

CHƯƠNG

I

VECTƠ

BÀI 3: TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA:

Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

2. TÍNH CHẤT:

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

$$1) k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad 2) (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$3) h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}; \quad 4) 1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

3. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC:

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

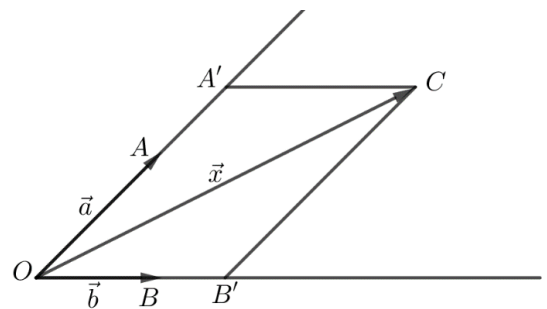
4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG:

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

5. PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



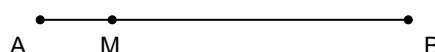
VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các

đẳng thức sau:

a) $\vec{AM} = k\vec{AB}$ b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$ c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$

Lời giải



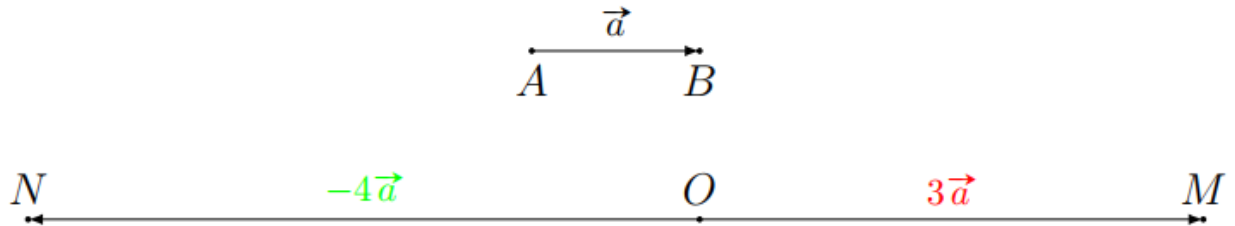
$$\text{a) } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}, \text{ mà } \overrightarrow{MA} \text{ ngược hướng } \overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ mà } \overrightarrow{MA} \text{ ngược hướng } \overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}.$$

Câu 2. Cho $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và điểm O . Xác định hai điểm M và N sao cho: $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$; $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

Lời giải



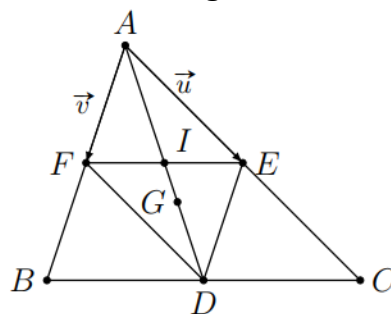
Vẽ d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$ (nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$).

– Trên d lấy điểm M sao cho $OM = 3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Khi đó $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$.

– Trên d lấy điểm N sao cho $ON = 4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$.

Lời giải



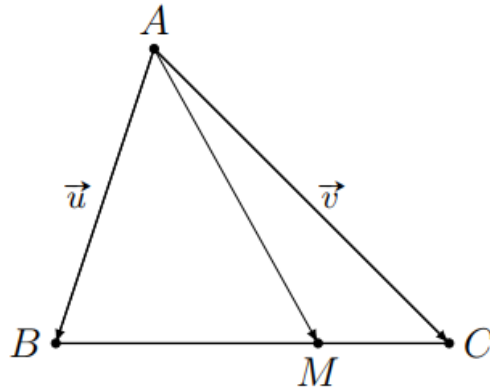
Dễ thấy tứ giác $AEDF$ là hình bình hành dẫn đến I là trung điểm của AD .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}; \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}; \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC . Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



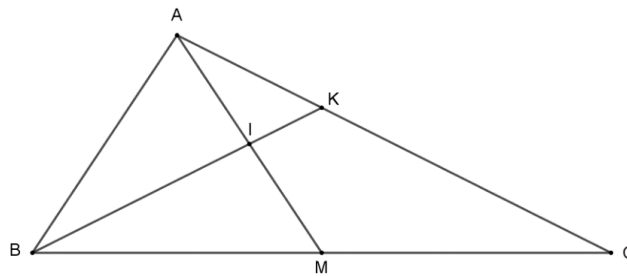
Từ giả thiết $MB = 2MC$ ta dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ mà $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có I là trung điểm của $AM \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}$.

Mặt khác M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$.

Suy ra 3 điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 6. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$.

Do ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là bốn đỉnh của hình bình hành $BCMA \Rightarrow$ ba điểm A, M, C không thẳng hàng (2).

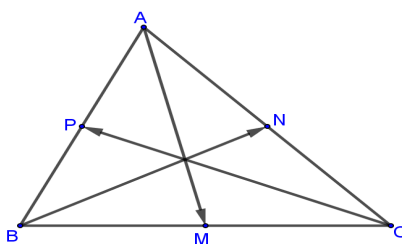
Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel AC$.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải

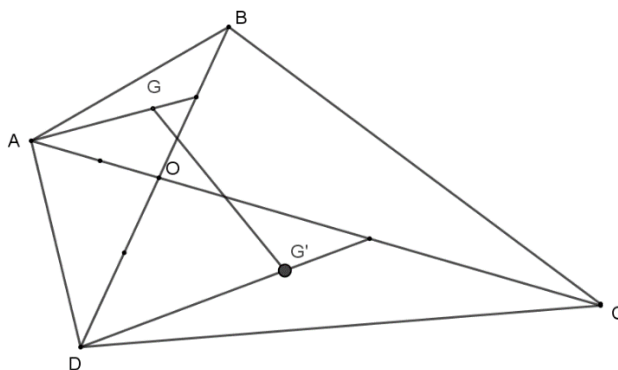
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}.\end{aligned}$$



Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có:

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (1).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có:

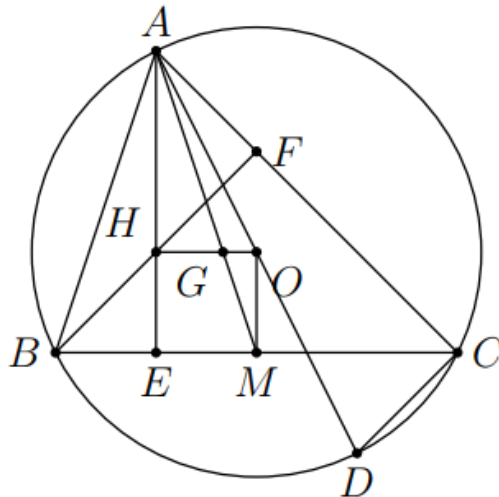
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 9. Cho tam giác ABC với H , O , G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O , ta có

$BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC) (1).

$CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ ba điểm H , M , D thẳng hàng.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Ta có $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M , N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB , CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B .

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

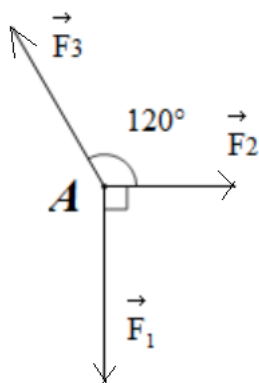
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

4.14. Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

4.15. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTO $k\vec{a}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Câu 2: Cho tam giác ABC .

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính:

a) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

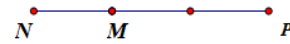
Câu 1: Khẳng định nào **sai**?

- A. $1.\vec{a} = \vec{a}$
- B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$
- C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$
- D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

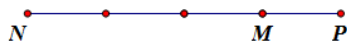
Câu 2: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



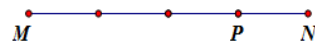
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3
- B. Hình 4
- C. Hình 1
- D. Hình 2

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$
- B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$
- C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$
- B. $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$
- C. $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$
- D. $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Câu 5: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$
- B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$
- C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$
- D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Câu 6: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$
- B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$
- C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$
- D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Câu 7: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A. $m = 3$
- B. $m = -\frac{1}{3}$
- C. $m = \frac{1}{3}$
- D. $m = -3$

Câu 8: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. $2a$
- B. $a\sqrt{3}$
- C. $2a\sqrt{3}$
- D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 9: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
- B. M là trung điểm của IC
- C. M là trung điểm của IA
- D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC
- B. Điểm C
- C. Trung điểm của AB
- D. Trung điểm của AD

Câu 11: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh $2a$. Góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{3}$

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a$

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a\sqrt{3}$

Câu 12: Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Tam giác ABC đều

B. Tam giác ABC cân tại C

C. Tam giác ABC vuông tại C

D. Tam giác ABC cân tại B

Câu 13: Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Câu 14: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Câu 15: Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

Câu 16: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$

C. $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$

D. $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Câu 17: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{5}{3}$

DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là trung điểm AC sao $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 2: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức:
 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:
A. $AB = AC$ **B.** $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M
- Câu 2:** Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?
A. $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ **B.** $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$ **D.** $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$
- Câu 3:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?
A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$
- Câu 4:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?
A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ **B.** $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$
C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ **D.** $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
- Câu 5:** Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:
A. -7 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 6
- Câu 6:** Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$
- Câu 7:** Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
A. $MN \perp AC$ **B.** $MN \parallel AC$
C. M nằm trên đường thẳng AC **D.** Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

- Câu 1:** Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng:
 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
- Câu 2:** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- Câu 3:** Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC , trọng tâm G . Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}, \vec{v} = \overrightarrow{BM}$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- Câu 2:** Cho tam giác ABC biết $AB = 8, AC = 9, BC = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = x (0 < x < 9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 C. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- Câu 3:** Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
 C. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- Câu 4:** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$
- Câu 5:** Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vector $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?
- A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
 C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$
- Câu 6:** Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- Câu 7:** Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:
- A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ B. $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ C. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ D. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Câu 8: Cho tam giác ABC với phân giác trong AD . Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

- A. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. B. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. C. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. D. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Câu 10: Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AN}$ là:

- A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ B. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$
C. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

Câu 11: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

- A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. B. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. C. $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. D. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

b) Gọi G là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:
- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
 C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$
- Câu 2:** Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:
- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$
- Câu 3:** Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G . Hỏi vector $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vector nào?
- A. $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ B. $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GP})$ C. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$ D. $\vec{0}$
- Câu 4:** Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD . Hệ thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$ D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
- Câu 5:** Cho tam giác đều ABC tâm O . Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là D, E, F . Hệ thức giữa các vector $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}$ là:
- A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$
 C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$
- Câu 6:** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$.
 C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$.
- Câu 7:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:
- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$ B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$
- Câu 8:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:
- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$
 C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$
- Câu 9:** Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào đúng?
- A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$ D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

Câu 11: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$ C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng:

- A. $\overrightarrow{MN}$ B. $2\overrightarrow{MN}$ C. $3\overrightarrow{MN}$ D. $-2\overrightarrow{MN}$

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$ B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$ D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Câu 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ D. $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$

Câu 16: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng:

- A. $2\overrightarrow{MI}$ B. $3\overrightarrow{MI}$ C. $4\overrightarrow{MI}$ D. $5\overrightarrow{MI}$

Câu 17: Cho tam giác đều ABC có tâm O . Gọi I là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC . Hạ

ID, IE, IF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB . Giả sử $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng:

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 7

Câu 18: Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

Câu 19: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vector $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

- A. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$
B. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$
C. D là trọng tâm của tam giác ABC
D. D là trực tâm của tam giác ABC

Câu 20: Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vector $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

- A. Điểm M là hình chiếu vuông góc của O trên d
B. Điểm M là hình chiếu vuông góc của A trên d
C. Điểm M là hình chiếu vuông góc của B trên d
D. Điểm M là giao điểm của AB và d

