CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1.Dạng 1: Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ bán kính R

Phương trình có dạng : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

2.Dạng 2: Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng

II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0\in(C)$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I của (C).
- Bước 2: Tiếp tuyến (D) là đường thẳng đi qua M_0 và có VTPT là $\overrightarrow{M_0I}$

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0\notin(C)$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: (D) là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I;(D))=R$ $(*)$. Giải $(*)$ tìm được mối liên hệ giữa $a\,\&\,b$. Chọn $a\,\&\,b$ phù hợp để kết luận.

3.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax+By+C=0$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: $(D)\parallel(D_1): Ax+By+C=0$ nên phương trình có dạng

$Ax + By + C' = 0 \ (C' \neq C)$

• Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d\left(I;(D)\right) = R \ (*)$. Giải $(*)$ tìm được C' so với đk để kết luận.

4. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với (D_1): $Ax + By + C = 0$

• Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

• Bước 2: $(D) \perp (D_1): Ax + By + C = 0$ nên phương trình có dạng $Bx - Ay + C' = 0$

• Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d\left(I;(D)\right) = R \ (*)$. Giải $(*)$ tìm được C' so với đk để kết luận.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2. Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có:

• Hai đường tròn tiếp xúc $\Leftrightarrow I_1I_2 = |R_1 \pm R_2|$

• Hai đường tròn cắt nhau $R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$

BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tâm và tính bán kính của đường tròn: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$.

Câu 2. Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2 + y^2 + xy + 4x - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$.

Câu 3. Viết phương trình của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R = 7$;

b) Có tâm $I(1;-2)$ và đi qua điểm $A(-2;2)$;

c) Có đường kính AB, với $A(-1;-3), B(-3;5)$;

d) Có tâm $I(1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$.

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC, với $A(6;-2), B(4;2), C(5;-5)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Câu 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(0;2)$.

Câu 6. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t\,(0 \le t \le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2 + \sin t^\circ; 4 + \cos t^\circ)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1: + Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).

Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

1) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1)

2) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2)

3) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3)

4) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4)

Câu 2: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1)

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

Câu 3: Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

(I) $x^2+y^2-4x+15y-12=0$.

(II) $x^2+y^2-3x+4y+20=0$.

(III) $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III). **D.** Chỉ (I) và (III).

Câu 2: Để $x^2+y^2-ax-by+c=0$ (1) là phương trình đường tròn, điều kiện cần và đủ là

A. $a^2+b^2-c>0$. **B.** $a^2+b^2-c\ge 0$. **C.** $a^2+b^2-4c>0$. **D.** $a^2+b^2+4c>0$.

Câu 3: Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-x-y+9=0$. **B.** $x^2+y^2-x=0$.

C. $x^2+y^2-2xy-1=0$. **D.** $x^2-y^2-2x+3y-1=0$.

Câu 4: Phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

A. $m<0$. **B.** $m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>1$.

Câu 5: Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-8x+10y+m=0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7 ?

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-8$. **D.** $m=-4$.

Câu 6: Đường tròn $3x^2+3y^2-6x+9y-9=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 25. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 7: Đường tròn $2x^2+2y^2-8x+4y-1=0$ có tâm là điểm nào sau đây?

A. $(-8;4)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(8;-4)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 8: Cho hai điểm $A(-2;1)$, $B(3;5)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ nhìn AB dưới một góc vuông nằm trên đường tròn có phương trình là

A. $x^2+y^2-x-6y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+x+6y-1=0$.

C. $x^2+y^2+5x-4y+11=0$. **D.** Đáp án khác.

Câu 9: Cho hai điểm $A(-4;2)$ và $B(2;-3)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $MA^2+MB^2=31$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-6x-5y+1=0$.

C. $x^2+y^2-2x-6y-22=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+6y-22=0$.

Câu 10: Cho $A(-1;0)$, $B(2;4)$ và $C(4;1)$. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tính bán kính của (C).

A. $\frac{\sqrt{107}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1: + Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C)

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C)

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

+ Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

* $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$

* (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=d(I;\Delta)=R$

* (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2)=R$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

Câu 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Câu 3: Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$. và $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Đường tròn tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=2$ có phương trình là

A. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$. **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2=4$.

Câu 2: Đường tròn tâm $I(-1;2)$ và đi qua điểm $M(2;1)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x-4y-5=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-4y-3=0$.

C. $x^2+y^2-2x-4y-5=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+4y-5=0$.

Câu 3: Cho hai điểm $A(5;-1)$, $B(-3;7)$. Đường tròn có đường kính AB có phương trình là

A. $x^2+y^2-2x-6y-22=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-6y+22=0$.

C. $x^2+y^2-2x-y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+1=0$.

Câu 4: Đường tròn (C) tâm $I(-4;3)$ và tiếp xúc với trục tung có phương trình là

A. $x^2+y^2-4x+3y+9=0$. **B.** $(x+4)^2+(y-3)^2=16$.

C. $(x-4)^2+(y+3)^2=16$. **D.** $x^2+y^2+8x-6y-12=0$.

Câu 5: Đường tròn (C) tâm $I(4;\ 3)$ và tiếp xúc với đườngthẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$ có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-3)^2=1$. **B.** $(x-4)^2+(y-3)^2=1$.

C. $(x+4)^2+(y+3)^2=1$. **D.** $(x-4)^2+(y+3)^2=1$

Câu 6: Đường tròn (C) đi qua điểm $A(2;4)$ và tiếp xúc với các trục tọa độ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x-10)^2+(y-10)^2=100$

B. $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ hoặc $(x-10)^2+(y-10)^2=100$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ hoặc $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

D. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

Câu 7: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d:2x-y+7=0$ có phương trình là

A. $(x-7)^2+(y-7)^2=102$.　　**B.** $(x+7)^2+(y+7)^2=164$.

C. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.　　**C.** $(x+3)^2+(y+5)^2=25$.

Câu 8: Đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung tại điểm $A(0;-2)$ và đi qua điểm $B(4;-2)$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.　　**B.** $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$　　**D.** $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

Câu 9: Tâm của đường tròn qua ba điểm $A(2;1)$, $B(2;5)$, $C(-2;1)$ thuộc đường thẳng có phương trình

A. $x-y+3=0$.　　**B.** $x-y-3=0$　　**C.** $-x+y+3=0$　　**D.** $x+y+3=0$

Câu 10: Đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;2)$, $B(2;2)$, $C(1;1+\sqrt{2})$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+2y-\sqrt{2}=0$.　　**B.** $x^2+y^2-2x-2y=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.　　**D.** $x^2+y^2+2x-2y+\sqrt{2}=0$.

Câu 11: Đường tròn đi qua 3 điểm $A(11;8)$, $B(13;8)$, $C(14;7)$ có bán kính R bằng

A. 2.　　**B.** 1.　　**C.** $\sqrt{5}$.　　**D.** $\sqrt{2}$.

DẠNG 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM; ĐƯỜNG THẲNG; ĐƯỜNG TRÒN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

1 *Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM<R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM=R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM>R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

2 *Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

+ Nếu $d(I;\Delta)<R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d(I;\Delta)=R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d(I;\Delta)>R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

3 *Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')*

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R'$, $|R-R'|$

+ Nếu $II'>R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau

+ Nếu $II'=R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau

+ Nếu $II'<|R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau

+ Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau

+ Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh điểm $M(2;1)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và (C)

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Câu 3: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta : \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$. Phương trình của đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dài lớn nhất là

A. $4x + 3y + 13 = 0$. **B.** $3x - 4y + 25 = 0$. **C.** $3x - 4y + 15 = 0$. **D.** $4x + 3y + 20 = 0$.

Câu 2: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta : x - 2y + 3 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

A. $(3;3)$ và $(-1;1)$. **B.** $(-1;1)$ và $(3;-3)$. **C.** $(3;3)$ và $(1;1)$. **D.** $(2;1)$ và $(2;-1)$.

Câu 3: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$. Đường thẳng d đi qua $A(3;2)$ và cắt (C) theo một dây cung ngắn nhất có phương trình là

A. $2x - y + 2 = 0$. **B.** $x + y - 1 = 0$. **C.** $x - y - 1 = 0$. **D.** $x - y + 1 = 0$.

Câu 4: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Phương trình của đường thẳng d là

A. $x - y + 6 = 0$. **B.** $7x - 3y + 34 = 0$. **C.** $7x - 3y + 30 = 0$. **D.** $7x - y + 35 = 0$.

Câu 5: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(I) Điểm $A(1;1)$ nằm ngoài (C).

(II) Điểm $O(0;0)$ nằm trong (C).

(III) (C) cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III). **D.** Cả (I), (II) và (III).

Câu 6: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+6y+6=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+5=0$. Đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dại bằng $2\sqrt{3}$ có phương trình là

A. $4x-3y+8=0$. **B.** $4x-3y-8=0$ hoặc $4x-3y-18$.

C. $4x-3y-8=0$. **D.** $4x+3y+8=0$.

Câu 7: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-2y+5=0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Phương trình của đường thẳng d là

A. $x-y+6=0$. **B.** $7x-3y+34=0$. **C.** $7x-3y+30=0$. **D.** $7x-y+35=0$.

Câu 8: Đường tròn $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ cắt đường thẳng $x+y-2=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 9: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y+4=0$

A. $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ và $((\sqrt{2};-\sqrt{2})$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$.

C. $(2;0)$ và $(0;2)$. **D.** $(2;0)$ và $(-2;0)$.

Câu 10: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): (x+10)^2+(y-16)^2=1$.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Câu 11: Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2-9=0$.

A. $m=-3$. **B.** $m=3$ và $m=-3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=15$ và $m=-15$.

Câu 12: Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 15.

Câu 13: Đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ cắt đường thẳng $x+y-a-b=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **D.** R.

Câu 14: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+8y=0$.

A. Tiếp xúc trong. **B.** Không cắt nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Tiếp xúc ngoài.

Câu 15: Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ tại điểm H có tọa độ là

A. $\left(-\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Câu 16: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): (x-3)^2+(y-4)^2=25$.

A. Không cắt nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

DẠNG 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho đường tròn (C) tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R

1. Nếu biết tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}\left(x_0-a;y_0-b\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0$

2. Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d\left(I;\Delta\right)=R$ để xác định tiếp tuyến.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A\left(1;-1\right)$; $B\left(1;3\right)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ **B.**

Câu 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $\left(C\right):x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta':2x+3y+4=0$

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0

Câu 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$\left(C_1\right):x^2+y^2-4y-5=0$ và $\left(C_2\right):x^2+y^2-6x+8y+16=0$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=10$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(4;4)$ là

A. $x-3y+5=0$. **B.** $x+3y-4=0$. **C.** $x-3y+16=0$. **D.** $x+3y-16=0$.

Câu 2: Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=9$. Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-5;1)$ là

A. $x+y-4=0$ và $x-y-2=0$. **B.** $x=5$ và $y=-1$.

C. $2x-y-3=0$ và $3x+2y-2=0$. **D.** $3x-2y-2=0$ và $2x+3y+5=0$.

Câu 3: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $D:x+2y-15=0$ là

A. $x+2y=0$ và $x+2y-10=0$. **B.** $x-2y=0$ và $x+2y+10=0$.

C. $x+2y-1=0$ và $x+2y-3=0$. **D.** $x-2y-1=0$ và $x-2y-3=0$.

Câu 4: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-6x+2y+5=0$ và đường thẳng $d:2x+(m-2)y-m-7=0$. Với giá trị nào của m thì d là tiếp tuyến của (C)?

A. $m=3$. **B.** $m=15$. **C.** $m=13$. **D.** $m=3$ hoặc $m=13$.

Câu 5: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+8y-23=9$ và điểm $M(8;-3)$. Độ dài đoạn tiếp tuyến của (C) xuất phát từ M là:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 6: Nếu đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=R^2$ tiếp xúc với đường thẳng $d: 5x+12y-60=0$ thì giá trị của R là:

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=\frac{19}{13}$. **C.** $R=\sqrt{5}$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 2x+y+7=0$ là

A. $2x+y=0;\ 2x+y-10=0$. **B.** $2x+y+1=0;\ 2x+y-1=0$.

C. $2x-y+10=0;\ 2x+y-10=0$. **D.** $2x+y=0;\ x+2y-10=0$.

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

I LÝ THUYẾT.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1.Dạng 1: Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ bán kính R

Phương trình có dạng : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

2.Dạng 2: Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng

II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0\in(C)$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I của (C).
- Bước 2: Tiếp tuyến (D) là đường thẳng đi qua M_0 và có VTPT là $\overrightarrow{M_0I}$

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0\notin(C)$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: (D) là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I;(D))=R$ $(*)$. Giải $(*)$ tìm được mối liên hệ giữa $a\&b$. Chọn $a\&b$ phù hợp để kết luận.

3.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax+By+C=0$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: $(D)\,||\,(D_1): Ax+By+C=0$ nên phương trình có dạng

$Ax + By + C' = 0 \ (C' \neq C)$

- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;(D)) = R \ (*)$. Giải $(*)$ tìm được C' so với đk để kết luận.

4. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với $(D_1): Ax + By + C = 0$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: $(D) \perp (D_1): Ax + By + C = 0$ nên phương trình có dạng $Bx - Ay + C' = 0$
- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;(D)) = R \ (*)$. Giải $(*)$ tìm được C' so với đk để kết luận.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2. Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có:

- Hai đường tròn tiếp xúc $\Leftrightarrow I_1I_2 = |R_1 \pm R_2|$
- Hai đường tròn cắt nhau $R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$

BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tâm và tính bán kính của đường tròn: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$.

