



CHỦ ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ THEO CÔNG THỨC

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

- A. -4. B. -2. C. -1. D. -3.

Câu 2. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 2. C. -2. D. 1

Câu 3. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

- A. $\frac{17}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. **N.C.Đ** C. 2. D. 6.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

- A. $x = -\frac{5}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $x = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

- A. 1. B. -4. C. 0. D. 4.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1.

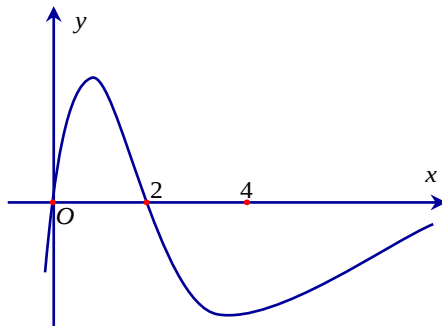
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.



Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



- A. $m = f(4), M = f(2)$. B. $m = f(1), M = f(2)$
C. $m = f(4), M = f(1)$. D. $m = f(0), M = f(2)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 210. B. -195. C. 105. D. 300.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

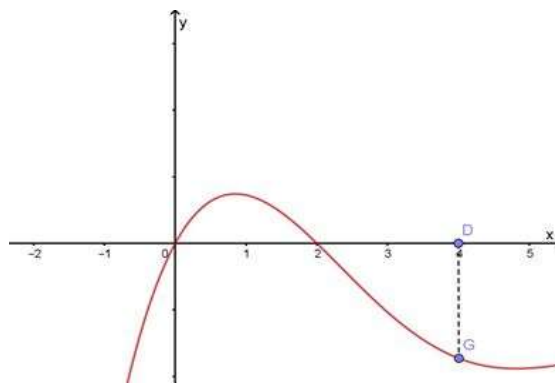
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

- A. 4. B. 36. C. 140. D. 0.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ. Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$.
C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.



x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$+\infty \searrow -3 \nearrow 5 \searrow -\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 26. B. 13. C. 14. D. 27.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$ bằng

- A. $-\frac{31}{4}$. B. -8. C. $-\frac{23}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

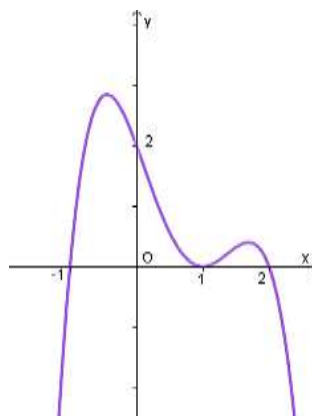
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. $f(-1) - \frac{5}{3}$. B. $f(1) - \frac{1}{3}$. C. $f(2) - \frac{5}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.



Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

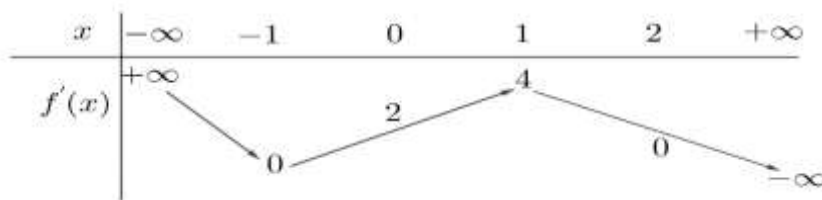
A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

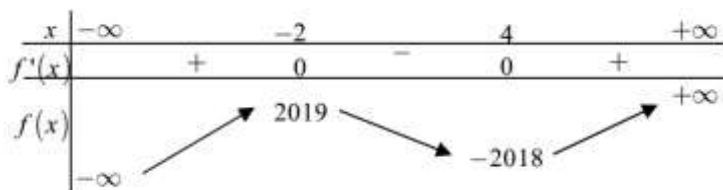
A. 4.

