CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=6x-y$ là:

A. $\frac{89}{12}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{17}{12}$. **D.** $\frac{82}{3}$.

Câu 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y \neq -1$ và $x^2+y^2+xy=x+y+1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{x+y+1}$. Tính $M+m$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là:

N.C.Đ

A. $17-2\sqrt{6}$. **B.** $17+\sqrt{6}$ **C.** $17+2\sqrt{6}$ **D.** $17-\sqrt{6}$.

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-4x+6y+4+\sqrt{y^2+6y+10}=\sqrt{6+4x-x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|\sqrt{x^2+y^2}-a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M \geq 2m$?

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Câu 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 6. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. (-6 ;-5). **B.** (-10 ;-9). **C.** (-11 ;-9). **D.** (-5 ;-4).

Câu 7. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4;7)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(7;10)$.

Câu 8. Cho số phức $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Thỏa mãn $|z - 2 + i| = |z + 2 + 5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H = \dfrac{x^2 + y^2 - 3y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}}$. Giá trị của $2x + y$ bằng:

A. -6 **B.** $-6 + \sqrt{5}$

C. $-3 - \sqrt{5}$ **D.** $-6 - \sqrt{5}$

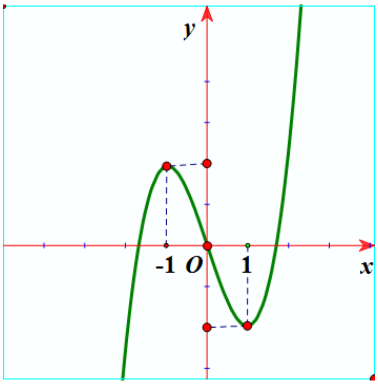
Câu 9. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x - 9) + y(y - 9) + xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x + 2y - 9}{x + y + 10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q = f\left(\dfrac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-4 - 3\sqrt{2}$. **B.** $-4 - 5\sqrt{2}$. **C.** $-4 - 4\sqrt{2}$. **D.** $-4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2 + 5y^2 = 1 + 4xy$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\dfrac{2x - 3y - 3}{-x + 4y + 4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\dfrac{-1436}{1331}$ **B.** $\dfrac{3380}{1331}$ **C.** $\dfrac{1436}{1331}$ **D.** $\dfrac{1944}{1331}$

Câu 13. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - 2t^2 + 2$ Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\dfrac{x + y - 1}{x + 3y - 2}\right)$. Tổng $M + m$

A. $4\sqrt{3} + 2$. **B.** $8\sqrt{3} - 2$. **C.** 66. **D.** $9\sqrt{3} + 17$

Câu 14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ và hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M + m$

A. 3. **B.** $\dfrac{28}{9}$. **C.** $\dfrac{19}{9}$. **D.** 2

Câu 15. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn: $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=9(xy+2yz+zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{(x+y+z)^3}$ bằng

A. 18. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 24.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2x^3+6x^2+1$ và các số thực m, n thỏa mãn $m^2-4mn+5n^2=2\sqrt{2}n-1$.

Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\dfrac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

A. -99. **B.** -100. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 17. Cho $x,\ y>0$ thỏa mãn $x+y=\dfrac{3}{2}$ và biểu thức $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính x^2+y^2.

A. $\dfrac{25}{16}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{2313}{1156}$. **D.** $\dfrac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0\le x,\ y\le 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{383}{16}$. **B.** $\dfrac{136}{3}$. **C.** $\dfrac{25}{2}$. **D.** $\dfrac{391}{16}$.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ tiếp xúc với parabol $y=ax^2+b$ tại điểm có hoành độ $x\in(0;2)$. Giá trị lớn nhất của $S=a+b$ là.

A. $S_{\max}=-1$. **B.** $S_{\max}=0$. **C.** $S_{\max}=1$. **D.** $S_{\max}=-3$.

Câu 20. Hàm số $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+...+(x-2019)^2$ $(x\in\mathbb{R})$ đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 2019. **D.** 0.

Câu 21. Hàm số $y=x^4+ax^3+bx^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+b$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 22. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4$. Tính $P=a+2b+3c$ khi biểu thức $|2a+b-2c+7|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=7$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-7$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a+4b-6c=10$ và $a+c=2$. Tính giá trị biểu thức $P=3a+2b+c$ khi $Q=a^2+b^2+c^2-14a-8b+18c$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 10. **B.** -10. **C.** 12. **D.** -12.

Câu 24. Cho phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 4.

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+4x-2$ và $g(x)=-x^3+bx^2-2x+3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

BỔ SUNG BÀI TẬP TỰ LUẬN HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1. Cho các số thực *a, b, c* thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc$

Bài 2: Cho $x,y,z\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Bài 3: Cho các số thực không âm *a, b, c* thỏa mãn $a\le 1, b\le 2, c\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B=\frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c}+\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2+8}}$$

Bài 4: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x(y^2+z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}+\dfrac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Bài 5: Cho $a>b>c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]$$

Bài 6: Cho $x,y,z>0; xyz(x+y+z)=20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x+y)(x+z)+y^2z^2$

Bài 7: Cho $a,b,c\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right|$

Bài 8: Cho $a,b,c>0, a^2+2b^2\le a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{a}-(c-1)^2$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a,c\ge 1; b\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(b+c)}{b+2c}+\frac{c(a+b)}{b+2a}+\frac{3(a+c)^2+2b^2+8}{4(3+ac)}$$

Bài 10: Cho các số thực $x,y,z\in[0;1]$ và $z=\min\{x,y,z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}}+\frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}}+\frac{2}{xy+xz-yz}$$

Bài 11: Cho các số $a,b,c\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc$$

- *Có nhiều bài toán tìm cực trị của biểu thức ta chỉ cần sử dụng các biến đổi cơ bản đã làm giảm được số biến. Tuy nhiên bài toán cực trị có dạng phân thức ta phải sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá mới làm giảm được số biến của bài toán.*
- *Các bất đẳng thức thường dùng*

1. Cho $a,b\in R$ ta có $(a+b)^2\ge 4ab$
2. Cho $a,b>0$ ta có $a^3+b^3\ge\dfrac{(a+b)^3}{4}\ge a^2b+ab^2$

3. Cho $a,b>0$ ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$

4. Cho $a,b,c\in R$ ta có $a^2+b^2+c^2\ge \frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca$

5. Cho $a,b,c\in R$ ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

6. Cho $a,b,c>0$ ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$

7. Cho $a,b>0$ và $ab\ge 1$ ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

8. Cho $a,b>0$ và $ab\le 1$ ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Nhận xét: *Trên đây chỉ là một số BĐT tiêu biểu thường sử dụng để tìm cực trị bằng cách dồn biến, ngoài ra ta có thể sử dụng các hệ quả khác hoặc các bất đẳng thức khác. Ứng dụng các BĐT trên để giải các bài toán sau đây.*

Bài 12: Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+b^2+2ab}{c^2+4(ab+bc+ca)}$

Bài 13: Cho các số không âm *a, b, c* thỏa mãn $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Bài 14: Cho $x,y,z\ge 0$ thoả mãn $x+y+z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+y^3+16z^3}{(x+y+z)^3}$$

N.C.Đ

Bài 15: Cho *x, y, z* là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}$$

Bài 16: Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 17: Cho các số thực dương *x, y, z* thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z\ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{10y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{x+2y}{2x+3y}$

Bài 18: Cho các số thực dương *a, b, c* thay đổi thỏa mãn điều kiện $a\ge b, a\ge c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{5(a+b+c)}+\frac{b}{5a-2c}+\frac{c}{5a-2b}$

Bài 19: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $0<x<y<z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^3z}{y^2(xz+y^2)}+\frac{y^4}{z^2(xz+y^2)}+\frac{z^3+15x^3}{x^2z}$$

Bài 20: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$

Bài 21: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a\ge b\ge c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{\left(a^2+c^2\right)\sqrt{ab+bc+ca}}{abc\left(a+b+c\right)}$$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-\frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}$

Bài 23: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{2z^2}{y^2+z^2}-\frac{3z}{2x+z}$

N.C.Đ

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\dfrac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=6x-y$ là:

A. $\dfrac{89}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{12}$. **D.** $\dfrac{82}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $y>0$ nên ta có :

$$\frac{9x^3+x}{y+1}=\sqrt{3y+2}\Leftrightarrow 9x^3+x=\sqrt{3y+2}\,(y+1)\Leftrightarrow\left[(3x)^3+3x\right]=\left[\sqrt{(3y+2)^3}+\sqrt{3y+2}\right]$$

$\Leftrightarrow f(3x)=f\left(\sqrt{3y+2}\right)$ với $f(t)=t^3+t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $3x=\sqrt{3y+2}$ hay $y=3x^2-\dfrac{2}{3}$. Do $y>0$ và $3x=\sqrt{3y+2}$ nên $x>\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $S=6x-y=6x-3x^2+\dfrac{2}{3}=-3x^2+6x+\dfrac{2}{3}=-3(x-1)^2+\dfrac{11}{3}\le\dfrac{11}{3}$.

Do đó $\max S=\dfrac{11}{3}$ khi $x=1$.

Câu 2. Cho $x, y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y\ne -1$ và $x^2+y^2+xy=x+y+1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{x+y+1}$. Tính $M+m$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Với điều kiện $x+y\ne -1; x^2+y^2+xy=x+y+1$ ta có $P=\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}$.

Nếu $y=0$ thì $\begin{cases}x\ne -1\\ x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Khi đó $P=0$.

Nếu $y\ne 0$ thì $P=\dfrac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Ta có $P=\dfrac{t}{t^2+t+1}$, $t\in\mathbb{R}$.

Xét $f(t)=\dfrac{t}{t^2+t+1}$, $t\in\mathbb{R}$. $f'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+t+1\right)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
t & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\
\hline
f'(t) & & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
f(t) & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & \frac{1}{3} & \searrow & 0
\end{array}$$

Từ bảng biến thiên:

$$M=\frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y}=1 \\ x^2+y^2+xy=x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

$$m=-1 \text{ tại } \begin{cases} \frac{x}{y}=-1 \\ x^2+y^2+xy=x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $M+m=-\frac{2}{3}$.

