: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1; 4]$ là

- A.** -1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 107: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

- A.** 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** -2

Câu 108: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4|x| + 3$ là:

- A.** -1 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Câu 109: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1; 4]$. Tính $M + m$.

- A.** -14. **B.** -13. **C.** -4. **D.** -9.

Câu 110: Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -1$.

Câu 111: Hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi m thuộc

- A.** $(-\infty; 5)$. **B.** $[7; 8)$. **C.** $(5; 7)$. **D.** $(9; 11)$.

Câu 112: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là

- A.** $m = \pm 4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m \in \emptyset$.

Câu 113: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $m \in [-1; 0)$. **B.** $m \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. **D.** $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 114: Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3.

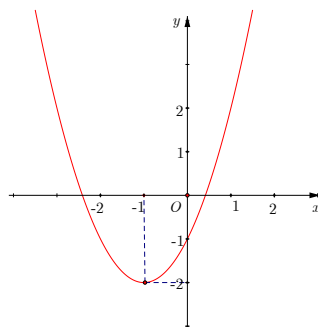
- A.** $m = 0$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

- Câu 115:** Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .
A. $m = -3$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.
- Câu 116:** Tìm số các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0; 1]$ là bằng 1.
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3
- Câu 117:** Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.
A. $m = -2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 5$
- Câu 118:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .
A. $T = 3$. **B.** $T = \frac{1}{2}$. **C.** $T = \frac{9}{2}$. **D.** $T = -\frac{3}{2}$.

DẠNG 5. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

- Câu 119:** Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:
A. $(1; 0); (3; 2)$. **B.** $(0; -1); (-2; -3)$. **C.** $(-1; 2); (2; 1)$. **D.** $(2; 1); (0; -1)$.
- Câu 120:** Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là
A. $M(0; -2), N(2; -4)$. **B.** $M(-1; -1), N(-2; 0)$.
C. $M(-3; 1), N(3; -5)$. **D.** $M(1; -3), N(2; -4)$.
- Câu 121:** Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là
A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$. **B.** $(2; 2)$ và $(4; 8)$. **C.** $(2; -2)$ và $(4; 0)$. **D.** $(2; 2)$ và $(4; 0)$.
- Câu 122:** Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 1 - x$ với $(P): y = x^2 - 2x + 1$ là
A. $x = 0; x = 1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0; x = 2$. **D.** $x = 0$.
- Câu 123:** Gọi $A(a; b)$ và $B(c; d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6$. Giá trị của $b + d$ bằng.
A. 7. **B.** -7 . **C.** 15. **D.** -15 .
- Câu 124:** Cho hai parabol có phương trình $y = x^2 + x + 1$ và $y = 2x^2 - x - 2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm A và B ($x_A < x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng AB .
A. $AB = 4\sqrt{2}$ **B.** $AB = 2\sqrt{26}$ **C.** $AB = 4\sqrt{10}$ **D.** $AB = 2\sqrt{10}$
- Câu 125:** Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?
A. $m < -\frac{9}{4}$. **B.** $m > -\frac{9}{4}$. **C.** $m > \frac{9}{4}$. **D.** $m < \frac{9}{4}$.

Câu 126: Hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.



- A. $m < -2$. B. $m < -1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Câu 127: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

- A. 6 B. 5 C. 7 D. 8

Câu 128: Cho parabol $(P): y = x^2 - mx$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 1$, trong đó m là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N , tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

- A. một parabol B. một đường thẳng C. một đoạn thẳng D. một điểm

Câu 129: Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (P) . Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$. Tổng bình phương các phần tử của S là

- A. 6. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 130: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là

- A. -10. B. 10. C. -6. D. 9.

Câu 131: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?

- A. 6. B. 9. C. 7. D. 8.

Câu 132: Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

Câu 133: Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Câu 134: Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 5$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 2 - 3m$. Tìm tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

- A. $1 < m < \frac{7}{3}$. B. $m > 1$. C. $m > \frac{7}{3}$. D. $m < 1$

Câu 135: Gọi T là tổng tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính T .

- A. $T = -9$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = -15$. D. $T = 3$.

Câu 136: Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Câu 137: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a - b + c$, biết rằng đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 .

- A. $a - b - c = -2$ B. $a - b - c = 2$ C. $a - b - c = 1$ D. $a - b - c = -1$

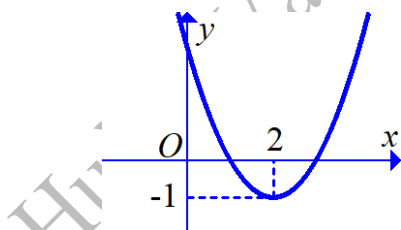
Câu 138: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Câu 139: Biết $S = (a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a + b$.

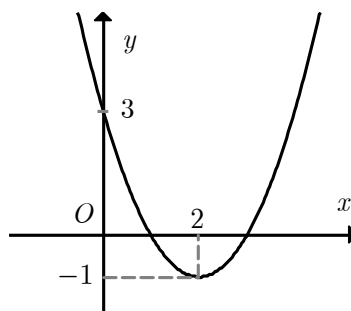
- A. $a + b = 1$ B. $a + b = -1$ C. $a + b = 2$ D. $a + b = -2$

Câu 140: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



- A. $0 < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $m = -1; m = 3$. D. $m > 3$.

Câu 141: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt



- A. $m = 4$. B. $m > 0$. C. $m > -1$. D. $m = 2$.

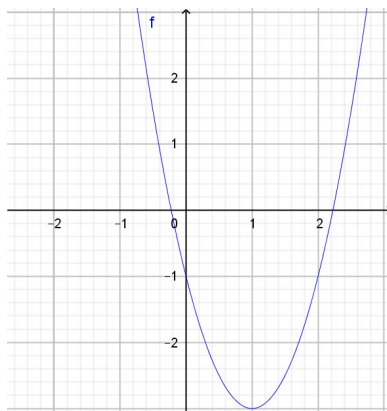
Câu 142: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $-2 < m < -1$. B. $1 < m < 2$. C. $-2 \leq m \leq -1$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 143: Với giá trị nào của m thì phương trình $m = |x^2 - 5x + 4|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \leq \frac{9}{4}$. B. $m \geq \frac{9}{4}$. C. $m = \frac{9}{4}$. D. $m = 0$.

Câu 144: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường $y = m + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?

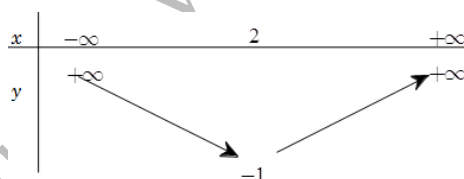


- A. $-3 < m < 0$. B. $0 < m < 3$. C. $1 < m < 4$. D. $-1 < m < 2$.

Câu 145: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $m < -3$. B. $m > -\frac{81}{4}$. C. $-\frac{81}{4} < m < 0$. D. $m > 0$.

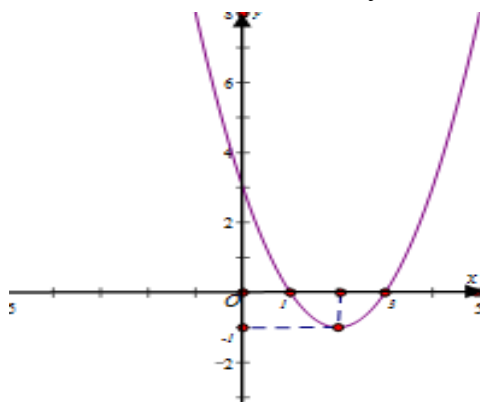
Câu 146: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. không tồn tại m .

Câu 147: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

DẠNG 6. ỨNG DỤNG THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Câu 148: Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.

- A. $m - n = 7$ B. $m - n = -7$ C. $m - n = 31$ D. $m - n = -31$

Câu 149: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2m$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5m$ và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao $6m$. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2m$ và sau 1 giây thì nó đạt độ cao $8,5m$, sau 2 giây nó đạt độ cao $6m$. Tính tổng $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 18,3$. B. $a + b + c = 6,1$.
C. $a + b + c = 8,5$. D. $a + b + c = -15,9$.

Câu 150: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.

Câu 151: Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao $1m$ sau đó 1 giây nó đạt độ cao $10m$ và $3,5$ giây nó ở độ cao $6,25m$. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

- A. $11m$. B. $12m$. C. $13m$. D. $14m$.

Câu 152: Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng $12m$ và chiều cao $8m$ như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $6m$ đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao h của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?

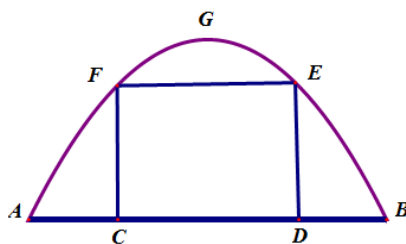


- A. $0 < h < 6$. B. $0 < h \leq 6$. C. $0 < h < 7$. D. $0 < h \leq 7$.

Câu 153: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 , hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

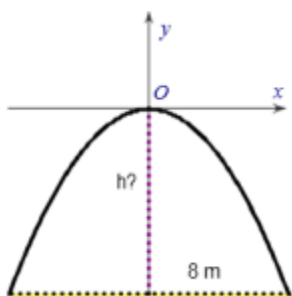
- A. 64 . B. 4 . C. 16 . D. 8 .

Câu 154: Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



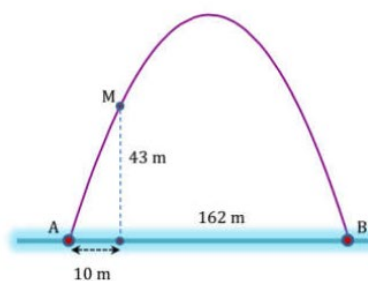
- A. 5m. B. 8,5m. C. 7,5m. D. 8m.

Câu 155: Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8m$. Hãy tính chiều cao h của cổng.



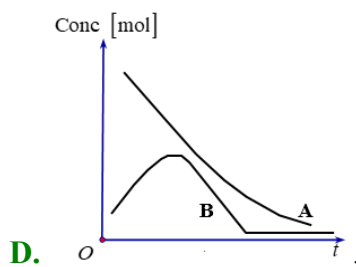
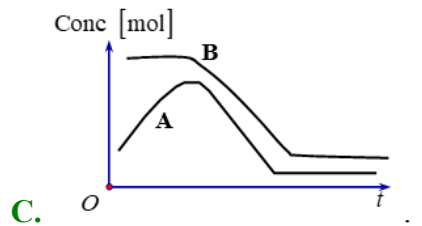
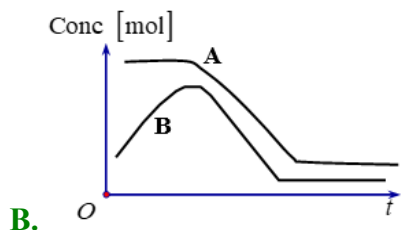
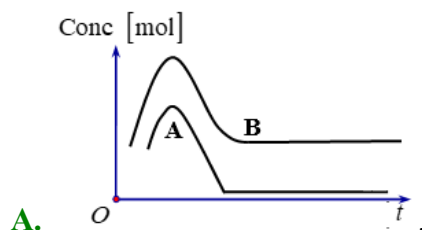
- A. $h = 9m$. B. $h = 7m$. C. $h = 8m$. D. $h = 5m$.

Câu 156: Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.



- A. 175,6m. B. 197,5m. C. 210 m. D. 185,6m.

Câu 157: Rót chất A vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất B vào. Khi nồng độ chất B đạt đến một giá trị nhất định thì chất A mới tác dụng với chất B . Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?



Câu 158: Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

A. $400m^2$.

B. $450m^2$.

C. $350m^2$.

D. $425m^2$.

CHƯƠNG

III

HÀM SỐ BẬC HAI
VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC HAI



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. SỰ BIẾN THIÊN

Câu 1: Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$a > 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Câu 2: Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. B. $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. C. $\left(-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$a > 0$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Trên khoảng $(-\infty; 1)$ hàm số đồng biến.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

C. Trên khoảng $(3; +\infty)$ hàm số nghịch biến.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Chọn D

Đỉnh của parabol: $x_I = -\frac{b}{2a} = 2$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	5	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra khẳng định **D** sai.

Câu 4: Hàm số $y = x^2 - 4x + 11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2; +\infty)$

B. $(-\infty; +\infty)$

C. $(2; +\infty)$

D. $(-\infty; 2)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	7	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 5: Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 6: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là

A. $(-\infty; -4)$.

B. $(-\infty; -4)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Do $a = -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$.
 B. $(-2; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 1)$.
 D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $(P): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$; nên (P) có bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh của parabol $x_l = \frac{-b}{2a} = 1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 9: Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$.
 B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(-1; +\infty)$.
 D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số bậc hai có $a = 2 > 0$; $-\frac{b}{2a} = 1$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 10: Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.
 B. $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$.
 C. $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$.
 D. $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$(P): y = f(x) = -3x^2 + x - 2$, TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $a = -3$, đỉnh S có hoành độ $x = \frac{1}{6}$.

Nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 3)$

B. $(3; +\infty)$

C. $(-\infty; 6)$

D. $(6; +\infty)$

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0$, $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Đáp án **A.**

Câu 12: Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; \frac{3}{2})$.

B. $(\frac{1}{4}; +\infty)$.

C. $(-\infty; \frac{1}{4})$.

D. $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $y = x^2 - 3x + 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Hàm số có $a = 1 > 0$, $\frac{-b}{2a} = m+1$ nên đồng biến trên khoảng $(m+1; +\infty)$.

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(4; 2018)$ thì ta phải có

$$(4; 2018) \subset (m+1; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3.

Đáp án **D.**

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

A. $b \geq 0$.

B. $b = -12$.

C. $b \geq -12$.

D. $b \geq -9$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x) = x^2 + 2(b+6)x + 4$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, $-\frac{b}{2a} = -b-6$

nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-(b+6)$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-(b+6))$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên $(6; +\infty)$ thì $(6; +\infty) \subset (-b-6; +\infty) \Leftrightarrow -b-6 \leq 6 \Leftrightarrow b \geq -12$.

Câu 15: Hàm số $y = -x^2 + 2(m-1)x + 3$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

A. $m \leq 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường $x = m-1$. Đồ thị hàm số đã cho có hệ số x^2 âm nên sẽ đồng biến trên $(-\infty; m-1)$ và nghịch biến trên $(m-1; +\infty)$. Theo đề, cần: $m-1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

A. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $-3 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -x^2 + 2|m+1|x - 3$ có $a = -1 < 0$; $-\frac{b}{2a} = |m+1|$ nên hàm số nghịch biến trên $(|m+1|; +\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $(2; +\infty) \subset (|m+1|; +\infty)$

$\Leftrightarrow |m+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

Câu 17: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m-1$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập nào?

A. $(-10; 5)$.

B. $[5; 10]$.

C. $(5; 10)$.

D. $(-10; 5]$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là đồ thị của $y = f(x) = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$.

$y = f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$.

Gọi I là đỉnh của (P) , có $x_I = \frac{1-m}{2}$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1-m}{2}; +\infty\right)$.

Do đó để hàm số trên khoảng $(-2; +\infty)$ khi $\frac{1-m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Suy ra tập $S = [5; +\infty)$. Khi đó $(-10; 10) \cap S = [5; 10)$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ luôn nghịch biến trên $(-1; 2)$.

A. $m \leq 1$.

B. $-2 \leq m \leq 1$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

- Với $m > 0$, ta có hàm số $f(x) = mx^2 - 4x - m^2$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2}{m}\right)$, suy ra hàm nghịch biến trên $(-1; 2)$ khi $(-1; 2) \subset \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{2}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2$ (P). Khi m thay đổi, đỉnh của Parabol (P) luôn nằm trên đường nào sau đây?

A. $y = 0$.

B. $x = 0$.

C. $y = x$.

D. $y = x^2$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ đỉnh I của Parabol là $I(m; 0)$, nên I luôn thuộc đường thẳng $y = 0$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^2 - 4mx + 4m^2$ (P). Khi m thay đổi, đỉnh của Parabol (P) luôn nằm trên đường nào sau đây?

A. $x = 0$.

B. $y = 0$.

C. $y = 2x^2$.

D. $y = x^2$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ đỉnh I của Parabol là $I(2m; 0)$, nên I luôn nằm trên đường thẳng $x = 0$.

Câu 21: Tìm giá trị của tham số m để đỉnh I của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + m$ thuộc đường thẳng $y = x + 2019$.

A. $m = 2020$.

B. $m = 2000$.

C. $m = 2036$.

D. $m = 2013$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + m$ là parabol có đỉnh $I(3; 9 + m)$.

Đỉnh $I(3; 9 + m)$ thuộc đường thẳng $y = x + 2019 \Leftrightarrow 9 + m = 3 + 2019 \Leftrightarrow m = 2013$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ ĐỈNH, TRỤC ĐỐI XỨNG, HÀM SỐ BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

Câu 22: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

C. $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

D. $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đỉnh của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 23: Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

A. $I(0; 1)$.

B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ đỉnh của $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$ là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 24: Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x = -\frac{b}{2a}$.

B. $x = -\frac{c}{2a}$.

C. $x = -\frac{\Delta}{4a}$.

D. $x = \frac{b}{2a}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 25: Điểm $I(-2; 1)$ là đỉnh của Parabol nào sau đây?

A. $y = x^2 + 4x + 5$.

B. $y = 2x^2 + 4x + 1$.

C. $y = x^2 + 4x - 5$.

D. $y = -x^2 - 4x + 3$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = -2$. Từ đó loại câu **B**.

Thay hoành độ $x_I = -2$ vào phương trình Parabol ở các câu A, C, D, ta thấy chỉ có câu A thỏa điều kiện $y_I = 1$.

Câu 26: Parabol $(P): y = -2x^2 - 6x + 3$ có hoành độ đỉnh là

- A.** $x = -3$. **B.** $x = \frac{3}{2}$. **C.** $x = -\frac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn C

Parabol $(P): y = -2x^2 - 6x + 3$ có hoành độ đỉnh là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-2)} = -\frac{3}{2}$.

Câu 27: Tọa độ đỉnh của parabol $y = -2x^2 - 4x + 6$ là

- A.** $I(-1; 8)$. **B.** $I(1; 0)$. **C.** $I(2; -10)$. **D.** $I(-1; 6)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ đỉnh của parabol $y = -2x^2 - 4x + 6$ là $\begin{cases} x = -\frac{-4}{2(-2)} = -1 \\ y = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 8 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 8)$.

Câu 28: Hoành độ đỉnh của parabol $(P): y = 2x^2 - 4x + 3$ bằng

- A.** -2 . **B.** 2 . **C.** -1 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn D

$x = -\frac{b}{2a} = 1$.

Câu 29: Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có phương trình trục đối xứng là

- A.** $x = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 30: Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

- A.** $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x_1 = -1 \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -1 \Rightarrow a = 2$.

Hơn nữa $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3$.

Câu 31: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. **C. 2.** D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \text{ với } a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

Câu 32: Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^2 - 2c$.

- A. $T = 22$.** B. $T = 9$. C. $T = 6$. D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ b = -2a \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ -a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Vậy $T = a^3 + b^2 - 2c = 22$.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị. Biết đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$

- A. 3. B. 4. **C. 29.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đỉnh $I(1;1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ -\frac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Nên $S = a^2 + b^2 + c^2 = 29$

Câu 34: Cho Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ (m, n tham số). Xác định m, n để (P) nhận đỉnh $I(2; -1)$.

- A.** $m = 4, n = -3$. **B.** $m = 4, n = 3$. **C.** $m = -4, n = -3$. **D.** $m = -4, n = 3$.

Lời giải

Chọn D

Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ nhận $I(2; -1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases} 4 + 2m + n = -1 \\ -\frac{m}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = -5 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy $m = -4, n = 3$.

Câu 35: Cho Parabol: $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(2; 0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0; -1)$. Khi đó Parabol có hàm số là

- A.** $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$. **B.** $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$.
C. $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$. **D.** $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

Lời giải

Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$

$$\text{Theo bài ra, ta có có đỉnh } I(2; 0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ c - \frac{b^2}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \quad (1)$$

Lại có cắt Oy tại điểm $M(0; -1)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$ (2)

$$\text{Từ, suy ra } \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = -a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = b \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1; c = -1 \end{cases}$$

Câu 36: Gọi S là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol $(P): y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$. Tính tổng các giá trị của tập S

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** -2 .

Lời giải

Chọn A

Khi $m \neq 0$ thì $(P): y = mx^2 + 2mx + m^2 + 2m$ có đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(-1; m^2 + m)$

Vì đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 7$ nên

$$m^2 + m = -1 + 7 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases} (TM)$$

Vậy tổng các giá trị của tập $S: 2 + (-3) = -1$.

Câu 37: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (1) biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = -x^2 + 3x + 2$. **B.** $y = -x^2 - 3x - 2$. **C.** $y = x^2 - 3x + 2$. **D.** $y = -x^2 + 3x - 2$.

Lời giải

Chọn D

. Do đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a + 6b + 4c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $y = -x^2 + 3x - 2$

Câu 38: Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$?

A. $y = -x^2 + 5x - 8$. **B.** $y = -2x^2 + 10x - 12$.

C. $y = x^2 - 5x$. **D.** $y = -2x^2 + 5x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số bậc hai cần tìm có phương trình: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1; -4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \\ a+b+c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{1}{2} \\ a+b+c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5a \\ \frac{-25a^2+4a(4a-4)}{4a} = \frac{1}{2} \\ c = 4a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \\ c = -12 \end{cases}$$

Câu 39: Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a+b+c$, biết (P) đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.

A. $a+b+c=6$

B. $a+b+c=5$

C. $a+b+c=4$

D. $a+b+c=3$

Lời giải

Chọn A

(P) đi qua điểm $A(0;3) \Rightarrow c = 3$.

$$(P) \text{ có đỉnh } I(-1;2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = -1 \\ a-b+3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a-2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6.$$

Câu 40: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

B. $y = x^2 + 2x + 6$.

C. $y = x^2 + 6x + 6$.

D. $y = x^2 + x + 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$.

$$\text{Mặt khác: Vì } A, I \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 6 = a.(0)^2 + b.(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp, ta có: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } (P): y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$

Câu 41: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$ có phương trình là

A. $y = x^2 - x + 1$.

B. $y = x^2 - x - 1$.

C. $y = x^2 + x - 1$.

D. $y = x^2 + x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Vì $A, B, C \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a.0^2 + b.0 + c \\ -1 = a.(1)^2 + b.(1) + c \\ 1 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 1$.

- Câu 42:** Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là
A. $y = x^2 + x + 2$. **B.** $y = 2x^2 + x + 2$. **C.** $y = 2x^2 + 2x + 2$ **D.** $y = x^2 + 2x$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5 = a.1^2 + b.1 + 2 \\ 8 = a.(-2)^2 + b.(-2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ Vậy hàm số cần tìm là } y = 2x^2 + x + 2.$$

- Câu 43:** Cho $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó
A. $b = -1$. **B.** $b = 1$. **C.** $b = 3$. **D.** $b = -2$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $A(-1;3)$ vào $(P): y = x^2 + bx + 1$.

Ta được: $3 = (-1)^2 - b + 1 \Leftrightarrow b = -1$.

- Câu 44:** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tọa độ đỉnh của (P) là:
A. $(-2;-11)$ **B.** $(2;5)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(3;6)$

Lời giải

Chọn B

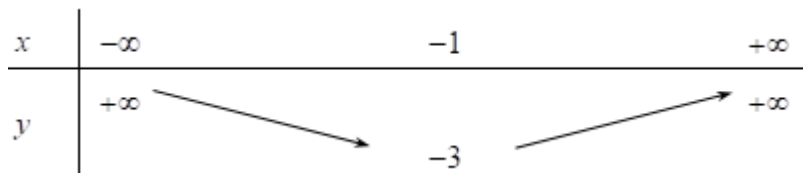
$(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$ suy ra

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -4 \\ 4a - 2b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4x + 1.$$

Hoành độ của đỉnh của (P) là $x = \frac{-b}{2a} = 2$. Suy ra tung độ của đỉnh của (P) là

$y = -2^2 + 4.2 + 1 = 5$.

- Câu 45:** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên dưới đây. Đáp án nào sau đây là đúng?



- A.** $y = x^2 + 2x - 2$. **B.** $y = x^2 - 2x - 2$. **C.** $y = x^2 + 3x - 2$. **D.** $y = -x^2 - 2x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta có $a > 0$ nên loại phương án **D.** Đỉnh $I(-1; -3)$ nên $-\frac{b}{2a} = -1$, vậy chọn A.

- Câu 46:** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng
A. -1 . **B.** 0 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn B

Do parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$
 $\Leftrightarrow 2a = -b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$.

- Câu 47:** Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(8; 0)$ và có đỉnh $I(6; -12)$. Khi đó tích $a.b.c$ bằng
A. -10368 . **B.** 10368 . **C.** 6912 . **D.** -6912 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $a \neq 0$.

$$\text{Từ giả thiết ta có hệ } \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{cases} \Rightarrow abc = -10368.$$

- Câu 48:** Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1; 3)$.

Tổng giá trị $a + 2b$ là

- A.** $-\frac{1}{2}$. **B.** 1 . **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1 .

Lời giải

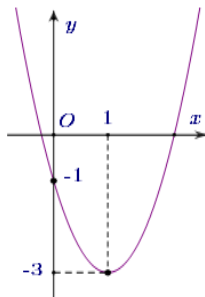
Chọn B

Vì parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1; 3)$

nên ta có
$$\begin{cases} a+b+4=3 \\ -\frac{b}{2a}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}.$$

Do đó $a+2b=-3+4=1$.