B. -28.

C. -3.

D. 33.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

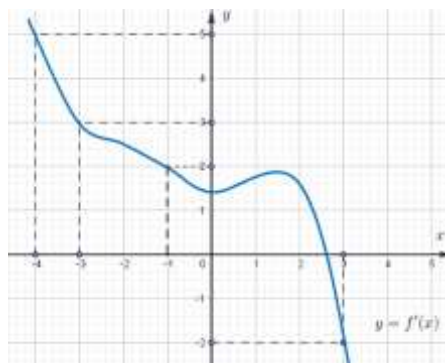
A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

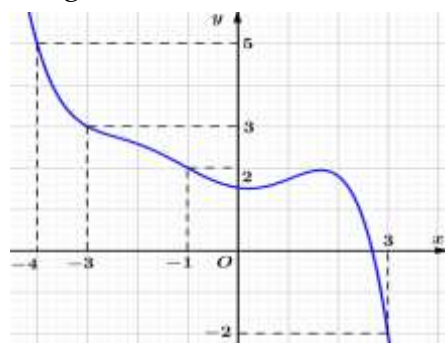
D. 2021.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



- A. $x_0 = -4$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 3$. D. $x_0 = -3$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



- A. $x_0 = -1$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = -4$. D. $x_0 = -3$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

- A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2017)$. B. $(2017; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2017; 0)$.

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

A. -4.

B. -2.

C. -1.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên $[2;3]$.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 2 \Rightarrow \max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$ (không thỏa).

Với $m \neq -2$, ta có $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[2;3]} f(x) = f(2); \min_{[2;3]} f(x) = f(3) \\ \max_{[2;3]} f(x) = f(3); \min_{[2;3]} f(x) = f(2) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = |f(3) - f(2)| = \left| \frac{6+m}{2} - (4+m) \right| = \left| \frac{2+m}{2} \right|.$$

$$\text{Theo giả thiết } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Nhận xét: đề bài cho thêm dấu giá trị tuyệt đối ở trong biểu thức

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \text{ là không cần thiết.}$$

Câu 2. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để $Aa = 12$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 1

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt: } u(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 3$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } u(0) = m; u(1) = m - 2; u(2) = m + 2$$

$$\text{Suy ra: } \max_{[0;2]} u(x) = m + 2; \min_{[0;2]} u(x) = m - 2 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max \{|m+2|; |m-2|\}.$$

$$\text{TH1: } (m-2) \cdot (m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow a = \min_{[0;2]} y = 0 \text{ (loại)}$$

(vì ko thỏa mãn giả thiết $Aa = 12$)



$$\text{TH 2: } m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = m-2; A = \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = m+2.$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m+2)(m-2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(TM) \\ m = -4(koTM) \end{cases}$$

$$\text{TH 3: } m+2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Min}} y = -(m+2); \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = -(m-2).$$

$$\text{Từ giả thiết: } Aa = 12 \Rightarrow (m+2)(m-2) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(koTM) \\ m = -4(TM) \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp suy ra: $S = \{-4; 4\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng: $(-4) + 4 = 0$.

Câu 3. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng của các phần tử trong T .

A. $\frac{17}{5}$.

B. $\frac{16}{5}$.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$.

Điều kiện $x \neq -m^2$.

$$y = \frac{mx+1}{x+m^2} \Rightarrow y' = \frac{m^3-1}{(x+m^2)^2}.$$

- Nếu $m=1$ thì $y = \frac{x+1}{x+1}$. Khi đó $\max_{[2;3]} y = 1$, suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

- Nếu $m^3-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' > 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3m+1}{3+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m > 1$, ta có $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m^3-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $y' < 0$. Suy ra hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m^2}$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$.

$$\text{Khi đó } \max_{[2;3]} y = y(2) = \frac{2m+1}{2+m^2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5m^2 - 12m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m < 1$, ta có $m = \frac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $T = \left\{3; \frac{2}{5}\right\}$. Do đó tổng các phần tử của T là $3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.



Câu 4. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

A. $x = -\frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \text{ (đều là các nghiệm đơn)} \\ x = 1 \end{cases}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ CĐ $\searrow$ CT $\nearrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc } \left[-2; -\frac{5}{4}\right].$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A. 1.

B. -4.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Để GTNN của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 1$ hoặc

$$\max_{[-1;1]} f(x) = -1.$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = 2 + m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -2 + m$.

Trường hợp 1: $\min_{[-1;1]} f(x) = 1 \Leftrightarrow -2 + m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Trường hợp 2: $\max_{[-1;1]} f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 + m = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng 14.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1-m^2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

N.C.Đ

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$.

Suy ra $\min_{[2;3]} y = y(3) = \frac{3+m^2}{3-1} = 14 \Leftrightarrow m = \pm 5$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m .

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$.

Hàm số đã cho xác định trên $[0; 4]$ khi $m \notin [0; 4]$ (*).

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} = \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}{(x-m)^2} > 0$ với $\forall x \in [0; 4]$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$ nên $\max_{[0;4]} y = y(4) = \frac{2-m^2}{4-m}$.

