



VECTƠ

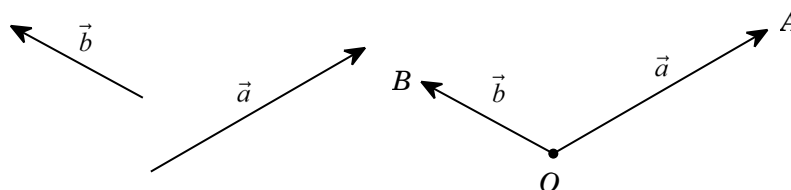
BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



LÝ THUYẾT.

1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



Chú ý. Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2. Tích vô hướng của hai vector: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vector $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có:
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân

phối);

$$\bullet (\vec{k\vec{a}}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{k\vec{b}});$$

$$\bullet \vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$\bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. **C.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. **B.** $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. **C.** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. **D.** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \frac{3}{2}$. **C.** $P = -\frac{3}{2}$. **D.** $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

A. 30° . **B.** 60° . **C.** 120° . **D.** 150° .

Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. 180° .

B. 360° .

C. 270° .

D. 120° .

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

A. 120°

B. 360°

C. 270°

D. 240°

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$.

D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A. 45°

B. 405°

C. 315°

D. 225°

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A. 360°

B. 180°

C. 80°

D. 160°

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.



PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.
- Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

- Câu 14:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$
- A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$
- Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$, $C(-4; 2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$
- Câu 16:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.
- Câu 17:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$
- A. $\vec{c} = (-1; -3)$ B. $\vec{c} = (-1; 3)$ C. $\vec{c} = (1; -3)$ D. $\vec{c} = (1; 3)$
- Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$.
Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.
- A. $P = 0$ B. $P = 18$ C. $P = 20$ D. $P = 28$
- Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$
- Câu 20:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$
- Câu 21:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. $\alpha = 90^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 30^\circ$
- Câu 22:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{x}$ và $\vec{y}$
- A. $\alpha = 45^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $\alpha = 90^\circ$ D. $\alpha = 135^\circ$
- Câu 23:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(5; -1)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$
- A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$ B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$ D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
- Câu 24:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$ và $C(-1; -1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.
- A. 15° B. 60° C. 120° D. 135°

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
- C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.
- Câu 2:** Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là
- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
- C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .
- Câu 3:** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
- A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
- C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.
- Câu 4:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$
- Câu 5:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.
- Câu 6:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.
- Câu 7:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.
- Câu 8:** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.
- Câu 9:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 \sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.
- Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.
- A. $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. D. $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.
- Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.
- A. $D(7;0)$. B. $D(7;0), D(2;9)$. C. $D(0;7), D(9;2)$. D. $D(9;2)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.



PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (-2;3)$, $\vec{b} = (4;1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vector $\vec{c}$ vuông góc với vector $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2k = 2m$ B. $3k = 2m$ C. $2k + 3m = 0$ D. $3k + 2m = 0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3;4)$ và $\vec{v} = (-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. D. $\vec{u} = -\vec{v}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$. B. Tam giác ABC đều.
C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
C. Tam giác ABC cân tại B . D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A. $C(0;6)$. B. $C(5;0)$. C. $C(3;1)$. D. $C(0;-6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

- A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

- A. $A'(1; -4)$. B. $A'(-1; 4)$. C. $A'(1; 4)$. D. $A'(4; 1)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

- A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MNP vuông tại M . Biết điểm $M(2; 1)$, $N(3; -2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy . Tính diện tích tam giác MNP .

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vector $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R = \frac{a}{4}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

A. Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.
C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm. **D.** Một đường thẳng.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
b) Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B , C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M(0;\frac{1}{2})$. **D.** $M(0;-\frac{1}{2})$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M(\frac{18}{7};0)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M(\frac{17}{7};0)$.

Câu 3: Cho $M(-1;-2)$, $N(3;2)$, $P(4;-1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$ nhỏ nhất.

A. $E(4;0)$. **B.** $E(3;0)$. **C.** $E(1;0)$. **D.** $E(2;0)$.



VECTƠ

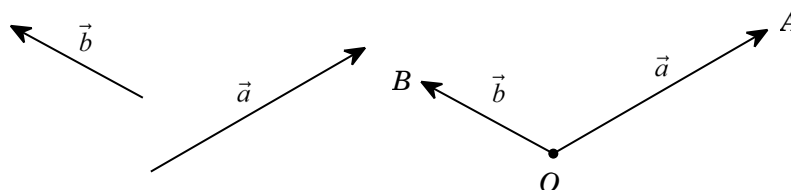
BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



LÝ THUYẾT.

1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



Chú ý. Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2. Tích vô hướng của hai vector: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vector $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân

phối);

- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

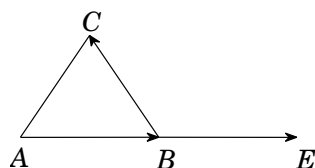
1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180 - \widehat{CBA} = 120^\circ$

$$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. **D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.**

Lời giải

Chọn D

(Bạn đọc tự vẽ hình)

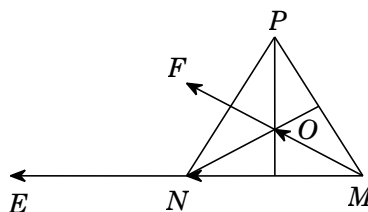
Vì $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. B. $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Lời giải

Chọn A



• Vẽ $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MN}$. Khi đó $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NP})$

$= \widehat{PNE} = 180^\circ - \widehat{MNP} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

• Vẽ $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{MO}$. Khi đó $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ON}) = \widehat{NOF} = 60^\circ$

• Vì $MN \perp OP \Rightarrow (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}) = 90^\circ$.