Cách 2:

Với điều kiện $x+y\neq -1; x^2+y^2+xy=x+y+1$ ta có $P=\frac{xy}{x^2+y^2+xy}$.

$\Rightarrow Px^2+xy(P-1)+Py^2=0$ (*)

+) Nếu $P=0$ thì $x=0$ hoặc $y=0$.

+) Nếu $P\neq 0$ thì $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$.

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $\Delta_x=-y^2(P+1)(3P-1)\geq 0 \Rightarrow -1\leq P\leq \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$M=\frac{1}{3} \text{ tại } \begin{cases} x=\frac{-y(P-1)}{2P}=y \\ x^2+y^2+xy=x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

$$m=-1 \text{ tại } \begin{cases} x=\frac{-y(P-1)}{2P}=-y \\ x^2+y^2+xy=x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do đó $M=\frac{1}{3}$; m $=-1$. Vậy $M+m=-\frac{2}{3}$.

Câu 3. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là:

A. $17-2\sqrt{6}$. **B.** $17+\sqrt{6}$ **C.** $17+2\sqrt{6}$ **D.** $17-\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 - xy + y^2 = 1 \leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy \le 1 + \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow -2 \le x + y \le 2$

Mặt khác: $\frac{2}{3} \le x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \frac{1}{3}\left[(x+y)^2 \_ 2\right] \le 2$

Đặt $t = x^2 + y^2 \left(\frac{2}{3} \le t \le 2\right)$. Vậy $P = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1} = g(t)$

Xét hàm số $g(t) = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1}\left(t \in \left[\frac{2}{3};2\right]\right)$

$g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 5}{t+1}\left(t \in \left[\frac{2}{3};2\right]\right)$; $g'(t) = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{6} \in \left[\frac{2}{3};2\right]$.

Vậy $\min\limits_{t \in \left[\frac{2}{3};2\right]} g(t) = \frac{11}{15}$; $\max\limits_{t \in \left[\frac{2}{3};2\right]} g(t) = 6 - 2\sqrt{6}$

Vậy $A = M + 15m = 17 - 2\sqrt{6}$

Nhận xét: đây là bài toán thường gặp trong các đề thi TSĐH những năm trước đây. Tư tưởng của các bài toán này là sử dụng ứng dụng đạo hàm tìm GTNN, GTLN của hàm số sau khi áp dụng phương pháp dồn biến.

Câu 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của tham số a để $M \ge 2m$?

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2}$. (*)

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$, có $f'(t) = 2t + 1 > 0$, $\forall t > 0$.

Ta có hàm $y = f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, $\sqrt{y^2 + 6y + 10} \in [0;+\infty)$, $\sqrt{6 + 4x - x^2} \in [0;+\infty)$.

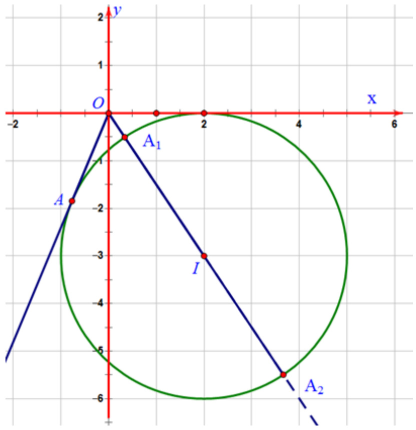
Nên (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{y^2 + 6y + 10}\right) = f\left(\sqrt{6 + 4x - x^2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Xét điểm $A(x;y)$ thuộc đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Ta có $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 3$ nên điểm $O(0;0)$ nằm ngoài (C).



Gọi $A_1,\ A_2$ là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C).

$\forall A(x;y)\in(C)$: $OA_1 \le OA \le OA_2$, với $OA_1 = OI - R = \sqrt{13}-3$ và $OA_2 = OI + R = \sqrt{13}+3$.

Tức là ta có $\sqrt{13}-3 \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{13}+3 \Leftrightarrow \sqrt{13}-3-a \le \sqrt{x^2+y^2}-a \le \sqrt{13}+3-a$.

Th1 : $\sqrt{13}-3-a \ge 0 \Leftrightarrow a \le \sqrt{13}-3,\ (1)$

Khi đó $M = \sqrt{13}+3-a$ và $m = \sqrt{13}-3-a$.

$M \ge 2m \Leftrightarrow \sqrt{13}+3-a \ge 2\left(\sqrt{13}-3-a\right) \Leftrightarrow a \ge \sqrt{13}-9$.

Kết hợp với điều kiện (1) và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có

$a \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Th2: $\sqrt{13}+3-a \le 0 \Leftrightarrow a \ge \sqrt{13}+3,\ (**)$

Khi đó $M = a-\sqrt{13}+3$ và $m = a-\sqrt{13}-3$.

$M \ge 2m \Leftrightarrow a-\sqrt{13}+3 \ge 2\left(a-\sqrt{13}-3\right) \Leftrightarrow a \le \sqrt{13}+9$.

Kết hợp với điều kiện $(**)$ và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có $a \in \{7;8;9;10\}$.

Th3: $\begin{cases}\sqrt{13}-3-a<0\\ \sqrt{13}+3-a>0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13}-3 < a < \sqrt{13}+3,(***)$

Khi đó $M > 0$ và $m = 0$ nên ta luôn có $M \ge 2m$

Kết hợp điều kiện $(***)$ và a nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ ta có $a \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy $a \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 5. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$(x-3)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow x^2+y^2-6x-2y+5=0$.

$$P=\frac{\left(3y^2+4xy+7x+4y-1\right)+\left(x^2+y^2-6x-2y+5\right)}{x+2y+1}$$
$$=\frac{4y^2+4xy+x^2+x+2y+4}{x+2y+1}=\frac{\left(2y+x\right)^2+\left(x+2y\right)+4}{x+2y+1}.$$

Đặt $t=x+2y$.

$$\left(1^2+2^2\right)\left[\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2\right]\geq\left[\left(x-3\right)+\left(2y-2\right)\right]^2\Rightarrow\left(x+2y-5\right)^2\leq 25\Leftrightarrow 0\leq x+2y\leq 10.$$

$$P=\frac{t^2+t+4}{t+1}=t+\frac{4}{t+1},\ 0\leq t\leq 10.$$

Sử dụng MTCT $\Rightarrow \min P=3$ khi $t=1$.

Câu 6. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. (-6 ;-5). **B.** (-10 ;-9). **C.** (-11 ;-9). **D.** (-5 ;-4).

Lời giải

Chọn A

Vì a,b dương nên từ giả thiết $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$, ta chia hai vế cho ab

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

M.C.Đ

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số dương $(a+b)$ và $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$:

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{(a+b).2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$. Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>0)$.

Khi đó: $2t+1\geq 2\sqrt{2(t+2)}\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\geq\frac{5}{2}\\t\leq-\frac{3}{2}\end{array}\right.$. Do đó, ta có điều kiện $t\geq\frac{5}{2}$.

Mặt khác: $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=4\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]-9\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]$

$=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18.$

Đặt $f\left(t\right)=4t^3-9t^2-12t+18\Rightarrow f'(t)=12t^2-18t-12>0,\forall t\geq\frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\frac{23}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $\underset{t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)}{Min} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\\(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Câu 7. Cho các số thực x, y thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(4;7)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y=0\Rightarrow P=\frac{5}{3}$ loại phương án A và D.

Xét $y\neq 0\Rightarrow P=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}>0$ khi đó ta có biểu thức $\frac{5}{P}=\frac{3x^2-2xy-y^2}{x^2+xy+2y^2}$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho y^2 tâ được $\frac{5}{P}=\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+2}$.

Đặt $\frac{x}{y}=t\ (t\in R)\Rightarrow\frac{5}{P}=\frac{3t^2-2t-1}{t^2+t+2}=f(t)\Rightarrow f'(t)=\frac{5t^2+14t-3}{(t^2+t+2)^2}, f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=\frac{1}{5}\end{array}\right.$

Bảng Biến thiên hàm số $f(t)$.

t	$-\infty$		-3		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\frac{4}{7}$	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\le 4\Leftrightarrow\frac{5}{P}\le 4\Leftrightarrow P\ge\frac{5}{4}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $t=-3 \Leftrightarrow x=-3y$.

Câu 8. Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Thỏa mãn $|z-2+i|=|z+2+5i|$ và biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $H=\frac{x^2+y^2-3y+1}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}}$. Giá trị của $2x+y$ bằng:

A. -6 **B.** $-6+\sqrt{5}$

C. $-3-\sqrt{5}$ **D.** $-6-\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z-2+i|=|z+2+5i| \Leftrightarrow x+y+3=0$ (1). Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thì M thuộc đường thẳng d có phương trình (1).

Mà $H=\frac{x^2+y^2-3y+1}{\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}}$

$=\frac{(x+1)(x-1)+(y-1)(y-2)}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$ (2)

Đặt $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $M(x;y)$ thì

$\overrightarrow{AM}=(x+1;y-1)$, $\overrightarrow{MB}=(x-1;y-2) \Rightarrow \cos AMB=\frac{\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BM}}{AM.BM}=H$

Mà A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, M thuộc d nên $\cos AMB$ nhỏ nhất khi góc AMB lớn nhất.

Gọi (C) là đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng d tại C.

Phương trình đường thẳng AB là: $x-2y+3=0$.

Gọi E là giao điểm của AB và d thì $E(-3;0)$

Vậy C thỏa mãn: $EC^2=EA.EB=10$

$\Rightarrow C(-3+\sqrt{5};-\sqrt{5})$, $C(-3-\sqrt{5};\sqrt{5})$

Cho C để góc CEA nhọn ta được $C(-3+\sqrt{5};-\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} a=-3+\sqrt{5} \\ b=-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow 2a+b=-6+\sqrt{5}$

Câu 9. Cho x,y thỏa mãn $\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x,y thay đổi.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định; $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0 \Leftrightarrow (x+y)>0$.

Vì $x^2+y^2+xy+2=(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$ với $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$.