- Câu 21:** Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định điểm K thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ và điểm D thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
- A. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của BC
 B. K là trung điểm của BC và D là trung điểm của MN
 C. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AB
 D. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AC
- Câu 22:** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là:
- A. trung điểm AC B. điểm C C. trung điểm AB D. trung điểm AD
- Câu 23:** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là:
- A. Đường tròn đường kính AB . B. Đường tròn đường kính BC .
 C. Đường trung trực của cạnh AD . D. Đường trung trực của cạnh AB .
- Câu 24:** Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}|$ là:
- A. Một đường thẳng. B. Một đường tròn.
 C. Toàn bộ mặt phẳng ($ABCD$). D. Tập rỗng.
- Câu 25:** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tập hợp M là:
- A. Một đường tròn B. Một đường thẳng C. Một đoạn thẳng D. Nửa đường thẳng
- Câu 26:** Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$
- A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số
- Câu 27:** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $|\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$. Tập hợp M là:
- A. Một đoạn thẳng B. Một đường tròn C. Nửa đường tròn D. Một đường thẳng
- Câu 28:** Cho năm điểm A, B, C, D, E . Khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$
 C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$ D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$
- Câu 29:** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{5}{4}$.
- Câu 30:** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. a . D. $2a$.

CHƯƠNG

I

VECTƠ

BÀI 3: TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA:

Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

2. TÍNH CHẤT:

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

$$1) k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad 2) (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$$

$$3) h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}; \quad 4) 1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

3. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC:

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

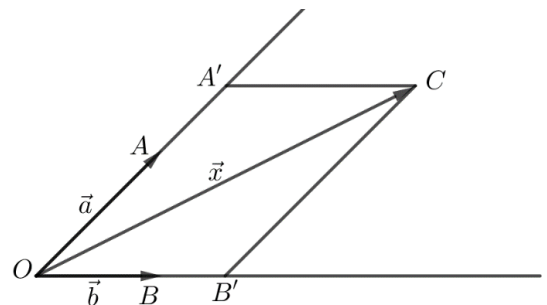
4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG:

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A , B , C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

5. PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



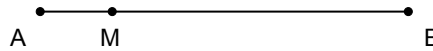


VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau:

- a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải



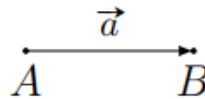
$$\text{a) } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}, \text{ mà } \overrightarrow{MA} \text{ ngược hướng } \overrightarrow{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}, \text{ mà } \overrightarrow{MA} \text{ ngược hướng } \overrightarrow{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}.$$

Câu 2. Cho $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và điểm O . Xác định hai điểm M và N sao cho: $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$; $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

Lời giải



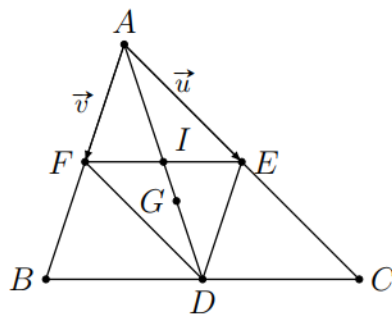
Vẽ d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$ (nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$).

– Trên d lấy điểm M sao cho $OM = 3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Khi đó $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$.

– Trên d lấy điểm N sao cho $ON = 4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$.

Câu 3. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$.

Lời giải



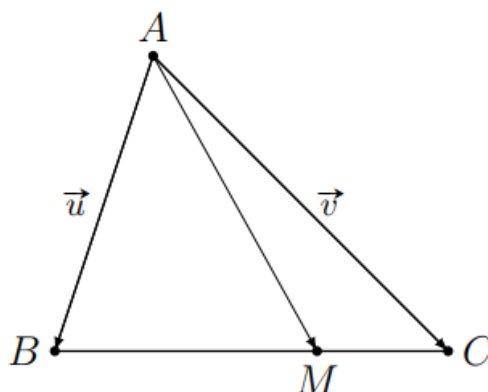
Dễ thấy tứ giác $AEDF$ là hình bình hành dẫn đến I là trung điểm của AD .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{2}{3} \vec{v}; \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}; \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC . Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



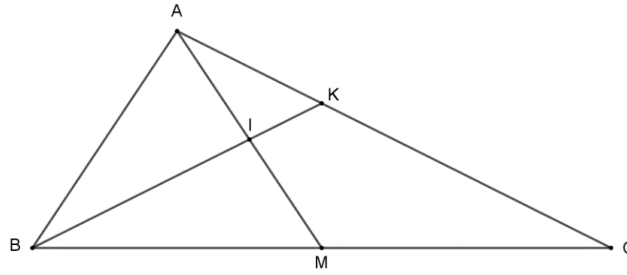
Từ giả thiết $MB = 2MC$ ta dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \text{ mà } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3} \vec{u} + \frac{2}{3} \vec{v}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao cho $AK = \frac{1}{3} AC$. Chứng minh ba điểm B , I , K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có I là trung điểm của $AM \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}$.

Mặt khác M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$.

Suy ra 3 điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 6. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$.

Do ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là bốn đỉnh của hình bình hành $BCMA \Rightarrow$ ba điểm A, M, C không thẳng hàng (2).

