CHƯƠNG IV VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\overrightarrow{a^2}$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\boxed{\vec{a}^2=|\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^0=|\vec{a}|^2}$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

> Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:
> - $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
> - $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
> - $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
> - $\vec{a}^2\geq 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=0$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

> - $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
> - $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
> - $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right), \vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2=0}$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\boxed{\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

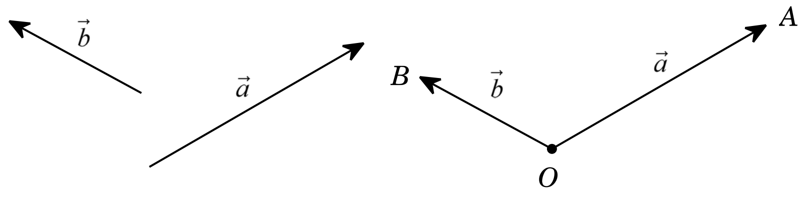
Khoảng cách giữa hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$$

5. Góc giữa hai vectơ

a) Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.21. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a}=(-3;1), \vec{b}=(2;6)$ b) $\vec{a}=(3;1), \vec{b}=(2;4)$ c) $\vec{a}=(-\sqrt{2};1), \vec{b}=(2;-\sqrt{2})$.

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để:

a) $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|$. b) $\vec{u}.\vec{v}=-|\vec{u}|.|\vec{v}|$.

4.23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB}=90^0$.

4.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông…

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B}=50^{\circ}$.Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)=130^{\circ}$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)=40^{\circ}$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)=50^{\circ}$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)=40^{\circ}$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120°?

A. $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}\right)$. **B.** $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right)$.

A. $P=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. 30^{o}. **B.** 60^{o}. **C.** 120^{o}. **D.** 150^{o}.

Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. 180^{o}. **B.** 360^{o}. **C.** 270^{o}. **D.** 120^{o}.

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A}=60^{o}$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$.

A. 120^{o} **B.** 360^{o} **C.** 270^{o} **D.** 240^{o}

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=0$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-1$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45^{o} **B.** 405^{o} **C.** 315^{o} **D.** 225^{o}

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100^{o} và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A. 360^{o} **B.** 180^{o} **C.** 80^{o} **D.** 160^{o}

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2$ và $\vec{a}.\vec{b} = -3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

C. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $a.$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $a.$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ **C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ **B.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}\right) = 150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c,\ AC = b.$ Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A,B,C thỏa $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

A. $P=b^2-c^2$ **B.** $P=\dfrac{c^2+b^2}{2}$ **C.** $P=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$ **D.** $P=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$

A. $P=-1$ **B.** $P=3a^2$ **C.** $P=-3a^2$ **D.** $P=2a^2$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=45^{O}$ **D.** $\alpha=30^{O}$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha=45^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=90^{O}$ **D.** $\alpha=135^{O}$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}$

B. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{5}$

D. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15^O **B.** 60^O **C.** 120^O **D.** 135^O

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-IA^2$

Câu 2. Cho bốn điểm A,B,C,D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{b^2-c^2}{2}$.
B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$.
D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Câu 2: Cho ba điểm $O,\ A,\ B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

A. tam giác OAB đều.
B. tam giác OAB cân tại O.
C. tam giác OAB vuông tại O.
D. tam giác OAB vuông cân tại O.

Câu 3: Cho $M,\ N,\ P,\ Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$.
B. $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$.
D. $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$
B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$
D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$.
B. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$.
C. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$.
D. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$.
B. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$.
C. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$.
D. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,\ AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$.
B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$.
D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$.

Câu 8: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$.
B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$.
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28$.
D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32$.

Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0$.
B. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$.
C. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.
D. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1),\ B(2;4),\ C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.
B. $I\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$.
C. $I\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$.
D. $I\left(1;-\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0),\ B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$.
B. $D(7;0),\ D(2;9)$.
C. $D(0;7),\ D(9;2)$.
D. $D(9;2)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$. **B.** Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. **D.** Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều. **B.** Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B. **D.** Tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:
Cho A,B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right|=k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a}=0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vecto $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A,B cố định có độ dài bằng a, vecto $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0$

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=k$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\frac{a}{4}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{18}{7};0\right)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$.

Câu 3: Cho $M(-1;-2)$, $N(3;2)$, $P(4;-1)$. Tìm E trên Ox sao cho $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ nhỏ nhất.

A. $E(4;0)$. **B.** $E(3;0)$. **C.** $E(1;0)$. **D.** $E(2;0)$.

CHƯƠNG IV VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\boxed{\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2}$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2\ge 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right),\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2=0}$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\boxed{\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

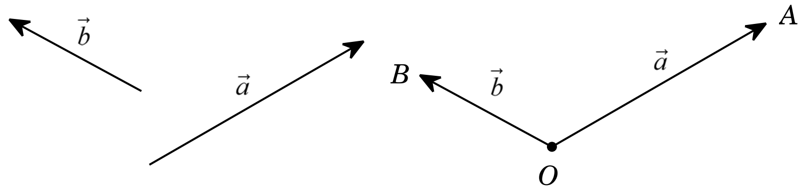
Khoảng cách giữa hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$$

5. Góc giữa hai vectơ

a) Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.21. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a}=(-3;1),\vec{b}=(2;6)$ b) $\vec{a}=(3;1),\vec{b}=(2;4)$ c) $\vec{a}=(-\sqrt{2};1),\vec{b}=(2;-\sqrt{2})$.

Lời giải

Vận dụng công thức tính góc giữa hai véc tơ $cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

a) $cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{-3.2+1.6}{\sqrt{(-3)^2+1^2}.\sqrt{2^2+6^2}}=0\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^o$

b) $cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{3.2+1.4}{\sqrt{3^2+1^2}.\sqrt{2^2+4^2}}=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^o$

c) $cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\left(-\sqrt{2}\right).2+1.\left(-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+1^2}.\sqrt{2^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^o$

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u},\vec{v}$ để:

a) $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. b) $\vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$.

Lời giải

a) Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ do đó để $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ thì $cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1$ hay $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0°$ nên $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng .

b) Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ do đó để $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ thì $cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-1$ hay $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=180°$ nên $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng.

4.23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2),B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^0$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AM} = (t-1;-2), \overrightarrow{BM} = (t+4;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (t-1)(t+4)+2.3 = t^2+3t+2$

b) Để $\widehat{AMB} = 90^\circ$ thì $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$ thì $\widehat{AMB} = 90^\circ$

4.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1), \mathrm{B}(2;4), \mathrm{C}(2;-2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải

a)

$AB = \sqrt{(2+4)^2+(4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(2+4)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{45}$

$BC = \sqrt{(2-2)^2+(-2-4)^2} = 6$

b) Giả sử $H(x;y)$ ta có $\overrightarrow{AH} = (x+4;y-1), \overrightarrow{BC} = (0;-6), \overrightarrow{BH} = (x-2;y-4), \overrightarrow{CA} = (-6;3)$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4).0+(y-1).(-6)=0 \\ -6(x-8)+3(y-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{2};1\right).$$

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Lời giải

Ta có $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A \Rightarrow S^2 = \dfrac{1}{4}AB^2.AC^2\left(1-cos^2 A\right)$

Hay $S^2 = \dfrac{1}{4}AB^2.AC^2\left[1-\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}{AB^2.AC^2}\right] = \dfrac{1}{4}\left[AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\right]$

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2 = 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Lời giải

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

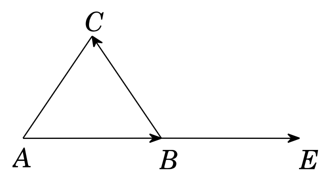
1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông…

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180-\widehat{CBA}=120^0$

$\longrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 120^0=-\dfrac{1}{2}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B}=50^\circ$.Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^\circ$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^\circ$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^\circ$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=40^\circ$.