Lời giải

Đường tròn $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$ có tâm là điểm $I(-3;3)$, có bán kính $R = 6$.

Câu 2. Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2 + y^2 + xy + 4x - 2 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$.

Lời giải

a) $x^2 + y^2 + xy + 4x - 2 = 0$ không phải là phương trình của một đường tròn vì có xy.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ không phải là phương trình của một đường tròn vì $R = 0$.

c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$ là phương trình của đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

Câu 3. Viết phương trình của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I\left(-2;5\right)$ và bán kính $R=7$;

b) Có tâm $I\left(1;-2\right)$ và đi qua điểm $A\left(-2;2\right)$;

c) Có đường kính AB, với $A\left(-1;-3\right),B\left(-3;5\right)$;

d) Có tâm $I\left(1;3\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x+2y+3=0$.

Lời giải

a) Phương trình của đường tròn là $\left(x+2\right)^2+\left(y-5\right)^2=49$.

b) Ta có $\overrightarrow{AI}=\left(3;-4\right)$, bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}=5$.

Phương trình của đường tròn là $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=25$.

c) Toạ độ trung điểm I của AB là $I\left(-2;1\right)$. Ta có $\overrightarrow{AI}=\left(-1;4\right)$.

Bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{\left(-1\right)^2+4^2}=\sqrt{17}$.

Phương trình của đường tròn là $\left(x+2\right)^2+\left(x-1\right)^2=17$.

d) Có tâm $I\left(1;3\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x+2y+3=0$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng $x+2y+3=0$ bằng bán kính $R=\dfrac{|1+2.3+3|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn tâm I bán kính R là

$$\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=20.$$

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC, với $A\left(6;-2\right),B\left(4;2\right),C\left(5;-5\right)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải

Gọi phương trình đường tròn $\left(C\right)$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Vì đường tròn $\left(C\right)$ đi qua ba điểm $A\left(6;-2\right)$, $B\left(4;2\right)$, $C\left(5;-5\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}6^2+\left(-2\right)^2-2a.6-2b.\left(-2\right)+c=0\\4^2+2^2-2a.4-2b.2+c=0\\5^2+\left(-5\right)^2-2a.5-2b.\left(-5\right)+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-12a+4b+c=-40\\-8a-4b+c=-20\\-10a+10b+c=-50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-20.\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn $\left(C\right)$ là: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Câu 5. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+4=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(0;2)$.

Lời giải

Ta có đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y+4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$ có tâm là điểm $I(-1;2)$.

Do $(0+1)^2+(2-2)^2=1$ nên điểm M thuộc đường tròn (C).

Tiếp tuyến của (C) tại $M(0;2)$ có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(-1;0)$, nên có phương trình

$$-1(x+1)+0(y-2)=0 \Leftrightarrow x+1=0.$$

Câu 6. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t(0\le t\le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2+\sin t^\circ;4+\cos t^\circ)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Lời giải

a) Vị trí ban đầu của vật thể tại thời điểm $t=0$ có tọa độ $M(2;5)$.

Vị trí kết thúc của vật thể tại thời điểm $t=180$ có tọa độ $M(2;3)$.

b) Quỹ đạo chuyển độ của vật thể là các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x=2+\sin t^\circ \\ y=4+\cos t^\circ \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=1.$$

Vậy quỹ đạo chuyển độ của vật thể là đường tròn (C): $(x-2)^2+(y-4)^2=1$, có tâm $I(2;4)$, bán kính $R=1$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1: + Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).

Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

1) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1)

2) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2)

3) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3)

4) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4)

Lời giải

1) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;\ b=2;\ c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

2) Ta có: $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

3) Ta có: $(3)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0$

Suy ra: $P=a^2+b^2-c=\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}>0$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$ bán kính $R=\frac{\sqrt{15}}{2}$

4) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Câu 2: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1)

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

Lời giải

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

Với $a=m;\ b=2(m-2);\ c=6-m$

Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m;2(m-2))$ và bán kính: $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$

Câu 3: Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có $a^2+b^2-c=\left(-\dfrac{m+2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\dfrac{(m+2)^2+4}{2}>0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I: $\begin{cases} x_I=-\dfrac{m+2}{2} \\ y_I=\dfrac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I+y_I-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2+y_0^2+(m+2)x_0-(m+4)y_0+m+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0-y_0-1)m+x_o^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ x_0^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

(I) $x^2+y^2-4x+15y-12=0$.

(II) $x^2+y^2-3x+4y+20=0$.

(III) $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III). **D.** Chỉ (I) và (III).

Lời giải

Chọn D

(I) có: $a^2+b^2-c=4+\left(\frac{15}{2}\right)^2+12=\frac{289}{4}>0$

(II) có: $a^2+b^2-c=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{2}\right)^2-20=-\frac{55}{4}<0$

$(III)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y+\frac{1}{2}=0$, phương trình này có: $a^2+b^2-c=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{11}{4}>0$

Vậy chỉ (I) và (III) là phương trình đường tròn.

Câu 2: Để $x^2+y^2-ax-by+c=0$ (1) là phương trình đường tròn, điều kiện cần và đủ là

A. $a^2+b^2-c>0$. **B.** $a^2+b^2-c\ge 0$. **C.** $a^2+b^2-4c>0$. **D.** $a^2+b^2+4c>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$x^2+y^2-ax-by+c=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow x^2-2.\frac{a}{2}.x+\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2-2.\frac{b}{2}.y+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$

Vậy điều kiện để (1) là phương trình đường tròn: $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0\Leftrightarrow a^2+b^2-4c>0$

Câu 3: Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-x-y+9=0$. **B.** $x^2+y^2-x=0$.

C. $x^2+y^2-2xy-1=0$. **D.** $x^2-y^2-2x+3y-1=0$.

Lời giải

Chọn B

Loại C vì có số hạng $-2xy$.

Câu A: $a=b=\frac{1}{2},\ c=9\Rightarrow a^2+b^2-c<0$ nên không phải phương trình đường tròn.

Câu D: loại vì có $-y^2$.

Câu B: $a=\frac{1}{2},\ b=0,\ c=0\Rightarrow a^2+b^2-c>0$ nên là phương trình đường tròn.

Câu 4: Phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

A. $m<0$. **B.** $m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(m+1)^2+y^2-2(m+2)y+(m+2)^2-(m+1)^2-(m+2)^2+6m+7=0$$
$$\Leftrightarrow [x-(m+1)]^2+[y-(m+2)]^2=2m^2-2$$

Vậy điều kiện để (1) là phương trình đường tròn: $2m^2-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right.$

Câu 5: Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-8x+10y+m=0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7 ?

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-8$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $R=\sqrt{4^2+5^2-m}=7 \Leftrightarrow m=-8$.

Câu 6: Đường tròn $3x^2+3y^2-6x+9y-9=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 25. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

$3x^2+3y^2-6x+9y-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+3y-3=0$.

Suy ra $P=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-(-3)=\frac{25}{4}>0$. Vậy bán kính là: $R=\frac{5}{2}$.

Câu 7: Đường tròn $2x^2+2y^2-8x+4y-1=0$ có tâm là điểm nào sau đây?

A. $(-8;4)$. **B.** $(2;-1)$. **C.** $(8;-4)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn B

$2x^2+2y^2-8x+4y-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-\frac{1}{2}=0$.

Vậy tâm là: $I(2;-1)$.

Câu 8: Cho hai điểm $A(-2;1)$, $B(3;5)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ nhìn AB dưới một góc vuông nằm trên đường tròn có phương trình là

A. $x^2+y^2-x-6y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+x+6y-1=0$.

C. $x^2+y^2+5x-4y+11=0$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

Tập hợp điểm $M(x;y)$ nhìn AB dưới một góc vuông nằm trên đường tròn đường kính AB và tâm là trung điểm của AB.

Tọa độ tâm đường tròn là trung điểm của AB: $I\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Bán kính đường tròn: $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5^2+4^2}}{2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$.

Phương trình đường tròn: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{41}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-x-6y-1=0$.

Câu 9: Cho hai điểm $A(-4;2)$ và $B(2;-3)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $MA^2+MB^2=31$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-6x-5y+1=0$.

C. $x^2+y^2-2x-6y-22=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+6y-22=0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $MA^2+MB^2=31$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-2)^2+(x-2)^2+(y+3)^2=31 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x+y+1=0$.

Câu 10: Cho $A(-1;0)$, $B(2;4)$ và $C(4;1)$. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tính bán kính của (C).

A. $\frac{\sqrt{107}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$3MA^2+MB^2=2MC^2 \Leftrightarrow 3(x+1)^2+3y^2+(x-2)^2+(y-4)^2=2(x-4)^2+2(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+9x-2y-\frac{11}{2}=0$. Bán kính của (C) là: $R=\frac{\sqrt{107}}{2}$.

DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1: + Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C)

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C)

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

+ Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

* $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$

* (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=d(I;\Delta)=R$

* (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2)=R$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

Lời giải

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x-1)^2+(y+5)^2=26$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4;3)$

$AI=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2+(y-3)^2=13$

c) Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}4+16+4a-8b+c=0\\25+25-10a-10b+c=0\\36+4-12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-20\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Nhận xét: Đối với ý c) ta có thể làm theo cách sau

Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM=IN=IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2=IN^2 \\ IM^2=IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-5)^2 \\ (x+2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Câu 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải

a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R=d(I;\Delta)=\frac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$

b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;-R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có: $R^2=IA^2 \Leftrightarrow R^2=(2-R)^2+(-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2-6R+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R=1 \\ R=5 \end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35|=|21a+35| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{-70}{43} \end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$

- Với $a=\frac{-70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43};\frac{-70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra $(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$(C):(x-10)^2+y^2=49$ và $(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Câu 3: Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Lời giải

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và Bán kính $R=IA=\sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2}=5$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

b) Ta có $OA=8;\ OB=6;\ AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB=pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC)

Suy ra $r=\frac{OA.OB}{OA+OB+AB}=2$

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên

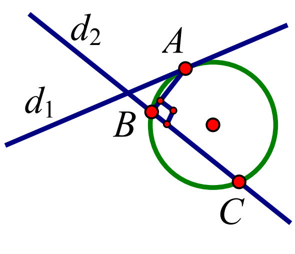
tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$. và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại

B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải



Vì $A \in d_1 \Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right)$, $a>0$; $B, C \in d_2 \Rightarrow B\left(b;\sqrt{3}b\right)$, $C\left(c;\sqrt{3}c\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\sqrt{3}\left(a+b\right)\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(c-a;\sqrt{3}\left(c+a\right)\right)$

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn **C.**

Do đó $AC \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow -1.(c-a)+\sqrt{3}.\sqrt{3}(a+c)=0 \Leftrightarrow 2a+c=0$ (1)

$AB \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0 \Leftrightarrow 1.(b-a)+3(a+b)=0 \Leftrightarrow 2b+a=0$ (2)

Mặt khác $S_{ABC}=\frac{1}{2}d\left(A;d_2\right).BC \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{\left(c-b\right)^2+3\left(c-b\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2a\left|c-b\right|=1$ (3)

Từ (1), (2) suy ra $2\left(c-b\right)=-3a$ thế vào (3) ta được $a\left|-3a\right|=1 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó $b=-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right)$, $C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là $R=\frac{AC}{2}=1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\left(C\right):\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Đường tròn tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=2$ có phương trình là

A. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$. **D.** $(x+3)^2+(y+1)^2=4$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình đường tròn có tâm $I\left(3;-1\right)$, bán kính $R=2$ là: $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2=4$

Câu 2: Đường tròn tâm $I(-1;2)$ và đi qua điểm $M(2;1)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x-4y-5=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-4y-3=0$.

C. $x^2+y^2-2x-4y-5=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+4y-5=0$.

Lời giải

Chọn A.

Đường tròn có tâm $I\left(-1;2\right)$ và đi qua $M\left(2;1\right)$ thì có bán kính là: $R=IM=\sqrt{3^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{10}$

Khi đó có phương trình là: $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=10 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-5=0$

Câu 3: Cho hai điểm $A(5;-1)$, $B(-3;7)$. Đường tròn có đường kính AB có phương trình là

A. $x^2+y^2-2x-6y-22=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-6y+22=0$.

C. $x^2+y^2-2x-y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+1=0$.

Lời giải

Chọn A.

Tâm I của đường tròn là trung điểm AB nên $I(1;3)$.

Bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-5)^2+(7+1)^2}=4\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y-3)^2=32 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y-22=0$

Câu 4: Đường tròn (C) tâm $I(-4;3)$ và tiếp xúc với trục tung có phương trình là

A. $x^2+y^2-4x+3y+9=0$. **B.** $(x+4)^2+(y-3)^2=16$.

C. $(x-4)^2+(y+3)^2=16$. **D.** $x^2+y^2+8x-6y-12=0$.

Lời giải

Chọn B.

(C) tiếp xúc với $y'Oy$ và có tâm $I(-4;3)$ nên: $a=-4, b=3, R=|a|=4$.

Do đó, (C) có phương trình $(x+4)^2+(y-3)^2=16$.

Câu 5: Đường tròn (C) tâm $I(4;3)$ và tiếp xúc với đườngthẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$ có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-3)^2=1$. **B.** $(x-4)^2+(y-3)^2=1$.