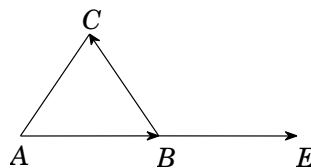
• Ta có $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \widehat{NMP} = 60^\circ$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{3}{2}$. **C. $P = -\frac{3}{2}$.** D. $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180^\circ - \widehat{CBA} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}.$

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}.$

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

A. 30° .

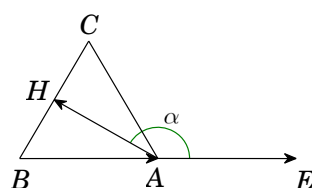
B. 60° .

C. 120° .

D. 150° .

Lời giải

Chọn D



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{HAE} = \alpha$ (hình vẽ)

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

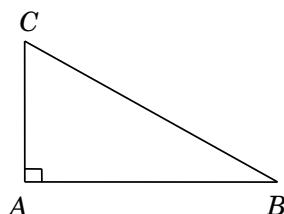
Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định được $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB}$

Ta có $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Câu 6: Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. 180° .

B. 360° .

C. 270° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 540^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

A. 120°

B. 360°

C. 270°

D. 240°

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA})$$

$$= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 360^\circ - 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

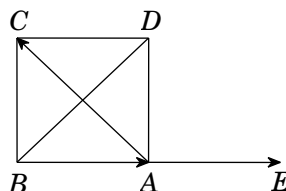
Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$. D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Lời giải

Chọn B



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \cos \widehat{CAE} = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A. 45°

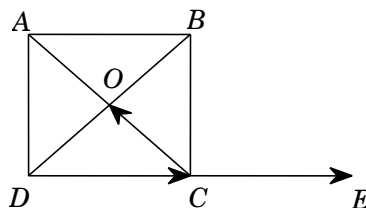
B. 405°

C. 315°

D. 225°

Lời giải

Chọn C



• Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

• Ta có $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$

• Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, khi đó

$$(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{OCE} = 135^\circ$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$$

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A. 360°

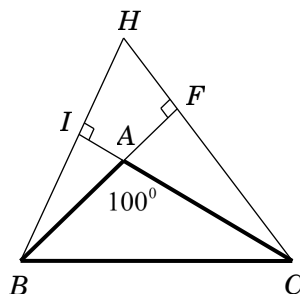
B. 180°

C. 80°

D. 160°

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{BHA} \\ (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{BHC} \\ (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{CHA} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{BHA} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA} \\ &= 2\widehat{BHC} = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ. \end{aligned}$$

(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp)

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.



PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

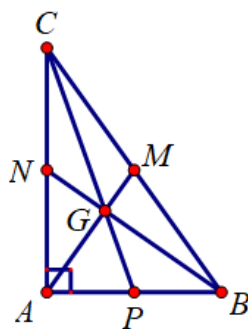


BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Lời giải



Hình 2.2

- * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

Mặt khác $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Để thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

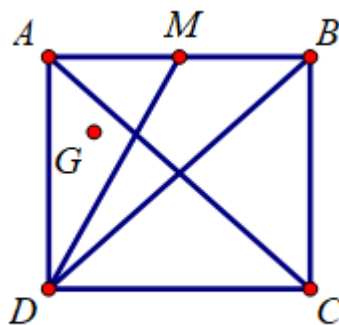
$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Lời giải



Hình 2.3

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

($\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có :

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

Suy ra $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

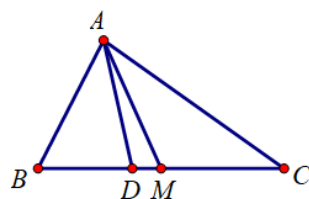
$$\text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải



Hình 2.3

a) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2] = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$

Suy ra $\frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A$ hay $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} \left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + b^2 \right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c) \overrightarrow{AD} = b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = (b \overrightarrow{AB})^2 + 2bc \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (c \overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = b^2 c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 b^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a)$$

Hay $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$

Nhận xét: Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A.** $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A.** $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$

Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) \cdot \frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **Chọn C**

• A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ **B.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ **C.** $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{B đúng.}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6} \longrightarrow \text{C sai. Chọn C}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{D đúng.}$$

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **B.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

Câu 12: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2 \text{ cm}, BC = 3 \text{ cm}, CA = 5 \text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ **B.** $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ **C.** $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ **D.** $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2 \end{aligned}$$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$ **B.** $P = 3a^2$ **C.** $P = -3a^2$ **D.** $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2 \end{aligned}$$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; -1), B(2; 10), C(-4; 2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 11)$, $\overrightarrow{AC} = (-7; 3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(2; 10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$

- A.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. **B.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. **C.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. **D.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3; 1)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4; 6)$ và $\vec{b} = (3; -7)$

Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

- A.** $\vec{c} = (-1; -3)$ **B.** $\vec{c} = (-1; 3)$ **C.** $\vec{c} = (1; -3)$ **D.** $\vec{c} = (1; 3)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c} = (x; y)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1; 3)$$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$.

Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- A.** $P = 0$ **B.** $P = 18$ **C.** $P = 20$ **D.** $P = 28$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$. Suy ra $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$ **B.** $\alpha = 60^\circ$ **C.** $\alpha = 45^\circ$ **D.** $\alpha = 30^\circ$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1+49}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha = 45^\circ$ **B.** $\alpha = 60^\circ$ **C.** $\alpha = 90^\circ$ **D.** $\alpha = 135^\circ$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 135^\circ$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(5; -1)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$ **B.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$ **D.** $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$.

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15°

B. 60°

C. 120°

D. 135°

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$. Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \widehat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;4)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-5;5)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.



PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$$VT = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$$

$$= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP \text{ (đpcm).}$$

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B .

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (2)}$$

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng qui (đpcm).

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

Lời giải

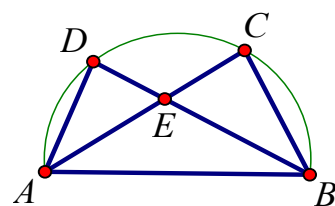
$$Ta \text{ có } VT = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED})$$

$$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{ED}$$

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$

Suy ra $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

$$Do \text{ đó } VT = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB}^2 = VP \text{ (đpcm).}$$



Hình 2.4

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} &= \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0 \\ \Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} &= 0 \\ \Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(I A^2 + I B^2 - AB^2) + \\ &+ bc(I B^2 + I C^2 - BC^2) + ca(I A^2 + I C^2 - CA^2) = 0 \\ \Rightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ba + bc)IB^2 + \\ &+ (c^2 + ca + cb)IC^2 - (abc^2 + ab^2c + a^2bc) = 0 \\ \Rightarrow (a + b + c)(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2) &= (a + b + c)abc \\ \Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 &= abc \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2} \end{aligned}$$

Câu 2: Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . **D.** tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$$

Câu 3: Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. **D.** $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

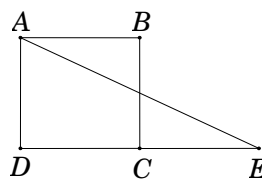
Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$.



Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

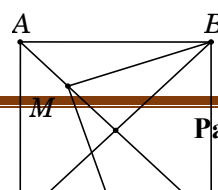
A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. **B.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. **C.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. **D.** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra:} \\ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{16} \left(3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{16} (0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.\end{aligned}$$

Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

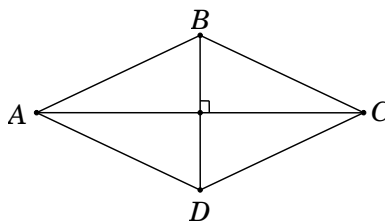
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 8: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2}AC^2 = 32.$$

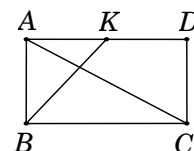
Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn).}$$

Mặt khác góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. **C.** $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x+4; y-1) \\ \overrightarrow{BI} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{CI} = (x-2; y+2) \end{cases}$$

$$\text{Do } I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ nên } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = (x-2)^2 + 9 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0), B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0), D(2;9)$. **C.** $D(0;7), D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải

Chọn B

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x; y)$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \text{ (với } k \neq -1)$

$$\Leftrightarrow (x-0; y-7) = (-2k; 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 2k+7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-2; y) \Rightarrow AD = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ \overrightarrow{BC} = (0; 5) \Rightarrow BC = 5 \end{cases} \longrightarrow AD = BC \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } (-2k-2)^2 + (2k+7)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \text{ (loại)} \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases} \longrightarrow D(7; 0).$$

• Trường hợp 2: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \neq BC \end{cases}$. Làm tương tự ta được $D(2; 9)$.

Vậy $D(7; 0)$ hoặc $D(2; 9)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Lời giải

Ta có $C \in Ox$ nên $C(c; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-c; 4) \\ \overrightarrow{CB} = (8-c; 4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2-c) \cdot (8-c) + 4 \cdot 4 = 0$

$$\Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \rightarrow C(6; 0) \\ c = 0 \rightarrow C(0; 0) \end{cases}$$

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

Lời giải

$$\text{Gọi } A'(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{BC} = (6; -2) \\ \overrightarrow{BA'} = (x+3; y-1) \end{cases}.$$

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ B, C, A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \cdot 6 + (y-4) \cdot (-2) = 0 \\ \frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}.$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vector $\vec{c}$ vuông góc với vector $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $2k = 2m$ **B.** $3k = 2m$ **C.** $2k + 3m = 0$ **D.** $3k + 2m = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4) \end{cases}.$$

$$\text{Để } \vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0.$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **B.** $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u} = -\vec{v}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0 \text{ suy ra } \vec{u} \text{ vuông góc với } \vec{v}.$$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$. **B.** Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} = (-7; 1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD} = (-1; -7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA} = (7; -1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}.$$

Lại có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(-7) + 7 \cdot 1 = 0$ nên $AB \perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$ và $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều. **B.** Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B .

D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB = AC = 2\sqrt{2} \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(0; 6)$.

B. $C(5; 0)$.

C. $C(3; 1)$.

D. $C(0; -6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0; c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$.

B. $a + 6b = 6$.

C. $a + 6b = 7$.

D. $a + 6b = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a+3; b) & \& \overrightarrow{BC} = (-1; 6) \\ \overrightarrow{BH} = (a-3; b) & \& \overrightarrow{AC} = (5; 6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3) \cdot (-1) + b \cdot 6 = 0 \\ (a-3) \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a + 6b = 7.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

- A.** $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-4; y-3) \\ \overrightarrow{BC} = (-5; -15) \\ \overrightarrow{BA'} = (x-2; y-7) \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA' \perp BC \\ B, A', C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}$.