Lời giải

Chọn D

(Bạn đọc tự vẽ hình)

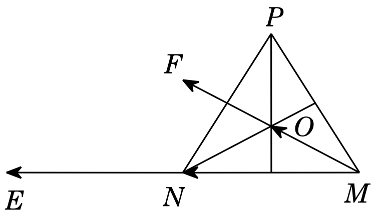
Vì $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}=180^0-40^0=140^0$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120^o?

A. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)$. **B.** $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

Lời giải

Chọn A



• Vẽ $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)=\left(\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NP}\right)$

$=\widehat{PNE}=180^o-\widehat{MNP}=180^o-60^o=120^o$.

• Vẽ $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{MO}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ON}\right)=\widehat{NOF}=60^o$

• Vì $MN\perp OP\Rightarrow\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)=90^o$.

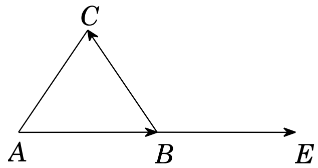
• Ta có $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=\widehat{NMP}=60^o$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. $P=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180^o-\widehat{CBA}=120^o$

$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos120^o=-\dfrac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

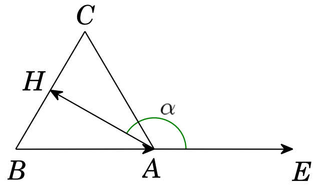
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 150°.

Lời giải

Chọn D



Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{HAE}=\alpha$ (hình vẽ)

$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=180^{\circ}-\widehat{BAH}=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$.

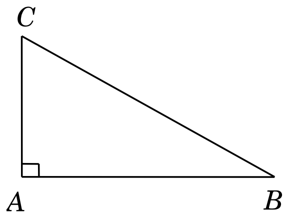
Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định được $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^{\circ}-\widehat{ACB}$

Ta có $\cos\widehat{ACB}=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{ACB}=60^{\circ}$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^{\circ}-\widehat{ACB}=120^{\circ}$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos120^{\circ}=-\frac{1}{2}$

Câu 6: Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. 180°. **B.** 360°. **C.** 270°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\widehat{ABC} \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^\circ-\widehat{BCA} \\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180^\circ-\widehat{CAB} \end{cases}$

$\longrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=540^\circ-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CAB}\right)=540^\circ-180^\circ=360^\circ$

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A}=60^\circ$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$.

A. 120° **B.** 360° **C.** 270° **D.** 240°

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\widehat{ABC} \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^\circ-\widehat{BCA} \end{cases}$

$\longrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=360^\circ-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}\right)$

$=360^\circ-\left(180^\circ-\widehat{BAC}\right)=360^\circ-180^\circ+60^\circ=240^\circ$

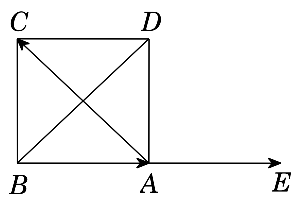
Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=0$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-1$.

Lời giải

Chọn B



Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

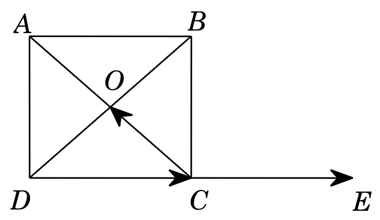
Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\cos\widehat{CAE}=\cos 135^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45° **B.** 405° **C.** 315° **D.** 225°

Lời giải

Chọn C



• Ta có $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^{\circ}$.

.

• Ta có $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)=180^{\circ}$

• Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$, khi đó

$\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\widehat{OCE}=135^{\circ}$

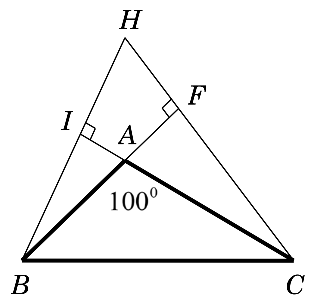
Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=0^{\circ}+180^{\circ}+135^{\circ}=315^{\circ}$

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A. 360° **B.** 180° **C.** 80° **D.** 160°

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{BHA}\\ \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=\widehat{BHC}\\ \left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{CHA}\end{cases}$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{BHA}+\widehat{BHC}+\widehat{CHA}$

$=2\widehat{BHC}=2\left(180^{\circ}-100^{\circ}\right)=160^{\circ}$.

(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp)

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

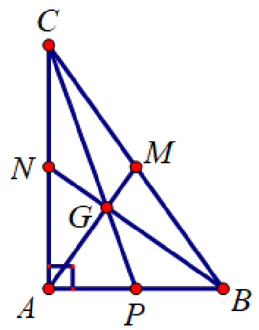
Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Lời giải



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=2a^2\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Mặt khác $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\widehat{ABC}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=-\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-a\sqrt{3}.2a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2a}=-3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)^2=AB^2+BC^2+CA^2+2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$ Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)=-4a^2$$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$$

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2=\left(\frac{2}{3}AM\right)^2=\frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2=\frac{4}{9}BN^2=\frac{4}{9}\left(AB^2+AN^2\right)=\frac{4}{9}\left(a^2+\frac{3a^2}{4}\right)=\frac{7a^2}{9}$$

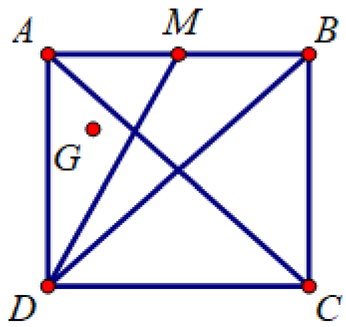
$$GC^2=\frac{4}{9}CP^2=\frac{4}{9}\left(AC^2+AP^2\right)=\frac{4}{9}\left(3a^2+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}+\frac{13a^2}{9}\right)=-\frac{4a^2}{3}$.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$

Lời giải



Hình 2.3

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}$

($\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $\widehat{ACB}=45^0$ và theo định lý Pitago ta có :

$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a.a\sqrt{2}\cos 45^0=a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ và

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)=-\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

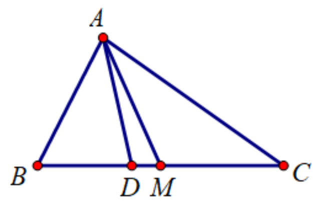
Nên $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{4}AB^2+4AD^2=\frac{21a^2}{4}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A .

