

CHƯƠNG

HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



LÝ THUYẾT.

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

*Hệ quả của định lí côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

3. Công thức diện tích:

$$\text{a) } S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

$$\text{b) } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\text{c) } S = \frac{abc}{4R}$$

$$\text{d) } S = pr \text{ với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\text{e) Công thức Hê- Rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4. Công thức trung tuyến (bổ sung)

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

3.5. Cho tam giác ABC có $a=6, b=5, c=8$. Tính $\cos A, S, r$.

3.6. Cho tam giác ABC có $a=10, \hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ$. Tính R, b, c .

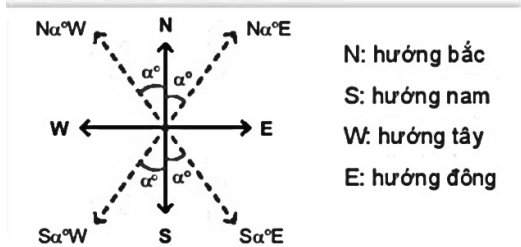
3.7. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\hat{A}=15^\circ, \hat{B}=130^\circ, c=6$.

3.8. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng $S\alpha^\circ E$ là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc $90^\circ - \alpha^\circ$. Các hướng $S\alpha^\circ W, N\alpha^\circ E, N\alpha^\circ W$ cũng được định nghĩa một cách tương tự.



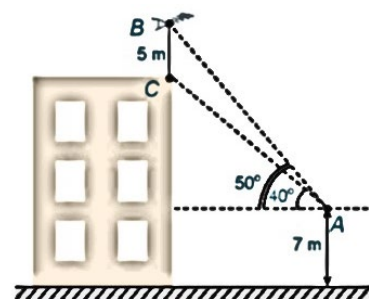
3.9. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so

với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là 50° và 40° so với phương nằm ngang

(H.3.18).



Hình 3.18

a) Tính các góc của tam giác ABC .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

3.10. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình



3.11. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.



Hình 3.19

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lý cosin, hệ quả của định lý cosin, định lý sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Câu 2. Cho tam giác ABC có $a = 7$; $b = 8$; $c = 5$. Tính $\hat{A}$, S , h_a , R .

Câu 3. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2$, $BC = 5$, $CA = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA , với M là trung điểm của BC .

Câu 4. Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 5. Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác ABC .

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = a$.

Câu 2: Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

- A. 49. B. $\sqrt{97}$. C. 7. D. $\sqrt{61}$.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 5$, $\hat{B} = 150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S = 10$. B. $S = 10\sqrt{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 5\sqrt{3}$.

Câu 4: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A. $\frac{65}{4}$. B. 40. C. 32,5. D. 65,8.

Câu 5: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(\text{m})$, $CB = 180(\text{m})$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 228(m). B. $20\sqrt{91}(\text{m})$. C. 112(m). D. 168(m).

Câu 6: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 5. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 7: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$ và trung tuyến $BM = 3$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $\sqrt{17}$. B. $2\sqrt{5}$. C. 4. D. 8.

Câu 8: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $2\sqrt{6}$. B. 5. C. $\sqrt{22}$. D. $2\sqrt{22}$.

Câu 9: Tam giác ABC có $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $AC = 2$. Tính cạnh AB .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 10: Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 3$. Tính cạnh AC .

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11: Tam giác ABC có các góc $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. 1,2.

Câu 12: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = c$ và $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$.

- A. $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$. D. $\frac{3c}{2}$.

Câu 13: Tam giác ABC có các góc $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính $\cos(B+C)$.

- A. $\frac{1}{8}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-0,125$. D. 0,75.

Câu 15: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. B. $\frac{7}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Câu 16: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$. D. $-\frac{4}{25}$.

Câu 17: Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC , F là trung điểm cạnh AE . Tìm độ dài đoạn thẳng DF .

A. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 18: Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Câu 19: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$.

Độ dài AM bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 20: Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB

A. $\sqrt{46}$. **B.** 11. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

Câu 21: Tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$ và $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$. Tính BC

A. $2\sqrt{15}$. **B.** $4\sqrt{22}$. **C.** $4\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{22}$.

Câu 22: Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 23: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** 7.

Câu 24: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° . **B.** 90° . **C.** 150° . **D.** 120° .

Câu 25: Cho tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E , F sao cho các góc $\widehat{MPE}$, $\widehat{EPF}$, $\widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q$, $PQ = m$, $PE = x$, $PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

A. $ME = EF = FQ$. **B.** $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.
C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. **D.** $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Câu 26: Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

A. $C = 150^\circ$. **B.** $C = 120^\circ$. **C.** $C = 60^\circ$. **D.** $C = 30^\circ$.

Câu 27: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 12$ và $\cot(A+B) = \frac{1}{3}$.

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{9\sqrt{10}}{5}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 28: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A+B) = \frac{1}{3}$.

A. $\frac{5\sqrt{10}}{9}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Câu 29: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\cos B = \frac{1}{8}$, $\cos C = \frac{3}{4}$. Tính cạnh BC .

A. 7.

B. 5.

C. $3\sqrt{3}$.

D. 2.

Câu 30: Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{11a}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC

1

PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lý cosin, hệ quả của định lý cosin, định lý sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2

BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC thỏa $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Câu 2. Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

Câu 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 5. Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

3

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$.

B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

D. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Câu 2: Trong tam giác ABC , câu nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$.

Câu 3: Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

A. $\widehat{A}$ là góc tù.

B. $\widehat{A}$ là góc vuông.

C. $\widehat{A}$ là góc nhọn.

D. $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Câu 4: Tam giác ABC có ba cạnh thỏa mãn điều kiện $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

A. 120° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Câu 5: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. B. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
 C. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. D. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $c = a \cdot \cos B$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC là tam giác cân. B. Tam giác ABC là tam giác nhọn.
 C. Tam giác ABC là tam giác vuông. D. Tam giác ABC là tam giác tù.

Câu 7: Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.
 II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

- A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Cả I và II. D. Không có.

Câu 8: Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức giữa a, b, c .

A. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$. B. $3a = 2b + c$. C. $3a = 2b - c$. D. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Câu 9: Trong tam giác ABC , hệ thức nào sau đây sai?

A. $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$. B. $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$. C. $a = 2R \cdot \sin A$. D. $b = R \cdot \tan B$.

Câu 10: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
 C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 11: Tam giác ABC có $A = 120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$. B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 12: Trong tam giác ABC , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là:

A. $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$. B. $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$. C. $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$. D. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Câu 13: Trong tam giác ABC , nếu có $a^2 = b \cdot c$ thì:

A. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$. B. $h_a^2 = h_b \cdot h_c$. C. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. D. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$.

Câu 14: Trong tam giác ABC , nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

A. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$. B. $2 \sin A = \sin B + \sin C$.
 C. $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$. D. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$.

Câu 15: Trong tam giác ABC , câu nào sau đây **đúng**?

A. $m_a = \frac{b+c}{2}$. B. $m_a > \frac{b+c}{2}$. C. $m_a < \frac{b+c}{2}$. D. $m_a = b+c$.

Câu 16: Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Tính số đo của góc C .