$\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.



Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = -3$. Do đó có một giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$.

B. $d - 16a$.

C. $d + 2a$.

D. $d + 8a$.

Lời giải

Tác giả: Đinh Thị Thúy Nhung; Fb: Thúy Nhung Đinh

Chọn B

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có

hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

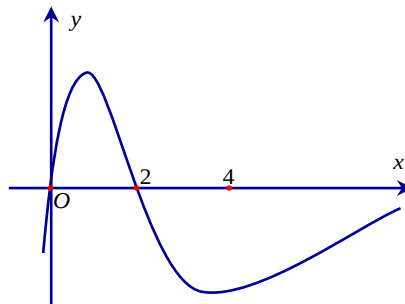
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$

$\swarrow$ $f(-2)$ $\nearrow$ $\searrow$

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 9. Cho hàm số có $f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.



A. $m = f(4), M = f(2)$.

B. $m = f(1), M = f(2)$

C. $m = f(4), M = f(1)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.



x	0	2	4	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$	

Vậy giá trị lớn nhất $M = f(2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) - f(1) > 0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ nên $f(2) > f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) > 0$.

Theo giả thuyết: $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(1) + f(2) - f(3) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $m = f(4)$.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210.

B. -195.

C. 105.

D. 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$

với $f(0) = m - 20$; $f(2) = m + 6$.

Xét hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$.

+ Trường hợp 1: $m - 20 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 20$. Ta có



$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 20$ suy ra không có giá trị m .

+ Trường hợp 2: $m+6 \geq 20-m \Leftrightarrow m \geq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = m+6 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 14$. Kết hợp $m \geq 7$ suy ra $7 \leq m \leq 14$.

Vì m nguyên nên $m \in \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

+ Trường hợp 3: $20-m \geq m+6 \Leftrightarrow m \leq 7$. Ta có:

$\text{Max}_{[0;2]} y = 20-m \leq 20 \Leftrightarrow m \geq 0$. Kết hợp $m \leq 7$ suy ra $0 \leq m \leq 7$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $S = \{0; 1; 2; \dots; 14\}$. Tổng các phần tử của S bằng $\frac{(14+0) \cdot 15}{2} = 105$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ với $x \in [0; 2]$.

N.C.Đ

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = a; g(1) = 1 + a; g(2) = a.$$

Bảng biến thiên $g(x)$

x	0	1	2
$g'(x)$	0	0	0
$g(x)$	a	$a+1$	a

Trường hợp 1: $a \geq 0$. Khi đó $M = a+1; m = a$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow 1+a \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 1$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 2: $a+1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$. Khi đó $M = -a; m = -(a+1)$.

Ta có $M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+1) \Leftrightarrow a \leq -2$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$.

Trường hợp 3: $-1 < a < 0$. Với $\begin{cases} a \in [-3; 3] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$.



Vậy có 5 giá trị a cần tìm.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[-2; 4]$ là:

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max \{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max \{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}$.

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}$.

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

N.C.Đ

Với $m = -46$ thì $|m-20| = 66 > 50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

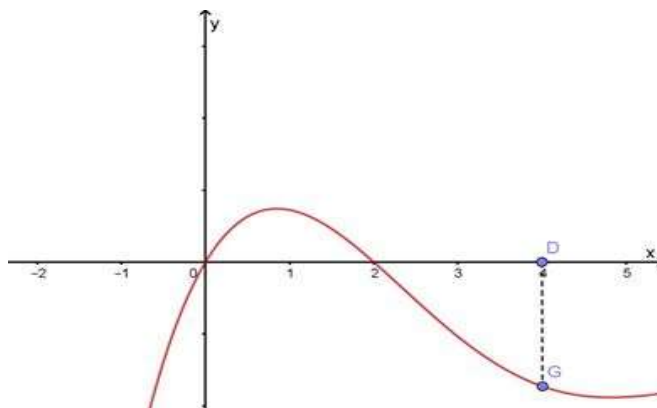
Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m-4| = 30 < 50$, $|m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.





Biết rằng $f(2) + f(4) = f(3) + f(0)$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(0)$. B. $f(4), f(2)$. C. $f(0), f(2)$. D. $f(2), f(4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

x	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(4)$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0;4]} f(x) = f(2)$.

Ta có $f(2) + f(4) = f(3) + f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(3) > 0$.