Câu 49: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



Phương trình của parabol này là

A. $y = -x^2 + x - 1$. **B.** $y = 2x^2 + 4x - 1$. **C.** $y = x^2 - 2x - 1$. **D.** $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ nên $c = -1$.

Tọa độ đỉnh $I(1; -3)$, ta có phương trình:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy parabol cần tìm là: $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 50: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1; 0)$ và có đỉnh $I(1; 2)$. Tính $a + b + c$.

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

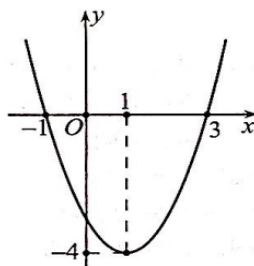
Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \text{ với } a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Câu 51: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là:

A. -9.

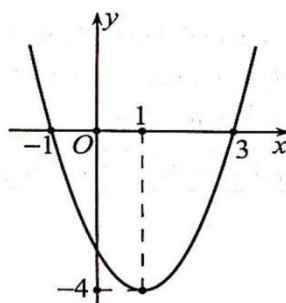
B. 9.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2 \cdot 1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 52: Cho hàm số $y = a.x^2 + b.x + c$ ($a \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ làm trục đối xứng, và đi qua các điểm $A(2; 0)$, $B(0; 2)$. Tìm $T = a - b + c$

A. $T = 1$.

B. $T = 3$.

C. $T = 0$.

D. $T = 6$.

Lời giải

Chọn D

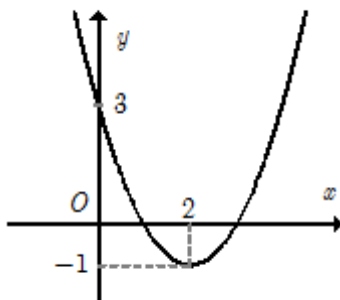
Ta có

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ làm trục đối xứng ta được: $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3a + b = 0$ (1)

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2; 0)$, $B(0; 2)$ ta được: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2) ta được: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow T = 6$$

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.



A. 0.

B. 26.

C. 8.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Do đồ thị hàm số có đỉnh là } I(2; -1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do đồ thị hàm số đi qua điểm } (0; 3) \Rightarrow f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 26$$

Câu 54: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{25}{8}$ tại $x = \frac{1}{4}$.

A. $y = -2x^2 + x - 3$.

B. $y = x^2 - \frac{1}{2}x + 3$.

C. $y = 2x^2 - x - 3$.

D. $y = 2x^2 + x - 3$.

Lời giải

Chọn C

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; c) \Rightarrow c = -3$.

+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{25}{8}$ tại $x = \frac{1}{4}$ nên đỉnh của đồ thị hàm số là $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{25}{8}\right)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4} \\ a \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4}b - 3 = -\frac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 0 \\ a + 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - x - 3$.

Câu 55: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua $A(0; 6)$ có phương trình là:

A. $y = x^2 + 6x + 6$. B. $y = x^2 + x + 4$. **C. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.** D. $y = x^2 + 2x + 6$.

Lời giải

Chọn C

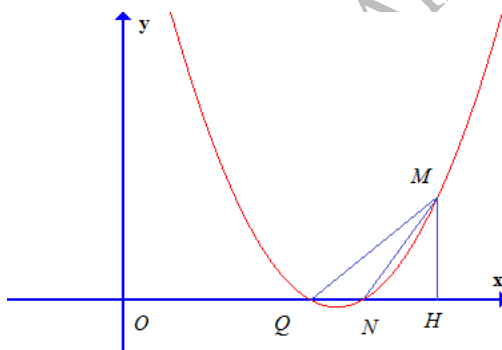
Theo bài ra ta có
$$\begin{cases} y(-2) = 4a - 2b + c = 4 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 4a - b = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Câu 56: Cho parabol $(P): y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Biết (P) đi qua $M(4;3)$, (P) cắt tia Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho ΔMNQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó $a + b + c$ bằng

A. $\frac{24}{5}$. B. $\frac{12}{5}$. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn A



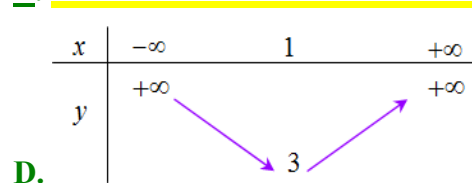
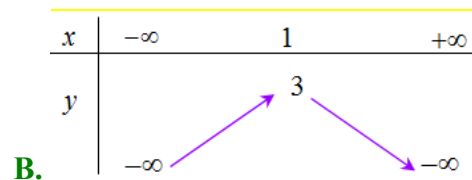
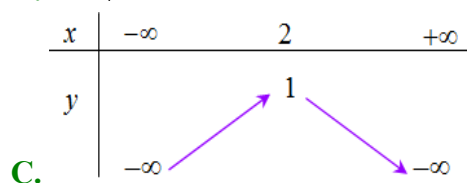
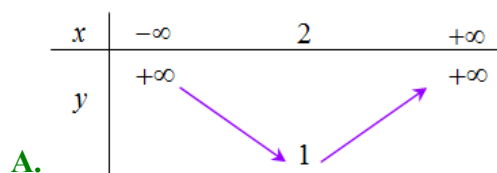
Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox .

Ta có $S_{MNQ} = \frac{1}{2}MH.NQ = \frac{1}{2}.y_M.(x_N - x_Q) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}.3(3 - x_Q) = 1 \Rightarrow x_Q = \frac{7}{3}$ nên $Q\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

Ta thu được: $M(4;3), N(3;0), Q\left(\frac{7}{3}; 0\right) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ \frac{49}{9}a + \frac{7}{3}b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ b = \frac{-48}{5} \\ c = \frac{63}{5} \end{cases}.$

DẠNG 3. ĐỌC ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Câu 57: Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

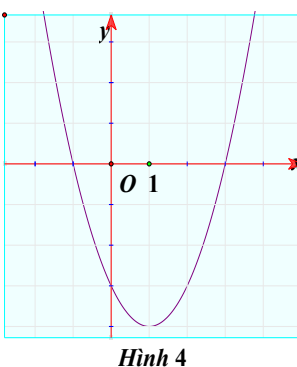
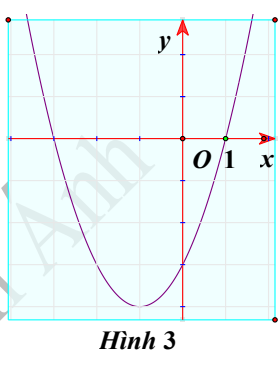
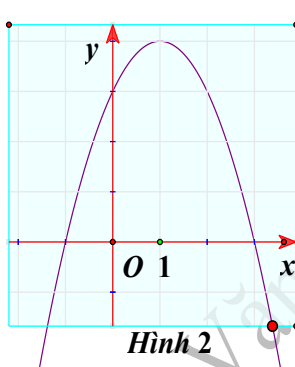
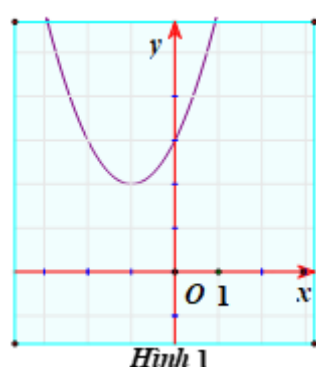


Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ có đỉnh $I(1;3)$, hệ số $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 58: Đồ thị nào sau đây là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$



A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Lời giải

Chọn D

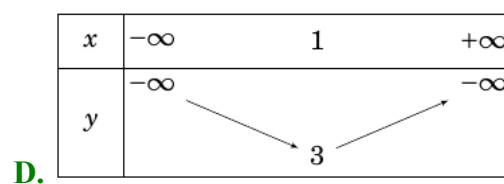
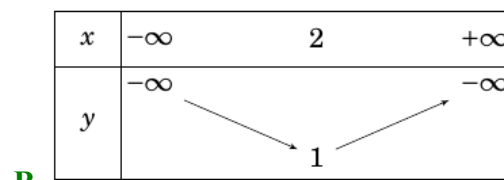
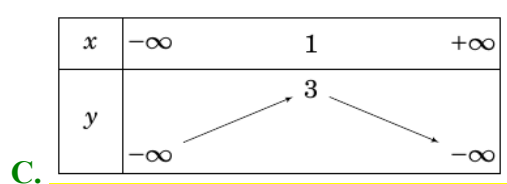
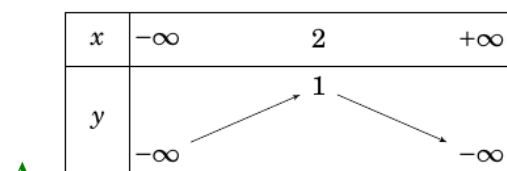
Dựa vào đồ thị có:

$(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$; có $a = 1 > 0$; nên (P) có bề lõm hướng lên.

(P) có đỉnh I có $x_I = 1$.

Vậy $(P): y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là hình 4.

Câu 59: Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?



Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ có hệ số $a = -2 < 0$ nên bề lõm quay lên trên vì vậy ta loại đáp án B,

D. Hàm số có tọa độ đỉnh $I(1;3)$ nên ta loại đáp án A.

Vậy bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ là bảng C.

Câu 60: Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là:

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

D.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Lời giải

Chọn A

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

Có $a = -1 < 0$, nên loại C và D.

Tọa độ đỉnh $I(1;0)$, nên nhận A.

Câu 61: Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 2$?

A.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Lời giải

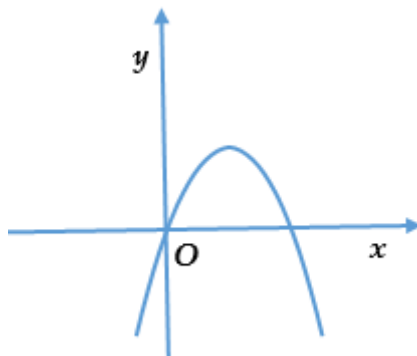
Chọn C

$$y' = -2x + 2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$; nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 62: Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có hệ số a là



A. $a > 0$.

B. $a < 0$.

C. $a = 1$.

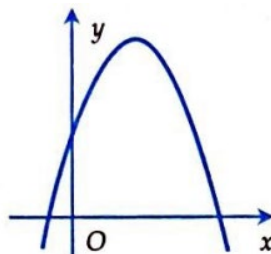
D. $a = 2$.

Lời giải

Chọn B

Bề lõm hướng xuống $a < 0$.

Câu 63: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, c < 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0$

Lời giải

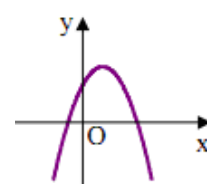
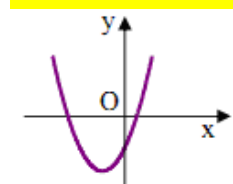
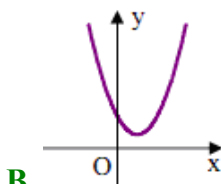
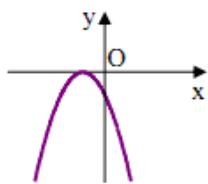
Chọn C

Parabol quay bề lõm xuống dưới $\Rightarrow a < 0$.

Parabol cắt Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Đỉnh của parabol có hoành độ dương $\Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$ mà $a < 0$ nên suy ra $b > 0$.

Câu 64: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, b > 0$ và $c < 0$ thì đồ thị hàm số của nó có dạng

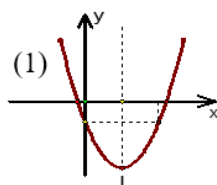


Lời giải

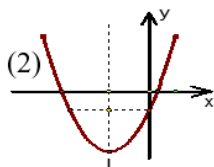
Chọn C

Do $a > 0$ nên Parabol quay bề lõm lên trên, suy ra loại phương án A, D. Mặt khác do $a > 0, b > 0$ nên đỉnh Parabol có hoành độ $x = -\frac{b}{2a} < 0$ nên loại phương án B. Vậy chọn C.

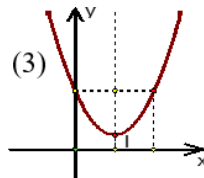
Câu 65: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a > 0, b < 0, c > 0)$ thì đồ thị của hàm số là hình nào trong các hình sau:



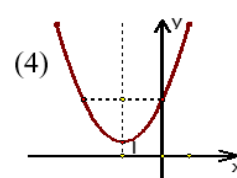
A. Hình (1).



B. Hình (2).



C. Hình (3).



D. Hình (4).

Lời giải

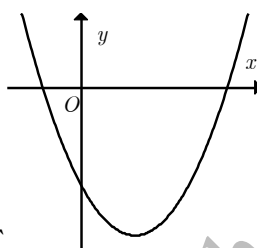
Chọn C

Vì $c > 0$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục hoành.