A. 45° . B. 60° . C. 120° . D. 30° .

Câu 17: Cho tam giác ABC , xét các bất đẳng thức sau:

I. $|a-b| < c$.

II. $a < b + c$.

III. $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Chỉ I, II.

B. Chỉ II, III.

C. Chỉ I, III.

D. Cả I, II, III.

Câu 18: Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Tính số đo của góc A .

A. 45° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 30° .

Câu 19: Tam giác ABC $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

A. Tam giác vuông.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông cân.

D. Tam giác cân.

Câu 20: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AC = b$, $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30^\circ$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

A. $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$.

B. $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$.

C. $\frac{\sqrt{3}c}{b}$.

D. $\frac{b-c}{b+c}$.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.

B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.

C. Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.

D. Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1

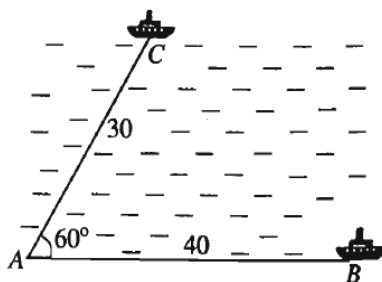
PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2

BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?



Câu 2: Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB (chính xác đến hàng đơn vị)?

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 8, c = 7$. Tính góc A , suy ra S, h_a, R, r, m_a .

- Câu 4:** Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .
- Câu 5:** Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $\hat{A} = 60^\circ$.
a) Tính chu vi của tam giác
b) Tính $\tan C$
- Câu 6:** Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.
- Câu 7:** Giải tam giác ABC , biết:
 $b = 4,5$; $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{C} = 75^\circ$
- Câu 8:** Cho tam giác ABC cân tại A biết $a = \sqrt{3}$; $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$. Tính R , r , cạnh c , b , suy ra S
- Câu 9:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- Câu 10:** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng
a) $a^2 = bc$
b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$
- Câu 11:** Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và trung tuyến $AM = AB = c$ chứng minh rằng:
a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$
b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$
- Câu 12:** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.
- Câu 13:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;
a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$
- Câu 14:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \sin B \sin C$
- Câu 15:** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác ABC biết: $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
- Nhận dạng tam giác ABC biết:
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$
- Câu 16:**
- Câu 17:** Nhận dạng tam giác ABC biết: $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$
- Câu 18:** Cho tam giác ABC . Chứng minh tam giác ABC cân nếu $h_a = c \cdot \sin A$

CHƯƠNG

HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



LÝ THUYẾT.

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

*Hệ quả của định lí côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

3. Công thức diện tích:

$$\text{a) } S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

$$\text{b) } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\text{c) } S = \frac{abc}{4R}$$

$$\text{d) } S = pr \text{ với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\text{e) Công thức Hê- Rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4. Công thức trung tuyến (bổ sung)

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

3.5. Cho tam giác ABC có $a=6, b=5, c=8$. Tính $\cos A, S, r$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{53}{80}$$

Nửa chu vi là $P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+8}{2} = \frac{19}{2}$. Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{19}{2} \left(\frac{19}{2} - 6 \right) \left(\frac{19}{2} - 5 \right) \left(\frac{19}{2} - 8 \right)} = \frac{3\sqrt{399}}{4}$$

$$\text{Do } S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{399}}{38}.$$

3.6. Cho tam giác ABC có $a=10, \hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ$. Tính R, b, c .

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý sin ta có } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{10}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,289$$

$$\text{Vì } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 65^\circ \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82$$

3.7. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\hat{A}=15^\circ, \hat{B}=130^\circ, c=6$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 35^\circ$$

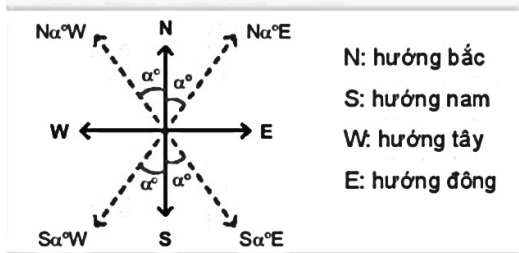
$$\text{Áp dụng định lý sin ta có: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{6 \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,71 \\ b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{6 \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8,01 \end{cases}$$

$$\text{Diện tích của tam giác là: } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2,71 \cdot 6 \cdot \sin 130^\circ \approx 6,228$$

3.8. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

- Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.
- Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng $S\alpha^\circ E$ là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc $90^\circ - \alpha^\circ$. Các hướng $S\alpha^\circ W$, $N\alpha^\circ E$, $N\alpha^\circ W$ cũng được định nghĩa một cách tương tự.



Lời giải

a) Theo giả thiết ta có: $AB = 105 \text{ km}$, $BC = 16 \text{ km}$,

Góc $\widehat{BAD} = 70^\circ$, $\widehat{ABD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 160^\circ$

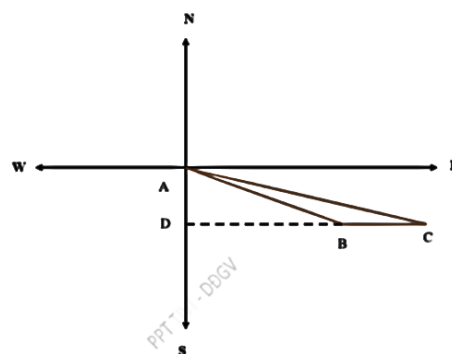
Khoảng cách từ A tới đảo tàu neo đậu bằng đoạn AC .

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$$

$$= \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 160^\circ} = 120,16 \text{ km}$$

b) Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,999 \Rightarrow \hat{A} \approx 2^\circ 37' \Rightarrow \widehat{NAC} = 107^\circ 23'$. Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là hướng Đông.



3.9. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so

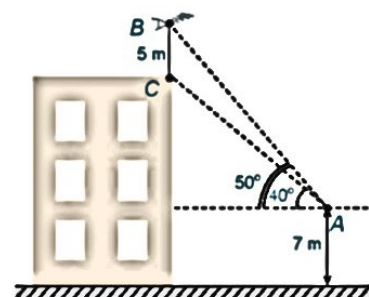
với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là 50° và 40° so với phương nằm ngang

(H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác ABC .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.



Hình 3.18

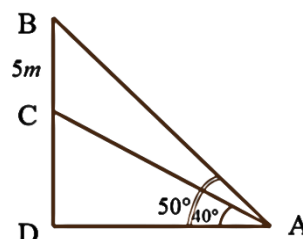
Lời giải

a) Ta có $\widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$,

$\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{BAD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 130^\circ$

b) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$



Xét tam giác ACD vuông tại D có $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $11,9 + 7 = 18,9m$.

3.10. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). *Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình*

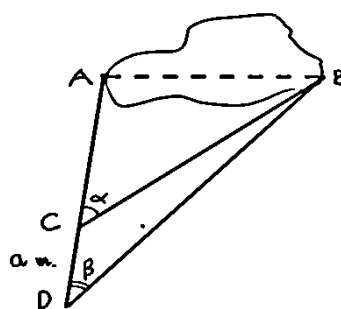


Lời giải

Gọi A, B là hai vị trí ngoài cùng mà ta quan sát khi nhìn từ bãi biển

Từ một điểm C trên bãi biển dùng giác kế ta xác định được góc $\widehat{ACB} = \alpha$.

Lấy điểm D trên bãi biển sao cho A, C, D thẳng hàng và có độ dài đoạn $CD = a$ mét. Ta xác định được $\widehat{ADB} = \beta$.