$\Leftrightarrow\log_3(x+y)-\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-9(x+y)$.

$\Leftrightarrow 2+\log_3(x+y)+9(x+y)=\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$.

$\Leftrightarrow\log_3 9(x+y)+9(x+y)=\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$ (1).

Đặt $f(t)=\log_3 t+t$ $(\forall t>0)$.

Có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0$ với $(\forall t>0)\Rightarrow$ f là hàm đồng biến với $(\forall t>0)$. Khi đó:

$f(9(x+y))=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow 9(x+y)=x^2+y^2+xy+2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2-9x-9y=0$.

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-36x-36y=0$.

$\Leftrightarrow(2x+y)^2-18(2x+y)+3(y-3)^2-19=0$.

Mà $\Leftrightarrow 3(y-3)^2\ge 0\Rightarrow(2x+y)^2-18(2x+y)-19\le 0\Rightarrow -1\le 2x+y\le 19$.

Mặt khác $P-1=\frac{2x+y-19}{x+y+10}\le 0\Rightarrow P\le 1$ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}2x+y=19\\ y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}$.

Câu 10. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2+y^2-xy=1\Leftrightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=1$. Ta đặt: $t=\frac{5x-y+2}{x+y+4}$

$\Rightarrow t(x+y+4)=5x-y+2\Leftrightarrow(t-5)x+(t+1)y+4t-2=0$.

$\Leftrightarrow(t-5)\left(x-\frac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}=2-4t$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(2-4t)^2=\left[(t-5)\left(x-\frac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow(2-4t)^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right].1$$

$\Leftrightarrow 12t^2-24t\le 0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$ với $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Có: $f'(t)=6t^2-6$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow 6t^2-6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$, $f\left(0\right)=1,\ f\left(1\right)=0,\ f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$

Do đó $M=f\left(0\right)=1,\ m=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

Bài toán gốc: Cho $ax^2+by^2+cxy=d$. Tìm MGT $t=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

Phương pháp giải:

Cách 1. Lượng giác hóa

Ta có: $ax^2+by^2+cxy=d\Leftrightarrow\left(a'x+b'y\right)^2+\left(c'x+d'y\right)^2=1$

Đặt $\begin{cases}a'x+b'y=\sin\alpha\\c'x+d'y=\cos\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\sin\alpha\\y=n\cos\alpha\end{cases}$

Suy ra: $t=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Leftrightarrow A\sin\alpha+B\cos\alpha=C$

Ta có: $A^2+B^2\ge C^2$ suy ra MGT của t.

Cách 2:

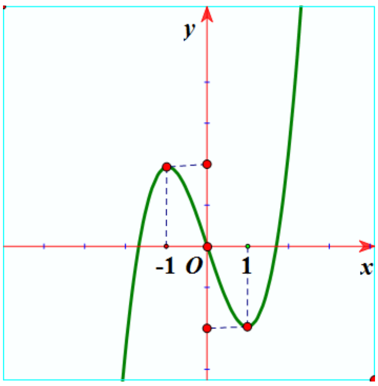
□ $$t=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Leftrightarrow A\left(mx+ny\right)+B\left(kx+qy\right)=C$$

□ Chọn m,n,k,q sao cho $\left(mx+ny\right)^2+\left(kx+qy\right)^2\equiv ax^2+by^2+cxy$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+k^2=a\\n^2+q^2=b\\2mn+2kq=c\end{cases}$$

□ Áp dụng BĐT Bunhiacoxki ta có: $C^2\le\left(A^2+B^2\right)d$ suy ra MGT của t.

Câu 12. Cho 2 số x,y thỏa mãn $x^2+5y^2=1+4xy$ và hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$.



Tích $M.m$ bằng

A. $\dfrac{-1436}{1331}$ **B.** $\dfrac{3380}{1331}$ **C.** $\dfrac{1436}{1331}$ **D.** $\dfrac{1944}{1331}$

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $f\left(x\right)=x^3-3x$

Từ $x^2+5y^2=1+4xy \Leftrightarrow (x-2y)^2+y^2=1$

Đặt $\begin{cases} x-2y=\sin\alpha \\ y=cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin\alpha+2cos\alpha \\ y=cos\alpha \end{cases}$. Khi đó

Xét $t=\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}=\dfrac{2(\sin\alpha+2cos\alpha)-3cos\alpha-3}{-(\sin\alpha+2cos\alpha)+4cos\alpha+4}=\dfrac{2\sin\alpha+cos\alpha-3}{-\sin\alpha+2cos\alpha+4}$

Ta có: $t(-\sin\alpha+2cos\alpha+4)=2\sin\alpha+cos\alpha-3 \Leftrightarrow (t+2)\sin\alpha+(1-2t)cos\alpha=4t+3$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (t+2)^2+(2t-1)^2\geq(4t+3)^2 \Leftrightarrow -2\leq t\leq\dfrac{-2}{11}$

Khi đó $P=f(t)=t^3-3t$ với $-2\leq t\leq\dfrac{-2}{11}$

Dễ dàng tìm được $M=2$, $m=\dfrac{718}{1331}$. Vậy $M.m=\dfrac{1436}{1331}$

Câu 13. Cho các số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x^2+5y^2+2xy=1$ và hàm số $f(t)=t^4-2t^2+2$

Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{x+y-1}{x+3y-2}\right)$. Tổng $M+m$

A. $4\sqrt{3}+2$. **B.** $8\sqrt{3}-2$. **C.** 66. **D.** $9\sqrt{3}+17$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2+5y^2+2xy=1 \Leftrightarrow (x+y)^2+4y^2=1$ N.C.Đ

Đặt $t=\dfrac{x+y+1}{x+3y-2} \Rightarrow t(x+3y-2)=x+y+1 \Leftrightarrow (2t+1)=(t-1)(x+y)+2ty$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$(2t+1)^2=\left[(t-1)(x+y)+2ty\right]^2\leq\left((t-1)^2+t^2\right)\left((x+y)^2+4y^2\right)\Rightarrow(2t+1)^2\leq(t-1)^2+t^2$

$\Leftrightarrow 2t^2+6t\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq t\leq 0$

Xét hàm số $f(t)=t^4-2t^2+2$ với $-3\leq t\leq 0$

Có: $f'(t)=4t^3-4t$, nên $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \\ t=1 \end{array}\right.$

$f(0)=2, f(-1)=1, f(-3)=65$

Do đó $M=f(-3)=65; m=f(-1)=1$

Vậy: $M+m=66$

Câu 14. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ và hàm số $f(x)=x^2-4x+5$

Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Tổng $M+m$

A. 3. **B.** $\dfrac{28}{9}$. **C.** $\dfrac{19}{9}$. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Viết lại điều kiện: $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zy=8-x(y+z) \\ y+z=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=8-x(5-x) \\ y+z=5-x \end{cases} \; (*)$

Vì x,y,z thỏa mãn $(*)$ nên y,z là hai nghiệm của phương trình

$T^2-(5-x)T+8-5x+x^2=0 \; (**)$

Điều kiện có nghiệm của phương trình $(**)$ là:

$\Delta=(5-x)^2-4(8-5x+x^2)\ge 0 \Leftrightarrow 3x^2-10x+7\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le \frac{7}{3}$

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+5$ với $1\le x\le \frac{7}{3}$

Có $f'(x)=2x-4$ nên $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f(1)=2;\ f(2)=1;\ f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{10}{9}$

Do đó $M=f(1)=2, m=f(2)=1$.

Vậy $M+m=3$.

Câu 15. Cho các số thực dương x,y,z thay đổi và thỏa mãn: $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$ bằng

A. 18. **B.** 12. N.C.Đ **C.** 16. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx) \Leftrightarrow 5x^2-9(y+z)x+5y^2+5z^2-18yz=0$

$\Leftrightarrow 5x^2-9(y+z)x-2(y+z)^2=-7(y-z)^2$.

Vì $-7(y-z)^2\le 0 \Rightarrow 5x^2-9(y+z)x-2(y+z)^2\le 0 \Leftrightarrow (x-2y-2z)(5x+y+z)\le 0$

$\Leftrightarrow x-2y-2z\le 0 \Leftrightarrow x\le 2(y+z) \Rightarrow 0<x\le 2(y+z)$.

Ta có: $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}\le \frac{2(y+z)}{y^2+z^2}-\frac{1}{(2y+2z+y+z)^3}$ Do $(y+z)^2\le 2(y^2+z^2)$

$\Rightarrow P\le \frac{2(y+z)}{\frac{1}{2}(y+z)^2}-\frac{1}{27(y+z)^3}=\frac{4}{y+z}-\frac{1}{27(y+z)^3}$

Đặt $t=\frac{1}{y+z}>0 \Rightarrow P=4t-\frac{t^3}{27}$. Đặt $f(t)=4t-\frac{t^3}{27} \Rightarrow f'(t)=4-\frac{t^2}{9}$

$\Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2=36 \Leftrightarrow t=6$ (vì $t>0$).

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$ là:

t	0		6		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t)\le 16 \Rightarrow P_{Max}=16$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} y=z \\ x=2y+2z \\ \dfrac{1}{y+z}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z=\dfrac{1}{12} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=2x^3+6x^2+1$ và các số thực m,n thỏa mãn $m^2-4mn+5n^2=2\sqrt{2}n-1$. Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\dfrac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng

A. -99. **B.** -100. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

N.C.Đ

+) Xét hệ thức $m^2-4mn+5n^2=2\sqrt{2}n-1$, (1).

+) Đặt $\dfrac{m-2\sqrt{2}}{n}=t$. Ta có $m-2\sqrt{2}=nt \Leftrightarrow m=nt+2\sqrt{2}$.

+) Thay vào (1) ta được: $\left(nt+2\sqrt{2}\right)^2-4\left(nt+2\sqrt{2}\right)n+5n^2=2\sqrt{2}n-1$

$\Leftrightarrow \left(t^2-4t+5\right)n^2+2\left(2\sqrt{2}t-5\sqrt{2}\right)n+9=0$ (2).