• $(1) \Leftrightarrow -5(x-4) - 15(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 13$.

• $(2) \Leftrightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x - y = -1$.

Giải hệ $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \longrightarrow A'(1; 4)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

- A.** $a + 6b = 5$. **B.** $a + 6b = 6$. **C.** $a + 6b = 7$. **D.** $a + 6b = 8$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho khi đó ta có:

$$\overrightarrow{AH}(a+3;b), \overrightarrow{BC}(-1;6) \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -a-3+6b=0$$

$$\overrightarrow{BH}(a-3;b), \overrightarrow{AC}(5;6) \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 5a-15+6b=0$$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a+6b=3 \\ 5a+6b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a+6b=7$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MNP vuông tại M . Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy . Tính diện tích tam giác MNP .

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn A

P nằm trên $Oy \Rightarrow P(0; p)$ mà MNP vuông tại $M \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

$$\Leftrightarrow -2 - 3p + 3 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \frac{2\sqrt{10}}{3}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{10} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot \sqrt{10} = \frac{10}{3}.$$

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.



PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vector $\vec{a}$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \quad (\text{Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA})$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

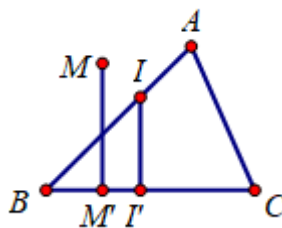
b) Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A .

Câu 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải



Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow [(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})] \cdot \overrightarrow{BC} = 3BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC . Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

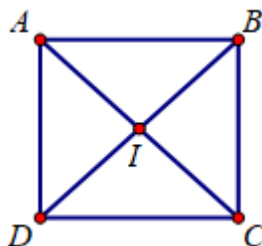
$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC .

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$

Nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = k$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Câu 3: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -16$ là:

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$$

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I.$$

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \text{ nằm trên một đường tròn } (C) \text{ có bán kính } R. \text{ Tính } R.$$

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

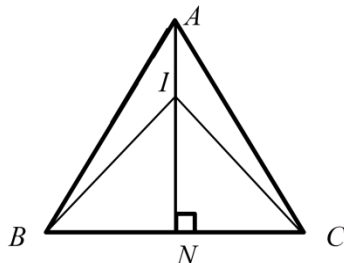
B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC .

Gọi I là điểm thỏa: $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN = 2IA$.

Khi đó: $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$.

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ là

A. Tập rỗng.

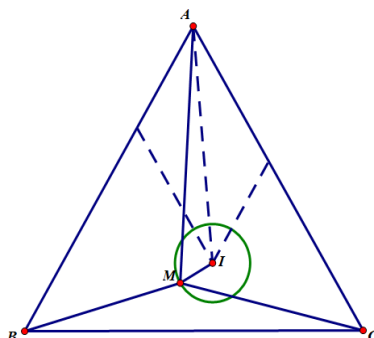
B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm.

D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 9|\overrightarrow{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.



PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A .

b) AH khi H là hình chiếu của A lên BC

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của A lên BC .

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1; y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2; y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$

Hay $11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B , C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2}$$

$$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$$

$$\text{Vì } c > 0 \text{ nên } -2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$.

B. $M(0;-1)$.

C. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M \in Oy \text{ nên } M(0;m) \text{ và } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1; -1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3; 2-m) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } MA^2 + MB^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 1^2 + (-1-m)^2 + 3^2 + (2-m)^2 = 2m^2 - 2m + 15.$$

$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\{MA^2 + MB^2\}_{\min} = \frac{29}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; -4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{18}{7}; 0\right)$. **B.** $M(4; 0)$. **C.** $M(3; 0)$. **D.** $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Do M trên trục hoành $\Rightarrow M(x; 0)$, $\overline{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

$$\overline{AM} = (x - 2; 3), \overline{BM} = (x - 3; 4)$$

Ta có chu vi tam giác AMB : $P_{ABM} = \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(3-x)^2 + 4^2} \geq \sqrt{2} + \sqrt{(x-2+3-x)^2 + (3+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow P_{ABM} \geq 6\sqrt{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \frac{x-2}{3-x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; 0\right).$$

Cách 2: Lấy đối xứng A qua Ox ta được $A'(2; 3)$. Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với giao điểm của $A'B$ với Ox .

Câu 3: Cho $M(-1; -2)$, $N(3; 2)$, $P(4; -1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$ nhỏ nhất.

A. $E(4; 0)$. **B.** $E(3; 0)$. **C.** $E(1; 0)$. **D.** $E(2; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Do $E \in Ox \Rightarrow E(a; 0)$.

$$\text{Ta có: } \overline{EM} = (-1-a; -2); \overline{EN} = (3-a; 2); \overline{EP} = (4-a; -1)$$

$$\text{Suy ra } \overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP} = (6-3a; -1).$$

$$\text{Do đó: } |\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}| = \sqrt{(6-3a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(6-3a)^2 + 1} \geq 1.$$

Giá trị nhỏ nhất của $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$ bằng 1.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $6-3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $E(2; 0)$.



VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

- Câu 1:** Cho hai vector $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-3; 4)$. Tích $\vec{u} \cdot \vec{v}$ là
A. 11. **B.** -10. **C.** 5. **D.** -2.
- Câu 2:** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (-3; 1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng
A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.
- Câu 3:** Cho $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.
- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.
- Câu 5:** Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = (2; -1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.
- Câu 6:** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.
- Câu 7:** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là
A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.
- Câu 8:** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.
- Câu 9:** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
C. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.
- Câu 10:** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng
A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.
- Câu 11:** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{7}$. C. 5 . D. $\frac{7}{2}$.

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. 5 . D. 3 .

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = x$, $|\vec{b}| = y$ và $|\vec{c}| = z$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$.

Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. B. $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. C. $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. D. $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

Câu 18: Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. B. $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. B. 0 . C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-a^2}{2}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$. Kết quả $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16 . B. 0 . C. $4\sqrt{2}$. D. 4 .

Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VECTO

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2), B(0;4), C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

- A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.

Câu 30: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

- A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2;5), \vec{b} = (3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 120^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 135^\circ$.

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2;1)$ và $\vec{b} = (3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 0° . B. 90° . C. 180° . D. 60° .

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là

- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

Câu 36: Cho vectơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $\vec{b} = (3;y)$ tạo với vectơ $\vec{a}$ một góc 45°

- A. $y = -9$. B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$. D. $y = -1$.

Câu 37: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

A. $\vec{u} = -\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

C. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;6)$. **C.** $C(-6;0)$. **D.** $C(0;-6)$.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

A. $m = -\sqrt{6}$. **B.** $m = \pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m = 3\sqrt{6}$. **D.** $m = \pm\sqrt{6}$.

A. 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. 5. D. 3.

A. $H(-1;-9)$. **B.** $H(-8;-27)$. **C.** $H(-2;5)$. **D.** $H(3;14)$.

A. $M(0;-3)$. **B.** $M(0;3)$. **C.** $M(0;4)$. **D.** $M(0;-4)$.

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Page 4

A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.

A. $a + 3b = \frac{2}{3}$. B. $a + 3b = -\frac{4}{3}$. C. $a + 3b = 1$. D. $a + 3b = -2$.

Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Câu 53: Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 54: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 55: Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$. Tính $|\overrightarrow{AB}|$?

A. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. C. $AB = 4\sqrt{10}$. D. $\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{10}$.

Câu 57: Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-3; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = \sqrt{13}$. B. $AB = 3\sqrt{2}$. C. $AB = 4$. D. $AB = 5$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$; $B(-1; 1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -3)$, $D(-2; -1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0; -1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng.

D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(-2; 7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là cặp số nào?

A. $(-2; 6)$.

B. $(0; 6)$.

C. $(0; 12)$.

D. $(2; 6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; -17)$; $B(-11; -25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC = \sqrt{13}$.

A. $C(-14; -27)$.

B. $C(-8; -23)$.

C. $C(-14; -27)$ và $C(-8; -23)$.

D. $C(14; 27)$ và $C(8; 23)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3; 1)$. Giả sử $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 10$.

B. $T = 9$.

C. $T = 5$.

D. $T = 17$.



VECTOR

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-3; 4)$. Tích $\vec{u} \cdot \vec{v}$ là

A. 11.

B. -10.

C. 5.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10$$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (-3; 1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. -5.

B. 1.

C. 13.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1.$$

Câu 3: Cho $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. 16.

B. 9.

C. -10.

D. -9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -3); \overrightarrow{BC} = (-6; -5)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9.$$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết ta có } \vec{u} = (1; 3) \text{ và } \vec{v} = (-2; 2).$$

Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4$.

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = (2; -1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$.

Vậy $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A.** $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp CD$ do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Câu 9: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
C. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \text{ nên C sai.}$$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$.

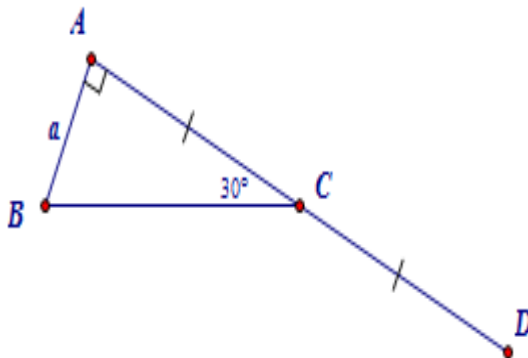
B. $2a^2$.

C. $3a^2$.

D. $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$.

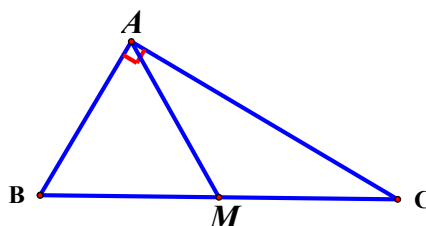
B. a^2 .

C. $-a^2$.

D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$.