Từ đó áp dụng định lí sin cho hai tam giác BCD và ABC ta xác định được bề rộng AB của hòn đảo.

3.11. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại

phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Lời giải

Dựng CE, BF vuông góc với AD .

Xét tam giác CDE vuông tại E có $\widehat{D} = \widehat{C} = 45^\circ$

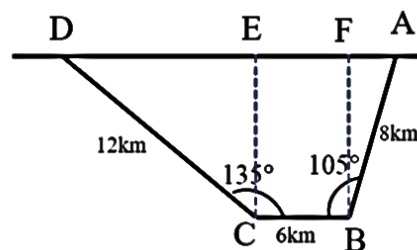
$$\Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ km.}$$

Xét tam giác ABF vuông tại F có $\widehat{B} = 15^\circ$

$$\Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \text{ km.}$$

Mặt khác $EF = BC = 6 \text{ km}$

$$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56 \text{ km.}$$



Vậy độ dài đường mới sẽ giảm 9,44 km so với đường cũ.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Lời giải

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính $\hat{A}, S, h_a, R$.

Lời giải

$$+ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.8.5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ.$$

$$+ S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}.8.5.\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7.8.5}{4.10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 5, CA = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA , với M là trung điểm của BC .

Lời giải

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Câu 4. Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm nên

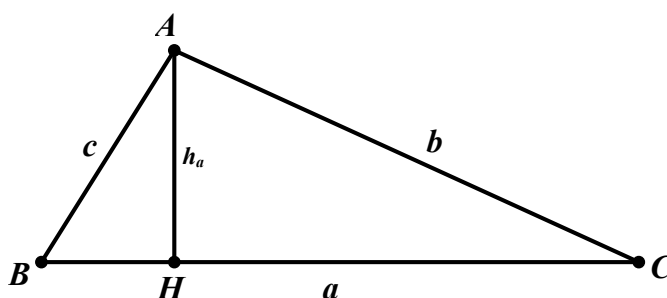
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác ABC .

Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$.

Ta lại có: $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$.

Vì $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ nên $h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{a}{2}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = a$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý sin trong tam giác ta có $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

- A. 49. B. $\sqrt{97}$. C. 7. D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7.$$

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 5$, $\hat{B} = 150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S = 10$. B. $S = 10\sqrt{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin 150^\circ = 5.$$

Câu 4: Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A. $\frac{65}{4}$. B. 40. C. 32,5. D. 65,8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } p = \frac{52 + 56 + 60}{2} = 84.$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Hê – rông ta có: } S = \sqrt{84(84 - 52)(84 - 56)(84 - 60)} = 1344.$$

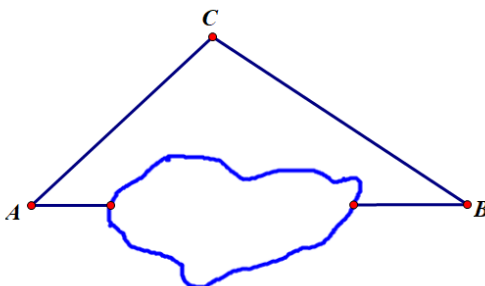
$$\text{Mặt khác } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52 \cdot 56 \cdot 60}{4 \cdot 1344} = 32,5.$$

Câu 5: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(\text{m})$, $CB = 180(\text{m})$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 228(m). B. $20\sqrt{91}(\text{m})$. C. 112(m). D. 168(m).

Lời giải

Chọn B



$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m}).$$

Câu 6: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

A. $2\sqrt{3}$.

B. 4.

C. 5.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB.AC} = \frac{2.12}{5.8} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ 52' 12''$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 36^\circ 52' 12'' \approx 25 \Rightarrow BC \approx 5.$$

Câu 7: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$ và trung tuyến $BM = 3$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $\sqrt{17}$.

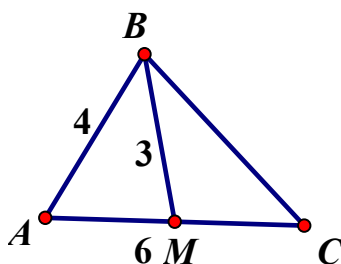
B. $2\sqrt{5}$.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có: } BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2\left(BM^2 + \frac{AC^2}{4}\right) - AB^2$$

$$= 2\left(3^2 + \frac{6^2}{4}\right) - 4^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

Câu 8: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $2\sqrt{6}$.

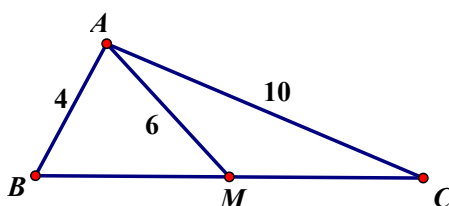
B. 5.

C. $\sqrt{22}$.

D. $2\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

$$\Rightarrow BC^2 = 4 \left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - AM^2 \right) = 4 \left(\frac{10^2 + 4^2}{2} - 6^2 \right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22}.$$

Câu 9: Tam giác ABC có $\hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 45^\circ, AC = 2$. Tính cạnh AB .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AB = c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{6}.$

Câu 10: Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, AB = 3$. Tính cạnh AC .

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AC = b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$

Câu 11: Tam giác ABC có các góc $\hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. 1,2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Câu 12: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = c$ và $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$.

A. $\frac{c\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$.

C. $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$.

D. $\frac{3c}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos C = -\cos(A+B) = -\frac{1}{3}.$

$$\text{Do đó } \sin C = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{3\sqrt{2}c}{8}.$$

Câu 13: Tam giác ABC có các góc $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 105^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 14: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính $\cos(B + C)$.

A. $\frac{1}{8}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. $-0,125$.

D. $0,75$.

Lời giải.

Chọn C

$$\text{Ta có } c = AB = 4, b = AC = 5, a = BC = 6.$$

$$\text{Tính } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Để ý } \cos(B + C) = -\cos A = -\frac{1}{8} = -0,125.$$

Câu 15: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

B. $\frac{7}{8}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Lời giải.

Chọn A

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

$$\text{Giả sử } a = 2, b = 3, c = 4. \text{ Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{7}{8}.$$

$$\text{Do đó } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Câu 16: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $-\frac{1}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$.

D. $-\frac{4}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Góc lớn nhất tương ứng với cạnh lớn nhất: $\cos \alpha = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = -\frac{1}{6}$.

Câu 17: Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC , F là trung điểm cạnh AE . Tìm độ dài đoạn thẳng DF .

A. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

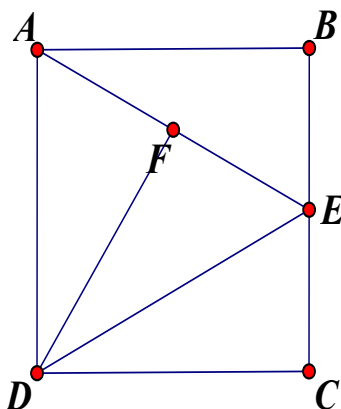
B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Dùng công thức độ dài trung tuyến:

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Câu 18: Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM

A. $2\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{20}$.

D. $\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn D

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{19}.$$

Câu 19: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$.

Độ dài AM bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$.