C. $(x+4)^2+(y+3)^2=1$. **D.** $(x-4)^2+(y+3)^2=1$

Lời giải

Chọn B.

(C) có bán kính $R=d(I,\Delta)=\frac{|3.4-4.3+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$.

Do đó, (C) có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2=1$.

Câu 6: Đường tròn (C) đi qua điểm $A(2;4)$ và tiếp xúc với các trục tọa độ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x-10)^2+(y-10)^2=100$

B. $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ hoặc $(x-10)^2+(y-10)^2=100$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ hoặc $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

D. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

Lời giải

Chọn A.

$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tiếp xúc với các trục tọa độ nên $|a|=|b|=R$ và điểm $A(2;4)\in(C)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nên $I(a;b)$ cũng ở góc phần tư thứ nhất. Suy ra $a=b=R$. Vậy $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (C)$.

$A \in (C) \Rightarrow (2-a)^2 + (4-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100 \end{array}\right.$

Câu 7: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d: 2x - y + 7 = 0$ có phương trình là

A. $(x-7)^2 + (y-7)^2 = 102$.
B. $(x+7)^2 + (y+7)^2 = 164$.
C. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.
C. $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn **B.**

$I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C), do đó:

$AI^2 = BI^2 \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2$

Hay: $a = b$ (1). Mà $I(a;b) \in d: 2x - y + 7 = 0$ nên $2a - b + 7 = 0$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có: $a = -7 \Rightarrow b = -7 \Rightarrow R^2 = AI^2 = 164$.

Vậy $(C): (x+7)^2 + (y+7)^2 = 164$.

Câu 8: Đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung tại điểm $A(0;-2)$ và đi qua điểm $B(4;-2)$ có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.
B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ **D.** $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

Lời giải

Chọn **A.**

Vì $y_A = y_B = -2$ nên $AB \perp y'Oy$ và AB là đường kính của (C). Suy ra $I(2;-2)$ và bán kính $R = IA = 2$. Vậy $(C): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Câu 9: Tâm của đường tròn qua ba điểm $A(2;1)$, $B(2;5)$, $C(-2;1)$ thuộc đường thẳng có phương trình

A. $x - y + 3 = 0$. **B.** $x - y - 3 = 0$ **C.** $-x + y + 3 = 0$ **D.** $x + y + 3 = 0$

Lời giải

Chọn **A.**

Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $(a^2 + b^2 + c > 0)$. Tâm $I(a;b)$.

$\left\{\begin{array}{l} A(2;1) \in (C) \\ B(2;5) \in (C) \\ C(-2;1) \in (C) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + 1 - 4a - 2b + c = 0 \\ 4 + 25 - 4a - 10b + c = 0 \\ 4 + 1 + 4a - 2b + c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 3 \Rightarrow I(0;3) \\ c = 1 \end{array}\right.$

Lần lượt thế tọa độ I vào các phương trình để kiểm tra.

Câu 10: Đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;2)$, $B(2;2)$, $C(1;1+\sqrt{2})$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - \sqrt{2} = 0$.
B. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. **D.** $x^2+y^2+2x-2y+\sqrt{2}=0$.

Lời giải

Chọn **B.**

Gọi phương trình đường tròn cần tìm có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ \left(a^2+b^2-c>0\right)$.

Đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;2)$, $B(2;2)$, $C(1;1+\sqrt{2})$ nên ta có:

$$\begin{cases}4-4b+c=0\\8-4a-4b+c=0\\4+2\sqrt{2}-2a-2\left(1+\sqrt{2}\right)b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;2)$, $B(2;2)$, $C(1;1+\sqrt{2})$ là

$$x^2+y^2-2x-2y=0$$

Câu 11: Đường tròn đi qua 3 điểm $A(11;8)$, $B(13;8)$, $C(14;7)$ có bán kính R bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Gọi phương trình đường tròn cần tìm có dạng:
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ \left(a^2+b^2-c>0\right)$.

Đường tròn đi qua 3 điểm $A(11;8)$, $B(13;8)$, $C(14;7)$ nên ta có:

$$\begin{cases}121+64-22a-16b+c=0\\169+64-26a-16b+c=0\\196+49-28a-14b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=12\\b=6\\c=175\end{cases}$$

Ta có $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{5}$

Vậy phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(11;8)$, $B(13;8)$, $C(14;7)$ có bán kính là $R=\sqrt{5}$

DẠNG 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM; ĐƯỜNG THẲNG; ĐƯỜNG TRÒN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

1 *Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM<R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM=R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM > R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

2 *Vị trí tương đối giữa đường thẳng* Δ *và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

+ Nếu $d(I;\Delta) < R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d(I;\Delta) = R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d(I;\Delta) > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

3 *Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')*

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R'$, $|R-R'|$

+ Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau

+ Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau

+ Nếu $II' < |R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau

+ Nếu $II' = |R-R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau

+ Nếu $|R-R'| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$

a) Chứng minh điểm $M(2;1)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và (C)

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có $IM = \sqrt{(2-2)^2+(1+1)^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

b) Vì $d(I;\Delta)=\frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}<3=R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

c) Vì Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên Δ' vuông góc với Δ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó Δ' nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1)$ làm vectơ pháp tuyến suy ra $\Delta':1(x-2)+1(y+1)=0$ hay $x+y-1=0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta':x+y-1=0$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-6y-15=0$ và $(C'):x^2+y^2-6x-2y-3=0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Lời giải

a) Cách 1: (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=5$, (C) có tâm $I'(3;1)$ và bán kính $R=\sqrt{13}$

$II'=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

Ta thấy $|R_1-R_2|<I_1I_2<|R_1+R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y-15=0\\x^2+y^2-6x-2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y-15=0\\x-y-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+3)^2+y^2-2(y+3)-6y-15=0\\x=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-y-6=0\\x=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=3\end{array}\right.\\x=y+3\end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B(6;3)$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A, B nhận $\overrightarrow{AB}(5;5)$ làm vectơ chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2+5t\end{cases}$

c) Cách 1: Đường tròn cần tìm (C") có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

(C") đi qua ba điểm A, B và O nên ta có hệ $\begin{cases} 1+4-2a+4b+c=0 \\ 36+9-12a-6b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}$

Vậy (C"): $x^2+y^2-7x-y=0$

Cách 2: Vì A, B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình

$x^2+y^2-2x-6y-15+m\left(x^2+y^2-6x-2y-3\right)=0$ (*)

Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình (*) khi và chỉ khi $-15+m.(-3)=0 \Leftrightarrow m=-5$

Khi đó phương trình (*) trở thành $x^2+y^2-7x-y=0$

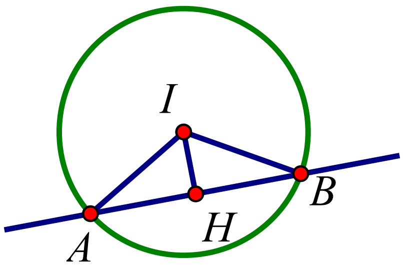
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-7x-y=0$

Câu 3: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3$$

$\Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m)

b) Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{9}{2}$

Suy $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB}=1 \Leftrightarrow \widehat{AIB}=90^0$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH}=45^0 \Rightarrow IH=IA.\cos 45^0=\frac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có $d\left(I;\Delta\right)=IH \Leftrightarrow \frac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2+8m+16=0 \Leftrightarrow m=-4$

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=4$ và đường thẳng $d:3x-4y+5=0$. Phương trình của đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dài lớn nhất là

A. $4x+3y+13=0$. **B.** $3x-4y+25=0$. **C.** $3x-4y+15=0$. **D.** $4x+3y+20=0$.

Lời giải

Chọn C.

$\left(C\right)$ có tâm $I\left(-1;3\right)$ và $R=2. d'// d \Rightarrow d':3x-4y+c=0$.

Yêu cầu bài toán có nghĩa là d' qua tâm $I\left(-1;3\right)$ của $\left(C\right)$, tức là : $-3-12+c=0 \Leftrightarrow c=1$

Vậy $d':3x-4y+15=0$.

Câu 2: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y=0$

A. $\left(3;3\right)$ và $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$ và $\left(3;-3\right)$. **C.** $\left(3;3\right)$ và $\left(1;1\right)$. **D.** $\left(2;1\right)$ và $\left(2;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3 \\ \left(2y-3\right)^2+y^2-2\left(2y-3\right)-4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+3=0 \\ x=2y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=3 \\ x=3 \end{cases}$$

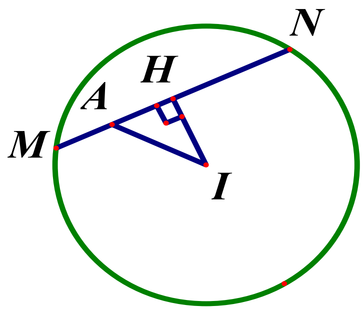
Vậy tọa độ giao điểm là $\left(3;3\right)$ và $\left(-1;1\right)$.

Câu 3: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-6y+5=0$. Đường thẳng d đi qua $A(3;2)$ và cắt (C) theo một dây cung ngắn nhất có phương trình là

A. $2x-y+2=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $x-y-1=0$. **D.** $x-y+1=0$.

Lời giải

Chọn C.



$f(x;y)=x^2+y^2-4x-6y+5.$
$f(3;2)=9+4-12-12+5=-6<0.$

Vậy $A(3;2)$ ở trong (C).

Dây cung MN ngắn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv A \Leftrightarrow MN$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA}=(1;-1)$. Vậy d có phương trình: $1(x-3)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Câu 4: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-2y+5=0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Phương trình của đường thẳng d là

A. $x-y+6=0$. **B.** $7x-3y+34=0$. **C.** $7x-3y+30=0$. **D.** $7x-y+35=0$.

Lời giải

Chọn **A.**

(C) có tâm $I(-3;1), R=\sqrt{5}$. Do đó, $IA=\sqrt{2}<R \Rightarrow A$ ở trong (C).

A là trung điểm của $MN \Rightarrow IA\perp MN \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của d, nên d có phương trình: $-1(x+4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x-y+6=0$.

Câu 5: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(I) Điểm $A(1;1)$ nằm ngoài (C).

(II) Điểm $O(0;0)$ nằm trong (C).

(III) (C) cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III). **D.** Cả (I), (II) và (III).

Lời giải

Chọn **D.**

Đặt $f(x;y)=x^2+y^2-4x+6y-3$

$f(1;1)=1+1-4+6-3=1>0 \Rightarrow A$ ở ngoài (C).

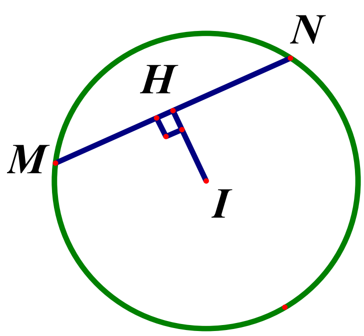
$f(0;0)=-3<0 \Rightarrow O(0;0)$ ở trong (C).

$x=0 \Rightarrow y^2+6y-3=0$. Phương trình này có hai nghiệm, suy ra (C) cắt $y'Oy$ tại 2 điểm.

Câu 6: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+6y+6=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+5=0$. Đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dại bằng $2\sqrt{3}$ có phương trình là

A. $4x-3y+8=0$. **B.** $4x-3y-8=0$ hoặc $4x-3y-18$.
C. $4x-3y-8=0$. **D.** $4x+3y+8=0$.

Lời giải



(C) có tâm $I(1;-3)$, $R=2$

$d' // d \Rightarrow d'$ có phương trình $4x-3y+m=0\ (m\neq 5)$.

Vẽ $IH\perp MN \Rightarrow HM=\sqrt{3} \Rightarrow IH^2=R^2-HM^2=4-3=1$.

$$d(I,d')=IH \Leftrightarrow \frac{|4.1-3.(-3)+m|}{\sqrt{16+9}}=1 \Leftrightarrow |m+13|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-18. \end{array}\right.$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} d': 4x-3y-8=0 \\ d': 4x-3y-18=0 \end{array}\right.$.

Câu 7: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-2y+5=0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Phương trình của đường thẳng d là

A. $x-y+6=0$. **B.** $7x-3y+34=0$. **C.** $7x-3y+30=0$. **D.** $7x-y+35=0$.

Lời giải

Chọn **A.**

(C) có tâm $I(-3;1), R=\sqrt{5}$. Do đó, $IA=\sqrt{2}<R \Rightarrow A$ ở trong (C).

A là trung điểm của $MN \Rightarrow IA\perp MN \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của d, nên d có phương trình: $-1(x+4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow x-y+6=0$.

Câu 8: Đường tròn $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ cắt đường thẳng $x+y-2=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn **A.**

Giải hệ PT $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-23=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x-23=0 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2} \end{cases} hay \begin{cases} x=\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Độ dài dây cung $AB=10$.

Câu 9: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y+4=0$

A. $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ và $((\sqrt{2};-\sqrt{2})$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$.

C. $(2;0)$ và $(0;2)$. **D.** $(2;0)$ và $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn **C.**

Giải hệ PT $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ 4-4x-4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2+(2-x)^2-4=0 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2-x)^2-4=0 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} hay \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$

Vậy giao điểm $A(0;2)$, $B(2;0)$.