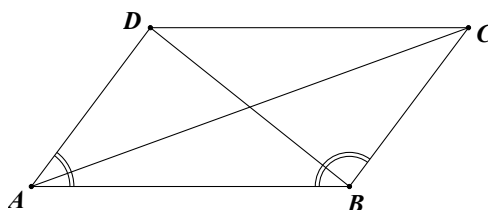
$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



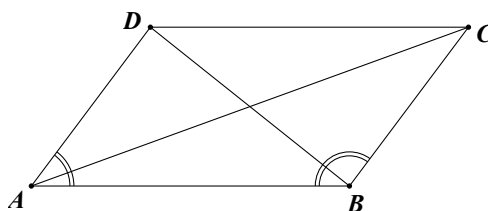
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết: $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

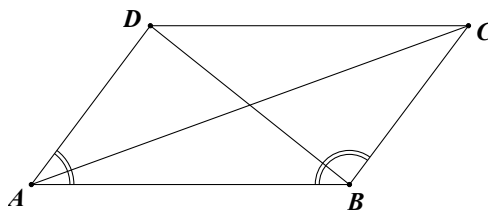
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1.$$

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{7}$. C. 5 . D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B



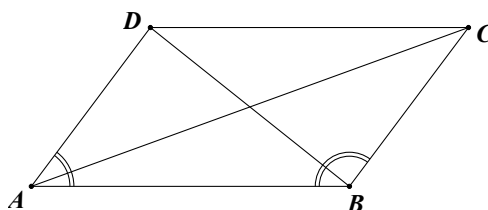
Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2.1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

- Câu 16:** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng
A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2.(-1) \\ \Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

- Câu 17:** Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = x$, $|\vec{b}| = y$ và $|\vec{z}| = c$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. **B.** $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. **C.** $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. **D.** $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}. \\ \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A = 4\vec{c}^2. \\ \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (-2\vec{c})^2.$$

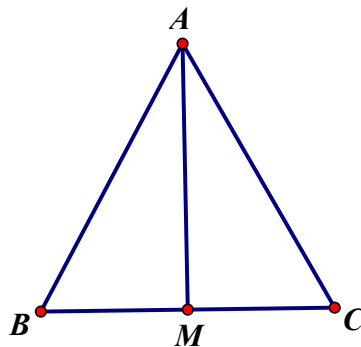
Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án } \mathbf{B}.$$

- Câu 18:** Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$.

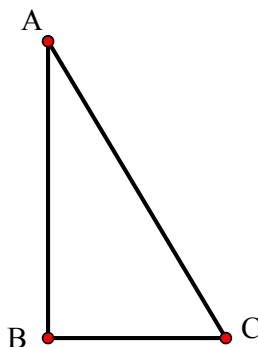
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $3a^2$. B. $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D. $-3a^2$.**

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -AC \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = -AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = -BC^2 = -3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

- A. $\sqrt{11}$. **B. $\sqrt{13}$.** C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

- A. $-a^2$. B. 0. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

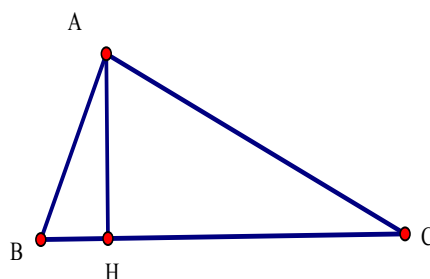
Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AD^2 - 2AB^2 = -a^2. \end{aligned}$$

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

$$\text{Có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \cdot BC = BA^2 = a^2.$$

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$. Kết quả $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. 16. B. 0. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \widehat{ABC} \text{ nên } \cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}.$$

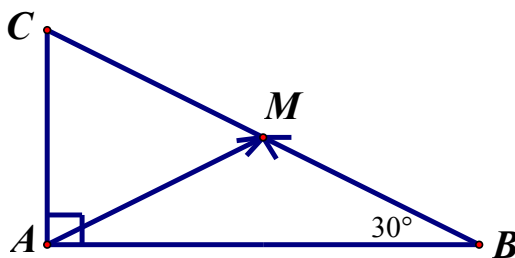
$$\text{Do đó } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$$

Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$.

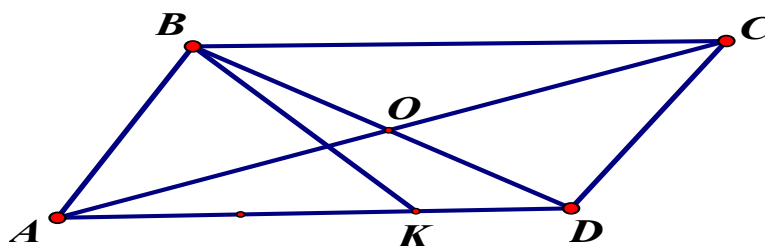
B. $6a^2$.

C. 0.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

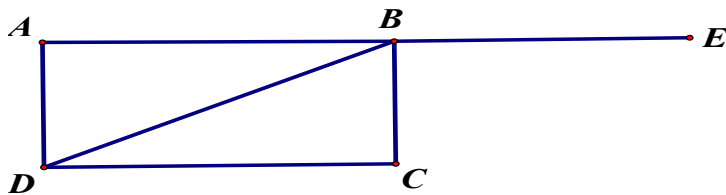
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Xét $\triangle ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét $\triangle ABD$ có $\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = \cos \widehat{DBE} = -\cos \widehat{ABD} = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(\frac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VECTO

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ nên $\cos \alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

- A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2)$; $\overrightarrow{AC} = (2;-1)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \widehat{BAC} = 143^\circ 7'.$$

Câu 30: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng:

- A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$$

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha = 60^\circ$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\alpha = 45^\circ$.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 60^\circ$.

B. $\alpha = 120^\circ$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{9 + 49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (3; -6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 0° .

B. 90° .

C. 180° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là

A. 60° .

B. 120° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

Câu 36: Cho vectơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $\vec{b} = (3; y)$ tạo với vectơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y = -9$.