Mặt khác $a > 0, b < 0$ nên hai hệ số này trái dấu, trục đối xứng sẽ phía phải trục tung.

Do đó, hình là đáp án cần tìm.

Câu 66: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$. C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, C. Chọn A

Câu 67: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Xác định dấu của a, b, c .

A. $a < 0, b < 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c > 0$. C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

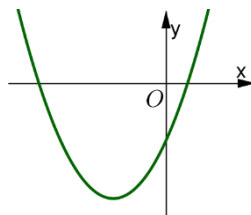
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol (P) có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên
$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{-b}{2a} > 0 \\ c = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$

Câu 68: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$. **C.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

Lời giải

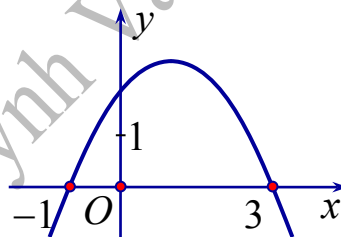
Chọn D

Vì Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c)$ ở dưới $Ox \Rightarrow c < 0$.

Hoành độ đỉnh Parabol là $-\frac{b}{2a} < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 69: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, nhận thấy:

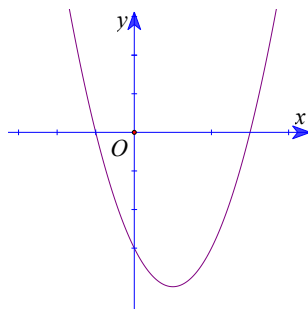
* Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

* Đồ thị cắt trục tung tại tung độ bằng c nên $c > 0$.

* Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$ nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ mà theo Vi-et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = -2a \Rightarrow b > 0$.

* Vậy $a < 0, b > 0, c > 0$.

Câu 70: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

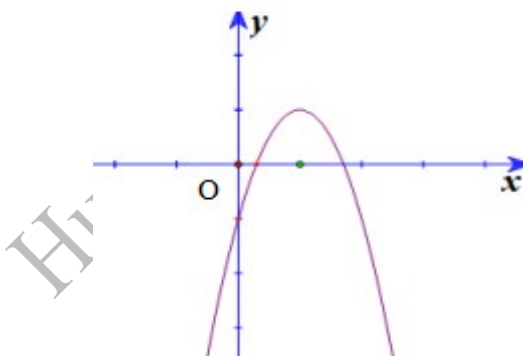
Chọn A

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ ($= c$) âm nên $c < 0$. Suy ra loại B, **D.**

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$, hoành độ đỉnh $\left(= -\frac{b}{2a} \right)$ dương nên

$$\frac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0.$$

Câu 71: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



- A.** $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét:

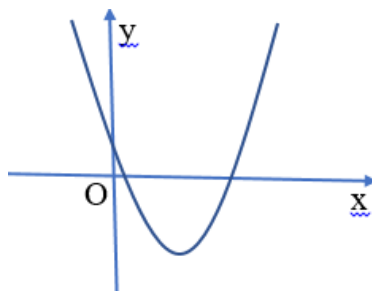
+) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

+) Parabol cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng 0 và tung độ âm nên thay $x = 0$ vào $y = ax^2 + bx + c$ suy ra $c < 0$.

+) Parabol có trục đối xứng nằm bên phải trục tung nên $x = -\frac{b}{2a} > 0$ mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 72: Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b = 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$. C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

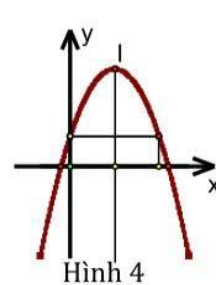
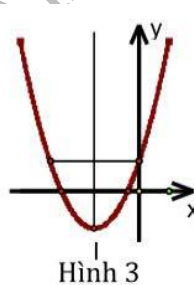
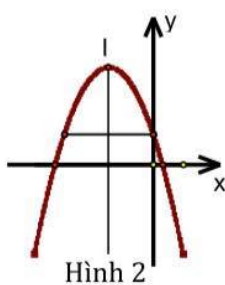
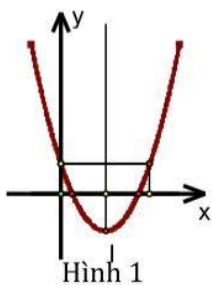
Chọn C

Từ dáng đồ thị ta có $a > 0$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ suy ra $b < 0$.

Câu 73: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a < 0; b < 0; c > 0$ thì đồ thị (P) của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây



- A. hình (4). B. hình (3). C. hình (2). D. hình (1).

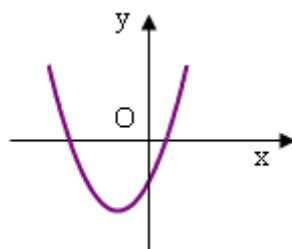
Lời giải

Chọn C

Vì $a < 0$ nên đồ thị có bề lõm hướng xuống dưới $\Rightarrow$ loại hình, hình.

$a < 0; b < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0$ nên trục đối xứng của (P) nằm bên trái trục tung. Vậy hình thỏa mãn nên chọn đáp án C.

Câu 74: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a > 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0$. C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

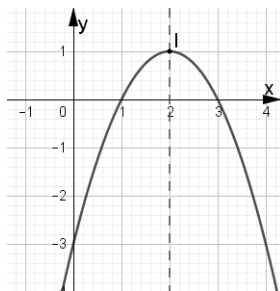
Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm nằm phía dưới trục Ox nên $C < 0$

Đồ thị có bề lõm hướng lên do đó $a > 0$

Tọa độ đỉnh nằm ở góc phần tư thứ III nên $\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 75: Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y = -x^2 + 4x - 3$. B. $y = -x^2 - 4x - 3$. C. $y = -2x^2 - x - 3$. D. $y = x^2 - 4x - 3$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$. Loại phương án D.

Trục đối xứng: $x = 2$ do đó Chọn A

Câu 76: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào ?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$		2		$+\infty$

A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = -3x^2 + 6x - 1$. C. $y = x^2 + 2x - 1$. D. $y = x^2 - 2x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$. Loại B.

Tọa độ đỉnh $I(1; 2) \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 > 0$. Suy ra $b < 0$. Loại C.

Thay $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Loại D.

Câu 77: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$		-4		$+\infty$

A. $y = x^2 - 4x$. B. $y = x^2 + 4x$. C. $y = -x^2 + 4x$. D. $y = -x^2 - 4x$.

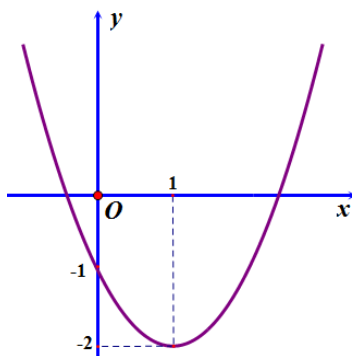
Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số $a > 0$. Loại C, D

Toạ độ đỉnh $I = (2; -4)$ loại B

Câu 78: Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A; B; C; D sau đây?



- A. $y = x^2 + 2x - 1$. B. $y = x^2 + 2x - 2$. C. $y = 2x^2 - 4x - 2$. D. $y = x^2 - 2x - 1$.

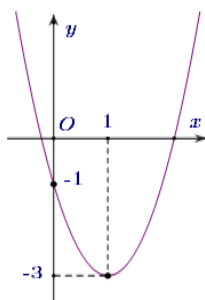
Lời giải

Chọn D

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên loại B và C

Hoành độ của đỉnh là $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta loại A và **Chọn D**

Câu 79: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau



Phương trình của parabol này là

- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 1$. C. $y = x^2 - 2x - 1$. D. $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Lời giải

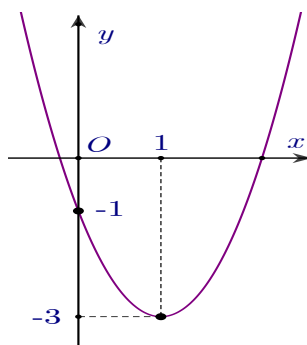
Chọn D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ nên $c = -1$.

Tọa độ đỉnh $I(1; -3)$, ta có phương trình:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là: $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 80: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau:



Phương trình của parabol này là

- A.** $y = -x^2 + x - 1$. **B.** $y = 2x^2 + 4x - 1$. **C.** $y = x^2 - 2x - 1$. **D.** $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Lời giải

Chọn D

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên suy ra $c = -1$ (1)

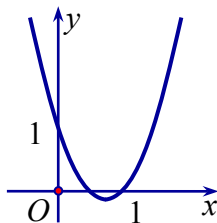
Đồ thị có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) \equiv I(1; -3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \\ \frac{-\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \Delta = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 4a^2 - 4ac - 12a = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ và ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c = -1 \\ b = -2a \\ 4a^2 - 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ta được parabol có phương trình là $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Câu 81: Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số bậc hai nào?



- A.** $y = x^2 - 3x + 1$. **B.** $y = 2x^2 - 3x + 1$. **C.** $y = -x^2 + 3x - 1$. **D.** $y = -2x^2 + 3x - 1$.

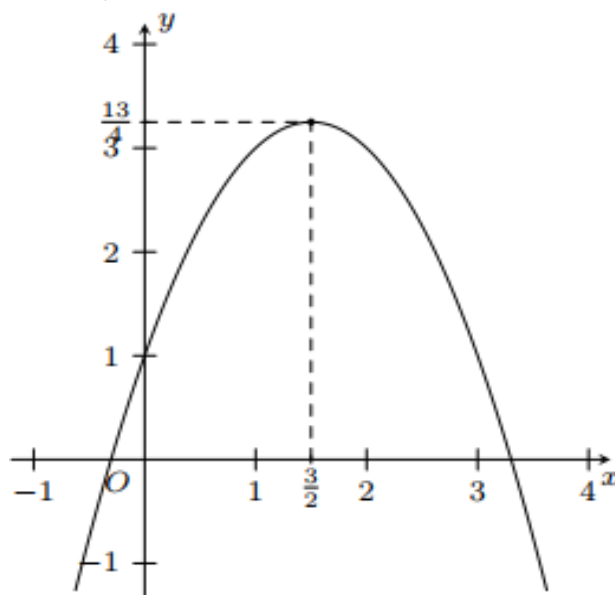
Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số bậc hai có hệ số $a > 0$ nên ta loại đáp án **C**, **D**.

Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(1; 0)$, mà điểm $(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ và không thuộc đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ nên ta **Chọn B**

Câu 82: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

- A. $y = x^2 + 3x - 1$. B. $y = x^2 - 3x - 1$. C. $y = -x^2 - 3x - 1$. **D. $y = -x^2 + 3x + 1$.**

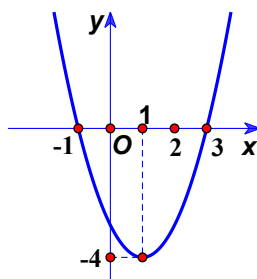
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số là parabol có bề lõm quay xuống nên hệ số $a < 0$. Loại đáp án A, **B.**

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại đáp án **C.**

Câu 83: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



- A. -9. B. 9. **C. -6.** D. 6.

Lời giải

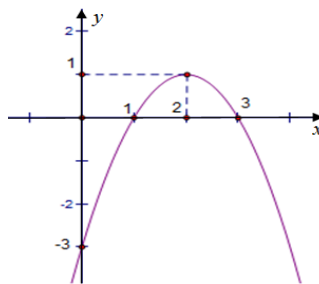
Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$ nên có

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 84: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



- A. $y = -x^2 + 2x - 3$. B. $y = -x^2 + 4x - 3$. C. $y = x^2 - 4x + 3$. D. $y = x^2 - 2x - 3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị trên là của hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và có tọa độ đỉnh là $I(2;1)$. Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

Câu 85: Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		0	
		-	+
y	$+\infty$		$+\infty$
		-5	

- A. $y = -x^2 + 4x$. B. $y = -x^2 + 4x - 9$. C. $y = x^2 - 4x - 1$. D. $y = x^2 - 4x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Parabol cần tìm phải có hệ số $a > 0$ và đồ thị hàm số phải đi qua điểm $(2; -5)$. Đáp án C thỏa mãn.

Câu 86: Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y		-4	
		-	
	$-\infty$		$-\infty$

- A. $y = x^2 + 4x$. B. $y = -x^2 - 4x - 8$. C. $y = -x^2 - 4x + 8$. D. $y = -x^2 - 4x$.

Lời giải

Chọn B

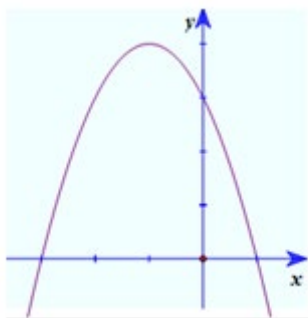
Dựa vào BBT ta thấy:

Parabol có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Loại A.