+) Có các số thực m,n thỏa mãn $(1) \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}t-5\sqrt{2}\right)^2-9\left(t^2-4t+5\right)\ge 0 \Leftrightarrow t^2+4t-5\le 0 \Leftrightarrow t\in[-5;1]$.

+) Xét hàm số $f(t)=2t^3+6t^2+1$ trên đoạn $[-5;1]$.

$f'(t)=6t^2+12t$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-5;1] \\ t=-2\in[-5;1] \end{array}\right.$.

Ta có $f(-5)=-99$, $f(-2)=9$, $f(0)=1$, $f(1)=9$.

Suy ra $\min\limits_{[-5;1]} f(t)=-99$ khi $t=-5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f\left(\dfrac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng -99.

Câu 17. Cho x, $y>0$ thỏa mãn $x+y=\dfrac{3}{2}$ và biểu thức $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính x^2+y^2.

A. $\dfrac{25}{16}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{2313}{1156}$. **D.** $\dfrac{153}{100}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}=\frac{4^2}{4x}+\frac{1^2}{4y}\geq\frac{(4+1)^2}{4x+4y}=\frac{25}{4.\frac{3}{2}}=\frac{25}{6}.$$

Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{4y}\Leftrightarrow x=4y$ mà $x+y=\dfrac{3}{2}$ nên $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

Cách 2:

Ta có $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}=\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{25}{9}x\right)+\left(\dfrac{1}{4y}+\dfrac{25}{9}y\right)-\dfrac{25}{9}(x+y)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{4}{x}+\frac{25}{9}x\geq2\sqrt{\frac{4}{x}.\frac{25x}{9}}=\frac{20}{3};\ \frac{1}{4y}+\frac{25}{9}y\geq2\sqrt{\frac{1}{4y}.\frac{25y}{9}}=\frac{5}{3}\Rightarrow P\geq\frac{20}{3}+\frac{5}{3}-\frac{25}{9}.\frac{3}{2}=\frac{25}{6}.$$

Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{4}{x}=\dfrac{25}{9}x\\ \dfrac{1}{4y}=\dfrac{25}{9}y\end{cases}$ mà $\begin{cases}x>0;y>0\\ x+y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{25}{6}$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\ y=\dfrac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{153}{100}$.

Cách 3:

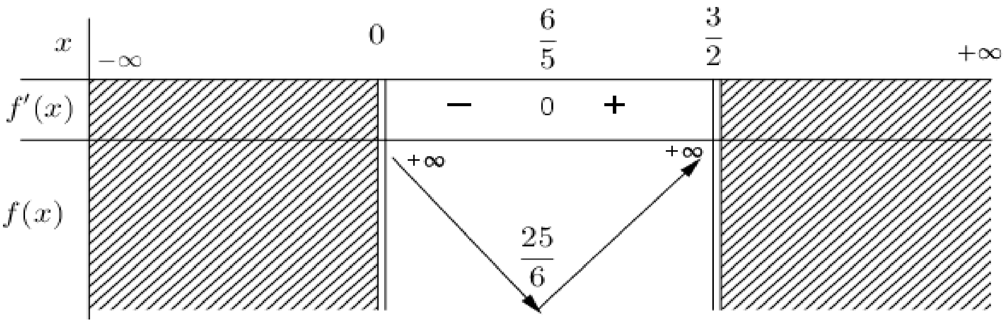
Do $x>0$ và $x+y=\dfrac{3}{2}$ nên $x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{6-4x}$ trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{(6-4x)^2}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(6-4x)^2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6-4x=x\\ 6-4x=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{6}{5}\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\\ x=2\notin\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên



Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$; $f\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{25}{6}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\min\limits_{\left(0;\frac{3}{2}\right)} f(x)=f\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{25}{6}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{6}$ khi $\begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{3}{10}\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{153}{100}$.

Câu 18. Cho $0\le x,\ y\le 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y}=\frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{383}{16}$. **B.** $\frac{136}{3}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{391}{16}$.

Lời giải

Chọn D

+) $2017^{1-x-y}=\frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019} \Leftrightarrow \left((1-y)^2+2018\right).2017^{1-y}=\left(x^2+2018\right).2017^x$ (1).

+) Xét hàm số $f(t)=\left(t^2+2018\right).2017^t$, $t\ge 0$, ta có:

$f'(t)=2017^t\left(t^2\ln 2017+2t+2018.\ln 2017\right)\ge 0,\ \forall t\ge 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Từ đó ta có (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)\Leftrightarrow 1-y=x\Leftrightarrow y=1-x$.

+) Xét biểu thức: $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$

$=\left(4x^2+3(1-x)\right)\left(4(1-x)^2+3x\right)+25x(1-x)=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$.

+) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $g(x)=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$ trên $[0;1]$.

Ta có: $g'(x)=64x^3-96x^2+36x-2$. Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\in[0;1] \\ x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\in[0;1] \\ x=\frac{1}{2}\in[0;1]\end{array}\right.$.

Ta có $g\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}$; $g\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}$; $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{2}$; $g(0)=12$; $g(1)=12$.

Khi đó $M=\frac{25}{2}$; $m=\frac{191}{16}\Rightarrow M+m=\frac{391}{16}$.

Cách khác: đặt $t=xy$ với $0\le t\le\frac{1}{4}$ thì $S=16t^2-2t+12$. Khảo sát hàm số $y=16t^2-2t+12$ trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ để tìm max, min.

Câu 19. Biết đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ tiếp xúc với parabol $y=ax^2+b$ tại điểm có hoành độ $x\in(0;2)$. Giá trị lớn nhất của $S=a+b$ là.

A. $S_{\max}=-1$. **B.** $S_{\max}=0$. **C.** $S_{\max}=1$. **D.** $S_{\max}=-3$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ tiếp xúc với parabol $y=ax^2+b$ tại điểm có hoành độ $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x+2=ax^2+b & (1)\\ 3x^2-3=2ax & (2)\end{cases}$ có nghiệm $x\in(0;2)$.

Vì $x\in(0;2)$ nên từ (2) suy ra: $2a=\frac{3x^2-3}{x}$ thay vào (1) ta được: $2b=-x^3-3x+4$.

Suy ra: $2S=2a+2b=-x^3-\frac{3}{x}+4$.

N.C.Đ

Xét $f(x)=-x^3-\frac{3}{x}+4$ trên khoảng $(0;2)$.

Ta có: $f'(x)=-3x^2+\frac{3}{x^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+\frac{3}{x^2}=0\Leftrightarrow x^4=1\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$

Dựa vào BBT, ta có GTLN của $2S=0$ nên GTLN của $S=0$.

Vậy đáp án **B.**

Câu 20. Hàm số $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+...+(x-2019)^2$ $(x\in\mathbb{R})$ đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 2019. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + \ldots + 2(x-2019) = 2.\left[2019x - (1+2+\ldots+2019)\right]$

$= 2\left[2019x - \dfrac{2019.2020}{2}\right] = 2019(2x-2020)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019(2x-2020) = 0 \Leftrightarrow x = 1010$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		1010		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1010$.

Cách 2:

Ta có $f(x) = 2019x^2 - 2(1+2+3+.....+2019)x + (1^2+2^2+.....+2019^2)$

$= 2019x^2 - 2.\dfrac{2019}{2}(1+2019)x + (1^2+2^2+.....+2019^2)$

$= 2019(x^2 - 2020.x + 1010^2) + (1^2+2^2+.....+2019^2 - 2019.1010^2)$

$= 2019(x-1010)^2 + (1^2+2^2+.....+2019^2 - 2019.1010^2)$

$\geq 1^2+2^2+.....+2019^2 - 2019.1010^2, \forall x$.

Do đó $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 1010$.

Câu 21. Hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + ax + b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + ax + b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \leq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{a^2}{4}.$$

Khi đó: $S = a + b \geq a + \dfrac{a^2}{4} = \left(1 + \dfrac{a}{2}\right)^2 - 1 \geq -1, \forall a$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b = \dfrac{a^2}{4} \\ 1 + \dfrac{a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Vậy $\min S = -1$, khi $a = -2$, $b = 1$.

Câu 22. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 7$. **B.** $P = 3$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = -7$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: phương pháp đại số.

Ta có: $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+c^2=9$.

Áp dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức BCS, ta có kết quả sau:

$$|2a+b-2c+7|=|2(a-1)+(b-2)-2c+11|\le|2(a-1)+(b-2)-2c|+11$$

$$\overset{BCS}{\le}\sqrt{\left[(a-1)^2+(b-2)^2+c^2\right]\left[2^2+1^2+(-2)^2\right]}+11=20.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}2(a-1)+(b-2)-2c>0\\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{1}=\dfrac{c}{-2}\\ (a-1)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=3\\ c=-2\end{cases}$

Khi đó: $P=a+2b+3c=3+2.3+3.(-2)=3.$

Cách 2: phương pháp hình học.

Trong không gian $Oxyz$, gọi mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$. Khi đó:

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y=4.$$

và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+7=0$.

Gọi $M(a;b;c)$, ta có: $d(M;(P))=\dfrac{|2a+b-2c+7|}{3}$.

Vì $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4 \Rightarrow M\in(S)$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm $M\in(S)$ sao cho $d(M;(P))$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc $(P) \Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-2t\end{cases}$.

Điểm M cần tìm chính là 1 trong 2 giao điểm của Δ với $(S): M_1(3;3;-2), M_2(-1;1;2)$.

Ta có: $d(M_1;(P))=\dfrac{20}{3}>d(M_2;(P))=\dfrac{2}{3} \Rightarrow Max\,d(M;(P))=\dfrac{20}{3} \Leftrightarrow M\equiv M_1$.

Vậy $P=a+2b+3c=3+2.3+3.(-2)=3.$

Phân tích: *Khi quan sát 2 cách giải, đối với giáo viên ta sẽ dễ chọn Cách 1 vì ngắn gọn và tiết kiệm thời gian. Tuy nhiên học sinh không nhiều em đã từng được tiếp cận bất đẳng thức BCS. Đối với Cách 2, về mặt trình bày có thể dài hơi, nhiều tính toán hơn nhưng đó chỉ là những bước tính toán khá cơ bản, một học sinh khá nếu nhận ra ý đồ tác giả thì việc giải bài toán cũng không mất quá nhiều thời gian. Bài toán sẽ dễ hơn nếu đề bài chỉ yêu cầu tìm Min hoặc Max của biểu thức* $|2a+b-2c+7|$.