Câu 10: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): (x+10)^2+(y-16)^2=1$.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Lời giải

Chọn **B.**

(C_1) có tâm và bán kính: $I_1\equiv(0;0)$, $R_1=2$; (C_2) có tâm và bán kính: $I_2(-10;16)$, $R_2=1$;

khoảng cách giữa hai tâm $I_1I_2=\sqrt{10^2+16^2}=2\sqrt{89}>R_1+R_2$.

Vậy (C_1) và (C_2) không có điểm chung.

Câu 11: Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2-9=0$.

A. $m=-3$. **B.** $m=3$ và $m=-3$.

C. $m=3$. **D.** $m=15$ và $m=-15$.

Lời giải

Chọn **D.**

Đường tròn (C) có tâm và bán kính là $I\equiv(0;0)$, $R=3$.

Δ tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{5}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=15 \\ m=-15 \end{array}\right.$

Câu 12: Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 15.

Lời giải

Chọn **C.**

$$ycbt \Leftrightarrow R = d(I;\Delta) = \frac{|3.1+3.4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3.$$

Câu 13: Đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ cắt đường thẳng $x+y-a-b=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **D.** R.

Lời giải

Chọn **A.**

Vì đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R và tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $x+y-a-b=0$.

Nên độ dài của dây cung bằng độ dài đường kính bằng $2R$.

Câu 14: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+8y=0$.

A. Tiếp xúc trong. **B.** Không cắt nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Tiếp xúc ngoài.

Lời giải

Chọn **C.**

Đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ có tâm $I_1(2;0)$, bán kính $R_1=2$.

Đường tròn $(C_2): x^2+y^2+8y=0$ có tâm $I_2(0;-4)$, bán kính $R_2=4$.

Ta có $R_2-R_1<I_1I_2=2\sqrt{5}<R_2+R_1$ nên hai đường tròn cắt nhau.

Câu 15: Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ tại điểm H có tọa độ là

A. $\left(-\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn **B.**

$IH \perp d \Rightarrow IH: 4x+3y+c=0$. Đường thẳng IH qua $I(-1;3)$ nên $4(-1)+3.3+c=0 \Leftrightarrow c=-5$. Vậy $IH: 4x+3y-5=0$.

Giải hệ: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 3x-4y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Câu 16: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $\left(C_1\right): x^2+y^2=4$ và $\left(C_2\right): (x-3)^2+(y-4)^2=25$.

A. Không cắt nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: tâm $I_1\left(0;0\right)$, $I_2\left(3;4\right)$, bán kính $R_1=2,\ R_2=5$ nên $R_2-R_1=3<I_1I_2=5<R_2+R_1=7$ nên 2 đường tròn trên cắt nhau.

DẠNG 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R

1. Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

2. Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1)$; $B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ **B.**

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R; IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1)+0(y+1)=0$ hay $x=1$

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3,\ b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$

Câu 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng

$-3x+2y+c=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|-10+c|}{\sqrt{13}}=3 \Leftrightarrow c=10\pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x+2y+10\pm 3\sqrt{13}=0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|2a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \Leftrightarrow (2a-2b+c)^2=9(a^2+b^2)(*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0 suy ra

$$\cos(\Delta;Ox)=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos 45^0=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a=b \text{ hoặc } a=-b$$

TH1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2 \Leftrightarrow \pm c=3\sqrt{2}a$, chọn $a=b=1 \Rightarrow c=\pm 3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x+y\pm 3\sqrt{2}=0$

TH2: Nếu $a=-b$ thay vào (*) ta có $18a^2=(4a+c)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a \\ c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a \end{array}\right.$

Với $c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a$, chọn $a=1,\ b=-1,\ c=\left(3\sqrt{2}-4\right) \Rightarrow \Delta: x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a$, chọn $a=1,\ b=-1,\ c=-\left(3\sqrt{2}+4\right) \Rightarrow \Delta: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x+y\pm 3\sqrt{2}=0,\ \Delta_3: x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và $\Delta_4: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Câu 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và $(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=3 \\ d(I_2,\Delta)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2}\ (*) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

Suy ra $|2b+c|=|3a-4b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ c=\dfrac{-3a+2b}{2} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $a=2b$ chọn $a=2,\ b=1$ thay vào (*) ta được $c=-2\pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

TH2: Nếu $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$ thay vào (*) ta được $|2b-a|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a=0$ hoặc $3a+4b=0$

+ Với $a=0 \Rightarrow c=b$, chọn $b=c=1$ ta được $\Delta: y+1=0$

+ Với $3a+4b=0 \Rightarrow c=3b$, chọn $a=4,\ b=-3,\ c=-9$ ta được $\Delta: 4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0, y+1=0,\ 4x-3y-9=0$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=10$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(4;4)$ là

A. $x-3y+5=0$. **B.** $x+3y-4=0$. **C.** $x-3y+16=0$. **D.** $x+3y-16=0$.

Lời giải

Chọn D.

(C) có tâm $I(3;1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(1;3)$ là vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến D.

Suy ra $D: 1(x-4)+3(y-4)=0 \Leftrightarrow x+3y-16=0$.

Câu 2: Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=9$. Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-5;1)$ là

A. $x+y-4=0$ và $x-y-2=0$. **B.** $x=5$ và $y=-1$.

C. $2x-y-3=0$ và $3x+2y-2=0$. **D.** $3x-2y-2=0$ và $2x+3y+5=0$.

Lời giải

Chọn B.

(C) có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=3$.

$\vec{n}=(A;B)$ là vectơ pháp tuyến nên $D: A(x-5)+B(y+1)=0$.

D là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi :

$$d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|A(2-5)+B(2+1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3\Leftrightarrow A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\text{ chon }B=0\Rightarrow y=-1\\B=0\text{ chon }A=0\Rightarrow x=5\end{array}\right..$$

Câu 3: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $D:x+2y-15=0$ là

A. $x+2y=0$ và $x+2y-10=0$. **B.** $x-2y=0$ và $x+2y+10=0$.
C. $x+2y-1=0$ và $x+2y-3=0$. **D.** $x-2y-1=0$ và $x-2y-3=0$.

Lời giải

Chọn A.

(C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+9-5}=\sqrt{5}, d:x+2y-m=0$.

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|-1+6-m|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|m-5|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-5=-5\\m-5=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\Rightarrow d:x+2y=0\\m=10\Rightarrow d:x+2y-10=0\end{array}\right..$$

Câu 4: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-6x+2y+5=0$ và đường thẳng $d:2x+(m-2)y-m-7=0$. Với giá trị nào của m thì d là tiếp tuyến của (C)?

A. $m=3$. **B.** $m=15$. **C.** $m=13$. **D.** $m=3$ hoặc $m=13$.

Lời giải

Chọn D.

(C) có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

d là tiếp tuyến của (C) khi va chỉ khi:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|6-m+2-m-7|}{\sqrt{4+(m-2)^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow m^2-16m+39=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=13\end{array}\right..$$

Câu 5: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+8y-23=9$ và điểm $M(8;-3)$. Độ dài đoạn tiếp tuyến của (C) xuất phát từ M là:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D.

Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+8y-23=9$ có tâm $I(1;-4)$ bán kính $R=\sqrt{40}$.

Độ dài tiếp tuyến là $\sqrt{IM^2-R^2}=\sqrt{10}$.

Câu 6: Nếu đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=R^2$ tiếp xúc với đường thẳng $d:5x+12y-60=0$ thì giá trị của R là:

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=\frac{19}{13}$. **C.** $R=\sqrt{5}$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn **B.**

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=R^2$ có tâm $I(1;3)$ bán kính R.

Đường thẳng $d: 5x+12y-60=0$ tiếp xúc với đường tròn (C) khi

$$d=d(I,d)=\frac{|5.1+12.3-60|}{\sqrt{5^3+12^3}}=\frac{19}{13}$$

Câu 7: Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: 2x+y+7=0$ là

A. $2x+y=0;\ 2x+y-10=0$. **B.** $2x+y+1=0;\ 2x+y-1=0$.
C. $2x-y+10=0;\ 2x+y-10=0$. **D.** $2x+y=0;\ x+2y-10=0$.

Lời giải

Chọn **A.**

Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta: 2x+y+m=0$ với $m\neq 7$.

Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$ có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) khi $d(I;\Delta)=R\Rightarrow\frac{|2.3-1+m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-10\end{array}\right.$

Vậy $\Delta_1: 2x+y=0;\ \Delta_2: 2x+y-10=0$

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP. TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

A. $1<m<2$.
B. $m<-2$ hoặc $m>-1$.
C. $m<-2$ hoặc $m>1$.
D. $m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$.
B. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.
C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$.
D. $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

Câu 3: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$.
B. $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.
C. $x^2+y^2-2x-8y+18=0$.
D. $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

Câu 4: Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$.
B. $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.
C. $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$.
D. $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

Câu 5: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$. Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

A. $m=2$.
B. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.
C. $1<m<2$.
D. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

DẠNG 2. TÌM TỌA ĐỘ TÂM, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

A. $I(-2;-3)$.
B. $I(2;3)$.
C. $I(4;6)$.
D. $I(-4;-6)$.

Câu 7: Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 49.
B. 7.
C. 1.
D. $\sqrt{29}$.

Câu 8: Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

A. Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$.
B. Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.
C. Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.
D. Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

Câu 9: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

A. $I(-1;2); R=4$. **B.** $I(1;-2); R=2$. **C.** $I(-1;2); R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2); R=4$.

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

A. $I(2;3)$, $R=9$. **B.** $I(2;-3)$, $R=3$. **C.** $I(-3;2)$, $R=3$. **D.** $I(-2;3)$, $R=3$.

Câu 11: Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

A. $I(-2;5)$, $R=81$.. **B.** $I(2;-5)$, $R=9$.. **C.** $I(2;-5)$, $R=3$.. **D.** $I(-2;5)$, $R=3$.

Câu 12: Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm I, bán kính R là

A. $I(-1;2), R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2), R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2), R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2), R=2\sqrt{2}$.

DẠNG 3. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 3.1 Khi biết tâm và bán kính

Câu 13: Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

A. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

C. $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

Câu 14: Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

C. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$. **D.** $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Câu 15: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Dạng 3.2 Khi biết các điểm đi qua

Câu 16: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$. **C.** $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

A. $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 18: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

A. $x^2+y^2+25x+19y-49=0$. **B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

C. $x^2+y^2-6x+y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

Câu 20: Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0), B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: x+y=0$.

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$. **D.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC biết $H(3;2)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=20$. **B.** $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+3)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của AH, AB, AC. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN là $(C): x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

A. $(x-1)^2+(y-5)^2=100$. **B.** $(x+1)^2+(y-5)^2=100$.

C. $(x-1)^2+(y+5)^2=100$. **D.** $(x+1)^2+(y+5)^2=100$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm O. Gọi M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $(T): (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. **B.** $x^2+(y-1)^2=25$.

C. $x^2+(y-1)^2=50$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Dạng 3.3 Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ là

A. $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S), biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

C. $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Câu 26: Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 27: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

Câu 28: Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C).

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$. **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Câu 29: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

C. $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 30: Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

DẠNG 4. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 4.1. Phương trình tiếp tuyến

Câu 31: Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $3x-4y+5=0$ **B.** $x+y=0$ **C.** $3x+4y-1=0$ **D.** $x+y-1=0$

Câu 32: Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

A. $x^2+y^2-10x=0$. **B.** $x^2+y^2-5=0$.

C. $x^2+y^2-10x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

A. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

B. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

C. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

D. $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Câu 34: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A.

A. $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

Câu 35: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C)?

A. $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

C. $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0; 4x-3y+2=0$.

Câu 37: Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 38: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$.

A. $4x+3y+29=0$. **B.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.

C. $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$ **D.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn (C)

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$. **B.** $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.

C. $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$. **D.** $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

Câu 41: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C): (x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M, N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là

A. $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Dạng 4.2 Bài toán tương giao

Câu 43: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$.

B. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$.

C. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ không có điểm chung.

D. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc với nhau.

Câu 44: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

A. $(2;2)$ **và** $(-2;-2)$. **B.** $(0;2)$ **và** $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$ **và** $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$ **và** $(0;2)$.

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Câu 46: Cho đường thẳng $\Delta: 3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó độ dài đọan thẳng AB là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=5$. Biết rằng đường thẳng $(d): 3x-4y+8=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=8$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=3$.. **D.** $AB=6$.

Câu 48: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $d: 3x+4y+7=0$. Gọi A,B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C). Tính độ dài dây cung AB.

A. $AB=\sqrt{3}$. **B.** $AB=2\sqrt{5}$. **C.** $AB=2\sqrt{3}$. **D.** $AB=4$.

Câu 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

A. $d: x+2y-5=0$. **B.** $d: x-2y-5=0$. **C.** $d: x+2y+5=0$. **D.** $d: x-2y+5=0$.

Câu 50: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

A. $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$. **B.** $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$.

C. $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$. **D.** $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$.

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d):2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1, M_2 thuộc (d) sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 52: Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. I là tâm (C), đường thẳng d đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại A,B. Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là: $x+by+c=0$. Tính $b+c$

A. 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

Câu 53: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2+y^2=50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a<0$. Tổng $a+b$ bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 54: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;\,2)$, điểm D là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp $\Delta\,ABC$ tại điểm thứ hai là M. Biết điểm $J(-2;\,2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\,ACD$ và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A,\,B,\,C$ của tam giác ABC.