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải



Hình 2.3

a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-CB^2\right]=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos A=cb\cos A$

Suy ra $\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)=cb\cos A$ hay $\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}\left(c^2+2.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+b^2\right)=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD}=\frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC}=\frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow(b+c)\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2\overrightarrow{AD}^2=\left(b\overrightarrow{AB}\right)^2+2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2\overrightarrow{AD}^2=b^2c^2+2bc.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+c^2b^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}^2=\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$$

Hay $\overrightarrow{AD}^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Nhận xét **:** Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0\longrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^\circ$. **B.** $\alpha=0^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^0$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha=30^{\circ}$. **B.** $\alpha=45^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=120^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^0$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha=90^{\circ}$. **B.** $\alpha=180^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=45^{\circ}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\longrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1}\vec{a}\vec{b}=-1$

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^0$

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

C. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\dfrac{1}{2}$ và $\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right).\dfrac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **Chọn C**

- A đúng, vì $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$
- B đúng, vì $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = a.a.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ **C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2} \longrightarrow$ **A đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 120^0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = a.a.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2} \longrightarrow$ **B đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right)$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right) = 120^0$

Do đó $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = GA.GB.\cos\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{6} \longrightarrow$ **C sai. Chọn C**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right)$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right) = 30^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = AB.AG.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right) = a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\cos 30^0 = \dfrac{a^2}{2} \longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right) = 150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right) = 120^0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right) = a.a.\cos 120^0 = -\dfrac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 135^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = a.a\sqrt{2}.\cos 135^0 = -a^2$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c,\ AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = BA.BC.\cos\widehat{B} = c.\sqrt{b^2+c^2}.\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = c^2$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4;-1)$. nằm giữa $A,\ C$.

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 3.5.\cos 0^0 = 15$

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} + CA^2$

$\longrightarrow \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 + 5^2 - 2^2\right) = 15$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ **B.** $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ **C.** $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ **D.** $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right)$

A. $P = -1$ **B.** $P = 3a^2$ **C.** $P = -3a^2$ **D.** $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

Ta có $P = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$

$= -CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) - AC^2 = -a\sqrt{2}.a.\cos 45^0 - \left(a\sqrt{2}\right)^2 = -3a^2$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1),\ B(2;10),\ C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -26$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;11),\ \overrightarrow{AC} = (-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1).(-7) + 11.3 = 40$ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} = -4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} = 0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} = 4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3;1),\ \overrightarrow{OB} = (2;10)$.Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB} = -3.2 + 1.10 = 4$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b} = -30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = 30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = 43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7)$

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y)$

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=1.6+2.6=18$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=45^{O}$ **D.** $\alpha=30^{O}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=45^{0}$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha=45^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=90^{O}$ **D.** $\alpha=135^{O}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|}=\dfrac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow(\vec{x},\vec{y})=135^{0}$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{2}{5}$ **D.** $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15^{O} **B.** 60^{O} **C.** 120^{O} **D.** 135^{O}

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$. Suy ra:

$\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\widehat{B}=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=135^{O}$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau. **B.** Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$ **D.** Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;4)$, $\overrightarrow{AD}=(5;-5)$, $\overrightarrow{CB}=(-2;4)$, $\overrightarrow{CD}=(-5;5)$

Suy ra $\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{8.5+4.(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{(-2).(-5)+4.(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$

$\longrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=0\Rightarrow\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-IA^2$

Lời giải

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$VT=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IA}^2=VP$ (đpcm).

Câu 2. Cho bốn điểm A,B,C,D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)$

$=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

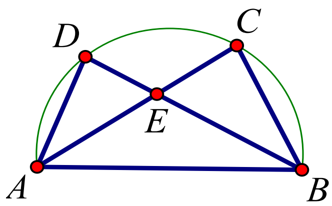
$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (2)

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$

Lời giải



Hình 2.4

Ta có $VT=\overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB}=90^0,\ \widehat{ACB}=90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=0$

Do đó $VT=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{AB}^2=VP$ (đpcm).

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$

Lời giải

Ta có: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)^2=0$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=0$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+ab\left(IA^2+IB^2-AB^2\right)+$

$+bc\left(IB^2+IC^2-BC^2\right)+ca\left(IA^2+IC^2-CA^2\right)=0$

$\Rightarrow\left(a^2+ab+ca\right)IA^2+\left(b^2+ba+bc\right)IB^2+$

$+\left(c^2+ca+cb\right)IC^2-\left(abc^2+ab^2c+a^2bc\right)=0$

$\Rightarrow(a+b+c)\left(a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2\right)=(a+b+c)abc$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2=abc$ (đpcm).

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{b^2-c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\dfrac{b^2-c^2}{2}$

Câu 2: Cho ba điểm $O,\ A,\ B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O.

C. tam giác OAB vuông tại O. **D.** tam giác OAB vuông cân tại O.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow OB^2-OA^2=0\Leftrightarrow OB=OA$

Câu 3: Cho $M,\ N,\ P,\ Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

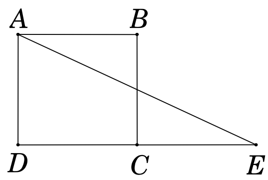
Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$.



Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2$.

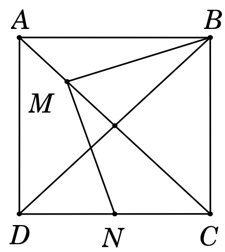
Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



• $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Suy ra:

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{16}\left(0+3a^2-3a^2-0\right)=0$.

Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,\ AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

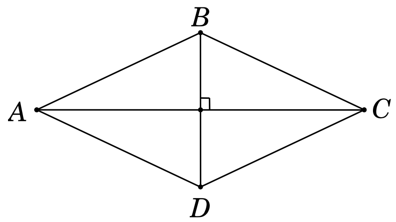
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$.

Câu 8: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

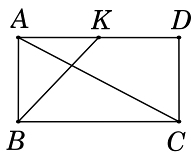
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32.$$

Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0.$ **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}.$ **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}.$ **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}.$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=0.$$

$$\longrightarrow \cos\widehat{ABC}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}\text{ (vì }\widehat{ABC}\text{ nhọn).}$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=-\cos\widehat{ABC}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}.$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $I\left(1;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1;-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(x+4;y-1)\\ \overrightarrow{BI}=(x-2;y-4)\\ \overrightarrow{CI}=(x-2;y+2)\end{cases}$.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases}IA^2=IB^2\\ IB^2=IC^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2\\ (x-2)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)^2=(x-2)^2+9\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ y=1\end{cases}.$$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0)$, $D(2;9)$. **C.** $D(0;7)$, $D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải

Chọn B

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x;y)$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases}AB \,//\, CD\\ AB \neq CD\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ (với $k\neq -1$)

$$\Leftrightarrow (x-0;y-7)=(-2k;2k) \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2k\\ y=2k+7\end{cases}. \quad (1)$$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x-2;y)\Rightarrow AD=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\\ \overrightarrow{BC}=(0;5)\Rightarrow BC=5\end{cases} \longrightarrow AD=BC \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=25.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $(-2k-2)^2+(2k+7)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=-1\,(\text{loại})\\ k=-\frac{7}{2}\end{array}\right. \longrightarrow D(7;0).$

• Trường hợp 2: $\begin{cases}AD \,//\, BC\\ AD\neq BC\end{cases}$. Làm tương tự ta được $D=(2;9)$.