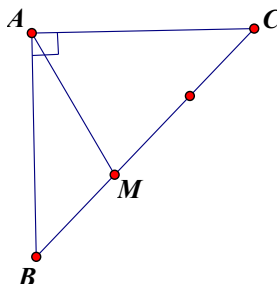
B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 20: Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB

A. $\sqrt{46}$.

B. 11.

C. $5\sqrt{2}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Vì trong tam giác ABC ta có $A+B$ bù với góc C nên $\cos(A+B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6.$$

Câu 21: Tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$ và $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$. Tính BC

A. $2\sqrt{15}$.

B. $4\sqrt{22}$.

C. $4\sqrt{15}$.

D. $2\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn A

Vì trong tam giác ABC ta có $B+C$ bù với góc A nên $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 2\sqrt{15}.$$

Câu 22: Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB

- A. 6. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $\cot C = 2$, ta suy ra C là góc nhọn

$$\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}.$$

Câu 23: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC

- A. $3\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $\tan A = -2\sqrt{2}$, ta suy ra A là góc tù

$$\tan A = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{33}.$$

Câu 24: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

- A. 60° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Diện tích của tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$

S lớn nhất khi $\sin C$ lớn nhất, hay $\sin C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$.

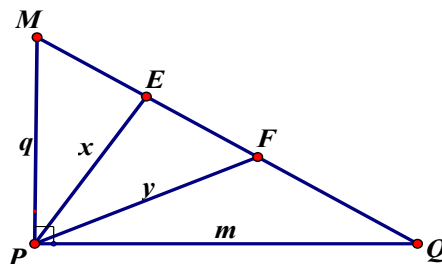
Câu 25: Cho tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}$, $\widehat{EPF}$, $\widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q$, $PQ = m$, $PE = x$, $PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A. $ME = EF = FQ$. B. $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.

C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. **D.** $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết, suy ra $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ$

Tam giác MPF có $\widehat{MPF} = \widehat{MPE} + \widehat{EPF} = 60^\circ$;

$$MF^2 = MP^2 + PF^2 - 2.MP.PF.\cos \widehat{MPF} = q^2 + y^2 - 2.y.q.\frac{1}{2} = q^2 + y^2 - yq.$$

Câu 26: Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

A. $C = 150^\circ$.

B. $C = 120^\circ$.

C. $C = 60^\circ$.

D. $C = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^3 - b^3 - c^2(a - b) = 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}. \text{ Do đó: } C = 120^\circ.$$

Câu 27: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 12$ và $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$.

A. $2\sqrt{10}$.

B. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

C. $5\sqrt{10}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$ nên $\cot C = -\frac{1}{3}$, suy ra $3\cos C = -\sin C$.

$$\text{Mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = 2\sqrt{10}.$$

Câu 28: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$.

A. $\frac{5\sqrt{10}}{9}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$ nên $\tan C = -\frac{1}{3}$.

Do đó $3 \sin C = -\cos C$, mà $\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = 5\sqrt{10}.$$

Câu 29: Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\cos B = \frac{1}{8}$, $\cos C = \frac{3}{4}$. Tính cạnh BC .

A. 7.

B. 5.

C. $3\sqrt{3}$.

D. 2.

Lời giải.

Chọn B

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{63}}{8}, \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C = \frac{9}{16}.$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A} = 5.$$

Câu 30: Cho tam giác cân ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

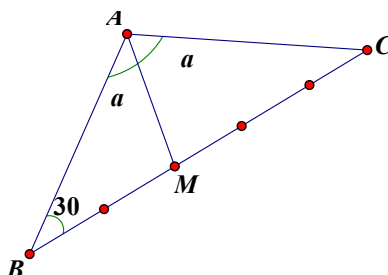
B. $\frac{11a}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lý cosin, hệ quả của định lý cosin, định lý sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC thỏa $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$$

Tam giác ABC cân tại A.

Câu 2. Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác ta có: } \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \sin B = b$$

$$\text{Do đó: } h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow h_a = b \cdot \sin C \text{ (đúng)}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } VP = R \cdot r \cdot \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = r \cdot p = S \text{ (đpcm).}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 b + a^2 c - a^3 \\ a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -bc + 2bc \cdot \cos A = 0 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ b = c \end{cases}$$

Vì tam giác ABC cân có 1 góc bằng 60° nên tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 5. Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

Lời giải

$$VT = \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4aR} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4aR} = \frac{2a^2}{4aR} = \frac{a}{2R} = \sin A$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ **B.** $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$

C. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ **D.** $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

Lời giải

Chọn C

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Câu 2: Trong tam giác ABC , câu nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

C. $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lý hàm số cos tại đỉnh A ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Câu 3: Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

A. $\widehat{A}$ là góc tù.

B. $\widehat{A}$ là góc vuông.

C. $\widehat{A}$ là góc nhọn.

D. $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ do $a^2 < b^2 + c^2$ nên $\cos A > 0$

Câu 4: Tam giác ABC có ba cạnh thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

A. 120° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Theo hệ quả của định lý hàm cosin: $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$.

Câu 5: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\begin{aligned} \text{A. } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2). & \text{B. } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \\ \text{C. } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). & \text{D. } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Lời giải

Sử dụng công thức trung tuyến, ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Câu 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $c = a \cdot \cos B$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Tam giác ABC là tam giác cân. **B.** Tam giác ABC là tam giác nhọn.
C. Tam giác ABC là tam giác vuông. **D.** Tam giác ABC là tam giác tù

Lời giải

$$\text{Ta có: } c = a \cdot \cos B \Leftrightarrow c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow c = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2$$

Theo định lí pi ta go tam giác ABC vuông tại A .

Câu 7: Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

- A.** Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Cả I và II. **D.** Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có: **I. đúng** vì là công thức Hê-rông tính diện tích tam giác.

$$\text{Khi đó: } S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \text{ Do đó II. đúng}$$

Câu 8: Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức giữa a, b, c .

A. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$. **B.** $3a = 2b + c$. **C.** $3a = 2b - c$. **D.** $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Kí hiệu } S = S_{\triangle ABC}.$$

$$\text{Ta có: } 3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2S}{a} = \frac{2 \cdot 2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}.$$

Câu 9: Trong tam giác ABC , hệ thức nào sau đây sai?

A. $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$.

B. $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$.

C. $a = 2R \cdot \sin A$.

D. $b = R \cdot \tan B$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm số sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra:

$$+ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}.$$

$$+ \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}.$$

$$+ \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \cdot \sin A.$$

$$+ \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{2} = R \sin B \Rightarrow \frac{b}{2 \cos B} = R \tan B.$$

Câu 10: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

$$\text{Mà } b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Câu 11: Tam giác ABC có $A = 120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh A ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Câu 12: Trong tam giác ABC , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là:

A. $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$.

B. $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$.

C. $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$.

D. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Lời giải

Chọn D

Vì hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau nên $\triangle ABG$ vuông tại G với G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\text{Khi đó: } c^2 = GA^2 + GB^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left(c^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) \Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2.$$

Câu 13: Trong tam giác ABC , nếu có $a^2 = b \cdot c$ thì :

A. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$. B. $h_a^2 = h_b \cdot h_c$. C. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. D. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^2 = b \cdot c \Leftrightarrow \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2 = \left(\frac{2S}{h_b}\right) \cdot \left(\frac{2S}{h_c}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c} \Leftrightarrow h_a^2 = h_b \cdot h_c$.