A. $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(\Delta):x+3y+8=0$; $(\Delta'):3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng (Δ),đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ'). Tính $a+b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 56: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi (C) là đường tròn có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn (C) là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

DẠNG 5. CÂU HỎI MIN-MAX

Câu 57: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

Câu 59: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

Câu 60: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của OM ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 61: Gọi I là tâm của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 62: Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x-y+3=0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\sqrt{2}a=-b$. **B.** $a=-b$. **C.** $\sqrt{2}a=b$. **D.** $a=b$.

Câu 63: Cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ lớn hơn 2.

A. $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

Câu 64: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-25=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là:

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Câu 65: Cho các số thực a,b,c,d thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2+(b-2)^2=1$ và $4c-3d-23=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2$ là:

A. $P_{\min}=28$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=16$.

Câu 66: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và các đường thẳng $d_1: mx+y-m-1=0$, $d_2: x-my+m-1=0$. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi đường thẳng d_1,d_2 cắt (C) tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số m là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

III HỆ THỐNG BÀI TẬP. TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

A. $1<m<2$. **B.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.
C. $m<-2$ hoặc $m>1$. **D.** $m<1$ hoặc $m>2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0 \quad (1)$

$\Rightarrow a=m+2; b=-2m; c=19m-6.$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.
C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Để là phương trình đường tròn thì điều kiện cần là hệ số của x^2 và y^2 phải bằng nhau nên loại được đáp án A và **D.**

Ta có: $x^2+y^2-2x-8y+20=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2+3=0$ vô lý.

Ta có: $x^2+y^2-4x+6y-12=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$ là phương trình đường tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=5$.

Câu 3: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải

Chọn D

Biết rằng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$.

Ta thấy phương trình trong phương án A và B có hệ số của x^2, y^2 không bằng nhau nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Với phương án C có $a^2+b^2-c=1+16-18<0$ nên đây không phải là phương trình đường tròn. Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 4: Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.

C. $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: có tích xy nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án B: có hệ số bậc hai không bằng nhau nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án C: ta có $x^2+y^2-14x+2y+2018=0 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+1)^2+1968=0$ không tồn tại x,y nên cũng không phải phương trình đường tròn.

Còn lại, **Chọn D**

Câu 5: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$. Điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

$x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\,(1)$ là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$(m)^2+\left[2(m-2)\right]^2-(6-m)>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

DẠNG 2. TÌM TỌA ĐỘ TÂM, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ có tâm là.

A. $I(-2;-3)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(4;6)$. **D.** $I(-4;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường tròn là: $(x+2)^2+(y+3)^2=25$.

Vậy tâm đường tròn là: $I(-2;-3)$.

Câu 7: Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** 7. **C.** 1. **D.** $\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có tâm $I(0;5)$, bán kính $R=\sqrt{0^2+5^2-(-24)}=7$.

Câu 8: Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

A. Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$. **B.** Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=9$.

C. Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=9$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

A. $I(-1;2);R=4$. **B.** $I(1;-2);R=2$. **C.** $I(-1;2);R=\sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2);R=4$.

Lời giải

Chọn B

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$.

Câu 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Đường tròn có tâm và bán kính là

A. $I(2;3)$, $R=9$. **B.** $I(2;-3)$, $R=3$. **C.** $I(-3;2)$, $R=3$. **D.** $I(-2;3)$, $R=3$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=3$.

Câu 11: Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-5)^2=9$.

A. $I(-2;5)$, $R=81$.. **B.** $I(2;-5)$, $R=9$.. **C.** $I(2;-5)$, $R=3$.. **D.** $I(-2;5)$, $R=3$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có tọa độ tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=3$.

Câu 12: Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-3=0$ có tâm I, bán kính R là

A. $I(-1;2),R=\sqrt{2}$. **B.** $I(-1;2),R=2\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-2),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;-2),R=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-(-3)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

DẠNG 3. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 3.1 Khi biết tâm và bán kính

Câu 13: Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là

A. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+4y+20=0$.

C. $x^2+y^2+2x+4y-20=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-4y+20=0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$ là $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-20=0$.

Câu 14: Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+2x+4y-4=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-4y-4=0$.

C. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$. **D.** $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là $(x+1)^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Câu 15: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính bằng 3?

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường tròn tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Dạng 3.2 Khi biết các điểm đi qua

Câu 16: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x+4)^2+y^2=10$. **B.** $(x-4)^2+y^2=10$. **C.** $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}$. **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;0)\in Ox$; $IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2+1^2=(5-x)^2+3^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+1=x^2-10x+25+9$

$\Leftrightarrow x=4$. Vậy tâm đường tròn là $I(4;0)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{(1-4)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn (C) có dạng $(x-4)^2+y^2=10$.

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

A. $I(1;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;2)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A,B,C có dạng $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Thay tọa độ 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$ ta được:

$$\begin{cases}8b+c=-16\\4a+8b+c=-20\\4a+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=0\end{cases}\Rightarrow (C): x^2+y^2-2x-4y=0.$$

Vậy (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;2), C(5;-5)$. Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **B.** $\left(\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$. **C.** $\left(-\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$. **D.** $\left(-\frac{47}{10};\frac{13}{10}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-2)^2\\(x-1)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+(y+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6y=11\\8x-8y=48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{47}{10}\\y=-\frac{13}{10}\end{cases}$.

$\Rightarrow I\left(\frac{47}{10};-\frac{13}{10}\right)$.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình là.

A. $x^2+y^2+25x+19y-49=0$. **B.** $2x^2+y^2-6x+y-3=0$.

C. $x^2+y^2-6x+y-1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+xy-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Đường tròn này qua A,B,C nên

$$\begin{cases}1+4-2a-4b+c=0\\25+4-10a-4b+c=0\\1+9-2a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=-1\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

Câu 20: Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0),B(0;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d:x+y=0$.

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

B. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

D. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$A(3;0)$, $B(0;2)$, $d:x+y=0$.

Gọi I là tâm đường tròn vậy $I(x;-x)$ vì $I\in d$.

$IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (3-x)^2+x^2=x^2+(2+x)^2 \Leftrightarrow -6x+9=4x+4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Vậy $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$IA=\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ là bán kính đường tròn.

Phương trình đường tròn cần lập là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC biết $H(3;2)$, $G\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=20$.

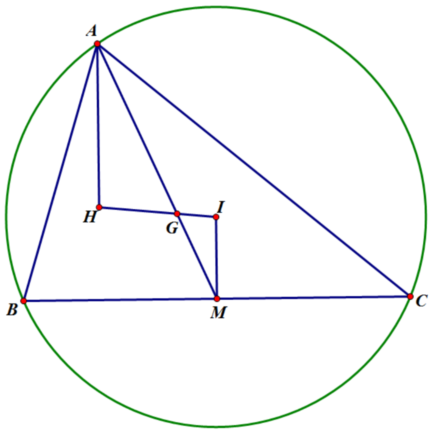
B. $(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+3)^2=1$.

D. $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Lời giải

Chọn D



*) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{HG}\Rightarrow\begin{cases}x_I-3=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-3\right)\\ y_I-2=\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_I=1\\ y_I=3\end{cases}.$$

.

*) Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow IM\perp BC$ $\Rightarrow IM:2x-y+1=0$.

$$M=IM\cap BC\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-1\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\Rightarrow M(0;1).$$

Lại có: $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow\begin{cases}x_A=3.\frac{5}{3}\\ y_A-1=3.\left(\frac{8}{3}-1\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=5\\ y_A=6\end{cases}$.

Suy ra: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=IA=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

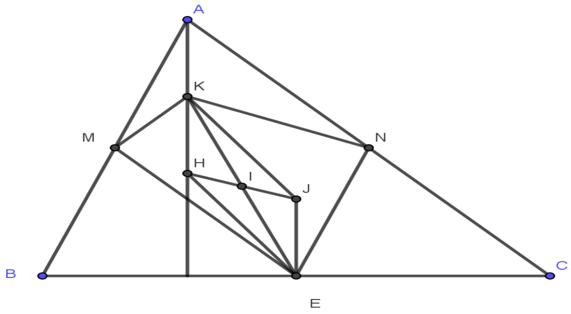
Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi K,M,N lần lượt là trung điểm của AH,AB,AC. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN là $(C):x^2+y^2+4x-4y-17=0$.

A. $(x-1)^2+(y-5)^2=100$. **B.** $(x+1)^2+(y-5)^2=100$.

C. $(x-1)^2+(y+5)^2=100$. **D.** $(x+1)^2+(y+5)^2=100$.

Lời giải

Chọn A



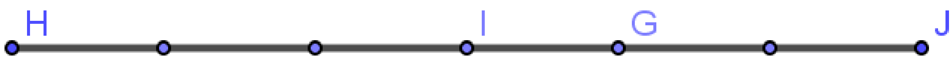
Gọi E là trung điểm BC, J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $\begin{cases} MK \parallel BH \\ ME \parallel AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow MK \perp ME \ (1)$, $\begin{cases} KN \parallel CH \\ NE \parallel AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow KN \perp NE (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow KMEN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính KE.

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ có tâm $I(-2;2)$ bán kính $r = 5 \Rightarrow I$ là trung điểm KE.

$KHEJ$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm JH



Ta có: $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \begin{cases} x_J + 2 = 3(-1+2) \\ y_J - 2 = 3(3-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_J = 1 \\ y_J = 5 \end{cases} \Rightarrow J(1;5)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = JA = 2IK = 2r = 10$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 100$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm O. Gọi M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $(T): (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

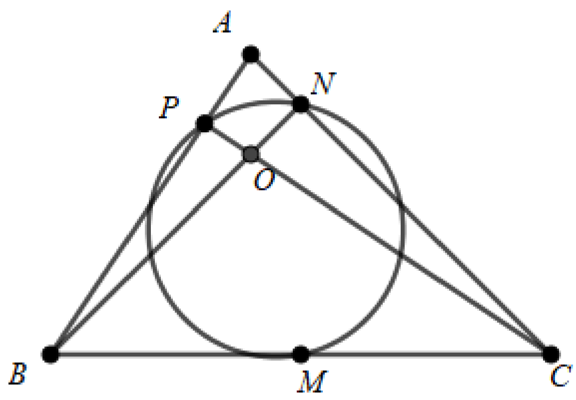
A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

B. $x^2 + (y-1)^2 = 25$.

C. $x^2 + (y-1)^2 = 50$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P là đường tròn Euler. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là ảnh của đường tròn Euler qua phép vị tự tâm là O, tỷ số $k=2$.

Gọi I và I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Gọi R và R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Ta có $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ và do đó $\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI}\Rightarrow I'(2;-1)$.

Mặt khác $R=\frac{5}{2}\Rightarrow R'=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Nhận xét: Đề bài này rất khó đối với học sinh nếu không biết đến đường tròn Euler.

Dạng 3.3 Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+y-2=0$ là

A. $x^2+y^2=2$. **B.** $x^2+y^2=\sqrt{2}$.
C. $(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm O, bán kính R tiếp xúc với Δ nên có:

$R=d(O;\Delta)=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2=2$.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho đường tròn (S) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x$, bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ. Lập phương trình của (S), biết hoành độ tâm I là số dương.

A. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

C. $(x-3)^2-(y-3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Lời giải

Chọn B

Do tâm I nằm trên đường thẳng $y=-x \Rightarrow I(a;-a)$, điều kiện $a>0$.

Đường tròn (S) có bán kính $R=3$ và tiếp xúc với các trục tọa độ nên:

$$d(I;Ox)=d(I;Oy)=3 \Leftrightarrow |a|=3 \Leftrightarrow a=3(n) \vee a=-3(l) \Rightarrow I(3;-3).$$

Vậy phương trình $(S):(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

Câu 26: Một đường tròn có tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm $I(3;4)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$ nên bán kính đường tròn chính là khoảng cách từ tâm $I(3;4)$ tới đường thẳng $\Delta:3x+4y-10=0$.

Ta có: $R=d(I,\Delta)=\frac{|3.3+4.4-10|}{\sqrt{3^3+4^2}}=\frac{15}{5}=3$.

Câu 27: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d):3x+4y-2=0$. Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có phương trình

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng (d) có bán kính

$$R=d(I,d)=\frac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

Vậy đường tròn có phương trình là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 28: Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x+4y-9=0$. Viết phương trình của đường tròn (C).

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$. **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2=2$.

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ **D.** $(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Vì đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng Δ có phương trình là $3x+4y-9=0$ nên bán kính của đường tròn là $R=d(I,\Delta)=\dfrac{|3.(-3)+4.2-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

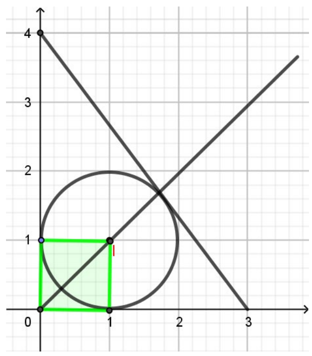
Câu 29: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

C. $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Lời giải

Chọn D



Vì các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nên tam giác OAB cũng nằm trong góc phần tư thứ nhất. Do vậy gọi tâm đường tròn nội tiếp là $I(a,b)$ thì $a>0,b>0$.

Theo đề ra ta có: $d(I;Ox)=d(I;Oy)=d(I;AB)$.

Phương trình theo đoạn chắn của AB là: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$ hay $4x+3y-12=0$.