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(2;9)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a}=(x_1;y_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vecto $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vecto $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \frac{1}{2}k+(-5)(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải

Ta có $C\in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{CA}=(-2-c;4)\\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow(-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=6\to C(6;0)\\ c=0\to C(0;0)\end{array}\right.$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

Lời giải

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-2)\\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)\end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ C,\ A' \text{ thẳng hàng}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2).6+(y-4).(-2)=0 \\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vecto $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vecto $\vec{c}$ vuông góc với vecto $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m) \\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4) \end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow \vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0 \Leftrightarrow 2k+3m=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vecto $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$. **B.** Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. **D.** Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow DA=5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}$.

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1(-7)+7.1=0$ nên $AB\perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều. **B.** Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B. **D.** Tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB=AC=2\sqrt{2} \\ AB^2+AC^2=BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (-4).(-1)+(-1)(c-2)=0 \Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b) \ \& \ \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \ \& \ \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3).(-1)+b.6=0 \\ (a-3).5+b.6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3)\\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15)\\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7)\end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ A',\ C \text{ thang hang}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 & (1)\\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} & (2)\end{cases}$.

- $(1)\Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0\Leftrightarrow x+3y=13.$
- $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15}\Leftrightarrow 3x-y=-1.$

Giải hệ $\begin{cases}x+3y=13\\ 3x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\longrightarrow A'(1;4).$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho khi đó ta có:

$\overrightarrow{AH}(a+3;b),\overrightarrow{BC}(-1;6)\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -a-3+6b=0$

$\overrightarrow{BH}(a-3;b),\overrightarrow{AC}(5;6)\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 5a-15+6b=0$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}-a+6b=3\\ 5a+6b=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow a+6b=7$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn A

P nằm trên $Oy\Rightarrow P(0;p)$ mà MNP vuông tại $M\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=0$.

$\Leftrightarrow\ -2-3p+3=0\ \Leftrightarrow\ p=\dfrac{1}{3}$.

$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{10}\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\sqrt{10}=\dfrac{10}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:
Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \dfrac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

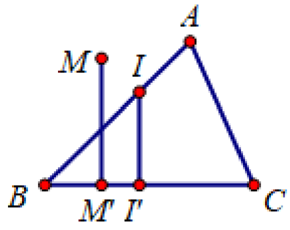
b) Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

Câu 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải



Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Khi đó $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right].\overrightarrow{BC}=3BC^2$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=BC^2$

Gọi M',I' lần lượt là hình chiếu của M,I lên đường thẳng BC Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}=BC^2$

Vì $BC^2>0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

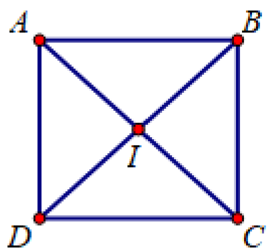
$\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}=BC^2\Leftrightarrow M'I'.BC=BC^2\Leftrightarrow M'I'=BC$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC .

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=k$

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có **:** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$$=MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

$$=MI^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=MI^2+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

Nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=k\Leftrightarrow 2MI^2+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}=k$

$\Leftrightarrow 2MI^2-IB^2-IA^2=k\Leftrightarrow MI^2=\dfrac{k}{2}+IA^2$

$\Leftrightarrow MI^2=\dfrac{k}{2}+a^2$

$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ với $A,\ B,\ C$ là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG.

Câu 3: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Khi đó $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2=2a^2.$

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow CN\perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB\longrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}.$

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}.$

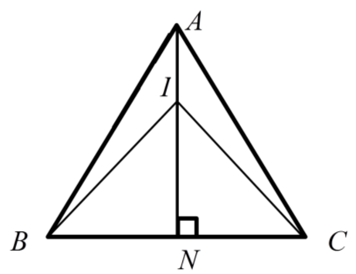
Theo giả thiết, ta có $MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=-16 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{AB^2}{4}-16=\dfrac{8^2}{4}-16=0\longrightarrow M\equiv I.$

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\dfrac{a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC.

Gọi I là điểm thỏa: $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IN}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN=2IA$.

Khi đó: $IA=\frac{1}{3}AN=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN=\frac{2}{3}AN=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$IB^2=IC^2=IN^2+BN^2=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}=\frac{7a^2}{12}$.

Ta có: $4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\frac{5a^2}{2}$.

$\Leftrightarrow 6MI^2+4IA^2+IB^2+IC^2=\frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2+4.\frac{a^2}{12}+2.\frac{7a^2}{12}=\frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

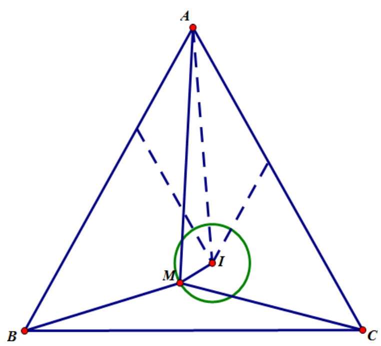
Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow 9\left|\overrightarrow{MI}\right|=18 \Leftrightarrow IM=2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3.8 + 4.6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) AH khi H là hình chiếu của A lên BC

Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1;y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2;y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$

Hay $11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\dfrac{x+2}{11} = \dfrac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \dfrac{1}{5}$, $y = \dfrac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{32}{5}\right)$.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \ge 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1.(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}$

$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$

Vì $c>0$ nên $-2b+5>0 \Rightarrow 0\le b<\dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $y=x^2-4x+5$ với $0\le x<\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5 ↘	1	↗ $\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^2-4x+5$ với $0\le x<\dfrac{5}{2}$ là $y=5$ khi $x=0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b=0$, suy ra $c=5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M\in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(1;-1-m)\\ \overrightarrow{MB}=(3;2-m)\end{cases}$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2=1^2+(-1-m)^2+3^2+(2-m)^2=2m^2-2m+15$.

$$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}\ge\frac{29}{2};\ \forall m\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $\left\{MA^2+MB^2\right\}_{\min}=\dfrac{29}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{1}{2}\longrightarrow M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{18}{7};0\right)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Do M trên trục hoành $\Rightarrow M\left(x;0\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(1;-1\right)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AM}=\left(x-2;3\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(x-3;4\right)$

Ta có chu vi tam giác AMB: $P_{ABM}=\sqrt{2}+\sqrt{\left(x-2\right)^2+3^2}+\sqrt{\left(x-3\right)^2+4^2}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{\left(x-2\right)^2+3^2}+\sqrt{\left(3-x\right)^2+4^2}\geq\sqrt{2}+\sqrt{\left(x-2+3-x\right)^2+\left(3+4\right)^2}$

$\Leftrightarrow P_{ABM}\geq 6\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x-2}{3-x}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{7}\Rightarrow M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$.

Cách 2: Lấy đối xứng A qua Ox ta được $A'\left(2;3\right)$. Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với giao điểm của $A'B$ với Ox.

Câu 3: Cho $M\left(-1;-2\right)$, $N\left(3;2\right)$, $P\left(4;-1\right)$. Tìm E trên Ox sao cho $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ nhỏ nhất.