Parabol có đỉnh $I(-2; -4)$ nên thay $x = -2; y = -4$ vào các đáp án B, C, D.

Nhận thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 87: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó:

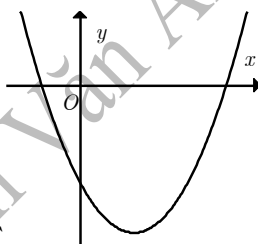
- A.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống nên $a < 0$, cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$. Đỉnh parabol có hoành độ âm nên $\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0$.

Câu 88: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

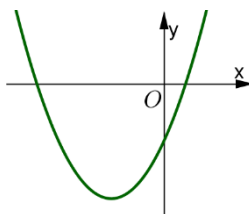
Lời giải

Chọn A

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại **D**.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, **C. Chọn A**

Câu 89: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol trong hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



- A.** $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0$. **C.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

Lời giải

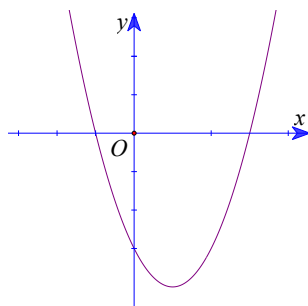
Chọn D

Vì Parabol hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; c)$ ở dưới $Ox \Rightarrow c < 0$.

Hoành độ đỉnh Parabol là $-\frac{b}{2a} < 0$, mà $a > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 90: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

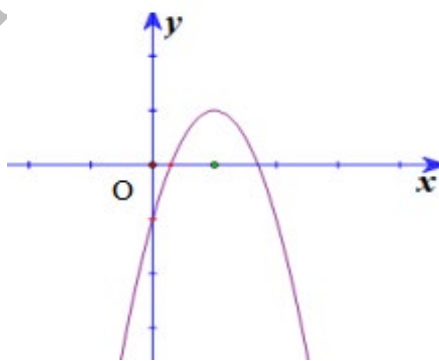
Chọn A

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ ($= c$) âm nên $c < 0$. Suy ra loại B, **D.**

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$, hoành độ đỉnh $\left(= -\frac{b}{2a} \right)$ dương nên

$$\frac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0.$$

Câu 91: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi mệnh đề nào đúng?



- A.** $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét:

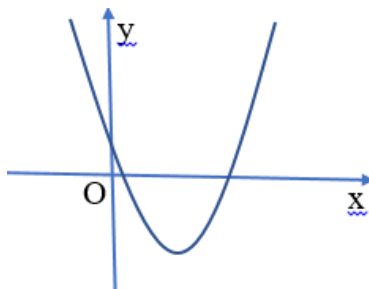
+) Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$.

+) Parabol cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng 0 và tung độ âm nên thay $x = 0$ vào $y = ax^2 + bx + c$ suy ra $c < 0$.

+) Parabol có trục đối xứng nằm bên phải trục tung nên $x = -\frac{b}{2a} > 0$ mà $a < 0$ nên $b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 92: Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A.** $a > 0, b = 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

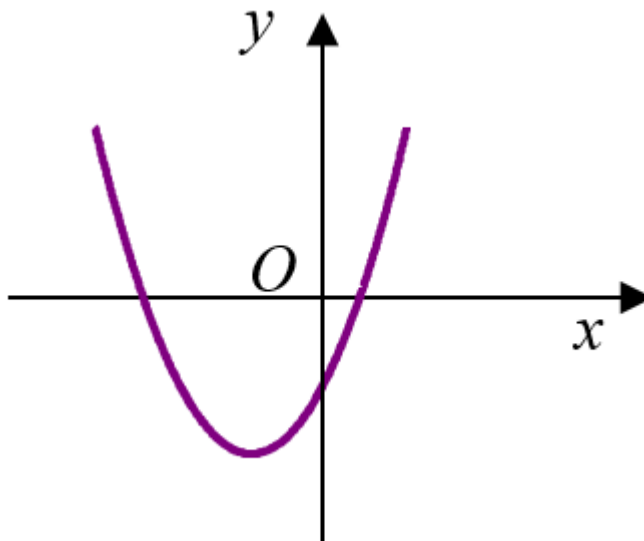
Chọn C

Từ dáng đồ thị ta có $a > 0$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$ suy ra $b < 0$.

Câu 93: Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như sau thì dấu các hệ số của nó là



- A.** $a > 0; b > 0; c > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c < 0$. **C.** $a > 0; b < 0; c > 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c < 0$.

Lời giải

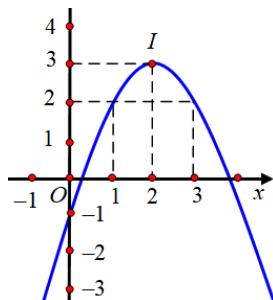
Chọn D

Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$. Loại **A**, **C**.

Đồ thị hàm số có trục đối xứng bên trái Oy : $\Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$. Loại **B**.

Câu 94: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $4a + 2b + c$ có giá trị là:



A. 3.

B. 2.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

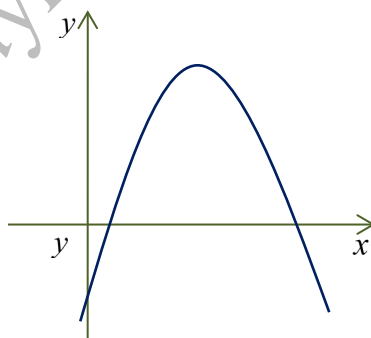
Chọn A

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ nên thay vào phương trình Parabol ta có

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow 4a + 2b + c = 3.$$

Vậy $4a + 2b + c = 3$.

Câu 95: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0$. **B. $a > 0, b < 0, c > 0$.**

C. $a < 0, b > 0, c < 0$. **D. $a > 0, b > 0, c < 0$.**

Lời giải

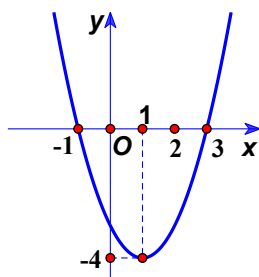
Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta có:

- Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a < 0$.
- Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Do đó: $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

Câu 96: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



A. -9.

B. 9.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

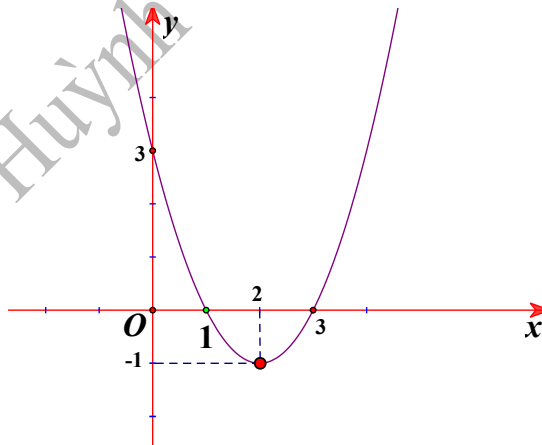
Chọn C

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$ nên có

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 97: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây ?



Giá trị của tổng $T = 4a + 2b + c$ là :

A. $T = 2$.

B. $T = -1$.

C. $T = 4$.

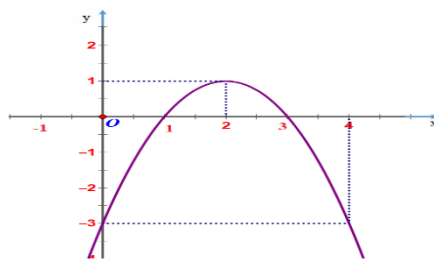
D. $T = 3$.

Lời giải

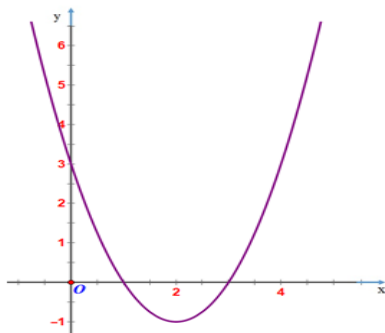
Chọn B

Đồ thị đã cho đi qua điểm $I(2; -1)$, ta có: $4a + 2b + c = -1$. Vậy $T = -1$.

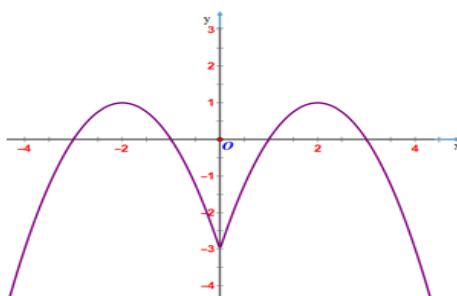
Câu 98: Cho đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ có đồ thị như hình vẽ sau



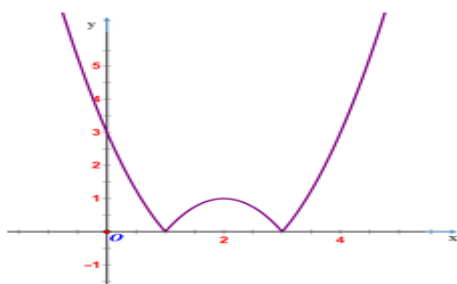
Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$



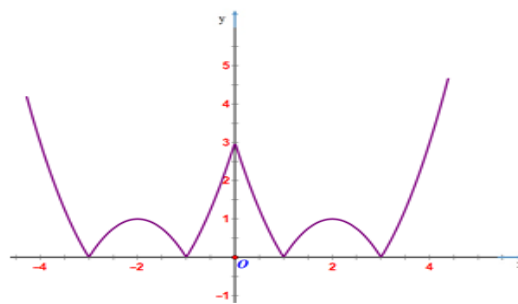
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 2

B. Hình 4

C. Hình 1

D. Hình 3

Lời giải

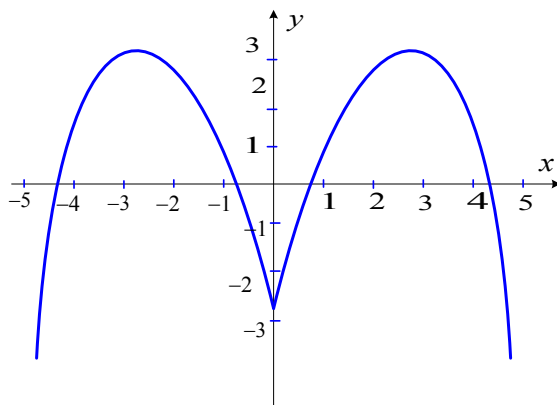
Chọn D

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm hai phần

Phần 1: ứng với $y \geq 0$ của đồ thị $y = f(x)$.

Phần 2: lấy đối xứng phần $y < 0$ của đồ thị $y = f(x)$ qua trục Ox .

Câu 99: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



- A. $y = x^2 - 3x - 3$. B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$. C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$. D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy . Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

DẠNG 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 100: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

- A. -3. B. 1. C. 3. D. 13.

Lời giải

Chọn A

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x = 2$.

Câu 101: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ đạt được tại

- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = -1$ nên chọn đáp án B.

Câu 102: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

- A. -3. B. -2. C. $-\frac{21}{8}$. D. $-\frac{25}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$y = 2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{25}{8} \geq \frac{-25}{8}$$

$$y = \frac{-25}{8} \text{ khi } x = \frac{-1}{4} \text{ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số } y = 2x^2 + x - 3 \text{ là } \frac{-25}{8}.$$

Câu 103: Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$
B. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$
C. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$
D. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25$$

$$\text{Vì } a = -3 < 0 \text{ nên hàm số có giá trị lớn nhất là: } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{12}.$$

Câu 104: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A.** $\frac{4}{5}$ **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** -20

Lời giải

Chọn B

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$ và $a = -3 < 0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Mà

$[1; 3] \subset \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Do đó trên đoạn $[1; 3]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$, tức là

$$\max_{[1; 3]} f(x) = f(1) = 0.$$

Câu 105: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng:

- A.** $\frac{11}{8}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{4}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^2 - 5x + 9$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{4} > 0$.

Suy ra hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$.

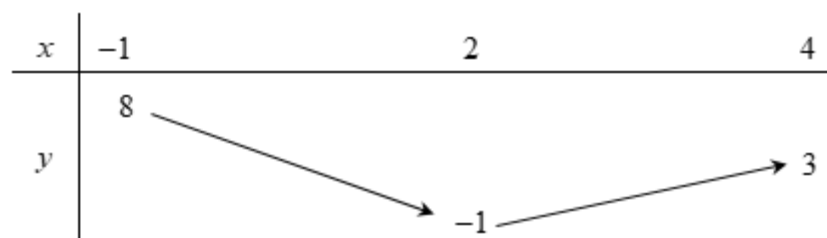
Câu 106: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trên miền $[-1; 4]$ là

- A. -1. B. 2. **C. 7.** D. 8.