Suy ra: $f(4) < f(0)$. Do đó $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là: $f(4), f(2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Bảng biến thiên



x	1	2	3
g'		+	0
g			-

$$\begin{array}{c}
 g(1) \nearrow g(2) \searrow g(3)
 \end{array}$$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26 .

B. 13.

C. 14.

D. 27 .

Lời giải

Chọn D

Xét $u(x) = x^4 - 38x^2 + 120x + 4m$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có

$$u' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 76x + 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases} .$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{[0;2]} u(x) = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{4m, 4m + 104\} = 4m + 104 \\ \min_{[0;2]} u(x) = \min \{u(0), u(2)\} = \min \{4m, 4m + 104\} = 4m \end{cases} .$$

Cách 1:

Nếu $4m > 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 4m > 0$

Nếu $4m + 104 < 0 \Leftrightarrow m < -26$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = -4m - 104 > 0$

Nếu $4m \leq 0 \leq 4m + 104 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} f(x) = 0$. Vậy có 27 số nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

Khi đó $\min \left\{ \min_{[0;2]} y \right\} = 0 \Leftrightarrow 4m(4m + 104) \leq 0 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$. Có 27 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 2 .

B. 4 .

C. -4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b| \\ &\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2. \end{aligned}$$



Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 4$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ta tính được $u(-2) = m + 2; u\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{1}{4}; u(2) = m + 6$.

Nhận xét $m - \frac{1}{4} < m + 2 < m + 6, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $A = \max_{[-2; 2]} u = m + 6; a = \min_{[-2; 2]} u = m - \frac{1}{4}$

Nếu $a \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4} (t/m); m = -\frac{7}{4} (l).$

Nếu $A \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = (m + 6)^2 = 4 \Leftrightarrow m = -8 (t/m); m = -4 (l).$

Nếu $Aa < 0 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2; 2]} y = 0 (l).$

Vậy tổng các giá trị thực của tham số là $\frac{9}{4} - 8 = -\frac{23}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 + x)$ trên $[0; 2]$. Đặt $t = x^3 + x, x \in [0; 2]$.

Ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $t \in [0; 10]$.

Vì vậy $\max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0; 10]} f(t) = 4$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 1$.



Mặt khác $p(x) = -x^2 + 2x + m = -(x-1)^2 + m + 1 \leq m + 1$. Suy ra $\max_{x \in [0;2]} p(x) = m + 1$ khi $x = 1$.

Vậy $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 4 + m + 1 = m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Chọn hàm $y = f(x) = 4$ thỏa mãn giả thiết: hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$$\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4.$$

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m = 4 - x^2 + 2x + m$.

$$g'(x) = -2x + 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $g(0) = 4 + m$,

$$g(1) = 5 + m, g(2) = 4 + m.$$

Rõ ràng $g(0) = g(2) < g(1)$ nên $\max_{x \in [0;2]} g(x) = g(1)$. Vậy $5 + m = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 19. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1;1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{|f(-1)|; |f(1)|\} \Leftrightarrow 3 = \max\left\{\frac{3m+1}{3}; m+1\right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Khả năng 1. } \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \text{ Khi đó } 3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3.$$



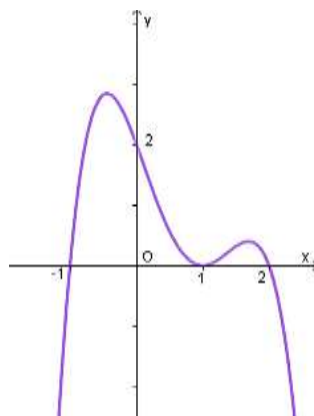
Khả năng 2. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|\}$

$\Leftrightarrow 3 = \max\{-m; m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max\{f(0); |f(1)|; |f(-1)|\}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1 .

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(-1) - \frac{5}{3}$.

B. $f(1) - \frac{1}{3}$.

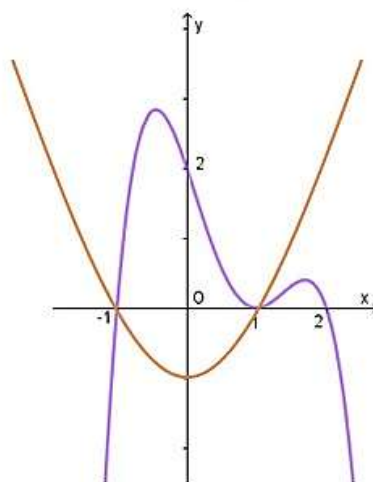
C. $f(2) - \frac{5}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 + 1 = f'(x) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 (*)$



Từ đồ thị ta có bảng xét dấu



x	-1	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$g(1)$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(1) - \frac{1}{3}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3x \cdot f(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2x f^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$$

Thay $x=1$ vào ta được $\frac{1}{f(1)} = 1 + C$, vì $f(1) = \frac{1}{3}$ nên suy ra $C = 2$.