A. $E\left(4;0\right)$. **B.** $E\left(3;0\right)$. **C.** $E\left(1;0\right)$. **D.** $E\left(2;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do $E\in Ox\Rightarrow E\left(a;0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{EM}=\left(-1-a;-2\right)$; $\overrightarrow{EN}=\left(3-a;2\right)$; $\overrightarrow{EP}=\left(4-a;-1\right)$

Suy ra $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}=\left(6-3a;-1\right)$.

Do đó: $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|=\sqrt{\left(6-3a\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{\left(6-3a\right)^2+1}\geq 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ bằng 1.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $6-3a=0\Leftrightarrow a=2$.

Vậy $E\left(2;0\right)$.

CHƯƠNG IV VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}.\vec{v}$ là

A. 11. **B.** -10. **C.** 5. **D.** -2.

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.

Câu 3: Cho $A(0;3)$; $B(4;0)$; $C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-4$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=4$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{v}=(2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

Câu 9: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

C. $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{-a^2}{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a;AC=a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $-a^2$. **D.** $-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $\left|\vec{a}\right|=x$, $\left|\vec{b}\right|=y$ và $\left|\vec{z}\right|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=\dfrac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\dfrac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\dfrac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

Câu 18: Cho ΔABC đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. **B.** $\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D; $AB=AD=a, CD=2a.$ Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-a^2}{2}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a;BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60°$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2.

Câu 26: Cho tam giác *ABC* có *AB=5, AC=8, BC=7* thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=180^0$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

A. $90°$. **B.** $36°52'$. **C.** $143°7'$. **D.** $53°7'$.

Câu 30: Cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

A. $(\vec{a};\vec{b})=45^0$. **B.** $(\vec{a};\vec{b})=0^0$. **C.** $(\vec{a};\vec{b})=180^0$. **D.** $(\vec{a};\vec{b})=90^0$.

Câu 31: Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha=60^0$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{3}{8}$.

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=60°$. **B.** $\alpha=120°$. **C.** $\alpha=45°$. **D.** $\alpha=135°$.

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $0°$. **B.** $90°$. **C.** $180°$. **D.** $60°$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 36: Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=9\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-9\end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

Câu 37: Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38: Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u}=-\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

C. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;6)$. **C.** $C(-6;0)$. **D.** $C(0;-6)$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 42: Cho tam giác ABC có $A(-1;0), B(4;0), C(0;m)$, $m\neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

A. $m=-\sqrt{6}$. **B.** $m=\pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m=3\sqrt{6}$. **D.** $m=\pm\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là

A. 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Câu 45: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$. **B.** $H(-8;-27)$. **C.** $H(-2;5)$. **D.** $H(3;14)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy; cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M.

A. $M(0;-3)$. **B.** $M(0;3)$. **C.** $M(0;4)$. **D.** $M(0;-4)$.

Câu 48: Trên hệ trục tọa độ xOy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$.Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Câu 49: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm x để AM vuông góc với NP.

A. $x=\frac{5a}{12}$. **B.** $x=\frac{a}{2}$. **C.** $x=\frac{4a}{5}$. **D.** $x=\frac{7a}{12}$.

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Biết $A(3;-1),B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.

A. $a+3b=\frac{2}{3}$. **B.** $a+3b=-\frac{4}{3}$. **C.** $a+3b=1$. **D.** $a+3b=-2$.

Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM\perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0),B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 53: Cho hai điểm B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

C. Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

Câu 54: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB.

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC.

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Câu 55: Cho tam giác ABC, điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB ,điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính IJ. **B.** Đường tròn đường kính IK.

C. Đường tròn đường kính JK. **D.** Đường trung trực đoạn JK.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho $\overrightarrow{AB}=(6;2)$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$?

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{10}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=20$. **C.** $AB=4\sqrt{10}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\sqrt{10}$.

Câu 57: Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=\sqrt{13}$. **B.** $AB=3\sqrt{2}$. **C.** $AB=4$. **D.** $AB=5$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$; $B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M. Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. **D.** Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?

A. $(-2;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(0;12)$. **D.** $(2;6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17); B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC=\sqrt{13}$.

A. $C(-14;-27)$. **B.** $C(-8;-23)$.

C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. **D.** $C(14;27)$ và $C(8;23)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=5$. **D.** $T=17$.

CHƯƠNG IV VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}.\vec{v}$ là

A. 11. **B.** -10. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Với $\begin{cases}\vec{u}=(2;-1)\\ \vec{v}=(-3;4)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=2.(-3)+(-1)4=-10$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+5.1=-1$.

Câu 3: Cho $A(0;3)$; $B(4;0)$; $C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-6;-5)$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=4.(-6)+(-3).(-5)=-9$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-4$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=4$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $\vec{u}=(1;3)$ và $\vec{v}=(-2;2)$.

Khi đó $\vec{u}.\vec{v} = 1.(-2) + 3.2 = 4$.

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = (2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v} = -1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v} = (2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1;3)$.

Vậy $\vec{u}.\vec{v} = 1.2 + 3.(-1) = -1$.

Câu 6: Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}.\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 4a.4a.\cos 60° = 4a.4a.\dfrac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a^2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp CD$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$.

Câu 9: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

C. $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 = |\vec{a}.\vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

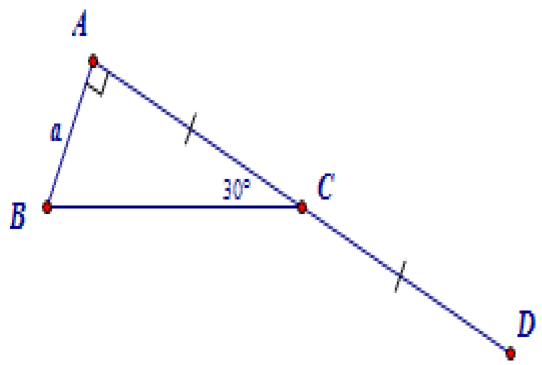
$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2 = \left[\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]^2 = \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2.\cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ nên C sai.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C.

Khi đó: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = CD.CB.\cos 150° = a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

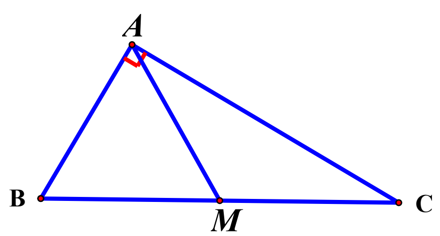
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = a.a.\cos 120° = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.

$AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$.

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60°$.

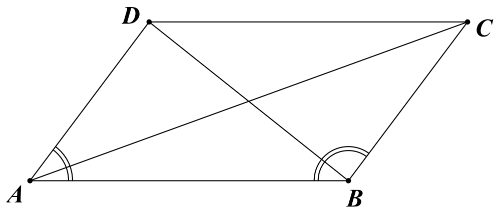
Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = -a.a.\cos 60° = -\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



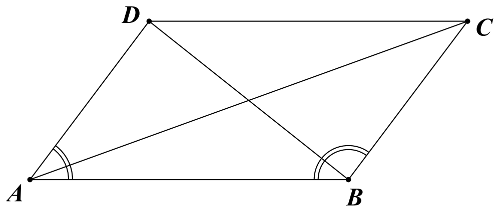
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = AB.AD.\cos\widehat{BAD} = 2.1.\cos 60° = 1$.