Câu 23. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a+4b-6c=10$ và $a+c=2$. Tính giá trị biểu thức $P=3a+2b+c$ khi $Q=a^2+b^2+c^2-14a-8b+18c$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 10. **B.** -10 . **C.** 12. **D.** -12 .

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{24}$. Khi đó:

$$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=10.$$

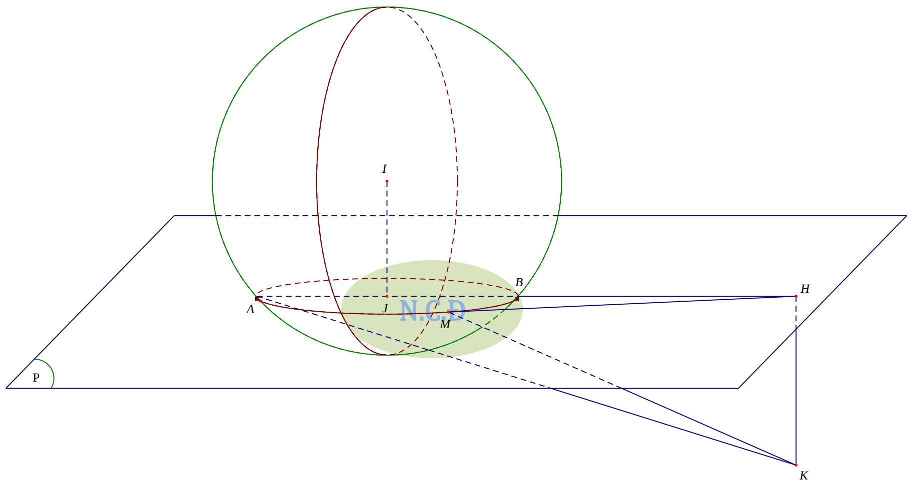
Gọi (P) là mặt phẳng có phương trình $x+z=2$ và điểm $K(7;4;-9)$.

Với $M(a;b;c)$. Theo giả thiết ta có: $M\in(S)$ và $M\in(P)\Rightarrow M\in(S)\cap(P)$.

Hơn nữa:

$$Q=a^2+b^2+c^2-14a-8b+18c=(a-7)^2+(b-4)^2+(c+9)^2-146=KM^2-146.$$

Bài toán trở thành: Tìm M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) sao cho KM lớn nhất.



(P) có VTPT $\vec{n}=(1;0;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua K và vuông góc $(P)\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=7+t\\y=4\\z=-9+t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu của K lên mặt phẳng $(P)\Rightarrow H=\Delta\cap(P)\Rightarrow H(9;4;-7)$.

Ta có: $KM^2=KH^2+HM^2$, mà KH không đổi nên KM lớn nhất khi HM lớn nhất.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc $(P)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=3+t\end{cases}$.

Gọi J là tâm đường tròn giao tuyến của (S) và $(P)\Rightarrow J$ là hình chiếu của I lên (P)

$\Rightarrow J=d\cap(P)\Rightarrow J(0;-2;2)$.

Phương trình đường thẳng $HJ:\begin{cases}x=3t\\y=-2+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Gọi A, B là các giao điểm của HJ và $(S) \Rightarrow A(-3;-4;5), B(3;0;-1)$.

Ta có: $HA = 4\sqrt{22} > HB = 2\sqrt{22}$.

Vậy $MaxHM = 4\sqrt{22} \Leftrightarrow M \equiv A(-3;-4;5)$. Khi đó: $P = 3a + 2b + c = -12$.

Câu 24. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ (*).

$\Rightarrow x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Rightarrow ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -x_0^4 - 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left(x_0^4 + 1\right)^2 = \left(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0\right)^2 \le \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge \frac{\left(x_0^4 + 1\right)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2}$$ ($x_0 = 0$ không là nghiệm của phương trình (*)).

Đặt $t = x_0^2$ $(t > 0)$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{\left(t^2 + 1\right)^2}{t^3 + t^2 + t}$.

Đặt $f(t) = \frac{\left(t^2 + 1\right)^2}{t^3 + t^2 + t}$ $(t > 0)$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\left(4t^3 + 4t\right)\left(t^3 + t^2 + t\right) - \left(t^4 + 2t^2 + 1\right)\left(3t^2 + 2t + 1\right)}{\left(t^3 + t^2 + t\right)^2} = \frac{(t+1)^2(t^4 - 1)}{\left(t^3 + t^2 + t\right)^2} = \frac{(t+1)^3(t-1)\left(t^2 + 1\right)}{\left(t^3 + t^2 + t\right)^2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(t)$					|| $+\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{0+\infty} f(t) = \frac{4}{3}$ khi $t = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{4}{3}$.

Khi $a = b = c = \frac{2}{3}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}$ và phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+4x-2$ và $g(x)=-x^3+bx^2-2x+3$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+4$ và $g'(x)=-3x^2+2bx-2$.

Vì $f(x)$ và $g(x)$ có chung ít nhất một điểm cực trị nên $f'(x)=0$ và $g'(x)=0$ có chung nghiệm là t. Suy ra $\begin{cases}3t^2+2at+4=0\\-3t^2+2bt-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3t^2-4}{2t}\\b=\dfrac{3t^2+2}{2t}\end{cases}$.

Ta có $P=|a|+|b|=\left|\dfrac{-3t^2-4}{2t}\right|+\left|\dfrac{3t^2+2}{2t}\right|=\dfrac{3t^2+3}{|t|}=3\left(|t|+\dfrac{1}{|t|}\right)\geq 6$. (bất đẳng thức Cauchy)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|t|=\dfrac{1}{|t|}\Leftrightarrow t=\pm1$.

Vậy $\min P=6$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

N.C.Đ

Bài 1 : Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc$

Lời giải

Ta có: $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$

Đặt $x=ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=12$

Ta có: $a,b,c\in[1;3]\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)\geq0\Rightarrow abc-(ab+bc+ac)+a+b+c-1\geq0$

$\Rightarrow abc-x+5\geq0\Rightarrow abc\geq x-5$

Lại có: $(a-3)(b-3)(c-3)\leq0\Rightarrow abc-3(ab+bc+ca)+9(a+b+c)-27\leq0$

$\Rightarrow abc\leq 3x-27$. Do đó: $3x-27\geq abc\geq x-5\Rightarrow 2x\geq22\Rightarrow x\geq11$.

Ta có: $P=\dfrac{x^2+72}{x}-\dfrac{1}{2}abc\leq\dfrac{x^2+72}{x}-\dfrac{1}{2}(x-5)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{72}{x}+\dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{72}{x}+\dfrac{5}{2}$, $x\in[11;12]$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{72}{x^2}\leq0\ \forall x\in[11;12]$ nên $P\leq f(x)\leq f(11)=\dfrac{160}{11}$

Vậy $\max P=\dfrac{160}{11}$ khi $a=1;b=2;c=3$

Nhận xét: *Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến $a;b;c\in[1;3]$ để tìm ra miền giá trị của $x=ab+bc+ca$ và đánh giá được P thông qua biến x. Cũng từ bài toán trên phải chăng bằng việc đánh giá điều kiện ban đầu chúng ta sẽ giải quyết được một lớp các bài toán dạng này bằng cách đưa về hàm số một biến, chính vì vậy qua chuyên* *đề này tác giả muốn rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán cực trị bằng phương pháp dồn biến.*

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Lời giải

Vì $x, y, z \in [1;2]$, nên ta có

$$(x-1)(y-2)(z-2) \geq 0 \Leftrightarrow xyz + 2(2x+y+z) \geq 2(y+z)x + yz + 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1$ hoặc $y=2$ hoặc $z=2$. Do đó

$$A \leq \frac{2(xy+yz+zx)}{2x(y+z)+yz+4} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+4} = \frac{2x(y+z)+yz+4+yz+4}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1} \leq 1 + \frac{yz+4}{2(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{yz+4\sqrt{yz}+4} - \frac{2\sqrt{yz}+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Đặt $t = \sqrt{yz}$; $t \in [1;2]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + \frac{t^2+4}{(t+2)^2} - \frac{2t+4}{t+1}$ với $t \in [1;2]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t-8}{(t+2)^3} + \frac{2}{(t+1)^2} \geq \frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Suy ra $A \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$

Vậy $\max A = -\frac{7}{6}$ khi $x = 1; y = z = 2$

Bài 3: Cho các số thực không âm *a, b, c* thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2} = \sqrt{3(4a^2+b^2+9c^2)} \geq 2a+b+3c$ (1)

Mặt khác $2a+b+3c-b-c-b(a+c) = (a+c)(2-b) \geq 0$

$\Rightarrow 2a+b+3c \geq b+c+b(a+c)$ (2)

Lại có $2ab+ac+bc-b-c-b(a+c) = (b+c)(a-1) \leq 0$

$\Rightarrow 2ab+ac+bc \leq b+c+b(a+c)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta được

$$B \leq \frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{b+c+b(a+c)+8}$$

$$B \leq \frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)} + \frac{8}{b+c+b(a+c)+8}$$

Đặt $t = b+c+b(a+c) \Rightarrow 0 \leq t \leq 13$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}$ với $t \in [0;13]$

$$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{8}{(t+8)^2}=\frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2}=0\Leftrightarrow t=6$$

$$f(0)=1,\ f(6)=\frac{16}{7},\ f(13)=\frac{47}{21}$$

Từ đó suy ra $B\le f(t)\le\frac{16}{7}\Rightarrow \max B=\frac{16}{7}$ đạt được khi $a=1,b=2,c=\frac{2}{3}$

Bài 4: Cho *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $x(y+z)^2\le 2x\left(y^2+z^2\right)=2(y+z)\Leftrightarrow y+z\le\frac{2}{x}$

Do đó: $(1+y)(1+z)\le\frac{1}{4}(2+y+z)^2\le\frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2=\frac{(1+x)^2}{x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P\ge\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+y)(1+z)}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$$P\ge\frac{2x^2+1}{(1+x)^2}+\frac{4x^2}{(1+x)^3}=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

Xét hàm số: $f(x)=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$

Ta có: $f'(x)=\frac{2(5x-1)}{(1+x)^4}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

N.C.Đ

Lập bảng biến thiên ta được: $P\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{91}{108}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$. Khi $x=\frac{1}{5},y=z=5$.