Do vậy ta có: $\begin{cases}|a|=|b|\\ |4a+3b-12|=5|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a|=|b|\\ \left[\begin{array}{l}7a-12=5a\\ 7a-12=-5a\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b>0\\ \left[\begin{array}{l}a=6\ (l)\\ a=1\end{array}\right.\end{cases}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 30: Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2-6x-8y+25=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $OA = 3,\ OB = 4,\ AB = 5.$

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Từ hệ thức $AB.\overrightarrow{IO} + OB.\overrightarrow{IA} + OA.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ta được

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{AB.x_O + OB.x_A + OA.x_B}{AB + OB + OA} = \dfrac{4.3}{5+4+3} = 1 \\ y_I = \dfrac{AB.y_O + OB.y_A + OA.y_B}{AB + OB + OA} = \dfrac{3.4}{5+4+3} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1;1)$$

Mặt khác tam giác OAB vuông tại O với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác thì

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}OA.OB}{\frac{OA+OB+AB}{2}} = \dfrac{3.4}{3+4+5} = 1$ (S, p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác).

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

hay $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$

DẠNG 4. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 4.1. Phương trình tiếp tuyến

Câu 31: Đường tròn $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $3x - 4y + 5 = 0$ **B.** $x + y = 0$ **C.** $3x + 4y - 1 = 0$ **D.** $x + y - 1 = 0$

Lời giải

Chọn A

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ có tâm $O(0;0), R = 1.$

Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn là khoảng cách từ tâm tới đường thẳng bằng bán kính.

Xét đáp án A:

$\Delta: 3x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow d(O,\Delta) = \dfrac{|3.0 - 4.0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 = R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với đường tròn.

Câu 32: Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox:

A. $x^2 + y^2 - 10x = 0$. **B.** $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + 6x + 5y + 9 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) tiếp xúc với trục Ox khi $d(I, \mathrm{Ox}) = R$ với I và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C).

□Đường tròn: $x^2+y^2-10x=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=25$ có tâm $I(5;0)$, bán kính $R=5$, $d(\text{I,Ox})=0$. Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

$\Rightarrow$không phải là phương trình đường tròn.

□.Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-5=0$ có $I(0;0)$ và $R=\sqrt{5}$, $d(\text{I,Ox})=0$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

□Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2-10x-2y+1=0$ có $I(5;1)$ và $R=5$, $d(\text{I,Ox})=1$.

Suy ra: $d(I,\text{Ox})\neq R$. Vậy (C) không tiếp xúc với trục Ox.

□Xét phương trình đường tròn: $x^2+y^2+6x+5y+9=0$ có $I\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $R=\frac{5}{2}$, $d(\text{I,Ox})=\frac{5}{2}$

. Suy ra: $d(I,\text{Ox})=R$. Vậy (C)tiếp xúc với trục Ox

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$.

A. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$; $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$.

B. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

C. $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y+5\sqrt{2}+11=0$.

D. $3x+4y-5\sqrt{2}+11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Lời giải

Chọn B

$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2.$

Do đó đường tròn có tâm $I=(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Do d song song với đường thẳng Δ nên d có phương trình là $3x+4y+k=0$, $(k\neq 1)$.

Ta có $d(I;d)=R \Leftrightarrow \frac{|11+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |11+k|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11+k=5\sqrt{2} \\ 11+k=-5\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=5\sqrt{2}-11 \\ k=-5\sqrt{2}-11 \end{array}\right.$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x+4y+5\sqrt{2}-11=0$, $3x+4y-5\sqrt{2}-11=0$.

Câu 34: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-4=0$ và điểm $A(1;5)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A.

A. $y-5=0$. **B.** $y+5=0$. **C.** $x+y-5=0$. **D.** $x-y-5=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(0;3)$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm A, khi đó d đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}$ là một VTPT.

Chọn một VTPT của d là $\overrightarrow{n_d}=(0;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y-5=0$.

Câu 35: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4=0$ và điểm $A(-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây đi qua A và là tiếp tuyến của đường tròn (C)?

A. $4x-3y+10=0$. **B.** $6x+y+4=0$. **C.** $3x+4y+10=0$. **D.** $3x-4y+11=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và có bán kính $R=2$.

Họ đường thẳng Δ qua $A(-1;2): a(x+1)+b(y-2)=0$, với $a^2+b^2\neq 0$.

Điều kiện tiếp xúc $d(O;\Delta)=R$ hay $\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (a-2b)^2=4(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 3a^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ 3a=-4b \end{array}\right.$.

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta có $\Delta_1: y-2=0$.

Với $3a=-4b$, chọn $a=4$ và $b=-3$ ta có $\Delta_2: 4(x+1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+10=0$.

Nhận xét: Thực ra bài này khi thay tọa độ điểm $A(-1;2)$ vào các đường thẳng ở các phương án thì ta loại C. và D. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng thì chỉ có phương án A. thỏa.

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$. **B.** $4x-3y+18=0$.

C. $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$. **D.** $4x-3y-18=0; 4x-3y+2=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C).

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d: 4x-3y+m=0\ (m\neq 2)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;(d))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$$\Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$.

Câu 37: Số tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ và $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=2$.

Đường tròn $(C'): x^2+y^2+6x-8y+20=0$ có tâm $I'(-3;4)$ bán kính $R'=\sqrt{5}$.

$II'=2\sqrt{13}$.

Vậy $II'>R+R'$ nên 2 đường tròn không có điểm chung suy ra 2 đường tròn có 4 tiếp tuyến chung.

Câu 38: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$.

A. $4x+3y+29=0$.
B. $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0$.
C. $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0$
D. $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$ có tâm $I(2;-4)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ có phương trình dạng: $4x+3y+c=0$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi: $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.2+3.(-4)+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$

$\Leftrightarrow |c-4|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-4=25 \\ c-4=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=29 \\ c=-21 \end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $4x+3y+29=0$ và $4x+3y-21=0$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. Từ điểm $A(1;1)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đường tròn (C)

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

(C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính R$=\sqrt{1^2+(-1)^2-(-3)}=\sqrt{5}$

Vì $IA=2<R$ nên A nằm bên trong (C).Vì vậy không kẻ được tiếp tuyến nào tới đường tròn (C).

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+2=0$ là

A. $4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-2=0$.
B. $4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.
C. $-4x-3y+18=0$ và $4x-3y-2=0$.
D. $-4x+3y-18=0$ và $-4x-3y-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C).

Vì $d//\Delta$ nên đường thẳng $d: 4x-3y+m=0\,(m\neq 2)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I;(d))=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$$\Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

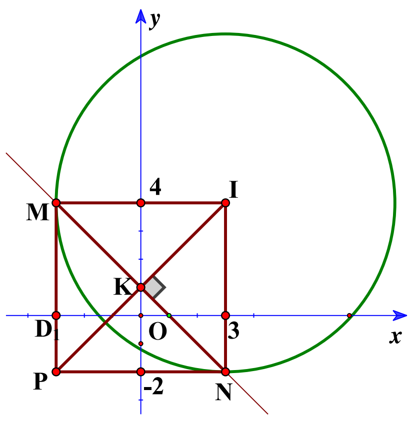
Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm : $4x-3y+18=0; 4x-3y-2=0$.

Câu 41: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M, N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là

A. $x+y+1=0$.
B. $x-y-1=0$.
C. $x-y+1=0$.
D. $x+y-1=0$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm của đường tròn, ta có tọa độ tâm $I(3;4)$.

Theo đề ra ta có tứ giác $IMPN$ là hình vuông, nên đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{IP}=(-6;-6)$ làm VTPT, đồng thời đường thẳng MN đi qua trung điểm $K(0;1)$ của IP. Vậy phương trình đường thẳng MN: $1.(x-0)+1.(y-1)=0$ hay $x+y-1=0$.

Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2.

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$+(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$ suy ra có tâm I và R = 2

+ Phương trình đường thẳng d đi qua $M(-3;1)$ có phương trình: $A(x+3)+B(y-1)=0$.

d là tiếp tuyến với đường tròn khi và chỉ khi $d(I;d)=R$.

$\Rightarrow$ ta có phương trình: $\frac{|A+3B+3A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow 3A^2+4AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ 3A=-4B \end{array}\right.$

+ Với $A=0$, chọn $B=1$, phương trình tiếp tuyến thứ nhất là $(d_1): y=1$.

Thế $y=1$ vào $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$, ta được tiếp điểm là $T_1(1;1)$.

+ Với $3A=-4B$, chọn $A=-4; B=3$, phương trình tiếp tuyến thứ hai là $(d_2): -4x+3y-15=0$

Tiếp điểm $T_2\left(x;\frac{4x}{3}+5\right)\in(C)$ nên $(x-1)^2+\left(\frac{4x}{3}+5-3\right)^2=4 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5} \Rightarrow T_2\left(-\frac{3}{5};\frac{21}{5}\right)$.

+ Phương trình đường thẳng $T_1T_2: 2(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

+ Khoảng cách từ O đến đường thẳng T_1T_2 là: $d(0;T_1T_2)=\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Dạng 4.2 Bài toán tương giao

Câu 43: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$.

B. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$.

C. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ không có điểm chung.

D. Hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc với nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy đường tròn (C_1) có tâm $I(-1;-2)$ và bán kính $R_1=3$. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$.

Khi đó: $5=R_1+R_2=I_1I_2=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5\Rightarrow(C_1)$ và (C_2) tiếp xúc nhau.

Câu 44: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

A. $(2;2)$ **và** $(-2;-2)$. **B.** $(0;2)$ **và** $(0;-2)$. **C.** $(2;0)$ **và** $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$ **và** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm 2 đường tròn là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 4x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y)^2+y^2=4 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-4y=0 \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

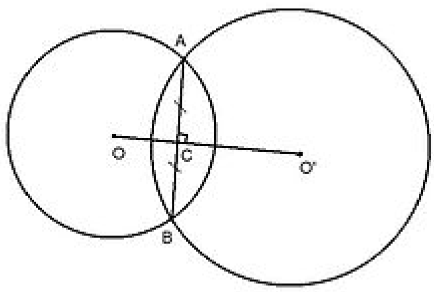
Vậy giao điểm 2 đường tròn là: $(2;0)$ và $(0;2)$.

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Lập phương trình đường thẳng AB

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2.=0$ **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0\\x^2+y^2-8x-6y+9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\x^2+(2-x)^2-2x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\2x^2-6x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $A\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2};\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$.

(C) có tâm $O(1;0)$, (C') có tâm $O'(4;3)$ $\Rightarrow \overrightarrow{OO'}=(3;3)$

Nên đường thẳng AB qua A và nhận $\vec{n}(1;1)$ là vécto pháp tuyến.

Phương trình: $1\left(x-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$. Chọn A.

Cách 2: Giả sử hai đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ và $(C'):(x-4)^2+(y-3)^2=16$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi đó tọa độ của A và thỏa mãn hệ phương trình:

$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\(x-4)^2+(y-3)^2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0 & (1)\\x^2+y^2-8x-6y+9=0 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $6x+6y-12=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A và B

Câu 46: Cho đường thẳng $\Delta: 3x-4y-19=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó độ dài đọan thẳng AB là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Từ $\Delta: 3x-4y-19=0 \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{19}{4}(1)$.

Thế (1) vào (C) ta được

$(x-1)^2+\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{23}{4}\right)^2=25$

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{85}{8}x+\dfrac{145}{16}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{29}{5}\end{array}\right.$.

+) $x_A=1 \Rightarrow y_A=-4 \Rightarrow A(1;-4)$.

+) $x_B = \frac{29}{5} \Rightarrow y_B = -\frac{2}{5} \Rightarrow B\left(\frac{29}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

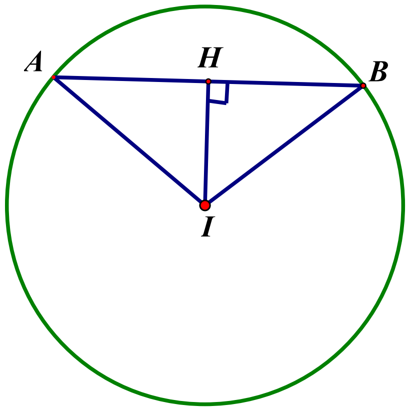
Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{\left(\frac{29}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} + 4\right)^2} = 6$.

Câu 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 5$. Biết rằng đường thẳng $(d): 3x - 4y + 8 = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 8$. **B.** $AB = 4$. **C.** $AB = 3$.. **D.** $AB = 6$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Ta có $IH \perp AB$ và

$IH = d(I; AB) = \frac{|3.1 - 4.(-1) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3$.

Xét tam giác vuông AHI ta có: $HA^2 = IA^2 - IH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow HA = 4 \Rightarrow AB = 2HA = 8$

Câu 48: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: 3x + 4y + 7 = 0$. Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C). Tính độ dài dây cung AB.

A. $AB = \sqrt{3}$. **B.** $AB = 2\sqrt{5}$. **C.** $AB = 2\sqrt{3}$. **D.** $AB = 4$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$ bán kính $R = 2$.

$d(I, d) = \frac{|3.2 + 4.(-2) + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 < R = 2$ nên d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C).

$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, d)} = 2\sqrt{3}$.

Câu 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;1)$, đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

A. $d: x+2y-5=0$. **B.** $d: x-2y-5=0$. **C.** $d: x+2y+5=0$. **D.** $d: x-2y+5=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-3}=\sqrt{2}$.

Theo giả thiết đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C sao cho $BC=2\sqrt{2}$.