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết: $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 120°$.

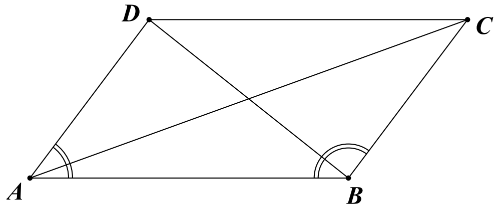
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) = AB.BC.\cos\widehat{ABC} = 2.1.\cos 120° = -1$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

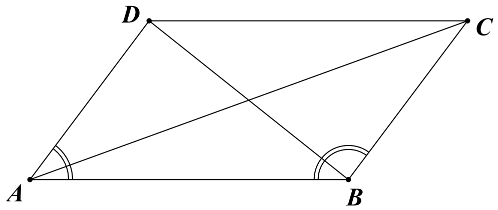
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow AC^2=2^2+1^2+2.1\Rightarrow AC=\sqrt{7}$.

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow BD^2=2^2+1^2+2.(-1)$

$\Rightarrow BD=\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ và $|\vec{z}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=\dfrac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\dfrac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\dfrac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-2\vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2A=4\vec{c}^2$.

$\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(-2\vec{c}\right)^2$.

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

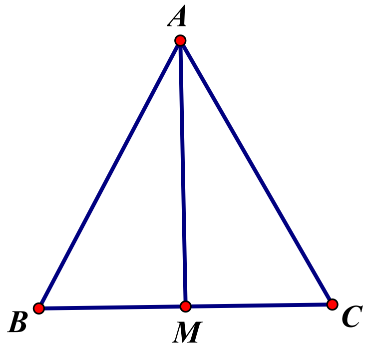
$x^2+y^2+z^2+2A=4z^2\Rightarrow A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 18: Cho ΔABC đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=\widehat{BAM}=30°$.

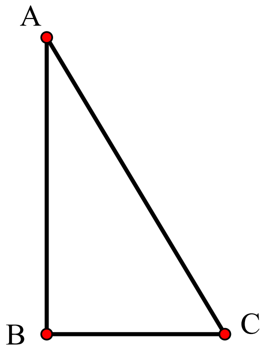
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-6.\dfrac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30°=-27$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. **B.** $\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-AC.CB.\cos\widehat{ACB}=-AC.CB.\dfrac{CB}{AC}=-BC^2=-3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

$\Rightarrow\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=4+3+2.2.\sqrt{3}.\cos 30^0=13\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-a^2}{2}$.

Lời giải

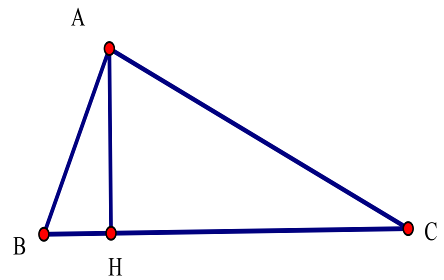
Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=AD^2-2AB^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$
$=AD^2-2AB^2=-a^2$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH\perp BC, H\in BC$.

Có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH.BC=BA^2=a^2$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{ABC}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\dfrac{4}{BC}=4.4=16$

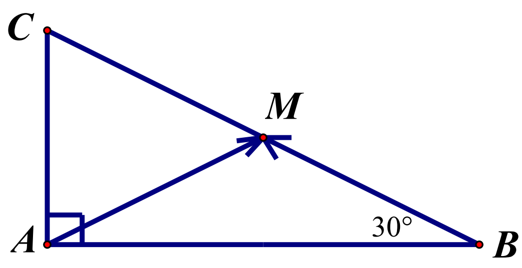
Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Lời giải

.

Chọn A



Ta có: $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM}^2$

$BC=\dfrac{AC}{\sin 30°}=4;\ AB=AC.\cot 30°=2\sqrt{3};BM=2$

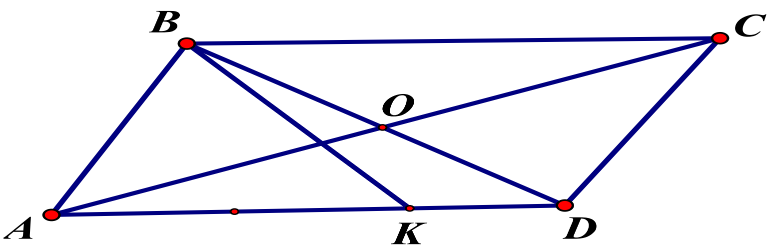
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2=4;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2\sqrt{3}.2.\cos 150°=-6\ \Rightarrow P=-2\Rightarrow$ Chọn A

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60°$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-AB^2+\dfrac{2}{3}AD^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-4a^2+\dfrac{2}{3}.9a^2-\dfrac{1}{3}2a.3a.cos60°=a^2$

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2.5.8}=\dfrac{1}{2}$

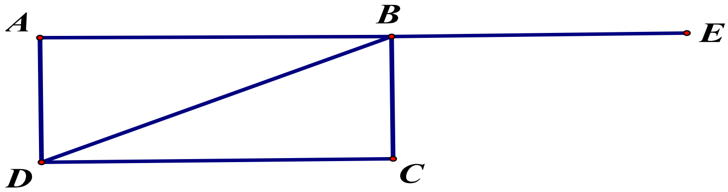
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=5.8.\dfrac{1}{2}=20$

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$

Xét ΔABD có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{89}$

Xét ΔABD có $cos\,\widehat{ABD}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right)=cos\,\widehat{DBE}=-cos\,\widehat{ABD}=-\dfrac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right)=8.\sqrt{89}.\left(\dfrac{-8}{\sqrt{89}}\right)=-64$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=180^0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.cos\alpha$. Mà $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ nên $cos\alpha=-1$. Suy ra, $\alpha=180^0$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

A. $90°$. **B.** $36°52'$. **C.** $143°7'$. **D.** $53°7'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2);\overrightarrow{AC}=(2;-1)$.

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-2-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{-4}{5}\Rightarrow\widehat{BAC}=143°7'.$$

Câu 30: Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng:

A. $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^0$. **B.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0^0$. **C.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=180^0$. **D.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90^0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \\ \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a};\vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 180^0$.

Câu 31: Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a}-\vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$|\vec{a}-\vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2.4.3.\cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{8}$

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{4.1+3.7}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\alpha = 45^0$.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (3;-7)$. Tính góc α giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 120°$. **C.** $\alpha = 45°$. **D.** $\alpha = 135°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135°$.

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2;1)$ và $\vec{b} = (3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $0°$. **B.** $90°$. **C.** $180°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2.3+1.(-6)}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90°$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|-\vec{a}\right|$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left|-\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60°$.