Bài 5: Cho $a>b>c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]$$

Lời giải

Nhận xét: *Giả thiết đã cho chính là gợi ý của bài toán. Cách làm giảm biến số quen thuộc là đặt* $a=c+x,b=c+y\Rightarrow x>y>0$

Khi đó:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(c+x)^2+(c+y)^2+c^2-(c+x)(c+y)-(c+y)c-c(c+x)$$
$$=x^2+y^2-xy$$

Do đó ta viết lại P dưới dạng $P=\left(x^2-xy+y^2\right)\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right]$

Như vậy với cách đặt ẩn phụ này, ta đã làm giảm số biến của P thành hai biến.
Thậm chí là P là đồng bậc giữa x và y. Ta chỉ việc đặt ẩn phụ quen thuộc

Đặt $t=\frac{x}{y}>1$ ta được $P=\left(t^2-t+1\right)\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t^2}+1\right]=f(t);$

Xét hàm *f(t)* trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(t)=(2t-1)\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t^2}+1\right]+(t^2-t+1)\left[-\frac{2}{(t-1)^3}-\frac{2}{t^3}\right]$$

$$f'(t)=\frac{(2t-1)\left[t^3(t-1)+t(t-1)^3+t^3(t-1)^3\right]-2(t^2-t+1)\left[t^3+(t-1)^3\right]}{t^3(t-1)^3}$$

Cách đặt này khá phức tạp. Ta có thể đặt theo cách khác sau đây

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Rightarrow t>2$. Khi đó ta có

$$P=\left(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right)\left[\frac{xy}{(x-y)^2}+\frac{xy}{y^2}+\frac{xy}{x^2}\right]=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$P=(t-1)\left(\frac{1}{t-2}+t\right)=\frac{(t-1)^3}{t-2}=f(t)$$

Xét hàm *f(t)* trên $(2;+\infty)$ ta được: $\ln f(t)=3\ln(t-1)-\ln(t-2)$

$$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{3}{t-1}-\frac{1}{t-2}=\frac{2t-5}{(t-1)(t-2)}$$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{(2t-5)(t-1)^2}{(t-2)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta được $P=f(t)\geq f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{27}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t=\frac{5}{2}\Rightarrow x=2y\Rightarrow a=b+d=c+2d,\forall d>0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{27}{4}$

Bài 6: Cho $x,y,z>0;xyz(x+y+z)=20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x+y)(x+z)+y^2z^2$

Lời giải

Nhận xét:*Có một chú ý quan trọng của bài 6 là một phép biến đổi nhỏ*

$$(x+y)(x+z)=x^2+xy+xz+yz=x(x+y+z)+yz=\frac{20}{yz}+yz$$

Như vậy biến mới được hình thành.

Đặt $t=yz>0$ suy ra $P=\frac{20}{t}+t+t^2=f(t)$. Xét $f(t)=t^2+t+\frac{20}{t}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=2t+1-\frac{20}{t^2}=\frac{2t^3+t^2-20}{t^2}=\frac{(t-2)(2t^2+5t+10)}{t^2}=0\Leftrightarrow t=2$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(t)\geq f(2)=16$

Do đó $P\geq 16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}xyz(x+y+z)=10\\yz=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=2\\z=1\end{cases}$

Kết luận: $\min P=16\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=2\\z=1\end{cases}$

Bài 7: Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|$

Lời giải

Nhận xét:*Khi gặp bài toán trên, ta chưa thể tìm cách phá giá dấu giá trị tuyệt đối. Do vậy cứ thử quy đồng và tách tung ra xem có gì đặc biệt không. Bởi vì lưu ý rằng: khi cho* $a=b, b=c, c=a \Rightarrow P=0$. *Nên sau khi biến đổi chắc chắn sẽ chứa nhân tử* $(a-b)(b-c)(c-a)$

Do đó: $P=\left|\dfrac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{abc}\right|=\left|\dfrac{ab(a-b)-bc(a-b)+bc(a-c)-ca(a-c)}{abc}\right|$

$P=\left|\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right|$

Đến đây ta giả sử $\dfrac{1}{2}\le c\le b\le a\le 1$ để mục tiêu làm mất dấu giá trị tuyệt đối.

$$P=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Nhận xét rằng có một phép biến đổi làm giảm biến số một cách đơn giản là

Đặt: $\begin{cases} x=\dfrac{a}{c} \\ y=\dfrac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow 1\le y\le x\le 2$

Ta có: $P=\dfrac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy}=\dfrac{x-1}{x}.\left[x+1-\left(y+\dfrac{x}{y}\right)\right]=f(x;y)$

Mục tiêu viết như trên là đạo hàm theo biến y (hoặc biến x).

$f'_y(x;y)=\dfrac{x-1}{x}.\left(-1+\dfrac{x}{y^2}\right)\Rightarrow f'_y(x;y)=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{x}\in[1;x]$

N.C.Đ

Lập bảng biến thiên ta thu được

$P=f(x;y)\le f\left(x;\sqrt{x}\right)=\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)(x-1)}{x\sqrt{x}}=\dfrac{\left(t^2-t\right)(t-1)\left(t^2-1\right)}{t^3}, t=\sqrt{x}\in\left[1;\sqrt{2}\right]$

hay $P\le\dfrac{(t-1)^3(t+1)}{t^2}=g(t)$

Xét hàm $g(t)$ trên $\left(1;\sqrt{2}\right)$ ta có: $\ln g(t)=3.\ln(t-1)+\ln(t+1)-2.\ln t$

$\Rightarrow\dfrac{g'(t)}{g(t)}=\dfrac{3}{t-1}+\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{3t^2+3t+t^2-t-2t^2+2}{(t-1)(t+1)t}=\dfrac{2t^2+2t+2}{(t-1)(t+1)t}>0;\forall t\in\left(1;\sqrt{2}\right)$

Từ đó ta có $g(t)\le g\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^3\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}$.

Như vậy $P\le g(t)\le\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ t=\sqrt{x}=\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2c \\ b=c\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow(a;b;c)=\left(1;\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy $\max P=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}\Leftrightarrow(a;b;c)=\left(1;\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 8: Cho $a,b,c>0, a^2+2b^2\le a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{a}-(c-1)^2$

Lời giải

Nhận xét: *Giả thiết chỉ cho dữ liệu liên quan tới a, b dù không dự đoán được đẳng thức xảy ra nhưng ta vẫn có thể khai thác được giả thiết bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz với mục tiêu là chỉ còn biến c.*

Ta có: $\left(\frac{c}{x}.\frac{x}{b}+\frac{c}{y}.\frac{y}{a}\right)^2 \le \left(\frac{c^2}{x^2}+\frac{c^2}{y^2}\right)\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)$

Từ thiết $a^2+2b^2 \le a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{2}{a^2} \le 1$

Như vậy ta phải chọn $x^2=1, y^2=2$

Do đó ta có: $P=\frac{c}{b}+\frac{c}{a}-(c-1)^2 \le \sqrt{\left(\frac{c^2}{1}+\frac{c^2}{2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a^2}\right)}-(c-1)^2 \le c\sqrt{\frac{3}{2}}-c^2+2c-1$

$\Rightarrow P \le -c^2+\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)c-1=f(c)$

Xét hàm số *f(c)* trên $(0;+\infty)$ ta có: $f'(c)=-2c+\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow f'(c)=0 \Leftrightarrow c=1+\frac{\sqrt{6}}{4}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra: $P \le f(c) \le f\left(1+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=\left(1+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-1=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max P=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow a=\sqrt{6}, b=\frac{\sqrt{6}}{2}, c=1+\frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a,c \ge 1; b \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(b+c)}{b+2c}+\frac{c(a+b)}{b+2a}+\frac{3(a+c)^2+2b^2+8}{4(3+ac)}$$

Lời giải

N.C.Đ

Ta có $(1-a)(2-b) \ge 0 \Leftrightarrow 2-2a-b+ab \ge 0 \Leftrightarrow 2a+b \le ab+2$

$\Rightarrow \frac{1}{b+2a} \ge \frac{1}{ab+2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{b+2a} \ge \frac{c(a+b)}{ab+2}$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)}{b+2c} \ge \frac{a(b+c)}{bc+2}$

Lại có

$3(a+c)^2+2b^2+8=2\left[(a+c)^2+b^2\right]+(a+c)^2+8 \ge 4(a+c)b+4ac+8=4(ab+ac+bc+2)$

$\Rightarrow P \ge \frac{c(a+b)}{ab+2}+\frac{a(b+c)}{bc+2}+\frac{4(ab+bc+ca+2)}{4(ac+3)}$

$=\left(\frac{ac+bc}{ab+2}+1\right)+\left(\frac{ab+bc}{bc+2}+1\right)+\left(\frac{ab+bc+ca+2}{ac+3}\right)-2$

$=(ab+bc+ca+2)\left(\frac{1}{ab+2}+\frac{1}{bc+2}+\frac{1}{ac+3}\right)-2 \ge \frac{9(ab+bc+ca+3)}{ab+bc+ca+7}-2$

Xét hàm số $f(t)=\frac{9(t+2)}{t+7}-2=7-\frac{45}{t+7}$ mà $t=ab+bc+ca \ge 5 \Rightarrow P \ge 7-\frac{45}{5+7}=\frac{13}{4}$

Vậy $\min P=\frac{13}{4} \Leftrightarrow (a;b;c)=(1;2;1)$

Bài 10: Cho các số thực $x,y,z \in [0;1]$ và $z=\min\{x,y,z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}}+\frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}}+\frac{2}{xy+xz-yz}$$

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện ban đầu $x,y,z \in [0;1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó, dự đoán điểm rơi là $z=y=1; z=0$

Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu, đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có $x\in[0;1]$ suy ra $\sqrt{x}\ge x^2; \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}}=\frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}}\ge\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{\sqrt{A.B}}\ge\frac{2}{A+B}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B>0$. Vì dự đoán điểm rơi $z=y=1; z=0$ nên khả năng $x=x+z$ và $y=y+z$ là hoàn toàn có thể xảy ra.