Câu 14: Trong tam giác ABC , nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì :

A. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$. B. $2\sin A = \sin B + \sin C$.
C. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$. D. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{2R \cdot \sin A} = \frac{1}{2R \cdot \sin B} + \frac{1}{2R \cdot \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

Câu 15: Trong tam giác ABC , câu nào sau đây đúng?

A. $m_a = \frac{b+c}{2}$. B. $m_a > \frac{b+c}{2}$. C. $m_a < \frac{b+c}{2}$. D. $m_a = b+c$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}$

Vì $|b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}$.

Câu 16: Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Tính số đo của góc C .

A. 45° . B. 60° . C. 120° . D. 30° .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Mà $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$.

Câu 17: Cho tam giác ABC , xét các bất đẳng thức sau:

I. $|a-b| < c$.
II. $a < b+c$.
III. $m_a + m_b + m_c < a+b+c$.

Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ I, II.

B. Chỉ II, III.

C. Chỉ I, III.

D. Cả I, II, III.

Lời giải

Chọn D

Ta có I. và II. **đúng** vì đây là bất đẳng thức tam giác

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}.$$

$$\text{Vì } |b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } m_b < \frac{a+c}{2}; m_c < \frac{a+c}{2}.$$

$$\text{Do đó: } m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Vậy III. **Đúng**.

Câu 18: Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Tính số đo của góc A .

A. 45° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow 2bc \cos A = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

Câu 19: Tam giác ABC $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

A. Tam giác vuông.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông cân **D. Tam giác cân.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Leftrightarrow a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân.

Câu 20: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AC = b, AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30^\circ$ Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

A. $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$.

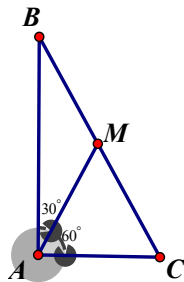
B. $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$.

C. $\frac{\sqrt{3}c}{b}$.

D. $\frac{b-c}{b+c}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\frac{MB}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\sin B} \Rightarrow MB = \frac{AM \cdot \sin 30^\circ}{\sin B} = \frac{AM}{2 \cdot \sin B}$.

$\frac{MC}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin C} \Rightarrow MC = \frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{\sin C} = \frac{AM \sqrt{3}}{2 \cdot \sin C}$.

Do đó $\frac{MB}{MC} = \frac{\sin C}{\sqrt{3} \sin B} = \frac{c}{\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}c}{3b}$.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.
- B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.
- C. Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.
- D. Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Do đó :

- * $a^2 > b^2 + c^2$ thì $\cos A < 0$ do đó A là góc tù nên **A. đúng.**
- * $a^2 < b^2 + c^2$ thì $\cos A > 0$ do đó A là góc nhọn nên **C. đúng.**
- * $a^2 = b^2 + c^2$ thì $\cos A = 0$ do đó A là góc vuông nên **D. đúng.**
- * Nếu tam giác ABC có góc B tù thì $b^2 > a^2 + c^2$; nếu góc C tù thì $c^2 > a^2 + b^2$ do đó **B. sai.**

DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ



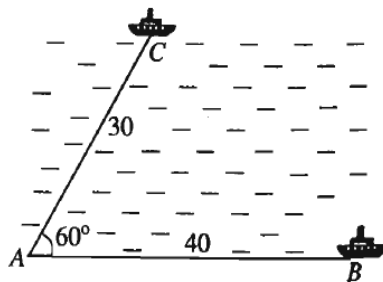
PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?



Lời giải

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60 \text{ km}$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 2: Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB (chính xác đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 8, c = 7$. Tính góc A , suy ra S, h_a, R, r, m_a .

Lời giải

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28\sqrt{3}}{13}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 13}{4 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 17 \text{ Suy ra } BC = \sqrt{17}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Theo công thức tính diện tích ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là } h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

Câu 5: Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

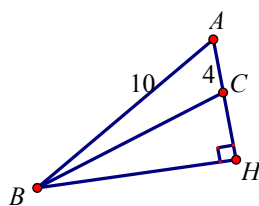
Lời giải

a) Theo định lí côsin ta có

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4 \cos 60^\circ = 76 \\ \Rightarrow BC \approx 8,72$$

Suy ra chu vi tam giác là $2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$

b) (Hình 2.23a)



Hình 2.23a

Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB \cos 60^\circ = 5 \\ \Rightarrow HC = 5 - 4 = 1$$

$$BH = AB \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}. \text{ Vậy } \tan C = -\tan \widehat{BCH} = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$$

Câu 6: Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Câu 7: Giải tam giác ABC , biết:

$$b = 4,5; \quad \widehat{A} = 30^\circ; \quad \widehat{C} = 75^\circ$$

Lời giải

Ta có $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ = \widehat{C}$

suy ra tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow c = b = 4,5$.

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow a \approx 2,33.$$

Câu 8: Cho tam giác ABC cân tại A biết $a = \sqrt{3}$; $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$. Tính R , r , cạnh c , b , suy ra S

Lời giải

Áp dụng định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow b = c = 2R \sin 30^\circ = 1$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 - \sqrt{3}).$$

Câu 9: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 3$,

$$b = 2R \sin B = 2 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R \sin C = 2 \cdot 3 \cdot \sin 105^\circ \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \\ &\approx \frac{3\sqrt{2} \cdot 5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943 \end{aligned}$$

Câu 10: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lý sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lý cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Câu 11: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và trung tuyến $AM = AB = c$ chứng minh rằng:

a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$

b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức đường trung tuyến

$$\text{Ta có } b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2 \Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2) (*)$$

b) Theo định lý sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4R^2 \sin^2 A \\ b^2 = 4R^2 \sin^2 B \\ c^2 = 4R^2 \sin^2 C \end{cases}$$

Thay vào (*) ta có đpcm

Câu 12: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 \quad (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

Câu 13: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

Lời giải

a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$\begin{aligned} VP &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a = VT \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

Câu 14: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \sin B \sin C$

Lời giải

$$h_a = 2R \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R \frac{b}{2R} \sin C$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C \quad (\text{đúng})$$

Câu 15: Tìm tính chất đặc biệt của tam giác ABC biết: $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$2(2R \sin A) \cos A = (2R \sin B) \cos C + 2R \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cdot \cos A = \sin(B + C) = \sin A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin A \neq 0) \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

Nhận dạng tam giác ABC biết:
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$

Câu 16:

Lời giải

Áp dụng định lí cosin ở (1) và thế vào (2)

$$(1) \Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow b = c$$

$$(2) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

KL: Tam giác ABC đều.

Câu 17: Nhận dạng tam giác ABC biết: $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

Lời giải

Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 18: Cho tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC cân nếu $h_a = c \cdot \sin A$

Lời giải

Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \sin A$ (*) thay $h_a = c \cdot \sin A$ vào (*) được:

$$bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b \text{ suy ra tam giác ABC cân tại C}$$

CHƯƠNG

HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. ĐỊNH LÝ COSIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ COSIN ĐỂ GIẢI TOÁN

Câu 1: Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Câu 2: Cho tam giác ABC , có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

C. $S = \frac{abc}{4R}$.

D. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?