Câu 36: Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y = -9$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 9 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -9 \end{array}\right.$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2} = 6-4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4y \geq 0 \\ 90+10y^2 = (6-4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

Câu 37: Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 + \sqrt{2}.2.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90°.$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38: Tìm x để hai vecto $\vec{a} = (x;2)$ và $\vec{b} = (2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

Vậy $x=3$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u}=-\vec{v}$.
B. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
C. $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$.
D. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$. Do đó, $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(6;0)$.
B. $C(0;6)$.
C. $C(-6;0)$.
D. $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn B

$C\in Oy \Leftrightarrow C(0;y)$

$\overrightarrow{AB}=(-4;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;y-2)$.

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại A $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow y=6.$

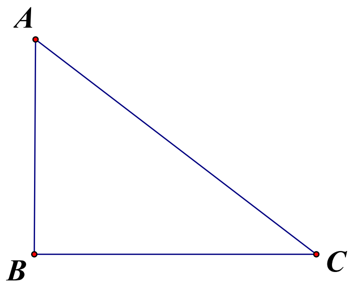
Vậy $C(0;6)$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$.
B. $(0;-3)$.
C. $(3;0)$.
D. $(-3;0)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1);\overrightarrow{AC}=(6;-4);\overrightarrow{BC}=(5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.5+1.(-5)=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0;3)$.

Câu13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 4m+2.(2m-2)=0\Leftrightarrow 8m-4=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho tam giác ABC có $A(-1;0),B(4;0),C(0;m)$, $m\neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

A. $m=-\sqrt{6}$. **B.** $m=\pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m=3\sqrt{6}$. **D.** $m=\pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $G\left(1;\frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA}=\left(-2;-\frac{m}{3}\right)$; $\overrightarrow{GB}=\left(3;-\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=0\Leftrightarrow -6+\frac{m^2}{9}=0\Leftrightarrow m=\pm 3\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC có $A(1;-1),B(3;-3),C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là

A. 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;3)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$.

B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$.

D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi $A(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC\\AB\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB^2=AC^2\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-x)^2+(3-y)^2=(3-x)^2+(1-y)^2\\(-1-x)(3-x)+(3-y)(1-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y\\x^2+y^2-2x-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y\\x^2-2x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ y=0\\x=2,\ y=4\end{array}\right..$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 45: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4),B(3;4),C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tính được $AB=3,BC=4$ và $AC=5$. Suy ra $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0);B(-1;1);C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$. **B.** $H(-8;-27)$. **C.** $H(-2;5)$. **D.** $H(3;14)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}AH\perp BC\\BH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}(1)$.

Ta có:

$\overrightarrow{AH}=(x-1;y)$; $\overrightarrow{BC}=(6;-2)$; $\overrightarrow{BH}=(x+1;y-1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-1)$.

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}6(x-1)-2.y=0\\4(x+1)-1.(y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=6\\4x-y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8\\y=-27\end{cases}$.

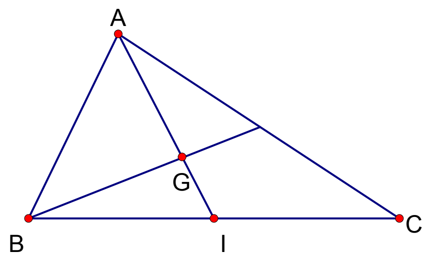
Vậy $H(-8;-27)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy; cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M.

A. $M(0;-3)$. **B.** $M(0;3)$. **C.** $M(0;4)$. **D.** $M(0;-4)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có G là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3x_G-x_A-x_B\\y_C=3y_G-y_A-y_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3(-2)-(-1)-1=-6\\y_C=3.\dfrac{2}{3}-1-3=-2\end{cases}$

$\Rightarrow C(-6;-2)$

Ta có $M\in Oy\Rightarrow M(0;m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}\\y_I=\dfrac{y_B+y_C}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_I=-\dfrac{5}{2}\\y_I=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Ta có

$\overrightarrow{BM}=(-1;m-3)$; $\overrightarrow{CM}=(6;m+2)$; $\overrightarrow{CB}=(7;5)$; $\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{5}{2};m-\dfrac{1}{2}\right)$

ΔMBC vuông cân tại M khi: $\begin{cases}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0\\\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{CB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)(m+2)-6=0\\5\left(m-\dfrac{1}{2}\right)+7.\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12=0\\m=-3\end{cases}\Leftrightarrow m=-3\Rightarrow M(0;-3)$.

Câu 48: Trên hệ trục tọa độ xOy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$.Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x;y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD}=(x-4;y-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-5;-15)$; $\overrightarrow{BD}=(x-2;y-7)$ nên ta có hệ

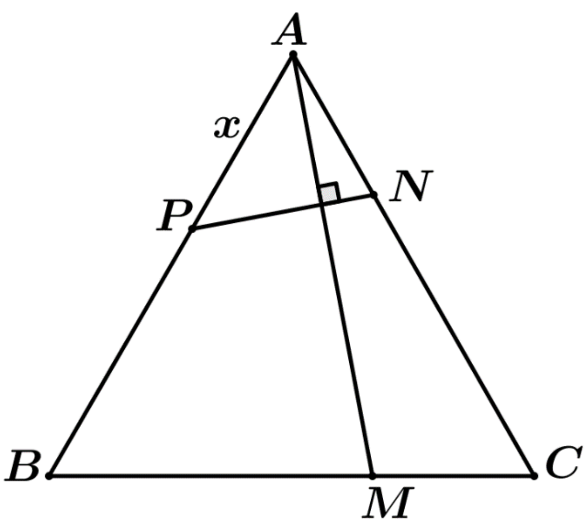
$$\begin{cases}x-4+3(y-3)=0\\3(x-2)-y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}.$$

Câu 49: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy M,N,P lần lượt nằm trên ba cạnh BC,CA,AB sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm x để AM vuông góc với NP.

A. $x=\dfrac{5a}{12}$. **B.** $x=\dfrac{a}{2}$. **C.** $x=\dfrac{4a}{5}$. **D.** $x=\dfrac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{b}\\\overrightarrow{AC}=\vec{c}\end{cases}$, ta có $|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$ và $\vec{b}.\vec{c}=a.a.cos60^0=\dfrac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{x}{a}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{x}{a}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3a}(-3x\vec{b}+a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM\perp PN\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow(\vec{b}+2\vec{c})(-3x\vec{b}+a\vec{c})=0$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a\left(\vec{b}.\vec{c}\right) - 6x\left(\vec{b}.\vec{c}\right) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

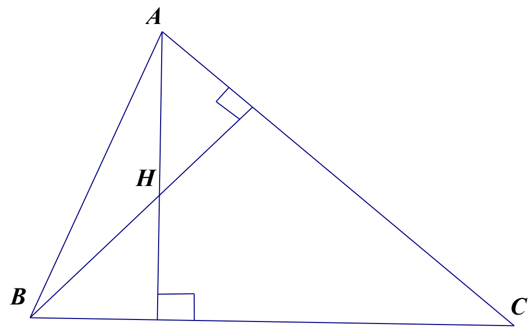
$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Biết $A(3;-1), B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.