Ta có: $\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}}\ge x^2(y+z)^2.\frac{2}{2x+z}$ và $\frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}}\ge(yz+1)^2.\frac{2}{2y+z}$

Do đó $P\ge\frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z}+\frac{2(yz+1)^2}{2y+z}+\frac{2}{xy+xz-yz}\ge\frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z}+\frac{2}{xy+xz-yz}$

Với điều kiện $x,y,z\in[0;1]$ ta luôn có

$(1-x)(1-y)(1-z)\ge 0\Leftrightarrow xy+yz+xz+1\ge xyz+x+y+z\ge x+y+z$

Suy ra $P\ge x+y+z+\frac{2}{xy+xz-yz}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchyta có

$x^2+(y+z)^2\ge 2x(y+z)\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 2(xy+xz-yz)$

Mà $x,y,z\in[0;1]\Rightarrow x+y+z\ge x^2+y^2+z^2\ge 2(xy+xz-yz)$

$\Rightarrow P\ge 2(xy+xz-yz)+\frac{2}{xy+xz-yz}\ge 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=1\\ z=0\end{cases}$

Vậy $\min P=4$ đạt được khi $x=y=1; x=0$

Bài 11: Cho các số $a,b,c\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $0\le c\le b\le a\le 1$

Ta có $P=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc\le\frac{1}{1+bc}+\frac{b}{1+bc}+\frac{c}{1+bc}+bc\le bc+\frac{1}{1+bc}+\frac{b+c}{1+bc}$

Từ giả thiết ta được $(1-b)(1-c)\ge 0\Leftrightarrow 1-bc\ge b+c\ge 0\Leftrightarrow\frac{b+c}{1+bc}\le 1$

Suy ra $A\le bc+1+\frac{1}{1+bc}$. Đặt $t=1+bc\Rightarrow 1\le t\le 2$. Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}; t\in[1;2]$

Ta có $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ge 0\forall t\in[1;2]$ suy ra *f(t)* đồng biến trên $[1;2]\Rightarrow f(t)\le f(2)=\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$

Bài 12: Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+b^2+2ab}{c^2+4(ab+bc+ca)}$

Lời giải

Áp dụng *hệ quả 1* $(a+b)^2\ge 4ab$

Ta có $P=\dfrac{a^2+b^2+2ab}{c^2+4(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{(a+b)^2}{c^2+4c(a+b)+(a+b)^2}=M$

Do $a,b,c\in[1;2]$ nên $a+b\ne 0$, chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$M=\dfrac{1}{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2+4\left(\dfrac{c}{a+b}\right)+1}=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ với $t=\dfrac{c}{a+b}$.

Với $a,b,c\in[1;2]$ và $t=\dfrac{c}{a+b}\Rightarrow t\in\left[\dfrac14;1\right]$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ trên $\left[\dfrac14;1\right]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-2(t+2)}{(t^2+4t+1)^2}<0$, $\forall t\in\left[\dfrac14;1\right]\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac14;1\right]$

$\Rightarrow f(t)\ge f(1)=\dfrac16;\forall t\in\left[\dfrac14;1\right]$ hay $P\ge\dfrac16$

Vậy $MinP=\dfrac16$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=1$ và $c=2$

Bài 13: Cho các số không âm *a, b, c* thỏa mãn $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Lời giải

Nhận xét: *từ giả thiết ta nhận thấy các biến a và b có tính chất đối xứng, do đó để giải bài toán ta sử dụng* $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$

N.C.Đ

Ta có: $P\ge\dfrac{\dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2}{(a+b+c)^2}=\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^2+2}{2\left(\dfrac{a+b}{c}+1\right)^2}$ vì $c>0$

Với hai số thực *x, y* tùy ý, ta có $x^2-xy+y^2=\dfrac14(x+y)^2+\dfrac34(x-y)^2\ge\dfrac14(x+y)^2$.

Từ giả thiết $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$ sử dụng đánh giá trên ta thu được

$c^2=c+a^3+b^3=c+(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge c+\dfrac{(a+b)^3}{4}\ge 2\sqrt{c.\dfrac{(a+b)^3}{4}}\Rightarrow 0\le\dfrac{a+b}{c}\le 1.$

Đặt $t=\dfrac{a+b}{c}\Rightarrow 0\le t\le 1$ (vì $a,b\ge 0$ và $c>0$). Khi đó $P\ge\dfrac{t^2+2}{2(t+1)^2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2}{2(t+1)^2}$ trên $[0;1]$, ta có $f'(t)=\dfrac{t-2}{(t+1)^3}<0$, $\forall t\in[0;1]$

Do đó $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]\Rightarrow f(t)\ge f(1)=\dfrac38$, $\forall t\in[0;1]$

Hay $P\ge\dfrac38$, $\forall a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $c>0$ và $a^3+b^3=c(c-1)$.

Vậy $MinP=\dfrac38$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=1;c=2$

Bài 14: Cho $x,y,z\ge 0$ thoả mãn $x+y+z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{x^3+y^3+16z^3}{(x+y+z)^3}$

Lời giải

Ta có $P=\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3+\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3+16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Áp dụng *hệ quả* 2 ta có $\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3+\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3\geq\frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3=\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)^3$

Do đó $P\geq\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)^3+16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$. Đặt $t=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow t\in[0;1)$.

Khi đó $P\geq\frac{1}{4}(1-t)^3+16t^3$. Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}(1-t)^3+16t^3$ trên $[0;1)$

Ta có $f'(t)=\frac{189t^2+6t-3}{4}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{9}\in[0;1)\\ t=-\frac{1}{7}\notin[0;1)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t)\geq f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{81},\ \forall t\in[0;1)\Rightarrow P\geq f(t)\geq\frac{16}{81}$

Vậy $MinP=\frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=y=4z$

Bài 15: Cho *x, y, z*là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}$

N.C.Đ

Lời giải

Nhận xét: *Ta chỉ cần biến đổi* $2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2=z^2+4(x+y)z+4xy$

Ta có $P=\frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2-2(x^2+y^2)-z^2}=\frac{(x+y)^2}{z^2+4(x+y)z+4xy}$

Ta có $4xy\leq(x+y)^2$.Do đó $P\geq\frac{(x+y)^2}{z^2+4(x+y)z+(x+y)^2}=\frac{\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)^2}{1+4\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)^2}$

Đặt $t=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$, vì x,y,z thuộc đoạn $[1;2]\Rightarrow t\in[1;4]$. Khi đó ta có $P\geq\frac{t^2}{1+4t+t^2}$

Xét hàm $f(t)=\frac{t^2}{1+4t+t^2}$ trên $[1;4]$

Ta có $f'(t)=\frac{4t^2+2t}{(1+4t+t^2)^2}\Rightarrow f'(t)>0,\ \forall t\in[1;4]$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;4]$.Do đó $f(t)\geq f(1)=\frac{1}{6},\ \forall t\in[1;4]$ hay $P\geq\frac{1}{6},\ \forall x,y,z\in[1;2]$

Vậy $MinP=\frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=y=1$ và $z=2$

Bài 16: Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Lời giải

Vì $c>0$ do đó ta có $P=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}+\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}}$

Đặt $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{c}\Rightarrow x,y>0$ (vì $a,b,c>0$) khi đó biểu thức P trở thành $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

Biến đổi giả thiết $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}$ ta thu được

$\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\Leftrightarrow x^2y^2=2\left(x^2+y^2\right)$

Ta có $x^2y^2=2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2\Rightarrow xy\ge x+y$

và $x^2+y^2+1=(x+y)^2-2xy+1\le(x+y)^2-2(x+y)+1=(x+y-1)^2$ (1)

Ta lại có $(x+y)^2\ge4xy\ge4(x+y)\Rightarrow x+y\ge4$ (2) (vì $x,y>0$)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+1}\le x+y-1$

Biến đổi biểu thức P, ta thu được

$P+2=\dfrac{x}{y+1}+1+\dfrac{y}{x+1}+1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=(x+y+1)\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

Từ *hệ quả 3*, ta có: $P+2\ge(x+y+1)\dfrac{4}{x+y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}\Rightarrow P\ge2-\dfrac{4}{x+y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\ge4$. Do đó $P\ge2-\dfrac{4}{t+2}+\dfrac{1}{t-1}$

Xét hàm số $f(t)=2-\dfrac{4}{t+2}+\dfrac{1}{t-1}$ trên $[4;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\dfrac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2}\ge0$, $\forall t\in[4;+\infty)$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$ (vì $t\in[4;+\infty)$)

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4;+\infty)$

$$\Rightarrow f(t)\ge f(4)=\frac{5}{3},\ \forall t\in[4;+\infty)\text{ hay } P\ge f(t)\ge\frac{5}{3}$$

Vậy $MinP=\dfrac{5}{3}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=2c$

Bài 17: Cho các số thực dương *x, y, z* thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z\ge0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{10y+z}+\dfrac{y}{x+y+z}+\dfrac{x+2y}{2x+3y}$

Lời giải

Ta có $x+2y-z\ge0\Leftrightarrow z\le x+2y\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z\le2x+3y\\10y+z\le x+12y\end{cases}$

Do đó $P=\dfrac{x}{10y+z}+\dfrac{y}{x+y+z}+\dfrac{x+2y}{2x+3y}\ge\dfrac{x}{x+12y}+\dfrac{y}{2x+3y}+\dfrac{x+2y}{2x+3y}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x}{x+12y}+\frac{x+3y}{2x+3y}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12}+\frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}\Rightarrow t>0$. Khi đó $\Rightarrow P\ge \frac{t}{t+12}+\frac{t+3}{2t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{t+12}+\frac{t+3}{2t+3}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{12t}{(t+12)^2}-\frac{3}{(2t+3)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow (t+12)^2=4(2t+3)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\in(0;+\infty)\\ t=-\frac{18}{5}\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge f(2)=\frac{6}{7}$, $\forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra $P\ge\frac{6}{7}$.