Vì $BC=2\sqrt{2}=2R$ nên BC là đường kính của đường tròn (C) suy ra đường thẳng d đi qua tâm $I(1;2)$

Ta chọn: $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{IA}=(2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_d}=(1;2)$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(3;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(1;2)$ nên phương trình tổng quát của đường thẳng d là: $1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

Câu 50: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng $45°$.

A. $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$. **B.** $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x+y=0$.

C. $d': x+7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$. **D.** $d': x-7y=0$ hoặc $d': 7x-y=0$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ tâm I_1 của đường tròn (C_1) là: $I_1(-1;-2)$.

Tọa độ tâm I_2 của đường tròn (C_1) là: $I_2(2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{I_1I_2}(3;4)$. Gọi d,d' lần lượt là đường thẳng nối tâm của hai đường tròn đã cho và đường thẳng cần lập. Chọn một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là: $\overrightarrow{n_d}(4;-3)$. Gọi $\overrightarrow{n_{d'}}(a;b)$, $a^2+b^2\neq 0$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d'.

Theo đề $\cos(d,d')=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{n_{d'}}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|4a-3b|}{\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Leftrightarrow 7a^2-48ab-7b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b\neq 0 \\ a=-\dfrac{1}{7}b\neq 0 \end{array}\right..$$

Với $a=-\frac{1}{7}b\neq 0$, chọn $b=-7\Rightarrow a=1$. Phương trình đường thẳng $d':x-7y=0$.

Với $a=7b\neq 0$, chọn $b=1\Rightarrow a=7$. Phương trình đường thẳng $d':7x+y=0$.

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $(d):2x+y-5=0$. Biết rằng có hai điểm M_1,M_2 thuộc (d) sao cho $IM_1=IM_2=\sqrt{10}$. Tổng các hoành độ của M_1 và M_2 là

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} IM_1=IM_2=\sqrt{10} \\ I(1;2) \end{cases}\Rightarrow M_1,M_2\in(C):(x-1)^2+(y-2)^2=10.$$

Mặt khác, M_1, M_2 thuộc $(d):2x+y-5=0$ nên ta có tọa độ M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=10 & (1) \\ 2x+y-5=0 & (2) \end{cases}.$$

$(2)\Leftrightarrow y=-2x+5$, thay vào (1) ta có $5x^2-14x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{14}{5} \end{array}\right.$.

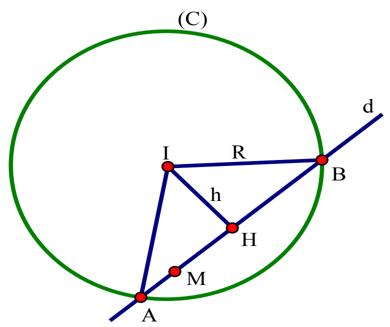
Gọi x_1,x_2 lần lượt là hoành độ của M_1 và $M_2\Rightarrow x_1+x_2=0+\frac{14}{5}=\frac{14}{5}$.

Câu 52: Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$. I là tâm (C), đường thẳng d đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại A,B. Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là: $x+by+c=0$. Tính $b+c$

A. 8. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B



(C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Đặt $h=d(I,AB)$. Ta có: $S_{IAB}=\frac{1}{2}h.AB=8\Rightarrow h.AB=16$.

Mặt khác: $R^2 = h^2 + \dfrac{AB^2}{4} = 20$

Suy ra: $\begin{cases} h = 4 \\ AB = 4 \end{cases}; \begin{cases} h = 2 \\ AB = 8 \end{cases}$

Vì d đi qua $M(1;-3)$ nên $1 - 3b + c = 0 \Rightarrow 3b - c = 1 \Rightarrow c = 3b - 1$

Với $h = 4 = \dfrac{|2-b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{|2-b+3b-1|}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{|1+2b|}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow b \in \Phi$

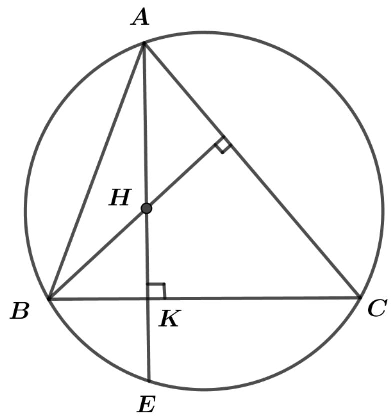
Với $h = 2 = \dfrac{|2-b+c|}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{|2-b+3b-1|}{\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{|1+2b|}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow b = \dfrac{3}{4} \Rightarrow c = \dfrac{5}{4} \Rightarrow b + c = 2.$

Câu 53: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(5;5)$, trực tâm $H(-1;13)$, đường tròn ngoài tiếp tam giác có phương trình $x^2 + y^2 = 50$. Biết tọa độ đỉnh $C(a;b)$, với $a < 0$. Tổng $a + b$ bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC, gọi E là điểm đối xứng với H qua K suy ra E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-6;8)$, chọn $\overrightarrow{u_{AH}} = (3;-4)$.

Phương trình đường thẳng AH qua A ở dạng tham số $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$

$K \in AH$ suy ra tọa độ điểm K có dạng $K(5+3t;5-4t)$

H và E đối xứng nhau qua K suy ra tọa độ E theo t là $E(11+6t;-3-8t)$

$$E \in (C) \Rightarrow (11+6t)^2 + (-3-8t)^2 = 50 \Leftrightarrow 5t^2 + 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{-4}{5} \end{array}\right.$$

□ Với $t=-1$, $E(5;5)$

□ Với $t=\dfrac{-4}{5}$, $E\left(\dfrac{31}{5};\dfrac{17}{5}\right)$, $K\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{41}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng BC có $\overrightarrow{u_{BC}}=\overrightarrow{n_{AH}}=(4;3)$ và qua điểm K có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=\dfrac{13}{5}+4t \\ y=\dfrac{41}{5}+3t \end{cases} \Rightarrow C \in BC \Rightarrow C\left(\dfrac{13}{5}+4t;\dfrac{41}{5}+3t\right).$$

$$C \in (C) \Rightarrow \left(\dfrac{13}{5}+4t\right)^2 + \left(\dfrac{41}{5}+3t\right)^2 = 50 \Leftrightarrow 25t^2+70t+24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow C(1;7) \Rightarrow (KTM) \\ t=\dfrac{-12}{5} \Rightarrow C(-7;1) \end{array}\right.$$

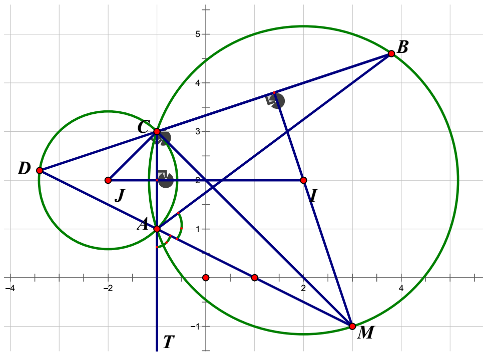
Vậy $C(a;b)=C(-7;1) \Rightarrow a+b=-6$.

Câu 54: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;\, 2)$, điểm D là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, ABC$ tại điểm thứ hai là M. Biết điểm $J(-2;\, 2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, ACD$ và phương trình đường thẳng CM là: $x+y-2=0$. Tìm tổng hoành độ của các đỉnh $A,\, B,\, C$ của tam giác ABC.

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$\widehat{BCM} = \widehat{BAM}$ (1)

$\widehat{BAM} = \widehat{MAT} = \widehat{DAC}$ (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BCM}$, mà $\widehat{BCM} = \widehat{CDA} + \widehat{AMC}$, $\widehat{DAC} = \widehat{ACM} + \widehat{AMC}$ từ đó suy ra $\widehat{CDA} = \widehat{ACM}$, do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có tâm J nên $JC \perp MC$. Hay C là hình chiếu của J lên đường thẳng CM .

Đường thẳng qua J và vuông góc với CM có phương trình:

$(x+2)-(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;\, 3)$.

AC là đường thẳng qua C và vuông góc với $\overrightarrow{IJ}(-4;\, 0)$ nên có phương trình: $x+1=0$.

Do đó tọa độ điểm A có dạng $A(-1;\, a)$. Ta có $IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow 9+(a-2)^2 = 9+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Vì $A \neq C$ nên $A(-1;\, 1)$.

Tọa độ điểm M có dạng $M(m;\, 2-m)$. Ta có

$IM^2 = IC^2 \Leftrightarrow (m-2)^2 + m^2 = 10 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Vì $M \neq C$ nên $M(3;\, -1)$.

BC là đường thẳng qua C và vuông góc với $\overrightarrow{MI}(-1;\, 3)$ nên có phương trình:

$-(x+1)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x-3y+10=0$.

Tọa độ điểm B có dạng $B(3b-10;\, b)$. Ta có

$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow (3b-12)^2 + (b-2)^2 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\dfrac{23}{5} \end{array}\right.$.

Vì $B \neq C$ nên $B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right)$.

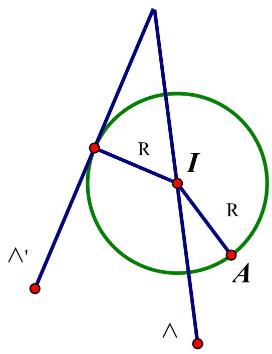
Vậy tổng hoành độ của các đỉnh $A,\ B,\ C$ là $-1-1+\frac{19}{5}=\frac{9}{5}$.

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(\Delta): x+3y+8=0$; $(\Delta'): 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng (Δ),đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ'). Tính $a+b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D



Vì $I \in (\Delta)$ nên $a+3b+8=0 \Leftrightarrow a=-8-3b$.

Vì đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng (Δ') nên:

$$d(I;\Delta')=IA \Leftrightarrow \frac{|3a-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2-a)^2+(1-b)^2} \quad (1).$$

Thay $a=-8-3b$ vào (1) ta có:

$$\frac{|3(-8-3b)-4b+10|}{5}=\sqrt{(-2+8+3b)^2+(1-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow |-14-13b|=5\sqrt{10b^2+34b+37}$$

$$\Leftrightarrow (-14-13b)^2=25(10b^2+34b+37)$$

$$\Leftrightarrow 81b^2+486b+729=0 \Leftrightarrow b=-3.$$

Với $b=-3 \Leftrightarrow a=1$.

$a+b=-2$.

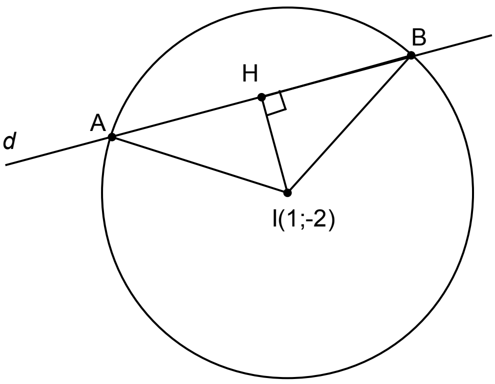
Câu 56: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Gọi (C) là đường tròn có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 4. Phương trình đường tròn (C) là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$IH = d\left(I;d\right) = 2$.

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IH.AB \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta IAB}}{IH} = \frac{2.4}{2} = 4 \Rightarrow AH = 2$.

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \left(C\right):\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 8$.

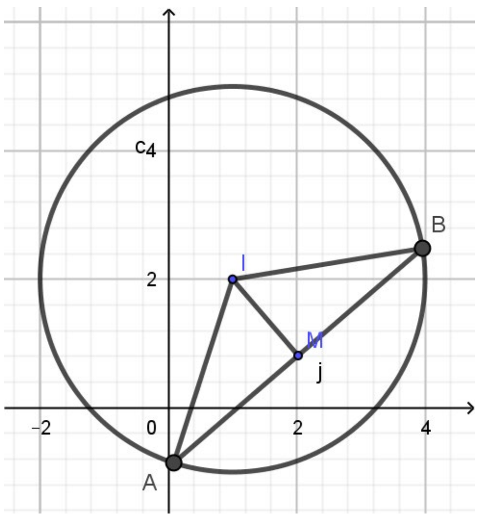
DẠNG 5. CÂU HỎI MIN-MAX

Câu 57: Cho đường tròn $\left(C\right): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $M\left(2;1\right)$. Dây cung của $\left(C\right)$ đi qua điểm M có độ dài ngắn nhất là

A. 6. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(C\right): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(C\right):\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 9$ nên có tâm $I\left(1;2\right), R = 3$

Vì $IM = \sqrt{2} < 3 = R$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M cắt đường tròn $\left(C\right)$ tại các điểm A, **B.** Gọi J là trung điểm của AB. Ta có:

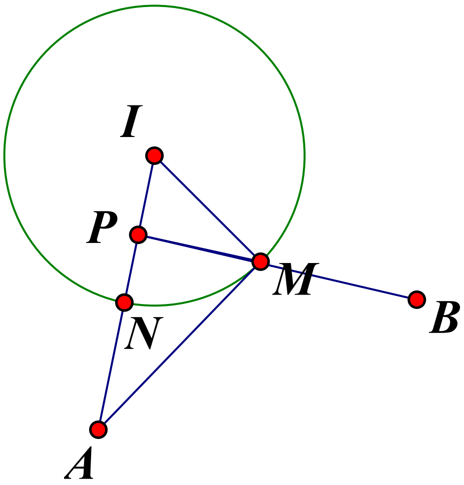
Ta có: $AB = 2AJ = 2\sqrt{R^2 - IJ^2} \geq 2\sqrt{R^2 - IM^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;-3)$, $B(4;1)$ và điểm M thay đổi thuộc đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$. Gọi $P_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$. Khi đó ta có $P_{\min}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7,7;8,1)$.. **B.** $(7,3;7,7)$.. **C.** $(8,3;8,5)$.. **D.** $(8,1;8,3)$.