A. $c = 3\sqrt{21}$.

B. $c = 7\sqrt{2}$.

C. $c = 2\sqrt{11}$.

D. $c = 2\sqrt{21}$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$.

B. $3\sqrt{12}$.

C. $2\sqrt{37}$.

D. $\sqrt{20}$.

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7.

B. 129.

C. 49.

D. $\sqrt{129}$.

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 9, BC = 8, \hat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài AC .

A. $\sqrt{73}$.

B. $\sqrt{217}$.

C. 8.

D. $\sqrt{113}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = \sqrt{2}$.

B. $BC = 1$.

C. $BC = \sqrt{3}$.

D. $BC = 2$.

Câu 8: Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49.

B. $\sqrt{97}$.

C. 7.

D. $\sqrt{61}$.

Câu 9: Tam giác ABC có $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?

A. $\sqrt{13}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 10.

D. 1.

Câu 10: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 6.

Câu 11: Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 2.

Câu 12: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A. $a^2 < ab + ac$. B. $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. C. $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. D. $ab + bc > b^2$.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

- A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. B. $\cos A = \frac{1}{2}$. C. $\cos A = \frac{1}{3}$. D. $\cos A = \frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

- A. Góc $C > 90^\circ$ B. Góc $C < 90^\circ$
C. Góc $C = 90^\circ$ D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Câu 15: Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

- A. $A = 30^\circ$. B. $A = 45^\circ$. C. $A = 60^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

Câu 16: Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 17: Cho tam giác ABC , biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A ?

- A. $33^\circ 34'$. B. $117^\circ 49'$. C. $28^\circ 37'$. D. $58^\circ 24'$.

Câu 18: Cho tam giác ABC , biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc B ?

- A. $59^\circ 49'$. B. $53^\circ 7'$. C. $59^\circ 29'$. D. $62^\circ 22'$.

Câu 19: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 20: Tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 21: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$ khi đó góc $\widehat{AMB}$ bằng bao nhiêu?

- A. 135° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Câu 22: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. D. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

Câu 23: Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

- A. 10 cm. B. 9 cm. C. 7,5 cm. D. 8 cm.

Câu 24: Cho tam giác ABC có $AB = 3, BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC .

- A. $\sqrt{11}$. B. 4. C. $\frac{9}{2}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 25: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $\widehat{C} = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

- A. 3 B. 4 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 26: Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{9}$. B. 9. C. 3. D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Câu 27: Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. B. $S = a^2 + b^2 + c^2$. C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. D. $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 28: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$; $AC = 3$; $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

- A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{6}{5}$.

DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN

Câu 29: Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

- A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Câu 30: Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Câu 31: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 4$. B. $R = 1$. C. $R = 2$. D. $R = 3$.

Câu 32: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4$ cm, góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

- A. $2\sqrt{6}$. B. $2 + 2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3} - 2$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 33: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

- A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.

Câu 34: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 35: Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\widehat{B} = 56^\circ 13'$; $\widehat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

- A. 29,9. B. 14,1. C. 17,5. D. 19,9.

Câu 36: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 68^\circ 12'$, $\widehat{B} = 34^\circ 44'$, $AB = 117$. Tính AC ?

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 37: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.** $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. **B.** $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. **C.** $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. **D.** $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Câu 38: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

- A.** $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** a^2 .

Câu 39: Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

- A.** $\sqrt{56}$. **B.** $\sqrt{48}$. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 40: Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

- A.** 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

Câu 41: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A.** $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 42: Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A.** 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

Câu 43: Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{13}{2}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 44: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

- A.** 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 9.

Câu 45: Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A.** $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 46: Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2; BC = 3$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

- A.** $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. **B.** $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Câu 47: Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

- A.** 72. **B.** 144. **C.** 54. **D.** 108.

Câu 48: Cho tam giác $\triangle ABC$ có $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác $\triangle ABC$ là.

- A.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

Câu 49: Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 4a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

- A.** $S = 8a^2$. **B.** $S = 2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = 4a^2$.

Câu 50: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 24.

Câu 52: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Câu 53: Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3} + 1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 54: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 55: Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. 8,125. **B.** 130. **C.** 8. **D.** 8,5.

Câu 56: Cho $\triangle ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

A. 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 57: Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 58: Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}$. **B.** 40. **C.** 32,5. **D.** $\frac{65}{4}$.

Câu 59: Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

A. 6. **B.** 8. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 60: Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 61: Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

Câu 62: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 63: Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

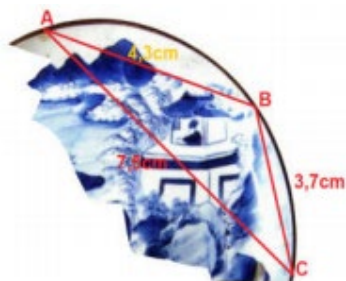
A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. **C.** $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

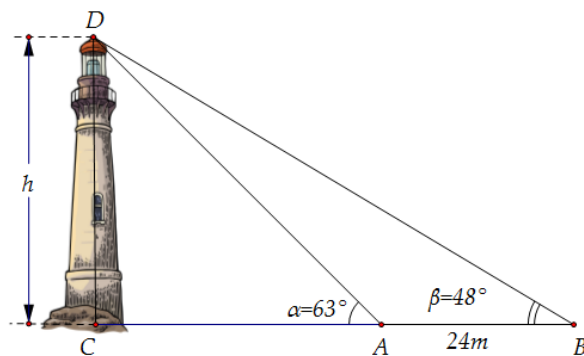
Câu 64: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250m, CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. 266m. **B.** 255m. **C.** 166m. **D.** 298m.

- Câu 65:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?
- A. 13. B. $20\sqrt{13}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15.
- Câu 66:** Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80\text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?
- A. 71 m . B. 91 m . C. 79 m . D. 40 m .
- Câu 67:** Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200\text{ m}$, $CB = 180\text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?
- A. 180 m . B. 224 m . C. 112 m . D. 168 m .
- Câu 68:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3\text{ cm}$; $BC = 3,7\text{ cm}$; $CA = 7,5\text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



- A. $5,73\text{ cm}$. B. $6,01\text{ cm}$. C. $5,85\text{ cm}$. D. $4,57\text{ cm}$.
- Câu 69:** Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$; $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?



- A. $61,4\text{ m}$. B. $18,5\text{ m}$. C. 60 m . D. 18 m .

CHƯƠNG

HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. ĐỊNH LÝ COSIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ COSIN ĐỂ GIẢI TOÁN

Câu 1: Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Câu 2: Cho tam giác ABC , có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

C. $S = \frac{abc}{4R}$.

D. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $a=8, b=10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?

A. $c = 3\sqrt{21}$.

B. $c = 7\sqrt{2}$.

C. $c = 2\sqrt{11}$.

D. $c = 2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $b=6, c=8, \hat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$.

B. $3\sqrt{12}$.

C. $2\sqrt{37}$.

D. $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$.

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ có $B=60^\circ, a=8, c=5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7.

B. 129.

C. 49.

D. $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 9$; $BC = 8$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài AC .

- A.** $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos \widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}.$$

Vậy $AC = \sqrt{73}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $A = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A.** $BC = \sqrt{2}$. **B.** $BC = 1$. **C.** $BC = \sqrt{3}$. **D.** $BC = 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ}$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2.2.1.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Câu 8: Tam giác ABC có $a = 8$, $c = 3$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

- A.** 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 9: Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$. Tính cạnh AB ?