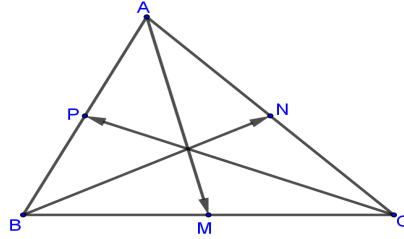
Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel AC$.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải

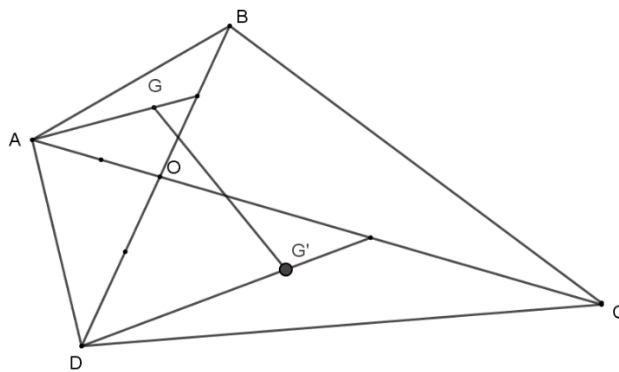
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$



Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G , G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có:

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (1).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có:

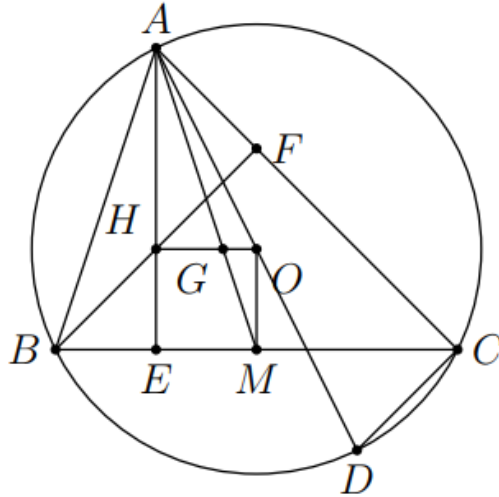
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 9. Cho tam giác ABC với H , O , G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O , ta có

$BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC) (1).

$CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ ba điểm H, M, D thẳng hàng.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

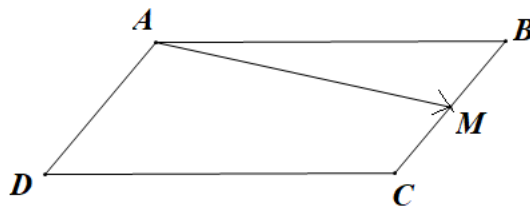
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

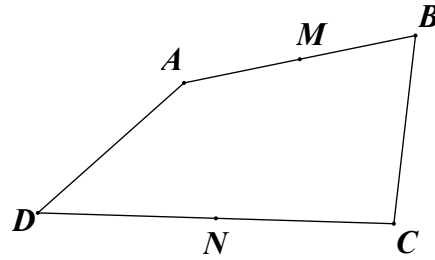
Lời giải



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B .

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

$$a) \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$b) \text{Ta có: } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK}$$

4.14. Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

a)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

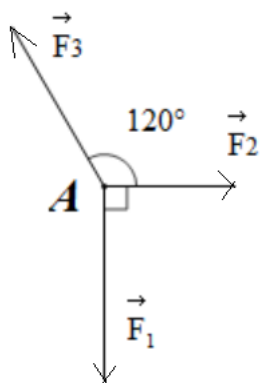
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

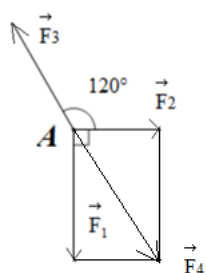
$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{OM}$$

4.15. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Lời giải



$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F_4}$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F_4} = -\vec{F_3} \Rightarrow |\vec{F_3}| = |\vec{F_4}|$$

$$\text{Ta có: } |\vec{F_2}| = |\vec{F_1}| \cdot \tan 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}; |\vec{F_4}| = \frac{|\vec{F_1}|}{\cos 30^\circ} = \frac{40\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{Vậy } |\vec{F_2}| = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N, } |\vec{F_3}| = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$$

III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

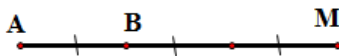
DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTƠ $k\vec{a}$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải



Ta có:

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

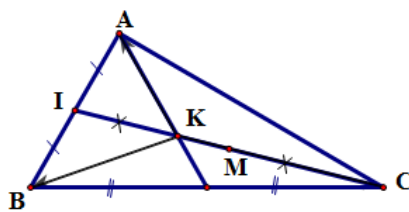
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM = 3AB$.

Câu 2: Cho tam giác ABC .

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC .

b) Gọi I là trung điểm của AB . Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

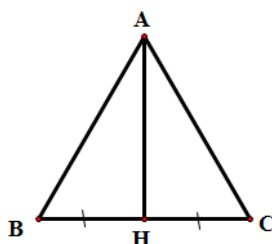
$\Rightarrow M$ là trung điểm của IC .

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải



a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a$.

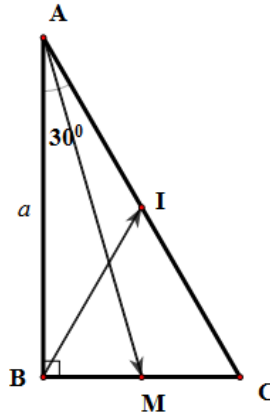
b) Gọi H là trung điểm của BC . Ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{AH}| = 2AH = 2\sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính:

a) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải



Ta có: $BC = AB \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

a) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Khẳng định nào **sai**?

A. $1.\vec{a} = \vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$

C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Lời giải

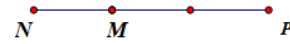
Chọn C

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

Câu 2: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



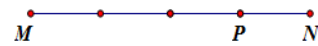
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3

B. Hình 4

C. Hình 1

D. Hình 2

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{MP} \text{ và } |\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|.$$

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$

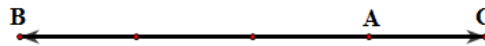
B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D



Câu 4: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng

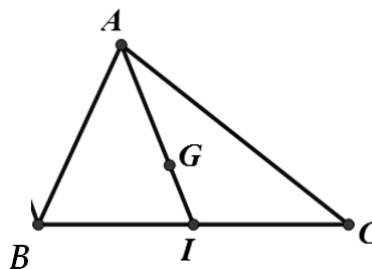
A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

B. $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$

C. $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$

D. $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Lời giải



Chọn A

Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vector $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$

C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$

D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn B

Câu 6: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$

B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$

D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}$.