A. $a+3b=\frac{2}{3}$. **B.** $a+3b=-\frac{4}{3}$. **C.** $a+3b=1$. **D.** $a+3b=-2$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $C(x_C;y_C)$ và $H(x_H;y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1;-4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2;-6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2;-3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

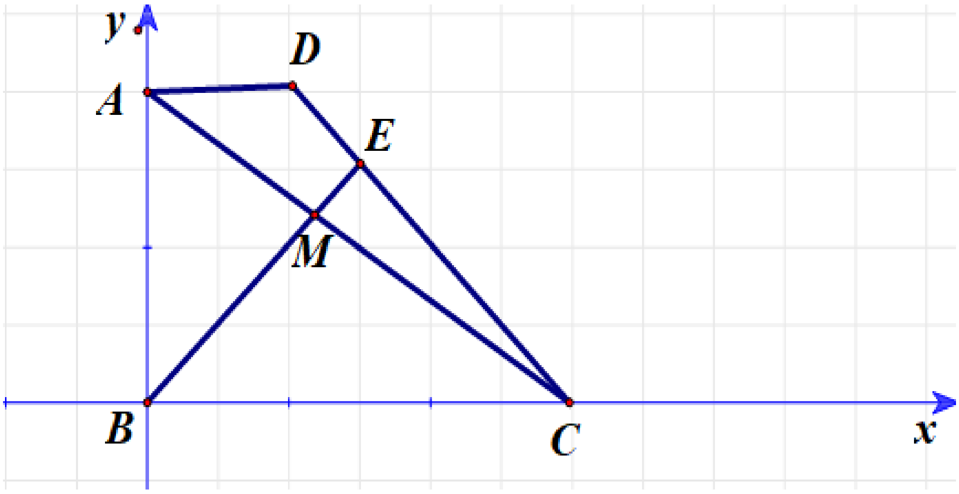
Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.



Theo bài ra ta có $B(0;0),\ A(0;2),\ C(3;0),\ D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(3;-2)$. Phương trình tham số của đthẳng AC là $\begin{cases} x=3t \\ y=2-2t \end{cases}$

Gọi $M\in AC\Rightarrow M(3t;2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM}=(3t;2-2t)$ và $\overrightarrow{DC}=(2;-2)$.

Để $BM\perp DC$ thì $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DC}=0\Leftrightarrow 6t-4+4t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}\ \Rightarrow M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{-4}{5}\right)\Rightarrow AM=\dfrac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC}=(3;-2)\Rightarrow AC=\sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0),B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AH}=(a+3;b)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;6)$, $\overrightarrow{BH}=(a-3;b)$, $\overrightarrow{AC}=(5;6)$.

Vì H là trực tâm ΔABC nên $\begin{cases} AH\perp BC \\ BH\perp AC \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a+6b=3 \\ 5a+6b=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases}$.

$\Rightarrow a+6b=7$.

Câu 53: Cho hai điểm B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

C. Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CM}^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB}=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.

Câu 54: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB.

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC.

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Câu 55: Cho tam giác ABC, điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB, điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

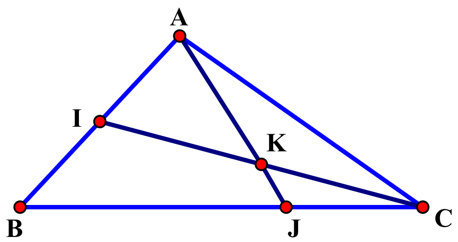
A. Đường tròn đường kính IJ.

B. Đường tròn đường kính IK.

C. Đường tròn đường kính JK.

D. Đường trung trực đoạn JK.

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$ nên

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MJ}\right).\left(4\overrightarrow{MK}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK.

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho $\overrightarrow{AB}=(6;2)$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$?

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{10}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=20$. **C.** $AB=4\sqrt{10}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Câu 57: Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=\sqrt{13}$. **B.** $AB=3\sqrt{2}$. **C.** $AB=4$. **D.** $AB=5$.

Lời giải

Chọn D

$AB=\sqrt{(-3-1)^2+(3-0)^2}=5$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$; $B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M. Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0;y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-1)^2+(1-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4-4y=1-2y \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$. Vậy $OM=\frac{3}{2}$.

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. **D.** Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2)$; $\overrightarrow{DC}=(0;-2)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;-4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề đúng.

Suy ra AC cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M=(0;-1)$, suy ra đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2)$, suy ra $AB=|-2|=2$; $\overrightarrow{AD}=(-4;-2)$, suy ra $AD=\sqrt{20}$, nên $AB\neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề sai.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?

A. $(-2;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(0;12)$. **D.** $(2;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC}=(-1;3)\Rightarrow AC=\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{BC}=(-4;2)\Rightarrow BC=\sqrt{20}$.

Nhận thấy $AB^2+AC^2=BC^2$ và $AB=AC$ nên ΔABC là tam giác vuông cân tại A, suy ra tâm I là trung điểm cạnh huyền BC. Vậy $I(0;6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17); B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC=\sqrt{13}$.

A. $C(-14;-27)$. **B.** $C(-8;-23)$.

C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. **D.** $C(14;27)$ và $C(8;23)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $C(x_C;y_C)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Với $\overrightarrow{BC}=(x_C+11;y_C+25)$; $\overrightarrow{BA}=(12;8)$ ta có: $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$ $(k>0)$ $\Leftrightarrow \dfrac{x_C+11}{12}=\dfrac{y_C+25}{8}=k$

$\Leftrightarrow 8x_C-12y_C-212=0 \Leftrightarrow y_C=\dfrac{8x_C-212}{12} \Leftrightarrow y_C=\dfrac{2x_C-53}{3}$ (1)

+) $BC=\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_C+11)^2+(y_C+25)^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow (x_C+11)^2+(y_C+25)^2=13$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được:

$$\left(x_C+11\right)^2+\left(\frac{2x_C-53}{3}+25\right)^2=13 \Leftrightarrow \left(x_C+11\right)^2+\left(\frac{2x_C+22}{3}\right)^2=13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}\left(x_C+11\right)^2=13$$

$$\Leftrightarrow \left(x_C+11\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_C=-14 \\ x_C=-8 \end{array}\right.$$

Với $x_C=-14$ thế vào (1) ta được: $y_C=\frac{2.(-14)-53}{3}=-27$.

Khi đó $k=\frac{-14+11}{12}=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}<0$.

Với $x_C=-8$ thế vào (1) ta được: $y_C=\frac{2.(-8)-53}{3}=-23$.

Khi đó $k=\frac{-8+11}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}>0$.

Vậy $C\left(-8;-23\right)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M\left(3;1\right)$. Giả sử $A\left(a;0\right)$ và $B\left(0;b\right)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=5$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA}=\left(a-3;-1\right)$, $\overrightarrow{MB}=\left(-3;b-1\right)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow -3\left(a-3\right)-\left(b-1\right)=0 \Leftrightarrow b=10-3a$ (*)

Với $a\geq 0,\ b\geq 0$ suy ra $0\leq a\leq \frac{10}{3}$ (**)

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}MA.MB=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-3\right)^2+1}.\sqrt{9+\left(b-1\right)^2}=\frac{3}{2}\left(a^2-6a+10\right)=\frac{3}{2}\left(a-3\right)^2+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB}=\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=3$, khi đó $b=1$.

Vậy $T=a^2+b^2=10$.