Lời giải

Chọn C

Xét trên miền $[-1; 4]$ thì hàm số có bảng biến thiên là



Từ bảng biến thiên suy ra: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 nên tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $8 + (-1) = 7$.

Câu 107: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

- A. 1 B. 0 **C. -1** D. -2

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Đặt $t = |x|, t \geq 0$.

Hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $t = 1 > 0$.

Vậy hàm số $y = x^2 - 2|x|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Cách 2: Ta có

$$y = x^2 - 2|x| = (|x| - 1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x; \quad y = -1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Câu 108: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4|x| + 3$ là:

- A. -1 B. 1 **C. 4** D. 3

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 \geq 0 \forall x, |x| \geq 0 \forall x$.

Suy ra $x^2 + 4|x| + 3 \geq 3 \forall x$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 3.

Câu 109: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của hàm số khi $x \in [-1; 4]$. Tính $M + m$.

A. -14.

B. -13.

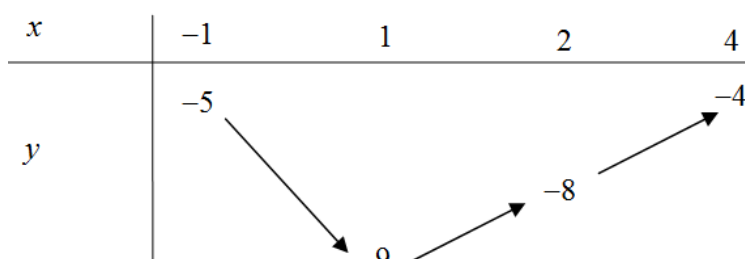
C. -4.

D. -9.

Lời giải

Chọn B

BBT



Dựa vào BBT ta có $M = -4, m = -9$.

Vậy $M + m = -4 + (-9) = -13$.

Câu 110: Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 111: Hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi m thuộc

A. $(-\infty; 5)$.

B. $[7; 8)$.

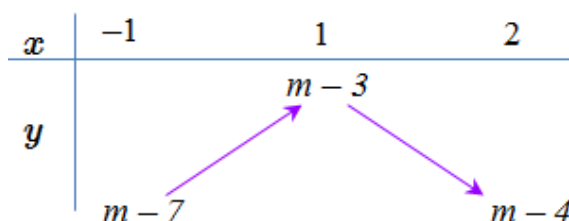
C. $(5; 7)$.

D. $(9; 11)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-1; 2]$.



Hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 3 khi và chỉ khi $m-3=3 \Leftrightarrow m=6$.

- Câu 112:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là
A. $m = \pm 4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Theo đề bài ta có $y\left(-\frac{b}{2a}\right) = 1 \Leftrightarrow y(-m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Câu 113:** Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $m \in [-1; 0)$. **B.** $m \in \left(\frac{3}{2}; 5\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. **D.** $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2 = (x - m)^2 - 3m - 2 \geq -3m - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = m$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -3m - 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3m - 2 = -10 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$.

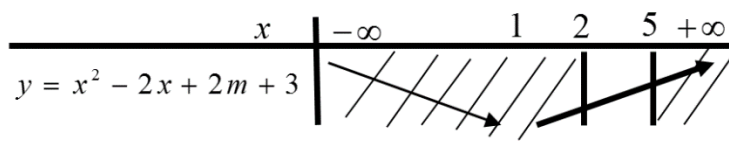
- Câu 114:** Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .
A. $m = 0$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có hệ số $a = 1 > 0, b = -2$, trục đối xứng là đường thẳng

$x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên đoạn $[2;5]$ suy ra giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $f(2)$. Theo giả thiết $f(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 115: Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3 .

A. $m = -3$.

B. $m = -9$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$. Như vậy trên đoạn $[2;5]$ hàm số đồng biến. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2;5]$ là $y(2) = 2m + 3$.

$$y(2) = -3 \Leftrightarrow 2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3.$$

Câu 116: Tìm số các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0;1]$ là bằng 1.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } -\frac{b}{2a} = \frac{-(2m+1)}{2}; \Delta = 4m + 5.$$

Vì $a > 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên và có điểm thấp nhất là đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

$$\frac{-b}{2a} \in (0;1) \Leftrightarrow 0 < \frac{-(2m+1)}{2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} < m < \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4m+5)}{4}.$$

$$\text{Vậy ta phải có } \frac{-(4m+5)}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-9}{4}.$$

* Trường hợp 2:

$$\frac{-b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m^2 - 1.$$

$$\text{Ta phải có } m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Chỉ có } m = -\sqrt{2} \text{ thỏa mãn (2).}$$

* Trường hợp 3:

$$\frac{-b}{2a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-(2m+1)}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \min_{[0;1]} f(x) = f(1) = m^2 + 2m + 1.$$

$$\text{Ta phải có } m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -2.$$

$$\text{Chỉ có } m = -2 \text{ thỏa mãn (3).}$$

$$\text{Vậy } m \in \{-2; -\sqrt{2}\}.$$

Câu 117: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

A. $m = -2$

B. $m = 1$

C. $m = 3$

D. $m = 5$

Lời giải

Chọn C

Hàm số bậc hai với hệ số $a = 2 > 0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3(m+1)}{4}$ và

$$y_{\min} = y\left(\frac{3(m+1)}{4}\right) = -\frac{1}{8}m^2 + \frac{3}{4}m - \frac{25}{8} = -\frac{1}{8}(m-3)^2 - 2 \leq -2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$.

Câu 118: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = 3$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = \frac{9}{2}$.

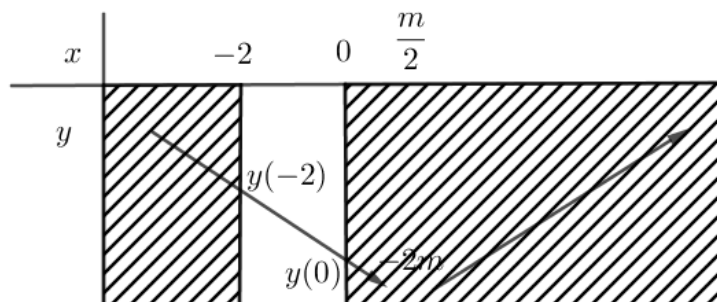
D. $T = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có đỉnh } I\left(\frac{m}{2}; -2m\right).$$

Do $m > 0$ nên $\frac{m}{2} > 0$. Khi đó đỉnh $I \notin [-2; 0]$.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ là $y(0) = 3$ tại $x = 0$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{3\}.$$

DẠNG 5. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA PARABOL VỚI ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

Câu 119: Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là:

- A.** $(1; 0); (3; 2)$. **B.** $(0; -1); (-2; -3)$. **C.** $(-1; 2); (2; 1)$. **D.** $(2; 1); (0; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$x = 1 \Rightarrow y = x - 1 = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow y = x - 1 = 2$$

Hai giao điểm là: $(1; 0); (3; 2)$.

Câu 120: Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

- A.** $M(0; -2), N(2; -4)$. **B.** $M(-1; -1), N(-2; 0)$.
C. $M(-3; 1), N(3; -5)$. **D.** $M(1; -3), N(2; -4)$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là $M(1; -3), N(2; -4)$.

Câu 121: Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

- A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$. B. $(2; 2)$ và $(4; 8)$. C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$. D. $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Câu 122: Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 1 - x$ với $(P): y = x^2 - 2x + 1$ là

- A. $x = 0; x = 1$. B. $x = 1$. C. $x = 0; x = 2$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

$$1 - x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 123: Gọi $A(a; b)$ và $B(c; d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6$. Giá trị của $b + d$ bằng.

- A. 7. B. -7. C. 15. D. -15.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } 2x - x^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -15 \end{cases}$$

$$b + d = -15$$

Câu 124: Cho hai parabol có phương trình $y = x^2 + x + 1$ và $y = 2x^2 - x - 2$. Biết hai parabol cắt nhau tại hai điểm A và B ($x_A < x_B$). Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 4\sqrt{2}$ B. $AB = 2\sqrt{26}$ C. $AB = 4\sqrt{10}$ D. $AB = 2\sqrt{10}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol:

$$2x^2 - x - 2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$x = -1 \Rightarrow y = 1; x = 3 \Rightarrow y = 13$, do đó hai giao điểm là $A(-1; 1)$ và $B(3; 13)$.

$$\text{Từ đó } AB = \sqrt{(3+1)^2 + (13-1)^2} = 4\sqrt{10}.$$

Câu 125: Giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. $m < -\frac{9}{4}$.

B. $m > -\frac{9}{4}$.

C. $m > \frac{9}{4}$.

D. $m < \frac{9}{4}$.

Lời giải

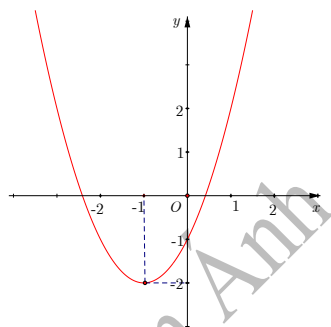
Chọn D

Cho $x^2 + 3x + m = 0$

Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}.$$

Câu 126: Hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.



A. $m < -2$.

B. $m < -1$.

C. $m < 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải

Chọn D

$$x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -m - 1 \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*), chính là số giao điểm của parabol $y = x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = -m - 1$.

Ycbt $\Rightarrow m > 1$.

Câu 127: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

A. 6

B. 5

C. 7

D. 8

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 + x - 2 = -(m+1)x + m + 2 \Leftrightarrow x^2 + (m+2)x - m - 4 = 0 \quad (*).$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Vậy có 6 giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ thỏa mãn ycbt.

Câu 128: Cho parabol $(P): y = x^2 - mx$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 1$, trong đó m là tham số. Khi parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N , tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

- A.** một parabol **B.** một đường thẳng **C.** một đoạn thẳng **D.** một điểm

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 - mx = (m+2)x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0.$$

có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Do đó (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m . Khi đó x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của.

Theo Viet ta có $x_M + x_N = 2(m+1)$.

$$\text{Ta có } x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m+1.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } y_I &= (m+2)(m+1) + 1 \\ &= (m+1)^2 + (m+1) + 1 = x_I^2 + x_I + 1. \end{aligned}$$

Vậy I luôn thuộc parabol $y = x^2 + x + 1$ với mọi m .

Chú ý: Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Câu 129: Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (P) . Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$. Tổng bình phương các phần tử của S là

- A.** 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 + 3x = x + m^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 = 0$.

Đề d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình, khi đó $A(x_1; x_1 + m^2), B(x_2; x_2 + m^2)$

$$\Rightarrow I\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+2m^2}{2}\right)$$

Theo Vi ét ta có $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 \cdot x_2 = -m^2$ nên $I(-1; m^2 - 1)$.

Vì I thuộc d' nên $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 130: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng

$y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là

A. -10 .

B. 10.

C. -6.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 3x - 5 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 5 - m = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = (-7)^2 - 4.2(-m-5) > 0$

$$\Leftrightarrow 8m + 89 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{89}{8}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của nên theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-5-m}{2} \end{cases}.$$

$$2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{-5-m}{2}\right) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 70 + 7m = 0 \Leftrightarrow m = -10.$$

Vậy $m = -10$ là giá trị cần tìm.

Câu 131: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol

$$y = x^2 + 1?$$

A. 6.

B. 9.

C.7.

D. 8.

Lời giải

Chon C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$

Đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow$ Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

$$\forall i \ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Câu 132: Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$ (*).

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 133: Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 134: Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 5$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 2 - 3m$. Tìm tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung.

- A. $1 < m < \frac{7}{3}$. B. $m > 1$. C. $m > \frac{7}{3}$. D. $m < 1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 + 2x - 5 = 2mx + 2 - 3m \Leftrightarrow x^2 + 2(1-m)x - 7 + 3m = 0 \quad (*)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về phía bên phải của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 + 7 - 3m > 0 \\ -2(1-m) > 0 \\ -7 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 8 > 0 \\ 1-m < 0 \\ 3m - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

Vậy $m > \frac{7}{3}$.

Câu 135: Gọi T là tổng tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính T .

- A.** $T = -9$. **B.** $T = \frac{3}{2}$. **C.** $T = -15$. **D.** $T = 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 - 4x + m = 0$ (1).

(P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| = 3|x_2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases}$$

Mặt khác, theo định lý Viet cho phương trình (1) thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$

Với $x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow m = 3$ thỏa mãn.

Với $x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2 \Rightarrow m = -12$ thỏa mãn.

Có hai giá trị của m là $m = 3$ và $m = -12$.

Vậy $T = -9$. Chọn đáp án **A**.

Câu 136: Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A.** $m = 2$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $m = -2$. **D.** $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 137: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a - b + c$, biết rằng đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 .