- A.** $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos \widehat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}. \text{ Chọn A}$$

Câu 10: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7$; $c = 5$; $\cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

- A.** $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18.$$

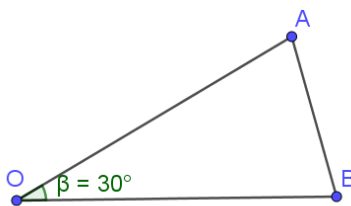
Suy ra: $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0.$$

Coi phương trình là một phương trình bậc hai ẩn OA . Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB thì $\Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4$.

Vậy $\max OB = 4$.

Câu 12: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A. $a^2 < ab + ac$. B. $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. C. $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. D. $ab + bc > b^2$.

Lời giải

Chọn C

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos \hat{A} \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$; đáp án A đúng.

Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$; mệnh đề D đúng.

Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$; mệnh đề B đúng.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

- A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. B. $\cos A = \frac{1}{2}$. C. $\cos A = \frac{1}{3}$. D. $\cos A = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

- A. Góc $C > 90^\circ$ B. Góc $C < 90^\circ$
C. Góc $C = 90^\circ$ D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\text{Mà: } a^2 + b^2 - c^2 > 0 \text{ suy ra: } \cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ.$$

Câu 15: Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

- A. $A = 30^\circ$. B. $A = 45^\circ$. C. $A = 60^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

Câu 16: Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A.** 90^0 . **B.** 60^0 . **C.** 45^0 . **D.** 30^0 .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;3)$, $\overrightarrow{AC} = (9;-3)$.

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{BAC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0.$$

Câu 17: Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?

- A.** $33^034'$. **B.** $117^049'$. **C.** $28^037'$. **D.** $58^024'$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^049'.$$

Câu 18: Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?

- A.** $59^049'$. **B.** $53^07'$. **C.** $59^029'$. **D.** $62^022'$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^029'.$$

Câu 19: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 120° .

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } b(b^2 - a^2) &= c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Câu 20: Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

- A.** 30° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Theo bài ra, ta có: } b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0 \\ &\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Câu 21: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

- A.** 135° . **B.** 90° . **C.** 150° . **D.** 120° .

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAM} = \frac{1+4x^2-x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2+1}{4x}$$

$$\cos \widehat{MAC} = \frac{1+4x^2-9x^2}{4x} = \frac{1-5x^2}{4x}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x^2+1}{4x} \right)^2 + \left(\frac{1-5x^2}{4x} \right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16.$$

$$\Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} (l) \\ x^2 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x} = \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1 \right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AMB} = 135^\circ.$$

Câu 22: Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. **B.** $m_a^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. **D.** $m_a^2 = \frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Câu 23: Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

A. 10 cm. **B.** 9 cm. **C.** 7,5 cm. **D.** 8 cm.

Lời giải

Chọn C

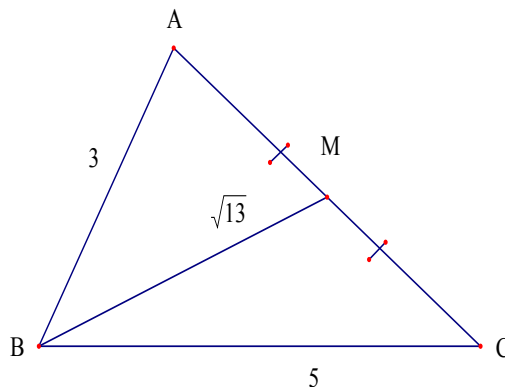
$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$

Câu 24: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC .

A. $\sqrt{11}$. **B.** 4. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

Câu 25: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $\widehat{C} = 30^\circ$, $AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

A. 3

B. 4

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$.

Xét $\triangle BAC$ có $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Xét tam giác ABM có $BM = AM$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ suy ra $\triangle ABM$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AB = 3$.

Câu 26: Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: Trong tam giác ABC có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra M là trung điểm BC .

Suy ra: $AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$.

Câu 27: Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. **B.** $S = a^2 + b^2 + c^2$.

C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. **D.** $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 28: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$; $AC = 3$; $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

A. $\frac{12}{5}$.

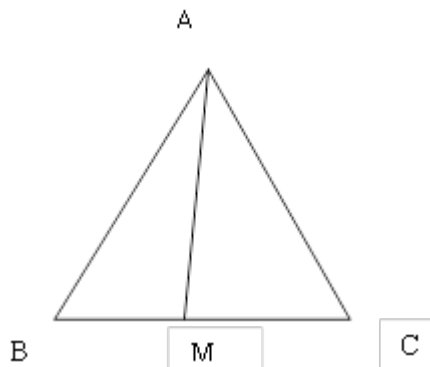
B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là chân đường phân giác góc **A.**

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Lại có $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $BM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos \widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{108}{25}.$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

CÁCH 2

Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A .

Vì đoạn thẳng AM chia tam giác ABC thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin \widehat{BAM} + \frac{1}{2}AC.AM.\sin \widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB + AC).\sin 30^\circ}.$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

Vậy $AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN

Câu 29: Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

B. $\sin A = \frac{a}{2R}$.

C. $b \sin B = 2R$.

D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 30: Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $S = \frac{abc}{4R}$.

B. $R = \frac{a}{\sin A}$.

C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Câu 31: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 4$.

B. $R = 1$.

C. $R = 2$.

D. $R = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$.

Câu 32: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4$ cm, góc $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$.

B. $2 + 2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3} - 2$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$.

Câu 33: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. 3,7.

B. 3,3.

C. 3,5.

D. 3,1.

Lời giải

Chọn B

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Áp dụng định lý sin: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3$.

Câu 34: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. **B.** $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{b}{\sin A} \sin B + \frac{c}{\sin A} \sin C \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$.

Câu 35: Tam giác ABC có $a=16,8$; $\hat{B}=56^{\circ}13'$; $\hat{C}=71^{\circ}$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. 29,9.

B. 14,1.

C. 17,5.

D. 19,9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Trong tam giác ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = 180^{\circ} - 71^{\circ} - 56^{\circ}13' = 52^{\circ}47'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^{\circ}}{\sin 52^{\circ}47'} \approx 19,9$.

Câu 36: Tam giác ABC có $\hat{A}=68^{\circ}12'$, $\hat{B}=34^{\circ}44'$, $AB=117$. Tính AC ?

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Trong tam giác ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{C} = 180^{\circ} - 68^{\circ}12' - 34^{\circ}44' = 77^{\circ}4'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^{\circ}44'}{\sin 77^{\circ}4'} \approx 68$.

DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 37: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Câu 38: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 30^{\circ}$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}a^2$.

Câu 39: Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$.

A. $\sqrt{56}$.

B. $\sqrt{48}$.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7$.

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} = \sqrt{56}$.

Câu 40: Cho $\triangle ABC$ có $a=6$, $b=8$, $c=10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48.

B. 24.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Nửa chu vi $\triangle ABC$: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$.

Câu 41: Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5$.

Câu 42: Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A. 84. B. $\sqrt{84}$. C. 42. D. $\sqrt{168}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$.

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$.

Câu 43: Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{13}{2}$. B. 13. C. 26. D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC} = (-1;6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$, $\overrightarrow{BC} = (2;1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$.

Mặt khác $p = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{13}{2}$.