B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$.

D. $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}.$$

$$\text{Góc giữa hai vectơ } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ bằng } 45^\circ \text{ suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

Câu 37: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38: Tìm x để hai vectơ $\vec{a} = (x; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3 .

B. 0 .

C. -3 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn A

Vector $\vec{a} = (x; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u} = -\vec{v}$.

B. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

C. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

D. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$. Do đó, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(6; 0)$.

B. $C(0; 6)$.

C. $C(-6; 0)$.

D. $C(0; -6)$.

Lời giải

Chọn B

$$C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4; -1), \overrightarrow{AC} = (-1; y - 2).$$

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ tạo thành một tam giác vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 6.$$

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

A. $(0; 3)$.

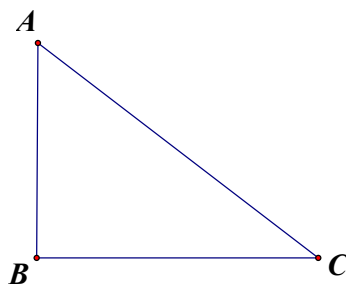
B. $(0; -3)$.

C. $(3; 0)$.

D. $(-3; 0)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1); \overrightarrow{AC} = (6; -4); \overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1.5 + 1.(-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (1; 2)$ và $\vec{v} = (4m; 2m - 2)$. Tìm m để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A

Hai vector $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2.(2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho tam giác ABC có $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m), m \neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G .

A. $m = -\sqrt{6}$.

B. $m = \pm 3\sqrt{6}$.

C. $m = 3\sqrt{6}$.

D. $m = \pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , suy ra $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $DABC$ là

A. 6.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 12.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2), \overrightarrow{BC} = (3; 3)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$.

B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$.

D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

$$\text{Gọi } A(x; y). \text{ Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 45: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Tính được $AB = 3, BC = 4$ và $AC = 5$. Suy ra $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B . Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2}$.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$.

B. $H(-8;-27)$.

C. $H(-2;5)$.

D. $H(3;14)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} (1).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (x-1; y); \overrightarrow{BC} = (6; -2); \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1), \overrightarrow{AC} = (4; -1).$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2 \cdot y = 0 \\ 4(x+1) - 1 \cdot (y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}.$$

Vậy $H(-8; -27)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ; cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M .

A. $M(0; -3)$.

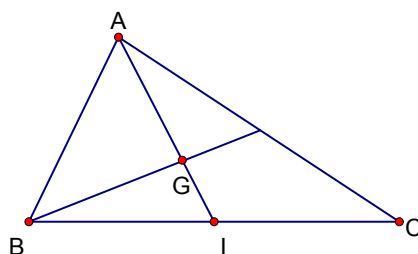
B. $M(0; 3)$.

C. $M(0; 4)$.

D. $M(0; -4)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-6; -2)$$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BM} = (-1; m-3); \overrightarrow{CM} = (6; m+2); \overrightarrow{CB} = (7; 5); \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$

$$\triangle MBC \text{ vuông cân tại } M \text{ khi: } \begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3).$$

Câu 48: Trên hệ trục tọa độ xOy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

- A. $(1;-4)$. B. $(-1;4)$. C. $(1;4)$. D. $(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x;y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3)$; $\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$; $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$ nên ta có hệ

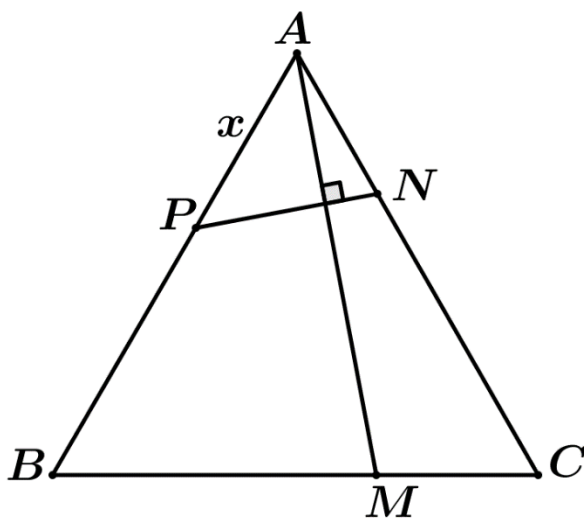
$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Câu 49: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c})(-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b}.\vec{c}) - 6x(\vec{b}.\vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3;-1), B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.

A. $a+3b = \frac{2}{3}$.

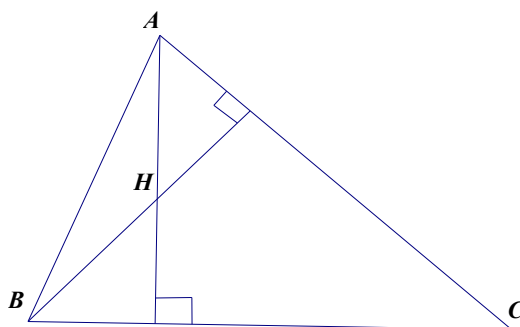
B. $a+3b = -\frac{4}{3}$.