A. $a - b - c = -2$

B. $a - b - c = 2$

C. $a - b - c = 1$

D. $a - b - c = -1$

Lời giải

Chọn D

Vì đường thẳng $y = -2,5$ có một điểm chung duy nhất với (P) và đường thẳng $y = 2$ cắt (P) tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5 nên suy ra tọa độ đỉnh của (P) là:

$$\left(\frac{-1+5}{2}; 2,5 \right) = (2; 2,5).$$

Vậy (P) đi qua ba điểm $(2; 2,5)$, $(-1; 2)$ và $(5; 2)$.

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{-4}{10} \\ c = \frac{15}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a - b - c = -1$.

Câu 138: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = m$ (*). Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

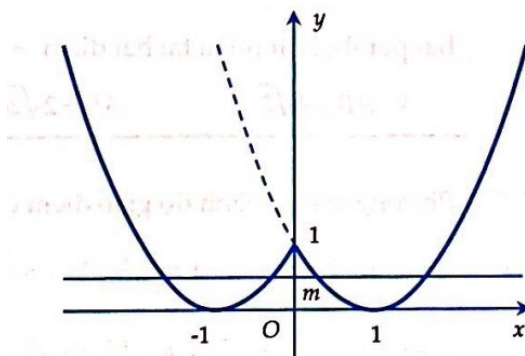
Dễ thấy hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ là một hàm số chẵn, do đó có đồ thị đối xứng qua trục Oy . Mặt khác ta có $y = x^2 - 2|x| + 1 = x^2 - 2x + 1$ với $x \geq 0$.

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ như sau:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;

- Bước 2: Xóa phần nằm bên trái trục tung của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$;

- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ qua trục tung.



Quan sát trên đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| + 1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Suy ra không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Cách 2: Đặt $t = |x|, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 1 - m = 0$.

Ta thấy với $t = 0$ thì $x = 0$, với $t > 0$ thì $x = \pm t$.

Do đó để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (1 - m) > 0 \\ 2 > 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Do đó không có giá trị nguyên nào của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 139: Biết $S = (a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm $a + b$.

A. $a + b = 1$

B. $a + b = -1$

C. $a + b = 2$

D. $a + b = -2$

Lời giải

Chọn A

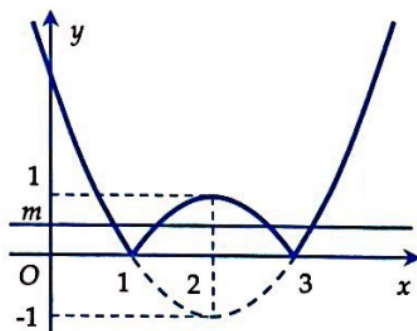
$$\text{Ta có } y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$:

- Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;

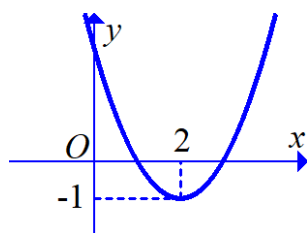
- Bước 2: Giữ nguyên phần nằm trên trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$;

- Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.



Quan sát đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy $S = (0; 1)$. Suy ra $a + b = 1$.

Câu 140: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



A. $0 < m < 1$.

B. $-1 < m < 0$.

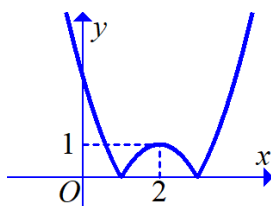
C. $m = -1$; $m = 3$.

D. $m > 3$.

Lời giải

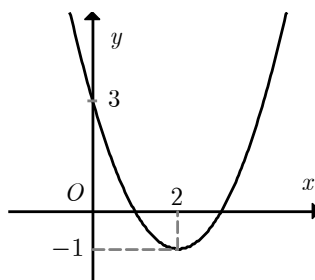
Chọn A

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$. Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ dưới đây.



Do đó phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Câu 141: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt



A. $m = 4$.

B. $m > 0$.

C. $m > -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

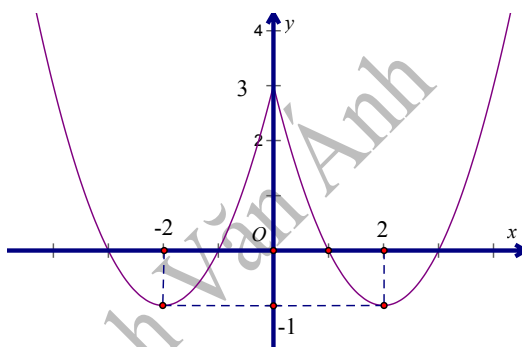
Đồ thị hàm số cắt Oy tại $(0; 3) \Rightarrow c = 3$

Đồ thị hàm số nhận $(2; -1)$ làm đỉnh nên ta có
$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ta có $f(|x|) + 1 = m \Leftrightarrow y = f(|x|) = m - 1$

Ta có đồ thị hàm $y = f(|x|)$ (C) như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(|x|) + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng $y = m - 1 \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 142: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để parabol (P): $y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

A. $-2 < m < -1$.

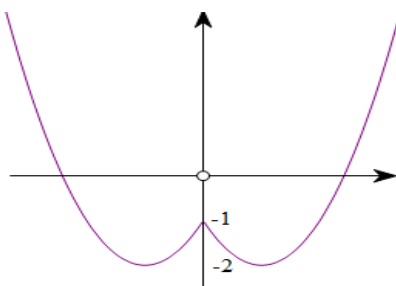
B. $1 < m < 2$.

C. $-2 \leq m \leq -1$.

D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ bằng cách bỏ phần đồ thị phía trái trục tung và lấy thêm phần đối xứng của phần phía phải trục tung qua trục tung

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2|x| - 1$ cắt đường thẳng $y = m - 3$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m - 3 < -1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 143: Với giá trị nào của m thì phương trình $m = |x^2 - 5x + 4|$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \leq \frac{9}{4}$.

B. $m \geq \frac{9}{4}$.

C. $m = \frac{9}{4}$.

D. $m = 0$.

Lời giải

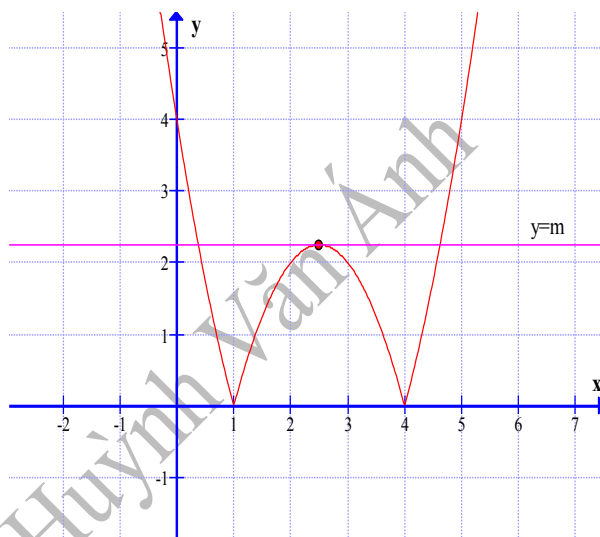
Chọn C

Ta có: $y = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{khi } x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{khi } x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$

Giữ nguyên đồ thị (P) ứng với $y \geq 0$ ta được đồ thị (C_1)

Lấy đối xứng phần đồ thị ứng với $y < 0$ ta được đồ thị (C_2)

Vậy $(C) = (C_1) \cup (C_2)$



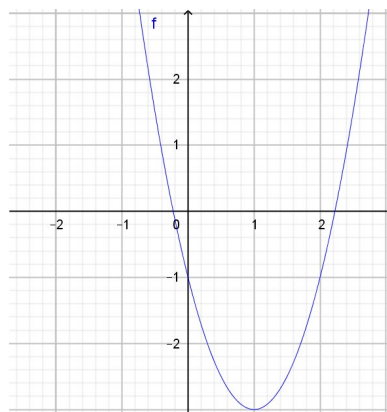
Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm nếu có của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 5x + 4|$ (C) và đường thẳng $y = m$

Yêu cầu bài ra $\Leftrightarrow$ cắt tại 3 điểm phân biệt

- d là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành

Từ đồ thị hàm số ta suy ra cắt tại 3 điểm phân biệt khi $m = \frac{9}{4}$

Câu 144: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ cắt đường $y = m + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ tại 4 điểm phân biệt là?



A. $-3 < m < 0$.

B. $0 < m < 3$.

C. $1 < m < 4$.

D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

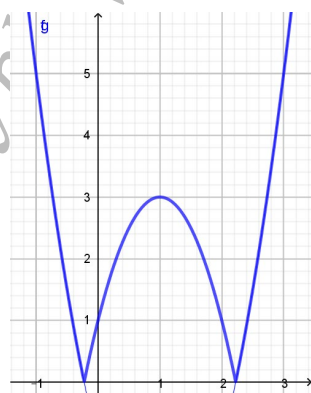
Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành.

-Lấy đối xứng phần đồ thị dưới trục hoành qua trục hoành.

-Xóa phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta có đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < m < 2$.



Câu 145: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

A. $m < -3$.

B. $m > -\frac{81}{4}$.

C. $-\frac{81}{4} < m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 9|x| = m \Leftrightarrow x^2 - 9|x| - m = 0$

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$.

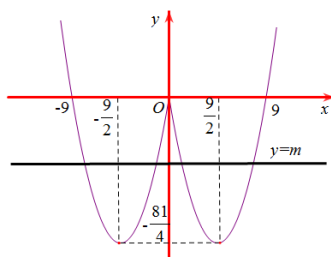
$$(1) \Rightarrow t^2 - 9t - m = 0$$

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 + 4m > 0 \\ 9 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} < m < 0.$$

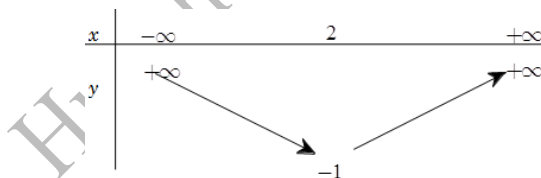
Cách 2:

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$



Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 9|x|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-\frac{81}{4} < m < 0$.

Câu 146: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. không tồn tại m .

Lời giải

Chọn B

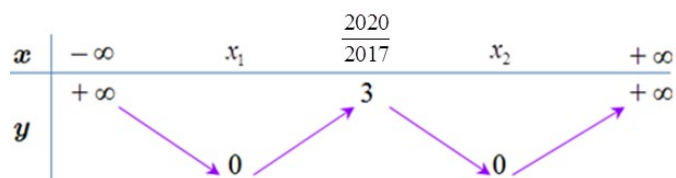
Dựa vào BBT ta thấy hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đạt GTNN bằng -1 tại $x = 2$ và có hệ số $a > 0$. Ta biểu diễn được: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1 = ax^2 - 4ax + 4a - 1$

$$\text{Do đó } f(2017x - 2018) = a(2017x - 2020)^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(2017x - 2018) - 2 = a(2017x - 2020)^2 - 3.$$

Vậy GTNN của $y = f(2017x - 2018) - 2$ bằng -3 tại $x = \frac{2020}{2017}$.

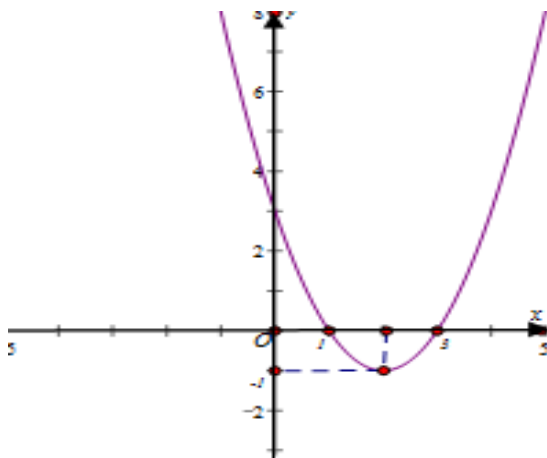
BBT của hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ có dạng:



Số nghiệm của phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(2017x - 2018) - 2|$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $|f(2017x - 2018) - 2| = m$ có đúng ba nghiệm khi $m = 3$.

Câu 147: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

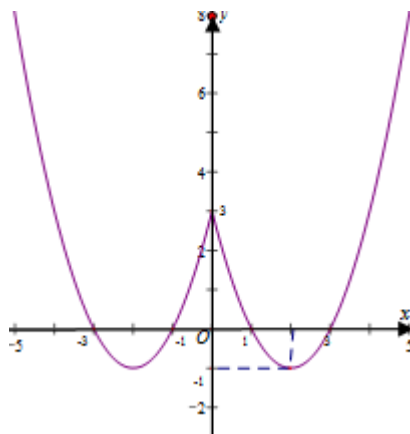
Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Xét (P_2) : $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; có $y = f(x)$ là hàm số chẵn; nên (P_2) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P_1); ta vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_1) bên phải trục Oy qua trục Oy .