Câu 44: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $\triangle ABC$ là

- A. 12. B. 6. C. $6\sqrt{2}$. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC} = (5;1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{BC} = (3;3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$.

Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 6$.

Câu 45: Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A. $9\sqrt{15}$. B. $3\sqrt{15}$. C. 105. D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$.

Suy ra: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$.

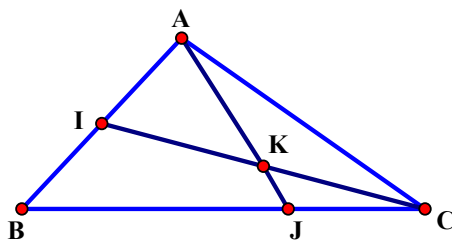
Câu 46: Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2$; $BC = 3$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

- A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$.

Suy ra $AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47: Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15$, $m_b = 12$, $m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72.

B. 144.

C. 54.

D. 108.

Lời giải 1

Chọn A

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rong ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

Cách 2:

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ Suy ra $S_{ABC} = 72$

Câu 48: Cho tam giác ΔABC có $b=7$; $c=5$; $\cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

B. 8.

C. $8\sqrt{3}$

D. $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq \hat{A} \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Câu 49: Cho tam giác ABC có $AB = 2a$; $AC = 4a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

A. $S = 8a^2$.

B. $S = 2a^2\sqrt{3}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = 4a^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích của tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

Câu 50: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } ABC. \text{ Bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 51: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12.

B. 3.

C. 6.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài tam giác ABC có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p = \frac{12}{2}$; bán kính đường tròn

nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r = 1$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = p \cdot r = 6 \cdot 1 = 6$.

Câu 52: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

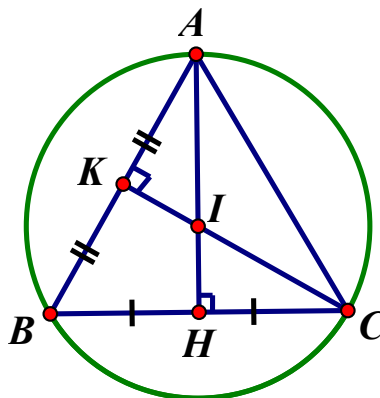
B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{8a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC ;

I là giao điểm của AH và CK .

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } AH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó: } R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 53: Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3} + 1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 60^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Câu 54: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1.

B. $\frac{8}{9}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .

$$\text{Do đó bán kính đường tròn nội tiếp } r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1.$$

Câu 55: Cho $\triangle ABC$ có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. 8,125.

B. 130.

C. 8.

D. 8,5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}.$$

Câu 56: Cho $\triangle ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}.$$

Câu 57: Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16. B. 8. C. 4. D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8.$$

Câu 58: Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A. $\frac{65}{8}$. B. 40. C. 32,5. D. $\frac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344.$$

$$\text{Mà } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2}.$$

Câu 59: Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}.$$

Câu 60: Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } p = \frac{5+12+13}{2} = 15. \text{ Mà } 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.5.12 = 30.$$

$$\text{Mặt khác } S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2.$$

Câu 61: Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

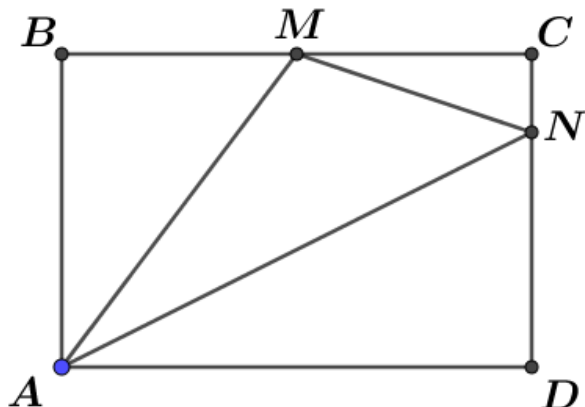
Chọn A

$$\text{Ta có: } 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5.$$

- Câu 62:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng
- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. **D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

$$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác } AMN \text{ là: } R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

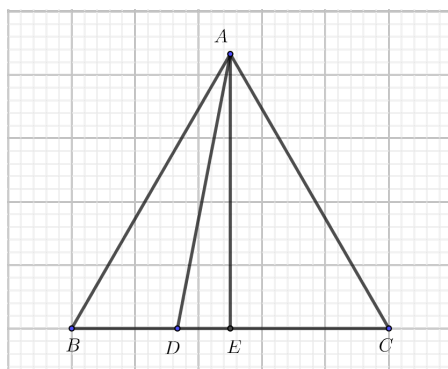
- Câu 63:** Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. C. $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. **D. $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$. Do đó $DC = 2DB$.



Gọi S là diện tích của tam giác ADC và E là trung điểm của BC .

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } \begin{cases} S = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} S = \frac{AD + DC + AC}{2} \cdot r = \frac{5 + \sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3 \sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5 + \sqrt{7}) ar \cdot 2a^3 \sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) a^4 r}{108R}$$

$$\text{Hay } \frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) a^4 r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7})}{9}$$

DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 64: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250m$, $CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 266m. B. 255m. C. 166m. D. 298m.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$.

Câu 65: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

- A. 13. B. $20\sqrt{13}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30 \cdot 2 = 60km$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40 \cdot 2 = 80km$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 66: Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80m$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

- A. 71m. B. 91m. C. 79m. D. 40m.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91m$.

Câu 67: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200m$, $CB = 180m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

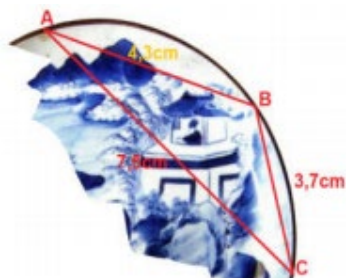
- A. 180m. B. 224m. C. 112m. D. 168m.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^{\circ}16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.

Câu 68: Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3\text{ cm}$; $BC = 3,7\text{ cm}$; $CA = 7,5\text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



A. 5,73 cm.

B. 6,01 cm.

C. 5,85 cm.

D. 4,57 cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{2}\text{ cm}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2\text{ cm}^2$.

Mà $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73\text{ cm}$.

Câu 69: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$, $\widehat{CAD} = 63^{\circ}$; $\widehat{CBD} = 48^{\circ}$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 61,4 m.

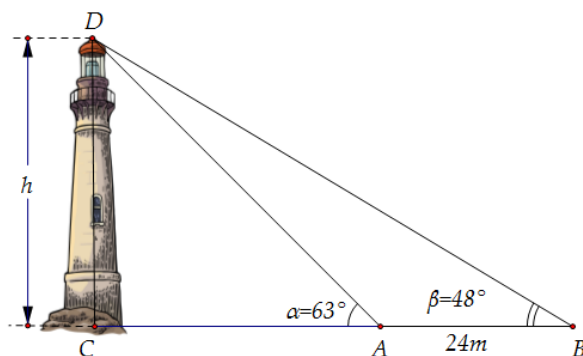
B. 18,5 m.

C. 60 m.

D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{CAD} = 63^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^{\circ} \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^{\circ} - (117^{\circ} + 48^{\circ}) = 15^{\circ}$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB.\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác BCD vuông tại C nên có: $\sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD.\sin \widehat{CBD}$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4m$$