C. $a+3b = 1$.

D. $a+3b = -2$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

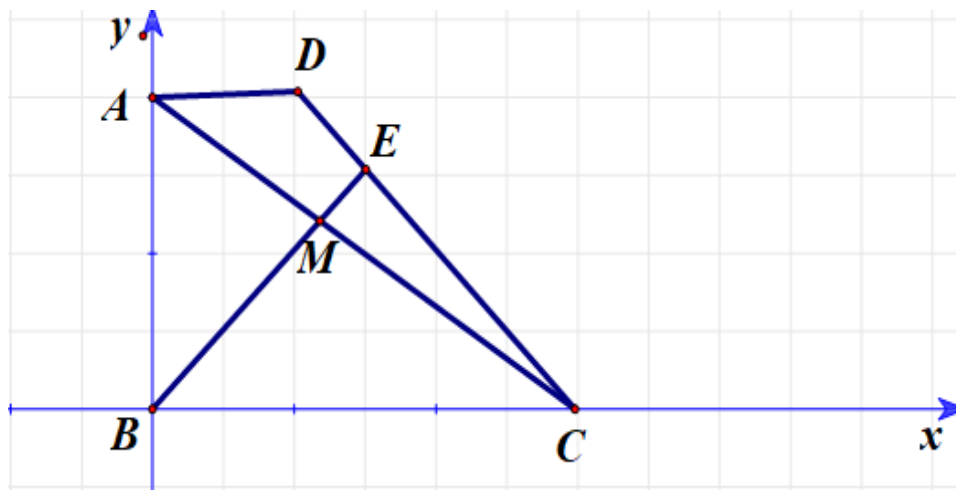
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B , điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$.

B. $a + 6b = 6$.

C. $a + 6b = 7$.

D. $a + 6b = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 6)$, $\overrightarrow{BH} = (a - 3; b)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$.

$\Rightarrow a + 6b = 7$.

Câu 53: Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC .

B. Đường tròn $(B; BC)$.

C. Đường tròn $(C; CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 54: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
- B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
- C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
- D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

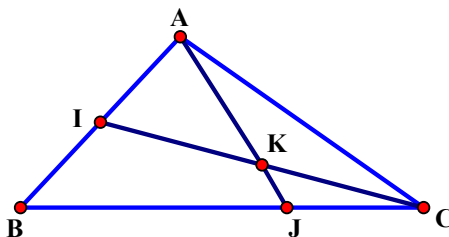
Câu 55: Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ .
- B. Đường tròn đường kính IK .
- C. Đường tròn đường kính JK .
- D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Ta có } 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}.$$

$$\text{Như vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$. Tính $|\overrightarrow{AB}|$?

- A. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. C. $AB = 4\sqrt{10}$. D. $\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Câu 57: Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-3; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = \sqrt{13}$. B. $AB = 3\sqrt{2}$. C. $AB = 4$. D. $AB = 5$.

Lời giải

Chọn D

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2); B(-1; 1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó độ dài đoạn OM bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0; y)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có tam giác } MAB \text{ cân tại } M &\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1-y)^2} \\ &\Leftrightarrow 4 - 4y = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } OM = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2; 1), B(2; -1), C(-2; -3), D(-2; -1)$. Xét ba mệnh đề:
(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0; -1)$.

Chọn khẳng định đúng

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
C. Chỉ (II) và (III) đúng. D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$; $\overrightarrow{DC} = (0; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-4; -4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề đúng.

Suy ra AC cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M = (0; -1)$, suy ra đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$, suy ra $AB = |-2| = 2$; $\overrightarrow{AD} = (-4; -2)$, suy ra $AD = \sqrt{20}$, nên $AB \neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề sai.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(-2; 7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là cặp số nào?

- A. $(-2; 6)$. B. $(0; 6)$. C. $(0; 12)$. D. $(2; 6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; 3) \Rightarrow AC = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{20}.$$

Nhận thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2$ và $AB = AC$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A , suy ra tâm I là trung điểm cạnh huyền BC . Vậy $I(0; 6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; -17)$; $B(-11; -25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC = \sqrt{13}$.

- A. $C(-14; -27)$. B. $C(-8; -23)$.
C. $C(-14; -27)$ và $C(-8; -23)$. D. $C(14; 27)$ và $C(8; 23)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $C(x_C; y_C)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

$$\text{Với } \overrightarrow{BC} = (x_C + 11; y_C + 25); \overrightarrow{BA} = (12; 8) \text{ ta có: } \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA} \ (k > 0) \Leftrightarrow \frac{x_C + 11}{12} = \frac{y_C + 25}{8} = k$$

$$\Leftrightarrow 8x_C - 12y_C - 212 = 0 \Leftrightarrow y_C = \frac{8x_C - 212}{12} \Leftrightarrow y_C = \frac{2x_C - 53}{3} \quad (1)$$

$$+) \ BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2 = 13 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C - 53}{3} + 25 \right)^2 = 13 \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C + 22}{3} \right)^2 = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}(x_C + 11)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_C + 11)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -14 \\ x_C = -8 \end{cases}$$

Với $x_C = -14$ thế vào (1) ta được: $y_C = \frac{2 \cdot (-14) - 53}{3} = -27$.

Khi đó $k = \frac{-14 + 11}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} < 0$.

Với $x_C = -8$ thế vào (1) ta được: $y_C = \frac{2 \cdot (-8) - 53}{3} = -23$.

Khi đó $k = \frac{-8 + 11}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > 0$.

Vậy $C(-8; -23)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 10$.

B. $T = 9$.

C. $T = 5$.

D. $T = 17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0$ suy ra $0 \leq a \leq \frac{10}{3}$ (**)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a - 3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b - 1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a - 3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 3$, khi đó $b = 1$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 10$.