Lời giải:

Chọn. D.



Đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$ có tâm $I(0;1)$ bán kính $R=2$.

$IA=IB=4>R$ nên A,B nằm ngoài đường tròn.

Gọi N là giao điểm của IA và đường tròn (C)

Trên đoạn IN lấy điểm P sao cho $IP=\frac{1}{2}IN \Rightarrow \overrightarrow{IP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow P$ trùng với gốc tọa độ.

Ta có $\Delta IAM \sim \Delta IMP \Rightarrow \frac{MA}{MP}=\frac{IM}{IP}=\frac{IN}{IP}=2 \Rightarrow MA=2MP$.

Do đó $P=MA+2MB=2MP+2MB\geq 2PB \Rightarrow P_{\min}=2PB=2\sqrt{17} \Rightarrow P_{\min}\in(8,1;8,3)$.

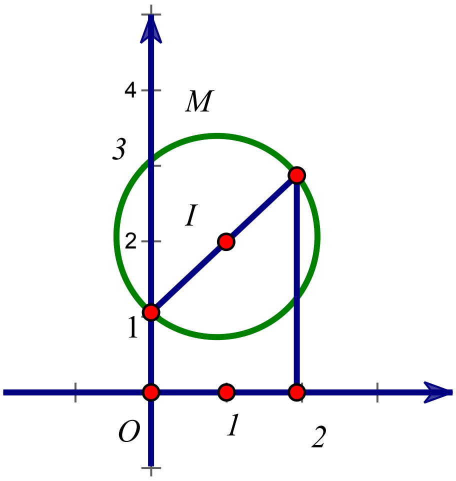
Chọn. **D.**

Câu 59: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(2;3)$. **B.** $M(0;1)$. **C.** $M(2;1)$. **D.** $M(0;3)$.

Lời giải

Chọn A



$(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$, (C) có tâm $I(1;2)$, $R=\sqrt{2}$.

Suy ra $(C):(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$.

Có $T=x_0+y_0=(x_0-1)+(y_0-2)+3$.

Áp dụng bất đẳng thức **B.** **C. S** cho 2 bộ số $(1;1),((x_0-1);(y_0-2))$.

$\left|(x_0-1)+(y_0-2)\right|\le\sqrt{2\left[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2\right]}=2$, do $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2$.

$\Rightarrow -2\le(x_0-1)+(y_0-2)\le 2\Rightarrow 1\le(x_0-1)+(y_0-2)+3\le 5\Rightarrow 1\le T\le 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(x_0-1)=(y_0-2)\\(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2\end{cases}$.

$\Rightarrow(x_0-1)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-1=1\\x_0-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2,y_0=3,T=5\\x_0=0,y_0=1,T=1\end{array}\right.$.

Vậy $\max T=5$ khi $x_0=2,y_0=3$.

Câu 60: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2+8x-6y+16=0$. Tính độ dài nhỏ nhất của OM?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải 1

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(-4;3)$ suy ra phương trình đường thẳng OI là $\begin{cases}x=-4t\\y=3t\end{cases}$.

$OI\cap(C)=\{M\}$ Tọa độ $(x;y)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-6y+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25t^2-50t+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{8}{5} \\ x=\dfrac{-32}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ x=\dfrac{-8}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\dfrac{32}{5};\dfrac{24}{5}\right), M_2\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{6}{5}\right)$

Ta có $OM_1=\sqrt{\left(-\dfrac{32}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=8, OM_2=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2 \Rightarrow OM_{\min}=OM_2=2$.

Cách 2

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=\sqrt{4^2+3^2-16}=3$.

Phương trình đường thẳng OI đi qua $O(0;0)$ có vtpt $\vec{n}(3;4)$ là:

$3x+4y=0$.

Tọa độ $M=OI\cap(C)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x^2+y^2+8x-6y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{32}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

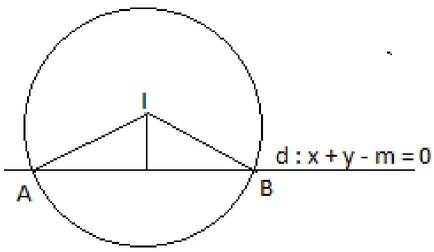
Ta có $OM_1=\sqrt{\left(\dfrac{32}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=8; OM_2=\sqrt{\left(\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2$. Vậy $OM_{\min}=2$.

Câu 61: Gọi I là tâm của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Số các giá trị nguyên của m để đường thẳng $x+y-m=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C



Gọi: $d: x+y-m=0$; tâm của (C) là $I(1;1)$, để $d\cap(C)$ tại 2 phân biệt khi đó:

$0 \le d(I;d) < 2 \leftrightarrow 0 \le \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} < 2 \leftrightarrow 2-2\sqrt{2} < m < 2+2\sqrt{2}\,(*)$

Xét ΔIAB có: $S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2}.R^2$

Dấu "=" xảy ra khi: $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow d(I;d) = \sqrt{2} \leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \quad (TM) \\ m=4 \quad (TM) \end{array}\right.$.

Câu 62: Điểm nằm trên đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ có khoảng cách ngắn nhất đến đường thẳng $d: x-y+3=0$ có toạ độ $M(a;b)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

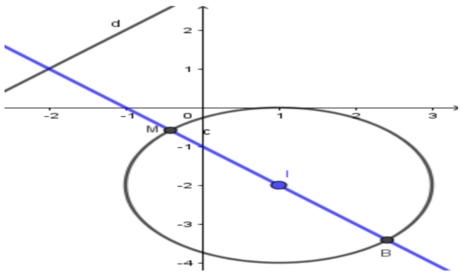
A. $\sqrt{2}a = -b$. **B.** $a=-b$. **C.** $\sqrt{2}a = b$. **D.** $a=b$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d. Khi đó, điểm M cần tìm là một trong hai giao điểm của Δ và (C).



Ta có phương trình $\Delta: x+y+1=0$.

Xét hệ: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+y^2-2x+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2(x-1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=-2-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-2+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Với $B(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2}) \Rightarrow d(B,d) = 2+3\sqrt{2}$

Với $C(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}) \Rightarrow d(C,d) = -2+3\sqrt{2} < d(B,d)$

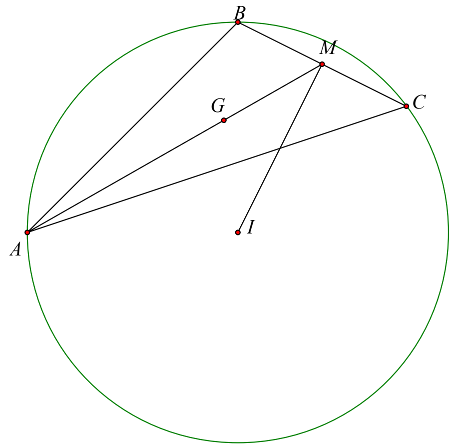
Suy ra $M(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}) \Rightarrow a = 1-\sqrt{2}; b = -2+\sqrt{2} = \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}a$.

Câu 63: Cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;2)$, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), I(1;-2)$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ lớn hơn 2.

A. $C(9;1)$. **B.** $C(5;1)$. **C.** $C(4;2)$. **D.** $C(3;-2)$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$ nên A là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm G, tỉ số -2, suy ra $A(-4;-2)$.

Đường tròn ngoại tiếp ABC có tâm I, bán kính $R=IA=5$ có phương trình $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(2;4)$.

Đường thẳng BC đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến, phương trình BC là: $1(x-3)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Điểm C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn $(I;R)$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=25\\ x+2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=3\\ x=5, y=1\end{array}\right.$

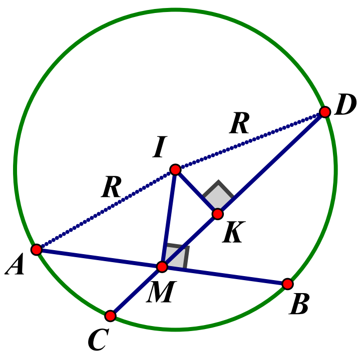
Đối chiếu điều kiện đề bài ta có tọa độ điểm $C(5;1)$.

Câu 64: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-25=0$ và điểm $M(2;1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là:

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



+) (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{30}$

+) AB là dây cung của (C) đi qua M

+) Ta có $AB\min \Leftrightarrow AB \perp IM$.

Thật vậy, giả sử CD là dây cung qua M và không vuông góc với IM.

Gọi K là hình chiếu của I lên CD ta có:

$AB = 2AM = 2\sqrt{IA^2 - IM^2} = 2\sqrt{R^2 - IM^2}$

$CD = 2KD = 2\sqrt{ID^2 - KD^2} = 2\sqrt{R^2 - IK^2}$

Do tam giác IMK vuông tại K nên $IM > IK$.

Vậy $CD > AB$.

+) Ta có: $IM = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$

$MA = \sqrt{R^2 - IM^2} = \sqrt{30-2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\Rightarrow AB = 2MA = 4\sqrt{7}$.

Câu 65: Cho các số thực a,b,c,d thay đổi, luôn thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ và $4c - 3d - 23 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$ là:

A. $P_{\min} = 28$. **B.** $P_{\min} = 3$. **C.** $P_{\min} = 4$. **D.** $P_{\min} = 16$.

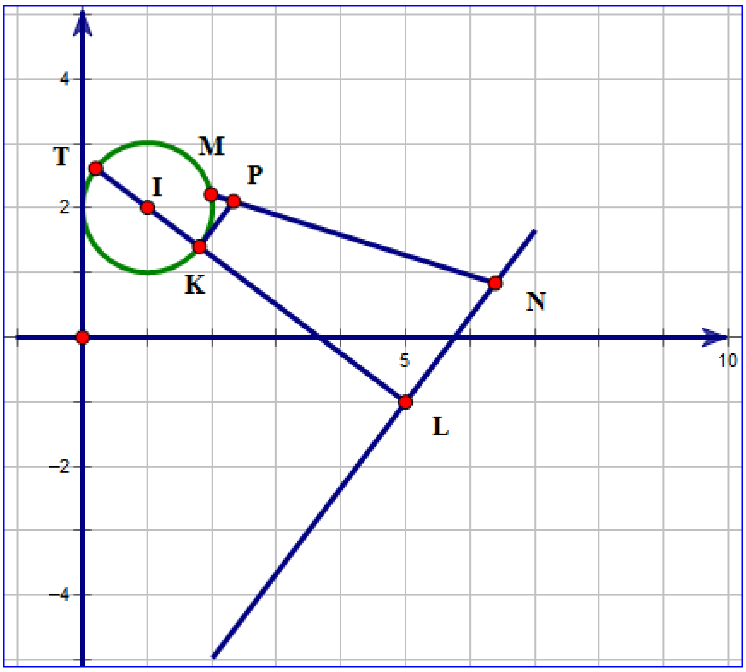
Lời giải

Chọn D

Xét tập hợp điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ thì M thuộc đường tròn tâm $I(1;2); R = 1$

Xét điểm $N(c;d)$ thỏa mãn $4c - 3d - 23 = 0$ thì N thuộc đường thẳng có phương trình $4x - 3y - 23 = 0$.

Ta thấy $d(I;d) = \dfrac{|4-6-23|}{5} = 5 > R = 1$. Do đó đường thẳng không cắt đường tròn.



Đường thẳng qua I vuông góc với d tại L và cắt đường tròn ở T, K (K ở giữa T và L)

Vẽ tiếp tuyến tại K cắt MN tại P.

Có $KL \le PN \le MN$, mà $KL = d(I,d) - R$

Do đó MN ngắn nhất khi $MN = KL$

Từ đây ta suy ra $P = (a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$ bé nhất khi và chỉ khi $MN = d(I;d) - R = 5 - 1 = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min} = 16$

Câu 66: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và các đường thẳng $d_1: mx + y - m - 1 = 0$, $d_2: x - my + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi đường thẳng d_1, d_2 cắt (C) tại 2 điểm phân biệt sao cho 4 điểm đó lập thành 1 tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng của tất cả các giá trị tham số m là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C)\begin{cases} I(1;2) \\ R = 2 \end{cases}$

Ta dễ thấy đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M(1;1)$ cố định nằm trong đường tròn (C) và $d_1 \perp d_2$. Gọi A, B là giao điểm của d_1 và (C), C, D là giao điểm của d_2 và (C). H, K lần lượt là hình chiếu của I trên d_1 và d_2

Khi đó

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB.CD = 2AH.CK = 2\sqrt{R^2 - \left[d(I,d_1)\right]^2}.\sqrt{R^2 - \left[d(I,d_2)\right]^2}$$

$$= 2\sqrt{4 - \frac{1}{m^2+1}}\sqrt{4 - \frac{m^2}{m^2+1}} = 2\frac{\sqrt{(4m^2+3)(3m^2+4)}}{m^2+1} \le \frac{4m^2+3+3m^2+4}{m^2+1} = 7$$

Do đó $\max S_{ABCD} = 7$ khi $m = \pm 1$. Khi đó tổng các giá trị của m bằng 0.