Nên $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$. Ta có $f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

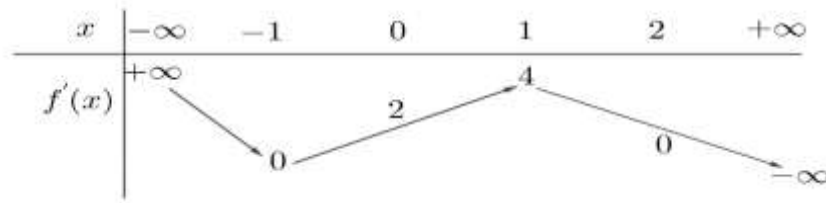
x	1	2
y'		+
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

Khi đó, $f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Suy ra $m = f(1) = \frac{1}{3}$; $M = f(2) = \frac{4}{3}$.

Suy ra $M + m = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Lời giải

Tác giả: Trần Phương; Fb: Trần Phương

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

N.C.Đ

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

$$\text{Ta có } g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}.$$

$$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = 6^3 - 3(6) = 198.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

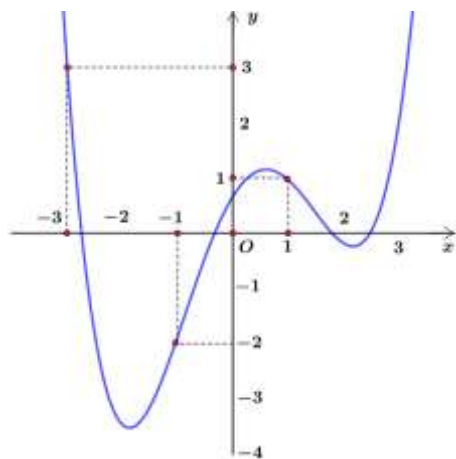
D. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm

$$\text{số } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$



Cho $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta so sánh được $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

- A.** 4. **B.** -28. **C.** -3. **D.** 33.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn A

Ta có: $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$
 $\Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) = 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$
 $\Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 = (2x^3 + 3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{cases}$

Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$

và $m = \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10$.

Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3(-2) + 10 = 4 \Rightarrow$ chọn đáp án A

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2019	-2018	$+\infty$	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

- A.** 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

**Chọn D**

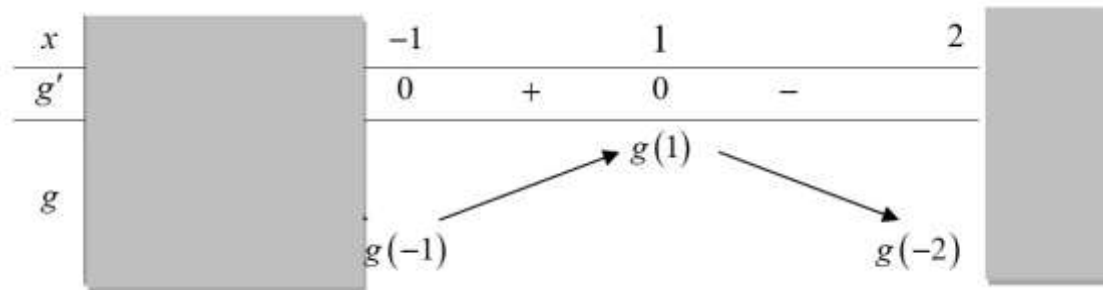
$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) - x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Mà $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^3 - 3x \in [-2; 2] \Rightarrow f'(x^3 - 3x) < 0 \Rightarrow 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0$, do đó

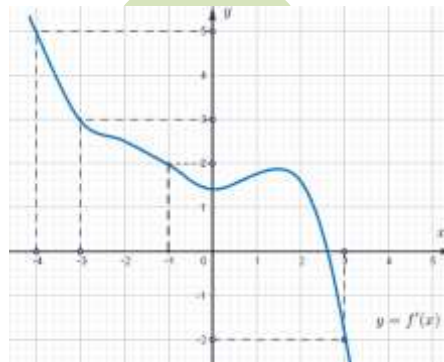
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có