Vậy $MinP=\frac{6}{7}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=2y, z=4y$.

Nhận xét *ta có thể coi P là hàm của z và x, y là tham số và xét hàm P(z) trên* $(0;x+2y]$

Bài 18: Cho các số thực dương *a, b, c* thay đổi thỏa mãn điều kiện $a\ge b, a\ge c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{5(a+b+c)}+\frac{b}{5a-2c}+\frac{c}{5a-2b}$

Lời giải

Vì $a>0$ do đó $P=\frac{1}{5\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)}+\frac{\frac{b}{a}}{5-2.\frac{c}{a}}+\frac{\frac{c}{a}}{5-2.\frac{b}{a}}$

Đặt $\begin{cases} x=\frac{b}{a}\\ y=\frac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow x,y\in(0;1]$ vì $a,b,c>0$ và $a\ge b, a\ge c$.

Khi đó biểu thức P được viết lại như sau: $P=\frac{1}{5(1+x+y)}+\frac{x}{5-2y}+\frac{y}{5-2x}$

$$\Rightarrow 2P-2=\frac{2}{5(1+x+y)}+(2x+2y-5)\left(\frac{1}{5-2y}+\frac{1}{5-2x}\right)$$

Ta có $\frac{1}{5-2x}+\frac{1}{5-2y}\ge\frac{4}{10-2x-2y}$ và $2x+2y-5<0, \forall x,y\in(0;1]$

Do đó $2P-2\le\frac{2}{5(1+x+y)}+(2x+2y-5)\frac{4}{10-2x-2y}$

hay $P\le\frac{2}{5(1+x+y)}+\frac{5}{5-x-y}-1$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\in(0;2]$ vì $x,y\in(0;1]$.

Khi đó ta có $P\le\frac{2}{5(t+1)}+\frac{5}{5-t}-1$

Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{5(t+1)}+\frac{5}{5-t}-1$ trên $(0;2]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{25(t+1)^2-(t-5)^2}{5(t+1)^2(t-5)^2}=\dfrac{24t^2+60t}{5(t+1)^2(t-5)^2}>0, \forall t\in(0;2]$

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;2] \Rightarrow f(t)\le f(2)=\dfrac{11}{15}, \forall t\in(0;2]$

hay $P\le\dfrac{11}{15}$, với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a\ge b, a\ge c$.

Vậy $MaxP=\dfrac{11}{15}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a=b=c$

Bài 19: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $0<x<y<z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^3z}{y^2(xz+y^2)}+\frac{y^4}{z^2(xz+y^2)}+\frac{z^3+15x^3}{x^2z}$$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}+\dfrac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}+\left(\dfrac{z}{x}\right)^2+\dfrac{15}{\frac{z}{x}}$. Đặt $a=\dfrac{x}{y};b=\dfrac{y}{z};c=\dfrac{z}{x}\Rightarrow\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\\c>1\end{cases}$

Do đó: $P=\dfrac{a^3}{a+b}+\dfrac{b^3}{a+b}+c^2+\dfrac{15}{c}$

Áp dụng *hệ quả2*, ta có $P\ge\dfrac{ab(a+b)}{a+b}+c^2+\dfrac{15}{c}=c^2+\dfrac{16}{c}$

N.C.Đ

Xét hàm số $f(c)=c^2+\dfrac{16}{c}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có $f'(c)=2c-\dfrac{16}{c^2}\Rightarrow f'(c)=0\Leftrightarrow c=2$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(c)\ge f(2)=12, \forall c\in(1;+\infty)$

Vậy $MinP=12$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases}a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\c=2\end{cases}$ hay $2x=y\sqrt{2}=z$

Bài 20: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$

Lời giải

Đặt $a=x.c;b=y.c;(x,y\ge1)$

Thay $x=1$ vào giả thiết ta có: $\sqrt{b-c}=\sqrt{b}\Rightarrow c=0$ (không thỏa mãn giả thiết)

Tương tự $y=1$ cũng không thỏa mãn .

$\Rightarrow x>1; y>1$ thay vào giả thiết ta có:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y-2+2\sqrt{(x-1)(y-1)}=xy$

$\Leftrightarrow x-x-y+1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(y-1)}=1\Leftrightarrow xy=x+y\ge2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\ge4$

Mặt khác

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{xy+x}+\frac{y^2}{xy+y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{(x+y)^2-2xy}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

Hay $P \ge \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy} = \frac{(xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 3}{3\left[(xy)^2 - 2xy\right]}$

Đặt $t = xy; t \ge 4$, khi đó ta có $P \ge \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)}$ trên $[4;+\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{3(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{3(t^2 - 2t)^2} > 0, \forall t \ge 4$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[4;+\infty)$. Do đó: $\min\limits_{[4;+\infty)} f(t) = f(4) = \frac{41}{24}$

Vậy $\min P = \frac{41}{24}$ khi $x = y = 2$ hay $a = b = 2c$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \ge b \ge c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab + bc + ca}}{abc(a+b+c)}$

Lời giải

Đặt $a = x.b; c = y.b \Rightarrow 0 < y \le 1 \le x$

Khi đó $T = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x + y + xy}}{xy(x+y+1)} \ge \frac{(x+y)^2\sqrt{x+y+xy}}{2xy(x+y+1)}$

Đặt $S = x + y; P = xy$ vì $0 < y \le 1 \le x \Rightarrow \begin{cases} S > 1 \\ (x-1)(y-1) \le 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \le S - 1$

Đặt $f(P) = \frac{S^4(S+P)}{4P^2(S+1)^2}$ ta có $f'(P) = -\frac{S^4(2S+P)}{4P^3(S+1)^2} < 0, \forall P \in (0; S-1]$

Do đó $f(P)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; S-1]$

$\Rightarrow f(P) \ge f(S-1) = \frac{S^4(2S-1)}{4(S^2-1)^2}, \forall P \in (0; S-1]$. Xét hàm số $g(S) = \frac{S^4(2S-1)}{4(S^2-1)^2}$ với $S > 1$

Ta có $g'(S) = \frac{(S-2)(S^2 + 2S - 1)S^3}{2(S^2-1)^3} \Rightarrow g'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 2$ (vì $S > 1$).

Từ bảng biến thiên suy ra $g(S) \ge g(2) = \frac{4}{3}, \forall S \in (1;+\infty)$

Do đó ta có $T \ge \sqrt{f(P)} \ge \sqrt{g(S)} \ge \sqrt{g(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $MinT = \frac{2}{\sqrt{3}}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ hay $a = b = c$

Bài 22: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$

Lời giải

Nhận xét: *Bài 22 khi ta thay giả thiết* $x^2+y^2+z^2=1$ *vào biểu thức P thì P là một biểu thức đồng bậc. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng các biến đổi đại số thì ta vẫn chưa làm giảm số biến của biểu thức. Ta cần sử dụng các hệ quả để đánh giá biểu thức*

Ta có $\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}=\frac{xy}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)}+\frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$

$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le\frac{xy}{2\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}}+\frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}$

$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+y^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{2yz}+\frac{y^2}{2xy}\right)$

$\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)$

Ta lại có $x^3y^3+y^3z^3\ge\frac{1}{4}(xy+yz)^3\Rightarrow\frac{x^3y^3+y^3z^3}{x^3z^3}\ge\frac{1}{4}.\frac{(xy+yz)^3}{x^3z^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3$

Vậy $P\le\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{96}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3$. Đặt $t=\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\Rightarrow t>0$ (vì $x,y,z>0$)

Khi đó $P\le\frac{1}{4}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{96}t^3$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}t-\frac{1}{96}t^3$ trên $(0;+\infty)$ NCĐ

Ta có $f'(t)=\frac{1}{8}-\frac{1}{32}t^2\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$ (vì $t>0$)

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t)\le f(2)=\frac{5}{12},\forall t\in(0;+\infty)$ hay $P\le f(t)\le\frac{5}{12}$

Vậy $MaxP=\frac{5}{12}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 23: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{2z^2}{y^2+z^2}-\frac{3z}{2x+z}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$\frac{x}{2}+2=\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\frac{z}{x}\ge2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4.\left(\frac{y}{z}\right)^4}+\frac{z}{x}=2\left(\frac{x}{z}\right)^2+\frac{z}{x}\Rightarrow\frac{x}{z}+2\ge2\left(\frac{x}{z}\right)^2+\frac{z}{x}$

Đặt $t=\frac{x}{z}\Rightarrow t>0$ (vì $x,z>0$).

Do đó $t+2\ge2t^2+\frac{1}{t}\Leftrightarrow2t^3-t^2-2t+1\le0\Leftrightarrow(t-1)(t+1)(2t-1)\le0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le t\le1$

Ta có $P=\frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{2}{\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}-\frac{3}{2\frac{x}{z}+1}$

Nhận xét: $\frac{x}{y}.\frac{y}{z}=\frac{x}{z}$ vì $\frac{x}{z}\le 1\Rightarrow \frac{x}{y}.\frac{y}{z}\le 1$. Mặt khác $x,y,z>0\Rightarrow \frac{x}{y},\frac{y}{z}>0$

Do đó $\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}\le \frac{2}{1+\frac{x}{y}.\frac{y}{z}}=\frac{2}{1+\frac{x}{z}}$

Vậy $P\le \frac{4}{1+\frac{x}{z}}-\frac{3}{2\frac{x}{z}+1}=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{2t+1}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{2t+1}$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $f'(t)=\frac{-10t^2-4t+2}{(t+1)^2(2t+1)^2}<0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow f(t)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6},\forall t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Hay $P\le \frac{7}{6}$ với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+2$

Vậy $MaxP=\frac{7}{6}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\begin{cases} z=2x \\ y=x\sqrt{2} \end{cases}$

N.C.Đ