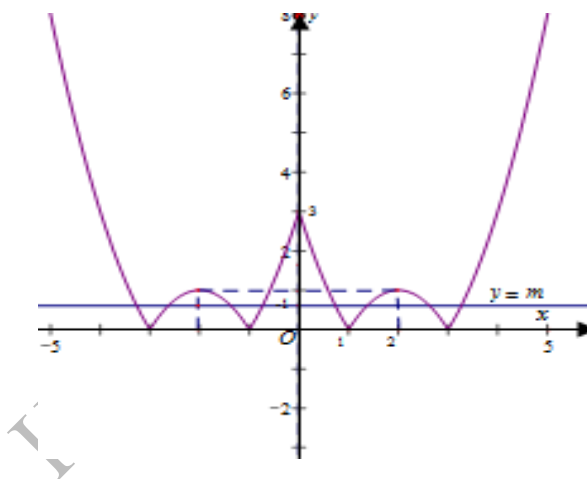


Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ (P_2) ta vẽ đồ thị hàm số

$y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) như sau

+) Giữ nguyên phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị (P_2) nằm trên trục Ox qua trục Ox .



Dựa vào đồ thị hàm số $y = g(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ (P_3) ta có phương trình $|f(x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

DẠNG 6. ỨNG DỤNG THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ BẬC HAI

Câu 148: Một chiếc ăng - ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5m$ và đường kính miệng $d = 4m$. Mặt cắt qua trục là một parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.

A. $m - n = 7$

B. $m - n = -7$

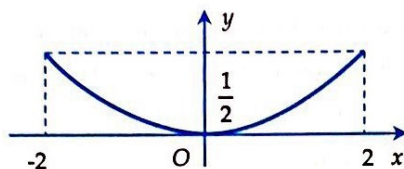
C. $m - n = 31$

D. $m - n = -31$

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$.



Từ đó ta có $\frac{1}{2} = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$.

Vậy $m - n = 1 - 8 = -7$.

Câu 149: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m và sau 1 giây thì nó đạt độ cao 8,5m, sau 2 giây nó đạt độ cao 6m. Tính tổng $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 18,3$. B. $a + b + c = 6,1$.
 C. $a + b + c = 8,5$. D. $a + b + c = -15,9$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết của bài toán ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{49}{10} \\ b = \frac{61}{5} \\ c = 1,2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{17}{2}.$$

Câu 150: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.

Lời giải

Chọn A

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

$$\text{Ta có } y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

Câu 151: Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

A. 11 m .

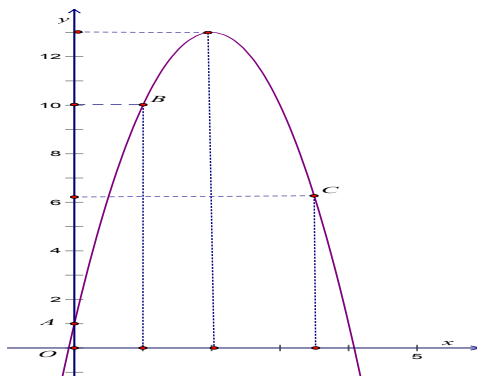
B. 12 m .

C. 13 m .

D. 14 m .

Lời giải

Chọn C



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$

Theo bài ra gắn vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2;13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.

Câu 152: Một chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao 8 m như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi chiều cao h của xe tải thỏa mãn điều kiện gì để có thể đi vào cổng mà không chạm tường?



A. $0 < h < 6$.

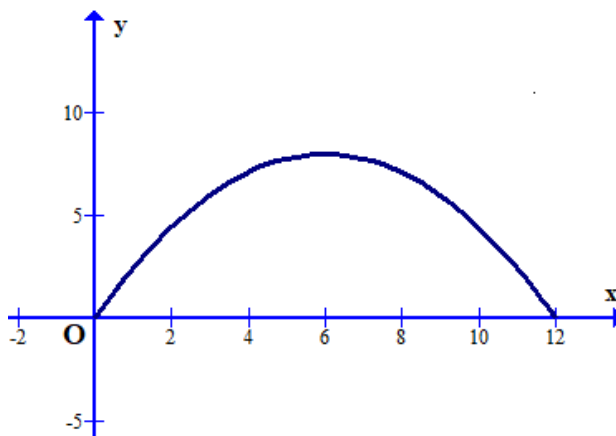
B. $0 < h \leq 6$.

C. $0 < h < 7$.

D. $0 < h \leq 7$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$, suy ra:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang 6 m đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$ khi đó chiều cao của xe là 6.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào cổng mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

Câu 153: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 64.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật.

Khi đó chiều rộng là $8 - x$.

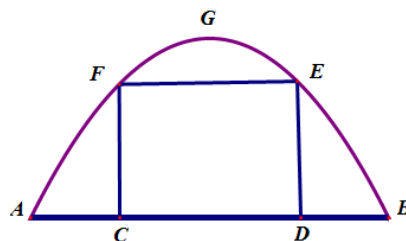
Diện tích hình chữ nhật là $x(8 - x)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 8x$ trên khoảng $(0;8)$ ta được

$$\max_{(0;8)} f(x) = f(4) = 16.$$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi chiều dài bằng chiều rộng bằng 4.

Câu 154: Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là 4m còn kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



A. 5m.

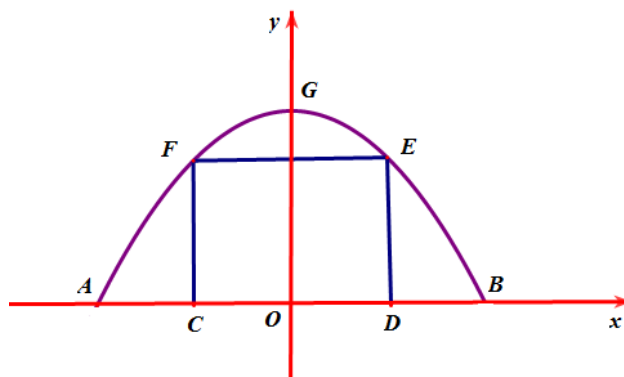
B. 8,5m.

C. 7,5m.

D. 8m.

Lời giải

Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chiều cao của cổng parabol là 4m nên $G(0; 4) \Rightarrow c = 4$.

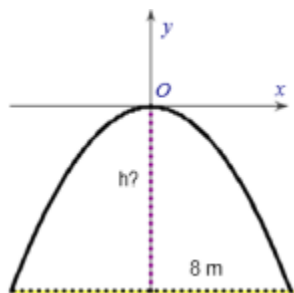
$\Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$

Lại có, kích thước cửa ở giữa là 3m x 4m nên $E(2; 3), F(-2; 3) \Rightarrow 3 = 4a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Vậy $(P): y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Ta có $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ nên $A(-4; 0), B(4; 0)$ hay $AB = 8$.

Câu 155: Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8m$. Hãy tính chiều cao h của cổng.



A. $h = 9m$.

B. $h = 7m$.

C. $h = 8m$.

D. $h = 5m$.

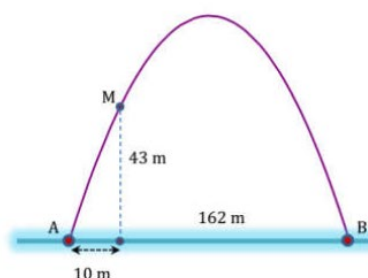
Lời giải

Chọn C

(P): $y = -\frac{1}{2}x^2$, có $d = 8$. Suy ra $\frac{d}{2} = 4$.

Thay $x = 4$ vào $y = -\frac{1}{2}x^2$. Suy ra $y = -8$. Suy ra $h = 8(cm)$.

Câu 156: Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.



A. 175,6 m.

B. 197,5 m.

C. 210 m.

D. 185,6 m.

Lời giải

Chọn D

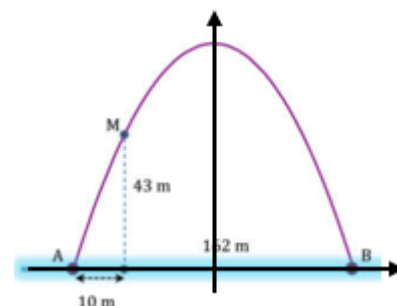
Gắn hệ toạ độ Oxy sao cho gốc toạ độ trùng với trung điểm của AB , tia AB là chiều dương của trục hoành.

Parabol có phương trình $y = ax^2 + c$, đi qua các điểm:

$B(81;0)$ và $M(-71;43)$ nên ta có hệ

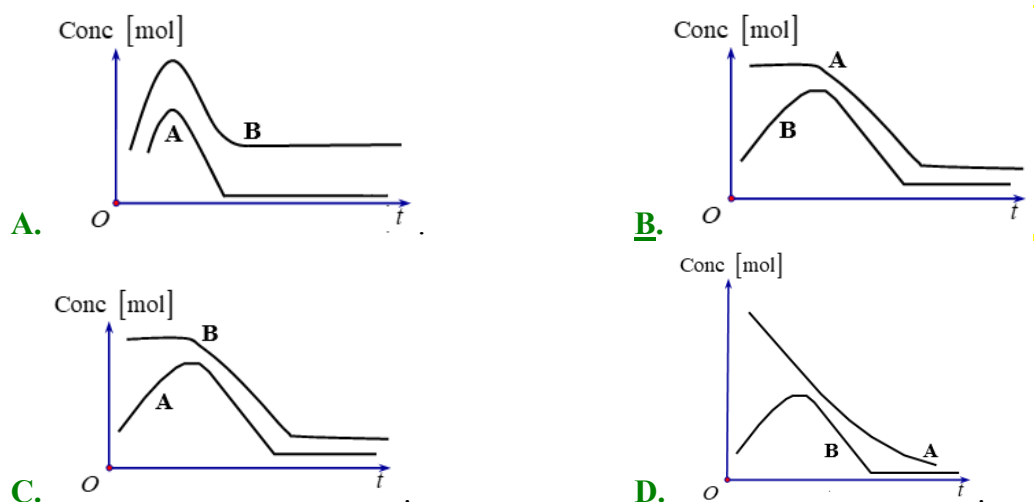
$$\begin{cases} 81^2 a + c = 0 \\ 71^2 a + c = 43 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185.6$$

Suy ra chiều cao của cổng là $c \approx 185,6$ m.



Câu 157: Rót chất A vào một ống nghiệm, rồi đổ thêm chất B vào. Khi nồng độ chất B đạt đến một giá trị nhất định thì chất A mới tác dụng với chất B. Khi phản ứng xảy ra, nồng độ cả hai chất đều

giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Đồ thị nồng độ mol theo thời gian nào sau đây thể hiện quá trình của phản ứng?



Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có:

Từ khi bắt đầu rót chất B thì đã có chất A trong ống nghiệm, nên nồng độ chất A ban đầu lớn hơn chất B . Tức là ban đầu, đồ thị nồng độ chất A nằm “phía trên” đồ thị nồng độ chất B (1).

Khi chất B đạt đến một giá trị nhất định thì hai chất mới phản ứng với nhau. Điều này chứng tỏ có một khoảng thời gian từ khi rót chất B đến khi bắt đầu phản ứng xảy ra thì nồng độ chất A là một hằng số. Tức trong khoảng thời gian đó đồ thị nồng độ chất A là đồ thị của một hàm số hằng (2).

Khi phản ứng xảy ra, nồng độ hai chất đều giảm đến khi chất B được tiêu thụ hoàn toàn. Điều này chứng tỏ sau khi kết thúc phản ứng thì chất B được tiêu thụ hết và chất A có thể còn dư, kể từ khi ngừng phản ứng thì nồng độ chất A trong ống nghiệm không thay đổi nữa, nên đồ thị nồng độ chất A sau phản ứng phải là đồ thị của một hàm số hằng (3).

Từ sự phân tích trên ta thấy chỉ có đồ thị của đáp án

B. phù hợp.

Câu 158: Cô Tình có $60m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, cô Tình chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Em hãy tính hộ diện tích lớn nhất mà cô Tình có thể rào được?

A. $400m^2$.

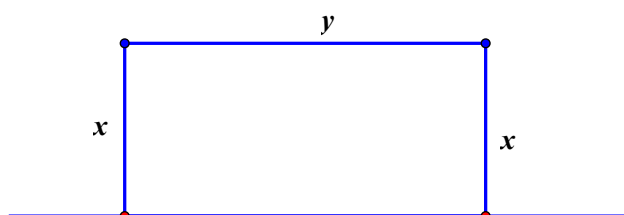
B. $450m^2$.

C. $350m^2$.

D. $425m^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x, y ; $0 < x, y < 60$.

Ta có $2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = xy = x(60 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(60 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 60 - 2x}{x} \right) = 450$.

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $450(m^2)$, đạt được khi $x = 15, y = 30$.

Huỳnh Văn Ánh