Vậy $\max_{[-1;2]} y = g(1) = f(-2) + 2 = 2021$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

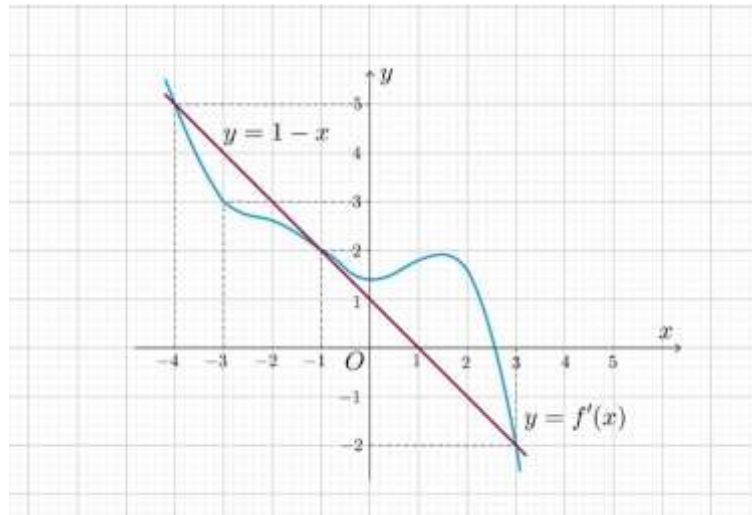
D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$$

Vẽ đường thẳng $y = 1 - x$ trên cùng hệ trục chứa đồ thị $y = f'(x)$.



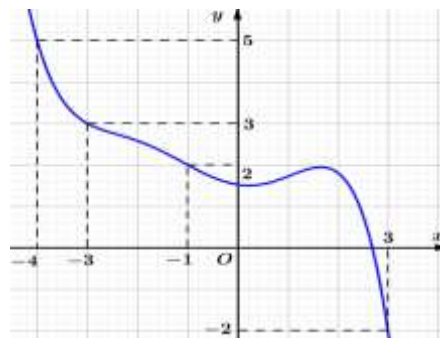
Dựa vào hình vẽ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-4	-1	3
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm.



A. $x_0 = -1$.

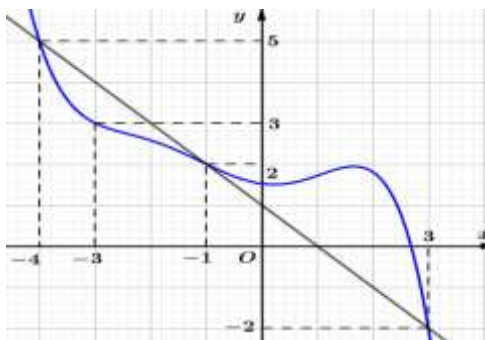
B. $x_0 = 3$.

C. $x_0 = -4$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) = 2[f'(x) - (1-x)]$

Vì trong đoạn $[-4; -1]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) < 1 - x \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-4; -1] \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-4; -1)$
 $\Rightarrow g(-4) > g(-3) > g(-1)$ (*)

Vì trong đoạn $[-1; 3]$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = 1 - x$
 $\Rightarrow f'(x) > 1 - x \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1; 3)$
 $\Rightarrow g(3) > g(-1)$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ tại $x_0 = -1$

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$m-2$	$m-4$	m



Ta thấy $\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = m$ và $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = m - 4$.

Ta có $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max\{|m|; |m - 4|\}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m| \leq |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m - 4| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m - 4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 \leq m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m| > |m - 4| \\ \max\{|m|; |m - 4|\} = |m| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > m^2 - 8m + 16 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4,$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Vậy chọn đáp án D.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x - 1) + m$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13.

B. -7.

C. -13.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(3x - 1) + m] = m + \max_{[0;1]} f(3x - 1)$.

Đặt $t = 3x - 1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(3x - 1) = \max_{[-1;2]} f(t) = 3$. Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = m + 3$.

Do đó $\max_{[0;1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow m + 3 = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2017)$.

B. $(2017; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2017; 0)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$		3	-2018	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$$g'(t) = f'(t) + 2018.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$$x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017).$$

Câu 31. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m - 13$	$+\infty$

$$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (TM)}.$$

TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$.

□ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m}.$$

$$y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m}.$$

$$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

$$\Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8 \text{ (Không TM)}.$$

□ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

$$+) x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3:$$



x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (Loại).}$$

$$+) \ x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3:$$

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$

$$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8 \text{ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của } m.$$

N.C.Đ