Câu 7: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A. $m = 3$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -3$

Lời giải

Chọn B

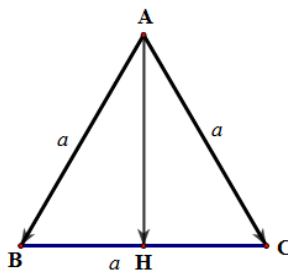
Do $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng nên $m = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. $2a$ B. $a\sqrt{3}$ C. $2a\sqrt{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC . Khi đó: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2.AH = 2.\frac{2a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
 B. M là trung điểm của IC
 C. M là trung điểm của IA
 D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Lời giải

Chọn B

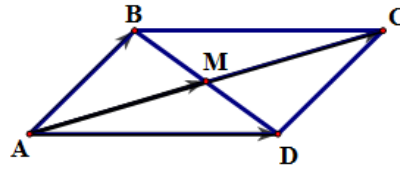
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của IC .

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC B. Điểm C
 C. Trung điểm của AB D. Trung điểm của AD

Lời giải

Chọn A



Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

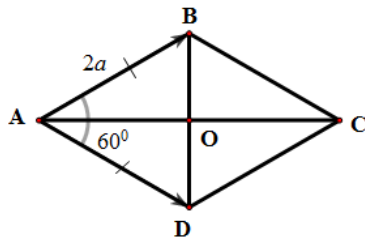
$\Rightarrow M$ là trung điểm của AC .

Câu 11: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh $2a$. Góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- A.** $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{3}$ **B.** $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$
C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a$ **D.** $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABD cân tại A và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều

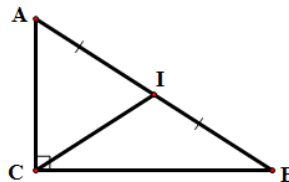
$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AO}| = 2AO = 2\sqrt{AB^2 - BO^2} = 2\sqrt{4a^2 - a^2} = 2a\sqrt{3}$$

Câu 12: Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Tam giác ABC đều **B.** Tam giác ABC cân tại C
C. Tam giác ABC vuông tại C **D.** Tam giác ABC cân tại B

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB . Ta có:

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB$$

$$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| = AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } C.$$

Câu 13: Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$

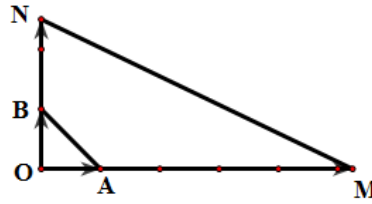
B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Lời giải

Chọn D



Dựng điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

Câu 14: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

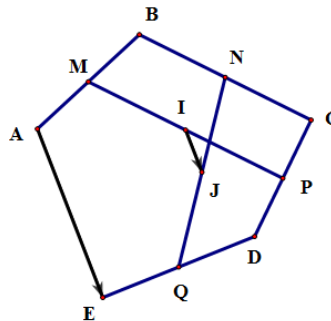
B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}), \overrightarrow{PN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$\text{Suy ra: } 2\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Câu 15: Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

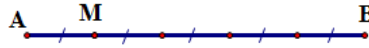
D. $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$

Câu 16: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ C. $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ D. $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



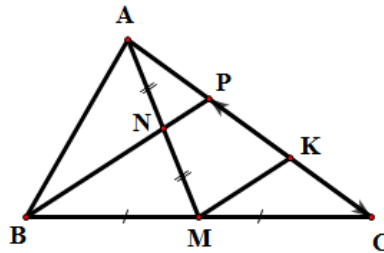
Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

Câu 17: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MK \parallel BP (K \in AC)$. Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP

Vì $MK \parallel BP \Rightarrow MK \parallel NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK

Do đó: $AP = PK = KC$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

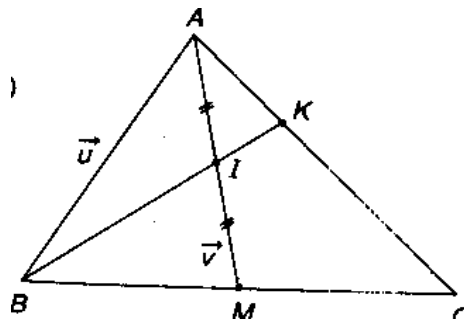
DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là trung điểm AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow B, I, K$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Theo giả thiết $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$. Mà A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là bốn đỉnh của hình bình hành $\Rightarrow M$ không thuộc AC .

Vậy $MN \parallel AC$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A.** $AB = AC$ **B.** $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vector nào sau đây cùng phương?

- A.** $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ **B.** $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$ **D.** $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2.(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow 5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$

B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$

B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$

D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. -7

B. 7

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương là: $\frac{x+1}{3} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x = -7$.

Câu 6: Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C

Câu 7: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$, $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $MN \perp AC$

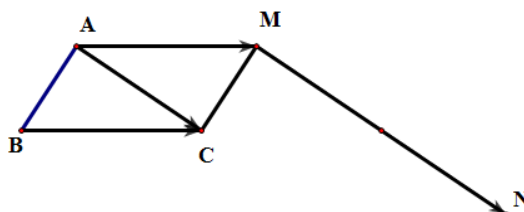
B. $MN \parallel AC$

C. M nằm trên đường thẳng AC

D. Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M \notin AC$ (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, ta được:
 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (2)

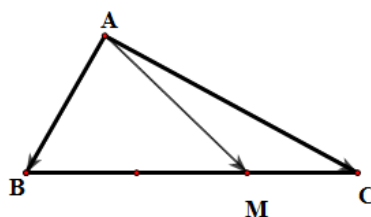
Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.

DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng:
 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

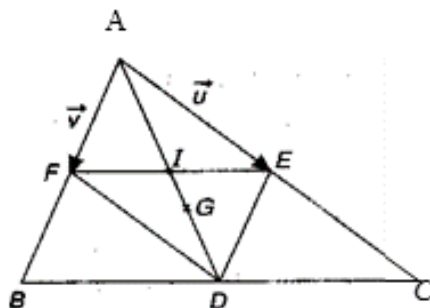
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

Câu 2: Cho ΔABC có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Lời giải



Ta có: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

Ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

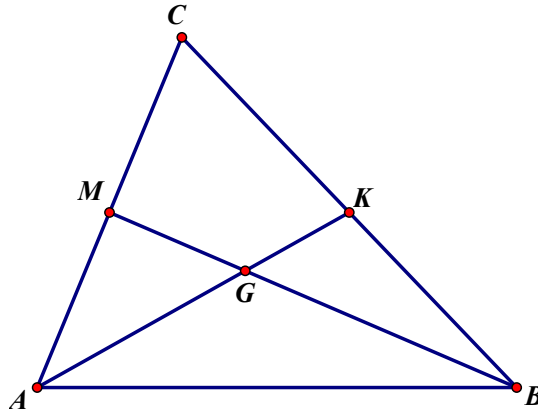
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}$$

Câu 3: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC , trọng tâm G . Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

Lời giải



$$* \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$$

$$* \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}) = 2 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$$

$$* \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) = -(\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

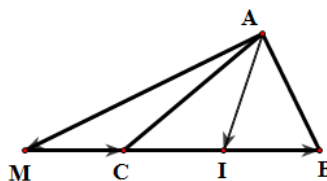
B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó C là trung điểm của MI . Ta có:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 2: Cho tam giác ABC biết $AB = 8, AC = 9, BC = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = x (0 < x < 9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

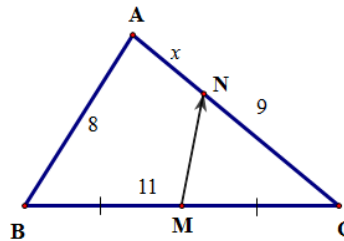
B. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{9}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

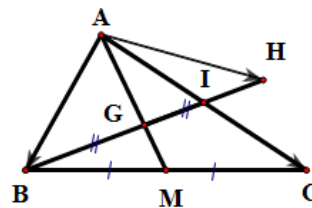
Câu 3: Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC .

Ta thấy $AHCG$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC}$$

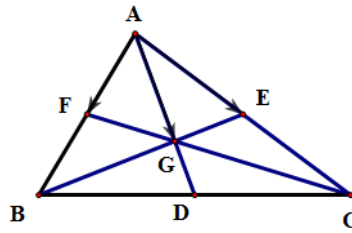
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

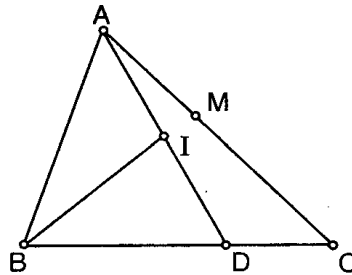
Câu 5: Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vectơ $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: I là trung điểm của cạnh AD nên

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

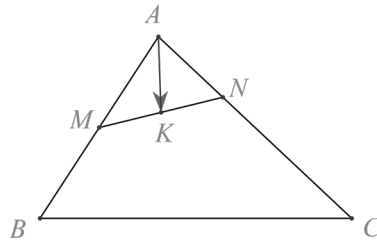
Câu 6: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

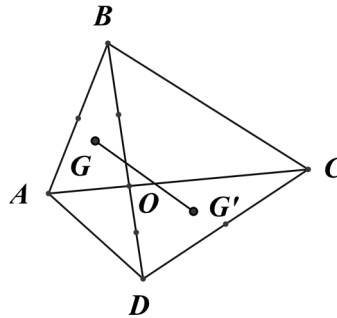
Do đó $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}$.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. C. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. D. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Lời giải

Chọn D



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$. (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên: $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$ (2)

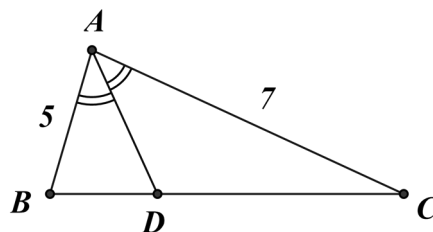
Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 8: Cho tam giác ABC với phân giác trong AD . Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

- A. $\frac{5}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$. B. $\frac{7}{12} \overrightarrow{AB} - \frac{5}{12} \overrightarrow{AC}$. C. $\frac{7}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{12} \overrightarrow{AC}$. D. $\frac{5}{12} \overrightarrow{AB} - \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{5}{7} \overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 9: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó:

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn C

Câu 10: Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ

thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AN}$ là:

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

C. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **D.** $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

Lời giải

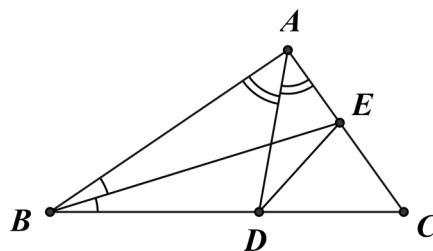
Chọn C

Câu 11: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A



$$AD \text{ là phân giác trong của tam giác } ABC \text{ nên } \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

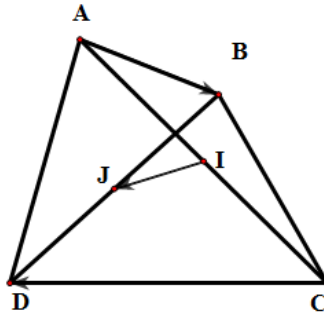
DẠNG 4: ĐĂNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ})$$

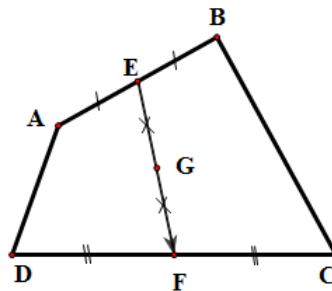
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

b) Gọi G là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) = 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}) \\ &= 2\overrightarrow{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{EF} \quad (1) \end{aligned}$$

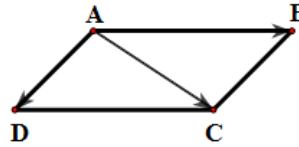
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) = 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}) \\ &= 2\overrightarrow{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{EF} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Lời giải



$$\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{VP}.$$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{VP} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{VP}. \end{aligned}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$
 B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
 C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$
 D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

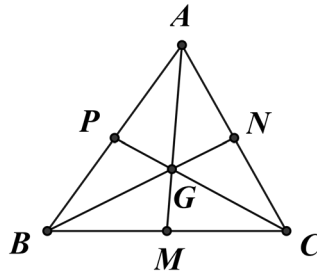
Chọn B

Câu 3: Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G . Hỏi vector $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vector nào?

- A. $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ B. $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{PG})$ C. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$ D. $\vec{0}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) = \vec{0}$.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC , CD . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$ **D.** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Cho tam giác đều ABC tâm O . Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là D, E, F . Hệ thức giữa các vector $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}$ là:

- A.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$
C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ **B.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$
C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ **D.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$

Câu 7: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

- A.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$ **B.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ **C.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Câu 8: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:

- A.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ **B.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

Lời giải

Chọn C

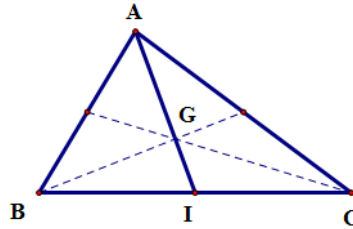
Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác: Với mọi điểm M , ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Câu 9: Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ **B.** $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ **D.** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$

Lời giải



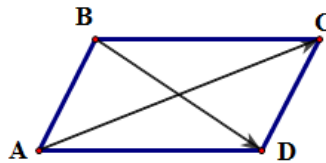
Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, ta có: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$

Lời giải

Chọn A



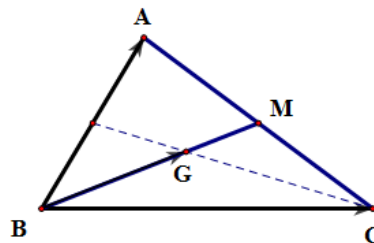
Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{BC}$.

Câu 11: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$ **C.** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$ **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Lời giải

Chọn B



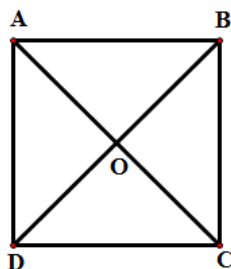
Gọi M là trung điểm của AC . Khi đó: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ **B.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng:

A. $\overrightarrow{MN}$

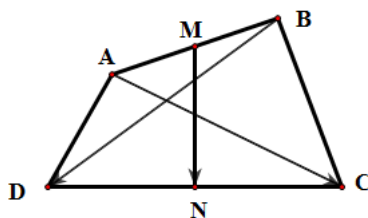
B. $2\overrightarrow{MN}$

C. $3\overrightarrow{MN}$

D. $-2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$

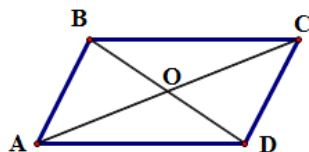
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$$

Câu 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$

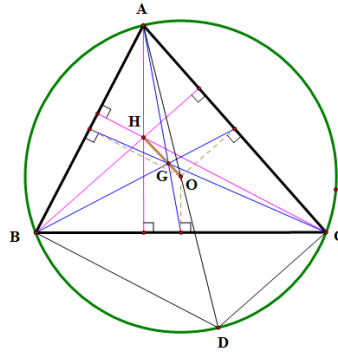
B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$

D. $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$

Lời giải

Chọn B



Gọi D là điểm đối xứng với A qua O . Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (1)

Vì $HBDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra:

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.$$

Câu 16: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng:

A. $2\overrightarrow{MI}$

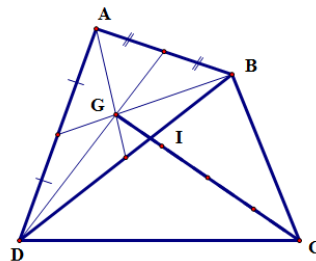
B. $3\overrightarrow{MI}$

C. $4\overrightarrow{MI}$

D. $5\overrightarrow{MI}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABD nên

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}$$

$$= 4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 4\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MI}$$

Câu 17: Cho tam giác đều ABC có tâm O . Gọi I là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC . Hạ ID, IE, IF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB . Giả sử $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng:

A. 5

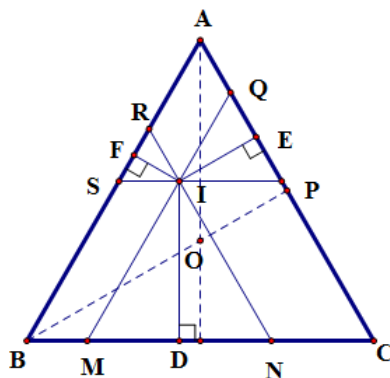
B. 4

C. 6

D. 7

Lời giải

Chọn A



Qua điểm I dựng các đoạn $MQ \parallel AB, PS \parallel BC, NR \parallel CA$.

Vì ABC là tam giác đều nên các tam giác IMN, IPQ, IRS cũng là tam giác đều.

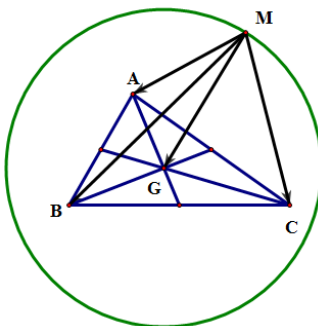
Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ, RS .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IR} + \overrightarrow{IS}) \\ &= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR}) + (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IS}) + (\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\overrightarrow{IO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IO} \Rightarrow a = 3, b = 2. \text{ Do đó: } a + b = 5. \end{aligned}$$

Câu 18: Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1$
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG = 1 \Rightarrow MG = \frac{1}{3}$$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1$ là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
 Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
A. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$

- B.** D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$
C. D là trọng tâm của tam giác ABC
D. D là trực tâm của tam giác ABC

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{MA} - \vec{MC} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CI}$ (Với I là trung điểm của AB)

Vậy vectơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M . Khi đó: $\vec{CD} = \vec{v} = 2\vec{CI} \Rightarrow I$ là trung điểm của CD

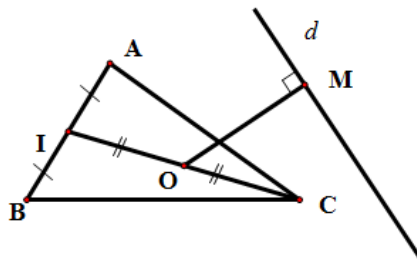
Vậy D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Câu 20: Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

- A.** Điểm M là hình chiếu vuông góc của O trên d
B. Điểm M là hình chiếu vuông góc của A trên d
C. Điểm M là hình chiếu vuông góc của B trên d
D. Điểm M là giao điểm của AB và d

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB .

Khi đó: $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{OI} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} + \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow O$ là trung điểm của IC

Ta có:

$$\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{OA} - \vec{OM} + \vec{OB} - \vec{OM} + 2(\vec{OC} - \vec{OM}) = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} - 4\vec{OM} = -4\vec{OM}$$

Do đó $|\vec{v}| = 4OM$.

Độ dài vectơ $\vec{v}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4OM$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d .

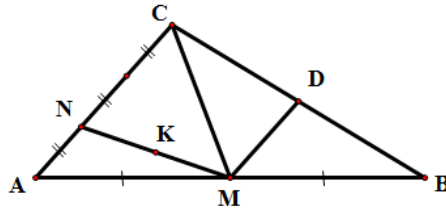
Câu 21: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định điểm K thỏa mãn: $3\vec{AB} + 2\vec{AC} - 12\vec{AK} = \vec{0}$ và điểm D thỏa mãn: $3\vec{AB} + 4\vec{AC} - 12\vec{KD} = \vec{0}$.

- A.** K là trung điểm của MN và D là trung điểm của BC
B. K là trung điểm của BC và D là trung điểm của MN
C. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AB

D. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AC

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 3.2\overrightarrow{AM} + 2.3\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

Suy ra K là trung điểm của MN

Ta có:

$$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 12\overrightarrow{AK} = 12\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Suy ra D là trung điểm của BC .

Câu 22: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là:

- A.** trung điểm AC **B.** điểm C
C. trung điểm AB **D.** trung điểm AD

Lời giải

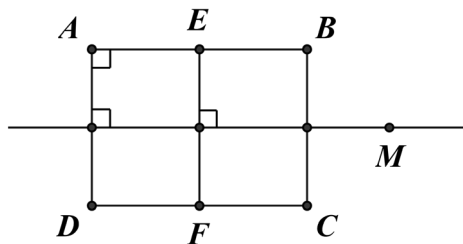
Chọn A

Câu 23: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là:

- A.** Đường tròn đường kính AB . **B.** Đường tròn đường kính BC .
C. Đường trung trực của cạnh AD . **D.** Đường trung trực của cạnh AB .

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và DC .

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME}| = |2\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow ME = MF$$

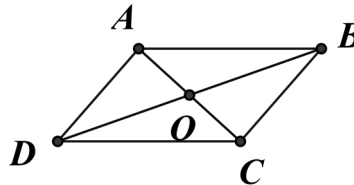
Do đó M thuộc đường trung trực của đoạn EF hay M thuộc đường trung trực của cạnh AD .

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}|$ là:

- A.** Một đường thẳng. **B.** Một đường tròn.
C. Toàn bộ mặt phẳng ($ABCD$). **D.** Tập rỗng.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MO}| = |2\overrightarrow{MO}|$$

$$\Leftrightarrow MO = MO \text{ (đúng với mọi } M \text{)}$$

Vậy tập hợp các điểm M là toàn bộ mặt phẳng ($ABCD$).

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tập hợp M là:

- A.** Một đường tròn **B.** Một đường thẳng
C. Một đoạn thẳng **D.** Nửa đường thẳng

Lời giải

Chọn B

Câu 26: Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$

- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn D

Câu 27: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$. Tập hợp M là:

- A.** Một đoạn thẳng **B.** Một đường tròn
C. Nửa đường tròn **D.** Một đường thẳng

Lời giải

Chọn B

Câu 28: Cho năm điểm A, B, C, D, E . Khẳng định nào đúng?

- A.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$
B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$
D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \text{ (đúng) ĐPCM.}\end{aligned}$$

Câu 29: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$.

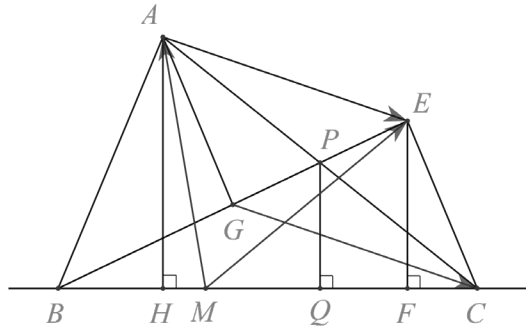
B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{6}{5}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF \perp BC$ ($F \in BC$). Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| = ME \geq EF$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC ($Q \in BC$).

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP = \frac{3}{4}BE$.

Ta có $\triangle BPQ$ và $\triangle BEF$ đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình $\triangle AHC$ nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Câu 30: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?

A. $\frac{a}{2}$.

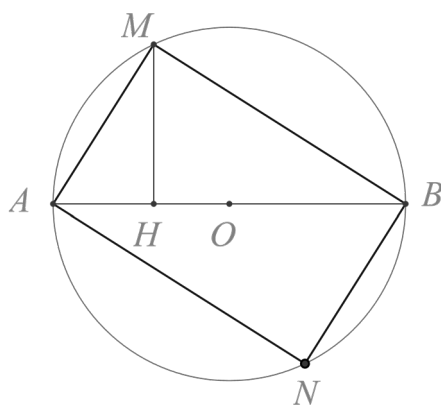
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. a .

D. $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{BA}|$ hay $MN = AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB .

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.